(١)

# الضرب الديكارتي

# لمجموعتين وتمثيله

أ/ صلاح جمال

## تمارين (١ – ١)

**أولاً: أكمل ما يأتي**

١) إذا كان (أ + ٥، ٣) = (٨، ب – ١) فإن أ = ٣ ، ب = ٤

أ + ٥ = ٨
أ = ٣

ب – ١ = ٣
ب = ٤

---

٢) إذا كان (س^٥، ص + ١٠) = (٣٢، $\sqrt{\text{٧٢٩}}$) فإن س = ٢ ، ص = ٢

س^٥ = ٣٢
س^٥ = ٢^٥
س = ٢

ص + ١ = $\sqrt{\text{٧}}$
ص + ١ = ٣
ص = ٢

---

٣) إذا كانت (س – ١، ١١) = (٨، ص + ٣) فإن $\sqrt{\text{س + ٢ص}}$ = ٥

س – ١ = ٨
س = ٩

ص + ٣ = ١١
ص = ٨

$\sqrt{\text{٩ + ٢ × ٨}}$ = $\sqrt{\text{٢٥}}$ = ٥

---

٤) إذا كانت ن (س^٢) = ٩، فإن ن (س) = ٣

ن (س^٢) = [ن (س)]^٢

ن (س) = ٣

---

٥) إذا كانت س × ص = {(٢، ٦)، (٢، ٩)، (٣، ٦)، (٣، ٩)، (٥، ٦)، (٥، ٩)}، فإن
س = ........
ص = ........

" الحل "

س = {٢، ٣، ٥}

ص = {٦، ٩}

⑥ إذا كانت س × ص = {(٣، ٢)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٣)، (٤، ٣)، (٤، ٥)، (٤، ٢)، (٥، ٢)، (٥، ٤)، (٥، ٣)}، فإن س = ......
، ص = ......

س = {٣، ٤، ٥}   ص = {٢، ٣، ٤}

---

أ/ صلاح جمال
معلم الرياضيات والإحصاء
ت: ٠١٢٨٥٢٨٢٨٢٤

**ثانيًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

① إذا كان ن (س) = ٣، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) تساوي

ⓐ ٤ ✓   ⓑ ٩   ⓒ ١٥   ⓓ ٣٦

" التوضيح "

ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص)

$$ن(ص) = \frac{ن(س × ص)}{ن(س)} = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

---

② إذا كان (٣، ٥) ∈ {٣، ٦} × {س، ٨} فإن س =

ⓐ ٨   ⓑ ٦   ⓒ ٥ ✓   ⓓ ٣

.التوضيح.

{٣، ٦} × {س، ٨} = {(٣، س)، (٣، ٨)، (٦، س)، (٦، ٨)}

⇐ س = ٥

---

③ إذا كانت النقطة (٥، ب − ٧) تقع على محور السينات فإن ب =

ⓐ ٢   ⓑ ٥   ⓒ ٧ ✓   ⓓ ١٢

التوضيح: النقطة تقع على محور السينات ⇐ المسقط الثاني = صفر

ب − ٧ = صفر ⇐ ب = ٧

إذا كانت النقطة (س - ٤ ، ٢ - س) حيث س ∈ ص تقع في الربع الثالث فإن س تساوي:

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٦

التوضيح: النقطة تقع في الربع الثالث ⟸ الإشارة (-، -)

٣ هو العدد الذي يحقق ذلك

---

ثالثاً:

(١) إذا كانت س = {٢، ٣}، ص = {٣، ٤، ٥} أوجد:

أ س × ص ومثّله بمخطط سهميّ وآخر بياني.

ب ن (س × ص)

ج ن (ص²)

د (س × ص) ∩ ص²

## "الحل"

[١] س × ص = {(٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)}

[٢] ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)
= ٢ × ٣ = ٦

[٣] ن (ص²) = (ن (ص))² = (٣)² = ٩

[٤] ص² = ص × ص = {٣، ٤، ٥} × {٣، ٤، ٥}
= {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)}

(س × ص) ∩ ص² = {(٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)}

salah Gamal

إذا كان س × ص = {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)} أوجد:
(أ) س، ص (ب) ص × س (ج) ص²

« الحل »

① س = {١} ص = {١، ٣، ٥}

② ص × س = {(١، ١)، (٣، ١)، (٥، ١)}

③ ص² = ص × ص = {(١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥)، (٣، ١)، (٣، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ١)، (٥، ٣)، (٥، ٥)}

---

إذا كان: س = {٣، ٤}، ص = {٤، ٥}، ع = {٦، ٥} فأوجد:
(أ) س × (ص ∩ ع) (ب) (س − ص) × ع (ج) (س − ص) × (ص − ع)

« الحل »

① {٣، ٤} × {٥} = {(٣، ٥)، (٤، ٥)}

② {٣} × {٦، ٥} = {(٣، ٦)، (٣، ٥)}

③ {٣} × {٤} = {(٣، ٤)}

(١١) على شبكة بيانية متعامدة لحاصل الضرب الديكارتي ح × ح عين النقط الآتية

أ (٤، ٥)، ب (٦، -٣)، جـ (-٢، ٧)، د (-١، ٦)، هـ (-٤، -٥)، م (٠، ٦)، ك (٩، ٠)

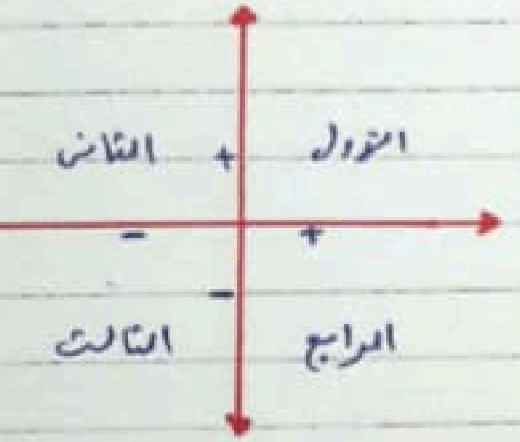
ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط.

## «الحل»

نكتفي بتحديد إشارة كل ربع :- (+ ، +) ⇐ الربع الأول

(- ، +) ⇐ الربع الثاني          (- ، -) ⇐ الربع الثالث

(+ ، -) ⇐ الربع الرابع






- أ(٤، ٥) ∈ الربع الأول
- ب(٦، -٣) ∈ الربع الرابع
- جـ(-٢، ٧) ∈ الربع الثاني
- هـ(-٤، -٥) ∈ الربع الثالث

تذكر أن (عدد ، ٠) تقع على محور السينات

(٠ ، عدد) تقع على محور الصادات

م (٠، ٦) ∈ محور الصادات ، ك (٩، ٠) ∈ محور السينات

إذا كانت س = {١، ٥، ٦}، ص = {٢، ٤، ٥} فأوجد:

أ س × ص

ب ص × س ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.

جـ ن (س × ص)

«الحل»

① س × ص = {(١، ٢)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٥، ٢)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٢)، (٦، ٤)، (٦، ٥)}

② ص × س = {(٢، ١)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ١)، (٥، ٥)، (٥، ٦)}

③ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٣ × ٣ = ٩

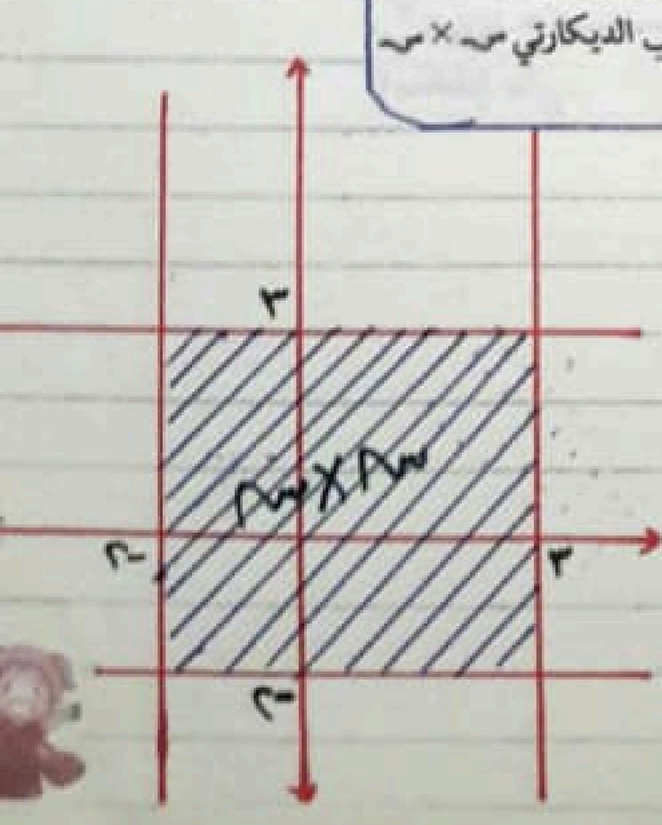
---

إذا كانت س = [-٢، ٣]، أوجد المنطقة التي تمثل س × س.

بين أي من النقاط التالية تنتمي إلى حاصل الضرب الديكارتي س × س

أ (١، ٢)، ب (٣، -١)، جـ (-١، ٤)، د (-٢، ٠)

«الحل»




أ (١، ٢) $\in$ س × س

ب (٣، -١) $\in$ س × س

جـ (-١، ٤) $\notin$ س × س

د (-٢، ٠) $\in$ س × س

(٢)

# العلاقة والدالة

أ/ صلاح جمال

## تمارين (١ – ٢)

(١) إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {١٢، ٢١، ٤٧، ٥٢}، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني (أ رقم من أرقام العدد ب)، لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

أولاً: اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

ثانياً: بين أي مما يلي صواب مع ذكر السبب:

١ ع ٥٢     ٢ ع ٢١     ٣ ع ٤٧

• الحل •

• بيان ع = {(١، ١٢)، (١، ٢١)، (٢، ١٢)، (٢، ٢١)، (٢، ٥٢)}

• ١ ع ٥٢ لا تمثل علاقة لأن ١ ليس من أرقام ٥٢

• ٢ ع ٢١ تمثل علاقة لأنه ٢ من رقم عشرات العدد ٢١

• ٣ ع ٤٧ لا تمثل علاقة لأن ٣ ليس من أرقام ٤٧

---

(٢) إذا كانت س = {١، ٢، ٤، ٦، ١٠}، وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني (أ مضاعف ب)، لكل أ، ب ∈ س، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

« الحل »

(أ مضاعف لـ ب) ⇐ (أ تقبل القسمة على ب)

بيان ع = {(١، ١)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٤)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٦)، (١٠، ١)، (١٠، ٢)، (١٠، ١٠)}

٣ إذا كانت س = {٢، ٤، ٥، ٧}، ص = {٤، ٥، ٦، ٧، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني (أ ≤ ب)، لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

«الحل»

بيان ع = {(٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٢، ٧)، (٢، ٩)،
(٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٤، ٧)، (٤، ٩)،
(٥، ٥)، (٥، ٦)، (٥، ٧)، (٥، ٩)، (٧، ٧)،
(٧، ٩)}

٤ إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: «العدد أ هو المعكوس الضربي للعدد ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بين ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

«الحل»

أ معكوساً ضربياً لـ ب ⟸ أ = مقلوب ب

بيان ع = {(١، ١)، (٢، $\frac{١}{٢}$)، (٣، $\frac{١}{٣}$)}

٥ إذا كانت س = {١، ٣، ٤، ٥}، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ + ب = ٧» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني.

«الحل»

بيان ع = {(١، ٦)، (٢، ٥)، (٣، ٤)، (٤، ٣)،
(٥، ٢)}

(٦) إذا كانت س = {-١، ٠، ١، ٢، ٣}، ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ² = ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهميٍّ وآخر بياني.

«الحل»

بيان ع = {(-١، ١)، (١، ١)، (٠، ٠)، (٢، ٤)، (٣، ٩)}.

---

(٧) إذا كانت س = {-٢، -١، ١، ٢}، ص = {$\frac{1}{8}$، $\frac{1}{2}$، ١، ٣، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ³ = ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيانَ ع ومثلها بمخطط سهميٍّ وآخر بياني.

«الحل»

بيان ع = {(١، ١)، (٢، ٨)}

---

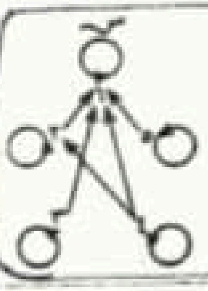
(٨) إذا كانت س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني «أ تقسم ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع.

«الحل»

أ تقسم ب ⇐ ب تقبل القسمة على أ

بيان ع = {(٢، ٦)، (٢، ٨)، (٣، ٦)، (٣، ١٥)، (٤، ٨)، (٢، ١٠)}

الشكلُ المقابلُ:
يمثل المخططُ السهميُّ للعلاقة ع المعرفة على المجموعة س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني.



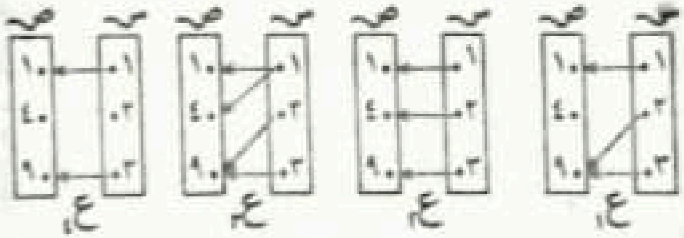
«الحل»

بيان ع = {(١،١)، (٥،١)، (٥،٥)، (٢،٢)، (٢،١)، (٤،٤)، (٤،١)، (٤،٢)، (٣،٣)، (٣،١)}

## الدالة (التطبيق)

تمارين (١ - ٣)

١ أي من العلاقاتِ التالية تمثّل دالة من س إلى ص؟ وإذا كانت العلاقةُ تمثّل دالةً، فأوجد مدى الدالة.



ع١ : تمثل دالة : مداها = {١، ٩}

ع٢ : تمثل دالة : مداها = {١، ٤، ٩}

إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٢} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني: « أ + ب < ٨ » لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص . اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟!

## « الحل »

بيان ع = {(٠ ، ١) ، (٠ ، ٣) ، (٠ ، ٥) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ،
(١ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣)}

ع : ليست دالة . لأن هناك بعض عناصر المجموعة الأولى
ظهرت كمسقط أول أكثر من مرة في بيان العلاقة

---

إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني: « أ مضاعف ب » لكل أ ، ب ∈ س . اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ولماذا؟!

## « الحل »

أ مضاعف لـ ب ⟸ أ يقبل القسمة على ب

بيان ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ،
(٤ ، ٤) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٦) ،
(١٠ ، ١) ، (١٠ ، ٢) ، (١٠ ، ١٠)}

ع : ليست دالة . لأن هناك بعض عناصر ظهرت
كمسقط أول أكثر من مرة

⑦ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٦، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني : أ + ٢ ب = عدد فردي ، لكل أ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. هل ع دالة؟ ولماذا؟

«الحل»

بيان ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٦)
، (١ ، ١١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٦)
، (٣ ، ١١) ، (١١ ، ١) ، (١١ ، ٢) ، (١١ ، ٣) ، (١١ ، ٦) ، (١١ ، ١١) }

---

# دوال كثيرات الحدود

## تمارين (١ – ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي :

① الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢ س - ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ........

«الحل»

- لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات

نعوض عن س = صفر

د(س) = ٢ × ٠ - ١ = -١

∴ النقطة (٠ ، -١) هي نقطة تقاطع مع محور الصادات

(٣)

# الدوال كثيرات الحدود

أ/ صلاح جمال

# دوال كثيرات الحدود

تمارين (١ ـ ٤)

أولاً: أكمل ما يأتي:

(١) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص=٢س-١ يمثلها بيانياً خطٌ مستقيمٌ يقطع محورَ الصادات في النقط ......

«الحل»

• لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات

نعوض عن س = صفر

د(س) = ٢ × ٠ - ١ = -١

∴ النقطة (٠، -١) هي نقطة تقاطع مع محور الصادات

(٢) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٣س + ٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة

"الحل"

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات
نعوض عن ص = صفر.

$$٠ = ٣س + ٦ \Leftarrow س = -٢$$

∴ النقطة (-٢ ، ٠) هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

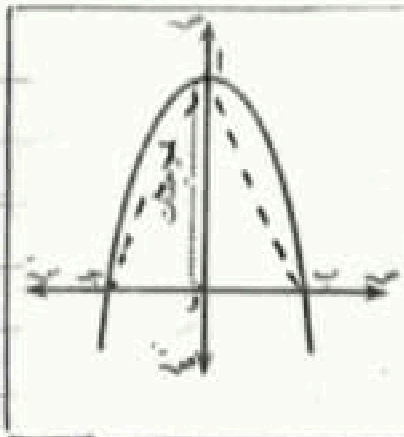
(٣) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٤ س - ٥ فإن أ تساوي ______

"الحل"

النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم

∴ تحقق الدالة س = أ ، ص = ٣

$$٣ = ٤أ - ٥ \Leftarrow ٤أ = ٨ \Leftarrow أ = ٢$$



الشكل المقابل: يمثل منحنى الدالة د حيث: د(س) = م - س²، إذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجد:

- قيمة م.
- إحداثيي ب، جـ.
- مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، جـ.

## الحل

أ ∈ لمحور الصادات ⟸ أ = (٠، ٤)

∵ أ ∈ لمنحنى الدالة ⟸ (٠، ٤) تحقق الدالة

٤ = م - (٠)² ⟸ م = ٤ ⟸ د(س) = ٤ - س²

ب تقع على محور السينات ⟸ ب = (س، ٠)

ب ∈ لمنحنى الدالة ⟸ ٠ = ٤ - س² ⟸ س² = ٤

س = ٢ أو -٢ ⟸ ب = (٢، ٠) جـ = (-٢، ٠)

م Δ أ ب جـ = ½ × ب جـ × أ و

= ½ × ٤ × ٤

= ٨ وحدة مربعة

(٤)

# النسبة وخواصها

أ/ صلاح جمال

أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

"الحل"

نفرض أن العدد = س ⟸ مربعه = $س^٢$

$\frac{٥ + س^٢}{١١ + س^٢} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ $٢٥ + ٥س^٢ = ٣٣ + ٣س^٢$

$س^٢ = ٤$ ⟸ $س = \pm ٢$

العدد هو ٢

أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

"الحل"

نفرض العدد = س ⟸ ثلاثة أمثاله = ٣س

$\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ ⟸ ١٤٧ - ٩س = ١٣٨ - ٦س

س = ٣ ⟸ العدد هو ٣

---

أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

"الحل"

نفرض العدد = س ⟸ مربعه = $س^{٢}$

$\frac{٧ + س^{٢}}{١١ + س^{٢}} = \frac{٤}{٥}$ ⟸ $٣٥ + ٥س^{٢} = ٤٤ + ٤س^{٢}$

$س^{٢} = ٩$ ⟸ س = ±٣

العدد = ٣ أو -٣

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣، **أوجد العددين؟**

## « الحل »

نفرض العددان : ٣س ، ٧س

$$\frac{٣س - ٥}{٧س - ٥} = \frac{١}{٣} \Leftarrow ٢س = ١٠$$

$$٩س - ١٥ = ٧س - ٥ \Leftarrow س = ٥$$

∴ العددان هما ١٥ ، ٣٥

---

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣؛ **أوجد العددين.**

## « الحل »

نفرض العددان : ٢س ، ٣س

$$\frac{٢س + ٧}{٣س - ١٢} = \frac{٥}{٣} \qquad س = ٩$$

$$٦س + ٢١ = ١٥س - ٦٠$$

$$٩س = ٨١$$

العددان هما :

١٨ ، ٢٤

# (٥)

# التناسب وخواصه

# التناسب المتسلسل

أ/ صلاح جمال

## تمارين (٢ – ٢)

إذا كان س، ص، ع، ل كميات متناسبة فاثبت أن:

(أ) $\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}+\text{ل}}\right)^{2} = \frac{2\text{س}^{2} - 3\text{ص}^{2}}{2\text{ع}^{2} - 3\text{ل}^{2}}$ (ب) $\sqrt[3]{\frac{5\text{س}^{3} - 3\text{ع}^{3}}{5\text{ص}^{3} - 3\text{ل}^{3}}} = \frac{\text{س}+\text{ع}}{\text{ص}+\text{ل}}$

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \text{م} \Leftarrow$ س = ص م ، ع = ل م

(أ) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}+\text{ل}}\right)^{2}$

$= \left(\frac{\text{ص م} + \text{ص}}{\text{ل م} + \text{ل}}\right)^{2}$

$= \left(\frac{\text{ص}\cancel{(\text{م}+1)}}{\text{ل}\cancel{(\text{م}+1)}}\right)^{2}$

$= \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ل}^{2}} \Rightarrow$ ①

الطرف الأيسر $= \frac{2\text{ص}^{2}\text{م}^{2} - 3\text{ص}^{2}}{2\text{ل}^{2}\text{م}^{2} - 3\text{ل}^{2}}$

$= \frac{\text{ص}^{2}\cancel{(2\text{م}^{2}-3)}}{\text{ل}^{2}\cancel{(2\text{م}^{2}-3)}} = \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ل}^{2}} \Rightarrow$ ②

∴ الطرفان متساويان

(ب) الطرف الأيمن $= \sqrt[3]{\frac{5\text{ص}^{3}\text{م}^{3} - 3\text{ل}^{3}\text{م}^{3}}{5\text{ص}^{3} - 3\text{ل}^{3}}}$

$= \sqrt[3]{\frac{\text{م}^{3}\cancel{(5\text{ص}^{3} - 3\text{ل}^{3})}}{\cancel{(5\text{ص}^{3} - 3\text{ل}^{3})}}} = \sqrt[3]{\text{م}^{3}} = \text{م}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ص م} + \text{ل م}}{\text{ص} + \text{ل}}$

$= \frac{\text{م}\cancel{(\text{ص}+\text{ل})}}{\cancel{(\text{ص}+\text{ل})}}$

$= \text{م}$

∴ الطرفان متساويان

إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فاثبت أن:

(أ) $\frac{٢\text{ص} - \text{ع}}{٣\text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

(ب) $\sqrt{٣\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢ + \text{ع}^٢} = ٢\text{س} + \text{ص}$

س = ٣م     ص = ٤م     ع = ٥م

(أ) الطرف الأيمن

$$= \frac{٢\times٤\text{م} - ٥\text{م}}{٣\times٣\text{م} - ٢\times٤\text{م} + ٥\text{م}}$$

$$= \frac{٨\text{م} - ٥\text{م}}{٩\text{م} - ٨\text{م} + ٥\text{م}}$$

$$= \frac{٣\cancel{\text{م}}}{٦\cancel{\text{م}}}$$

$= \frac{١}{٢} =$ الطرف الأيسر

#

(ب) الطرف الأيمن

$$= \sqrt{٣(٣\text{م})^٢ + ٣(٤\text{م})^٢ + (٥\text{م})^٢}$$

$$= \sqrt{٢٧\text{م}^٢ + ٤٨\text{م}^٢ + ٢٥\text{م}^٢}$$

$$= \sqrt{١٠٠\text{م}^٢}$$

$$= ١٠\text{م}$$

الطرف الأيسر

$$= ٢(٣\text{م}) + ٤\text{م}$$

$$= ٦\text{م} + ٤\text{م}$$

$$= ١٠\text{م}$$

∴ الطرفان متساويان #

⑦ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأثبت أن:

(أ) $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^2$　　(ب) $\sqrt[3]{\frac{5\text{أ}^3 - 2\text{جـ}^3}{5\text{ب}^3 - 2\text{د}^3}} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}}$

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \text{ب م}} \quad \boxed{\text{جـ} = \text{د م}}$

(أ) الطرف الأيمن $= \frac{\text{ب م} \times \text{د م}}{\text{ب د}}$

$= \frac{\cancel{\text{ب د}}\,\text{م}^2}{\cancel{\text{ب د}}} = \text{م}^2$

الطرف الأيسر $= \left(\frac{\text{ب م} - \text{د م}}{\text{ب} - \text{د}}\right)^2$

$= \left(\frac{\text{م}\cancel{(\text{ب} - \text{د})}}{\cancel{(\text{ب} - \text{د})}}\right)^2$

$= (\text{م})^2 = \text{م}^2$

∴ الطرفان متساويان #

(ب) الطرف الأيمن =

$\sqrt[3]{\frac{5\text{ب}^3\text{م}^3 - 2\text{د}^3\text{م}^3}{5\text{ب}^3 - 2\text{د}^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{\text{م}^3\cancel{(5\text{ب}^3 - 2\text{د}^3)}}{\cancel{(5\text{ب}^3 - 2\text{د}^3)}}}$

$= \sqrt[3]{\text{م}^3} = \text{م}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ب م} + \text{د م}}{\text{ب} + \text{د}}$

$= \frac{\text{م}\cancel{(\text{ب} + \text{د})}}{\cancel{(\text{ب} + \text{د})}} = \text{م}$

∴ الطرفان متساويان #

أ/ صلاح جمال
معلم الرياضيات والإحصاء
ت ٠١٢٨٥٢٨٢٨٢٤

إذا كانت: ٥أ، ٦ب، ٧جـ، ٨د كميات موجبة في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\sqrt[3]{\frac{\text{٥أ}}{\text{٨د}}} = \sqrt{\frac{\text{٥أ} + \text{٦ب}}{\text{٧جـ} + \text{٨د}}}$

(الحل)

$\frac{\text{٥أ}}{\text{٦ب}} = \frac{\text{٦ب}}{\text{٧جـ}} = \frac{\text{٧جـ}}{\text{٨د}} = \text{م}$

- $\text{٧جـ} = \text{٨د م}$
- $\text{٦ب} = \text{٨د م}^2$
- $\text{٥أ} = \text{٨د م}^3$

الطرف الأيمن $= \sqrt[3]{\frac{\text{٥أ}}{\text{٨د}}}$

$= \sqrt[3]{\frac{\cancel{\text{٨د}}\,\text{م}^3}{\cancel{\text{٨د}}}} = \sqrt[3]{\text{م}^3} = \text{م}$

الطرف الأيسر $= \sqrt{\frac{\text{٥أ} + \text{٦ب}}{\text{٧جـ} + \text{٨د}}} = \sqrt{\frac{\text{٨د م}^3 + \text{٨د م}^2}{\text{٨د م} + \text{٨د}}}$

$= \sqrt{\frac{\cancel{\text{٨د}}\,\text{م}^2\cancel{(\text{م}+١)}}{\cancel{\text{٨د}}\cancel{(\text{م}+١)}}} = \sqrt{\text{م}^2} = \text{م}$

∴ الطرفان متساويان

(٤) إذا كانت ب هي الوسط المتناسب بين أ، جـ فأثبت أن:

(أ) $\frac{أ + ب + جـ}{أ^{-1} + ب^{-1} + جـ^{-1}} = ب^2$ (ب) $\frac{2جـ^2 - 3ب^2}{2ب^2 - 3أ^2} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ^2}{ب^2}$

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م \Leftarrow$ $\boxed{ب = جـ م}$ $\boxed{أ = جـ م^2}$

(أ) الطرف الأيمن $= \frac{أ + ب + جـ}{\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{جـ}}$

$= \frac{أ + ب + جـ}{\frac{ب جـ + أ جـ + أ ب}{أ ب جـ}}$

$= (أ + ب + جـ) \times \frac{أ ب جـ}{ب جـ + أ جـ + أ ب}$

$= (جـ م^2 + جـ م + جـ) \times \frac{جـ^3 م^3}{جـ^2 م + جـ^2 م^2 + جـ^2 م^3}$

$= جـ\cancel{(م^2 + م + 1)} \times \frac{\cancel{جـ^3} م^3}{\cancel{جـ^2} م \cancel{(1 + م + م^2)}}$

$= جـ^2 م^2$

الطرف الأيسر $= ب^2$

$= جـ^2 م^2$

∴ الطرفان متساويان

(ب) الطرف الأيمن

$= \frac{2جـ^2 - 3جـ^2 م^2}{2جـ^2 م^2 - 3جـ^2 م^4}$

$= \frac{\cancel{جـ^2}\cancel{(2 - 3م^2)}}{\cancel{جـ^2} م^2 \cancel{(2 - 3م^2)}}$

$= \frac{1}{م^2}$

• الطرف الأوسط:

$= \frac{جـ}{أ} = \frac{\cancel{جـ}}{\cancel{جـ} م^2} = \frac{1}{م^2}$

• الطرف الأيسر:

$= \frac{جـ^2}{ب^2} = \frac{\cancel{جـ^2}}{\cancel{جـ^2} م^2} = \frac{1}{م^2}$

الأيمن = الأوسط = الأيسر

إذا كانت: $\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}}$ فاثبت أن كلاً من هذه النسب يساوي ٢ (ما لم تكن: س + ص = ٠)
ثم أوجد س : ص : ع

## "الحل"

بجمع حدود النسب الثلاث.

$$\frac{\text{ص} + \text{س} + \text{س} + \text{ص}}{\text{س} - \text{ع} + \text{ص} + \text{ع}} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{٢\text{س} + ٢\text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{٢(\text{س} + \text{ص})}{(\text{س} + \text{ص})} = \text{إحدى النسب} \Leftarrow ٢ = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}} = ٢ \Leftarrow \text{س} = ٢\text{ص}$$

$$\text{س} + \text{ص} = ٢\text{ع} \Leftarrow ٣\text{ص} = ٢\text{ع} \Leftarrow \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}$$

$$\text{س} : \text{ص} : \text{ع}$$

$$٢ : ١$$

$$٢ : ٣$$

$$\text{س} : \text{ص} : \text{ع}$$

$$٤ : ٢ : ٣$$

---

$$٤ : ٢ : ٣$$

إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ فاوجد قيمة س

"الحل"

بضرب حدي النسبة الثانية × (-١) والثالثة × (٥) والأولى × (٢) وجمع النسب الثلاثة

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٤ - ٣ + ٢٠} =$ احدى النسب

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٢١} =$ إحدى النسب

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٢١} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$

$\Leftarrow ٣س = ٢١ \Leftarrow س = ٧$

---

إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ فاوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

(الحل)

أ = ٥م   ب = ٧م   جـ = ٣م   $٥م + ٧م = ٢٧,٦$

$١٢م = ٢٧,٦ \Leftarrow$ م = ٢,٣   أ = ١١,٥   جـ = ٦,٩

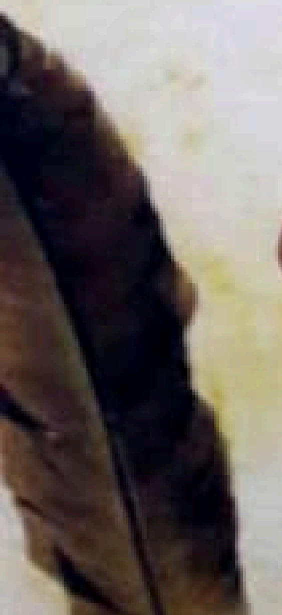
ب = ١٦,١

---

(٦)

# التغير الطردي

# والتغير العكسي

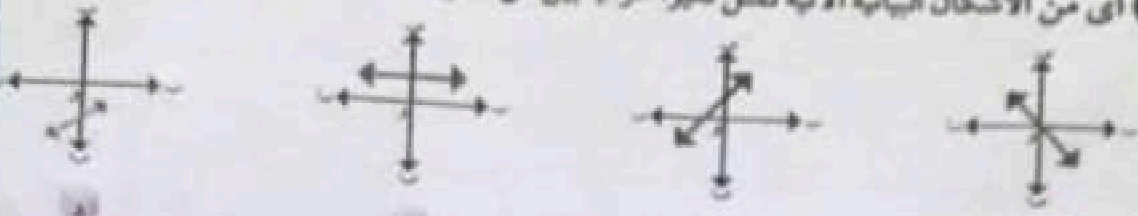


أ/ صلاح جمال

# التغير الطردى و التغير العكسى

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

① أى من الأشكال البيانية الآتية تمثل تغيرا طرديا بين س، ص:



(أ) (ب) (ج) (د)

التوضيح : العلاقة الطردية يمثلها مستقيم يمر بنقطة الأصل.

② العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص، س هى:

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (ج) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

التوضيح :- • اذا كانت خارج قسمة المتغيرين = ثابت أى عدد فإن العلاقة تكون طردية

• وإذا كانت حاصل ضرب المتغيرين = ثابت فإن العلاقة عكسية.

③ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت س = $٣\sqrt{٧}$ عندما ص = $\frac{٢}{٣\sqrt{٧}}$ فإن ثابت التناسب يساوى:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) ٢ (د) ٦

التوضيح :

$ص \propto \frac{١}{س} \Leftarrow \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

$ص = \frac{م}{س} \Leftarrow \frac{٢}{٣\sqrt{٧}} = \frac{م}{٣\sqrt{٧}} \Leftarrow م = ٢$

**ثانيا: (الحساب العقلي):** من بيانات الجدول التالي أجب عن الأسئلة الآتية:

| س | ٢ | ٤ | ٦ |
|---|---|---|---|
| ص | ٦ | ٣ | ٢ |

(أ) بين نوع التغير بين ص، س (ب) أوجد ثابت التناسب

(ج) أوجد قيمة ص عندما س = ٣ (د) أوجد قيمة س عندما ص = $٢\frac{٢}{٥}$

"الحل"

من ملاحظة بيانات الجدول نلاحظ أنه:

س ص = ١٢ لجميع قيم س ، ص

$\because$ حاصل الضرب = ثابت $\therefore$ العلاقة عكسية ← (أ)

ص $\propto \frac{١}{س}$ ثابت التناسب = ١٢ ← (ب)

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١} \Leftarrow \frac{٦}{ص_٢} = \frac{٣}{٢}$

ص = ٤ ← (ج)

ص $= \frac{١٢}{س} \Leftarrow ٢\frac{٢}{٥} = \frac{١٢}{س}$

س = ٥ ← (د)

أ/ صلاح جمال
معلم الرياضيات والإحصاء
ت ٠١٢٨٥٢٨٢٨٢٤

**١** إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين س، فاختر الإجابة الصحيحة:

أ) ص = أ س  ب) $ص = \frac{١}{س}$

ج) $ص = أ + \frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠)  د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

---

**٢** إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٤٠ عندما س = ١٤ فأوجد س عندما ص = ٨٠

"الحل"

ص ∝ س

$$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢} \Leftarrow \frac{٤٠}{٨٠} = \frac{١٤}{س}$$

س = ٢٨

---

**٣** تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا في ٦ ساعات، فكم كيلو مترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات؟

"الحل"

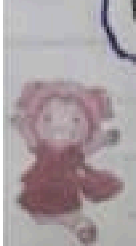
$$ف \propto ن \Leftarrow \frac{ف_١}{ف_٢} = \frac{ن_١}{ن_٢} \Leftarrow \frac{١٥٠}{س} = \frac{٦}{١٠}$$

$ف_٢ = ٢٥٠$ كم

---

**٤** إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر)، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر، فماذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

"الحل"



$$و \propto ر \Leftarrow \frac{و_١}{و_٢} = \frac{ر_١}{ر_٢} \Leftarrow \frac{١٤}{و} = \frac{٨٤}{١٤٤}$$

$و_٢ = ٢٤$ كجم

٧ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٢أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ} - \text{أ}}$ فاثبت ان $\frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$

## «الحل»

• بضرب حدي النسبة الأولى × (٢) وجمع النسبة الأولى والثانية

$$\frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٢ب} + \text{٢ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{جـ}} = \text{احدى النسب}$$

• بضرب حدي النسبة الثانية × (٢) والأولى × (٢) وجمع النسب الثلاث.

$$\frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٤أ} + \text{٢ب} + \text{٤ب} - \text{٢جـ} + \text{٢جـ} - \text{أ}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$$

$$\frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}} = \text{احدى النسب}$$

$$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$$

**الربط بالهندسة:** س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة في مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ **فأوجد** س : ص.

"الحل"

س، ص، ع متناسبة $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \text{م}$

$\boxed{\text{س} = \text{ع م}^{٢}}$ $\boxed{\text{ص} = \text{ع م}}$

س + ص = ١٥ ⟸ ع م٢ + ع م = ١٥

ع م (م + ١) = ١٥ ← ①

ص + ع = ٢٢,٥ ⟸ ع م + ع = ٢٢,٥

ع (م + ١) = ٢٢,٥ ← ②

بقسمة معادلة ١ على معادلة ٢

$\frac{\cancel{\text{ع}}\ \text{م}\ \cancel{(\text{م}+١)}}{\cancel{\text{ع}}\ \cancel{(\text{م}+١)}} = \frac{١٥}{٢٢,٥}$ ⟸ $\text{م} = \frac{٢}{٣}$

ع $[\frac{٢}{٣} + ١]$ = ٢٢,٥ ⟸ $\text{ع} = \frac{٢٧}{٢}$   ص = ٩

س = ٦

س : ص = ٦ : ٩

= ٢ : ٣

(٩) تطبيقات حياتية: في مجال اهتمام الدولة بالريف المصري، رصدت الدولة مبلغ $1{,}85 \times 10^{6}$ جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{3}{2}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{5}{6}$ من تكاليف مركز الشباب؛ فما هي تكاليف كل منها؟

## «الحل»



المدرسة : الوحدة : مركز الشباب

٣ : ٢

٥ : ٦

١٥ : ١٠ : ١٢

المدرسة : الوحدة : مركز الشباب : المجموع

١٥ : ١٠ : ١٢ : ٣٧

ع : ص : س : $1{,}85 \times 10^{6}$

• تكاليف المدرسة = $\frac{10 \times 1{,}85 \times 10^{6}}{37}$

وهكذا ...

⑨ إذا كان $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢} = \frac{\text{ب}+\text{جـ}}{٦} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}}{٥}$ فاثبت أن: $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = ٧$

"الحل"

بجمع حدود النسب الثلاث

• $\frac{٢\text{أ} + ٢\text{ب} + ٢\text{جـ}}{١٤} = \frac{٢(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})}{١٤} = \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{٧} =$ إحدى النسب

بضرب النسبة الثانية × (−١) وجمع النسب الثلاث

• $\frac{\text{أ} + \cancel{\text{ب}} - \cancel{\text{ب}} - \cancel{\text{جـ}} + \cancel{\text{جـ}} + \text{أ}}{٢ - ٦ + ٥} = \frac{\cancel{٢}\text{أ}}{\cancel{٢}} = \frac{\text{أ}}{١} =$ إحدى النسب

$\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{٧} = \frac{\text{أ}}{١} \Leftarrow \frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٧}{١} = ٧$

إذا كان $\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} - ١٤\,\text{س}^{٢}\,\text{ص} + ٤٩ = ٠$ فأثبت أن $\text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

**الحل:**

$$\text{س}^{٤}\,\text{ص}^{٢} - ١٤\,\text{س}^{٢}\,\text{ص} + ٤٩ = ٠$$

$$(\text{س}^{٢}\,\text{ص} - ٧)^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢}\,\text{ص} - ٧ = ٠$$

$$\text{س}^{٢}\,\text{ص} = ٧ \Leftarrow \text{ص} = \frac{٧}{\text{س}^{٢}}$$

$$\therefore \text{ص} \propto \frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

إذا كان $ص = أ - ٩$ وكان $ص \propto \frac{1}{س^{٢}}$ وكان $أ = ١٨$ عندما $س = \frac{٢}{٣}$ فاوجد العلاقة بين ص، س
ثم استنتج قيمة ص عندما $س = ١$

"الحل"

$ص = أ - ٩$ ، $ص \propto \frac{1}{س^{٢}} \Leftarrow ص = \frac{م}{س^{٢}}$

$ص = ١٨ - ٩ = ٩$ عندما $س = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٩ = \frac{م}{(\frac{٤}{٩})}$

$م = ٤$ $ص = \frac{٤}{س^{٢}}$

عندما $س = ١ \Leftarrow ص = ٤$

---

إذا كان $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن $ص \propto ع$.

$\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع} \Leftarrow ٢١س ع - \cancel{ص ع} = ٧س ص - \cancel{ع ص}$

$٢١س ع = ٧س ص \Leftarrow ٧س ص - ٢١س ع = ٠$

$٧س (ص - ٣ع) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $ص = ٣ع$

$ص \propto ع$

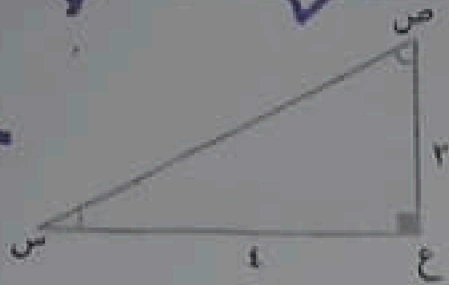
(1)

# النسب المثلثية للزاوية الحادة

أ/صلاح جمال

## تمارين (٤ - ١)

١ في الشكل المقابل : أكمل




أ جا س = ............ ب جتا س = ............

جـ ظا س = ............ د جتا ص = ............

هـ ظا ص = ............ و جا ص = ............

## الحل

تذكر أنه :- في △ س ص ع القائم الزاوية في ع

$(\text{ص س})^2 = (\text{ص ع})^2 + (\text{ع س})^2$

$(\text{ص س})^2 = ٩ + ١٦ = ٢٥ \Leftarrow \text{ص س} = ٥$ سم

| | |
|---|---|
| جا س = $\frac{\text{ص ع}}{\text{ص س}} = \frac{٣}{٥}$ | جا ص = $\frac{\text{ع س}}{\text{ص س}} = \frac{٤}{٥}$ |
| جتا س = $\frac{\text{ع س}}{\text{س ص}} = \frac{٤}{٥}$ | جتا ص = $\frac{\text{ع ص}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{٥}$ |
| ظا س = $\frac{\text{ص ع}}{\text{ع س}} = \frac{٣}{٤}$ | ظا ص = $\frac{\text{س ع}}{\text{ص ع}} = \frac{٤}{٣}$ |

أ/ صلاح جمال
معلم الرياضيات والإحصاء
ت ٠١٢٨٥٣٨٢٨٢٤

② إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني.

«الحل»

• الزاويتان متتامتين ∴ مجموعهم = ٩٠°

بفرض الزاويتين ٣س ، ٥س ⟸ ٣س + ٥س = ٩٠

٨س = ٩٠° ⟸ س = ١١° ١٥َ

∴ الزاويتان هما: ٣٣° ٤٥َ ، ٥٦° ١٥َ

③ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني.

«الحل»

الزاويتين متكاملتين ∴ مجموعهم = ١٨٠°

بفرض زاويتين ٣س ، ٥س ⟸ ٨س = ١٨٠°

س = ٢٢° ٣٠َ

الزاويتان هما: ٦٧° ٣٠َ ، ١١٢° ٣٠َ

④ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ فاوجد القياس الستيني لكل زاوية من زواياه.



"الحل"

يفرض أن الزوايا ∴ ٣س ، ٤س ، ٧س

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

٣س + ٤س + ٧س = ١٨٠° ⟸ ١٤س = ١٨٠°

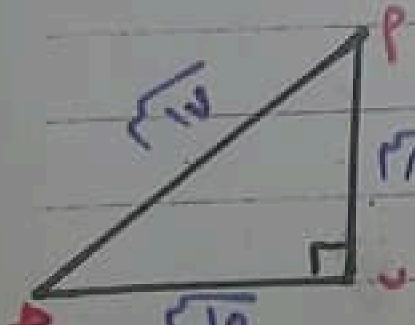
س = $\frac{٩٠}{٧}$ ، قياس الزاوية الأولى = ٣٨° ٣٤َ ١٧ً

قياس الزاوية الثانية = ٥١° ٢٥َ ٤٣ً

قياس الزاوية الثالثة = ٩٠°

⑤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جا جـ ، جتا أ ، جتا جـ ، ظا جـ .

"الحل"

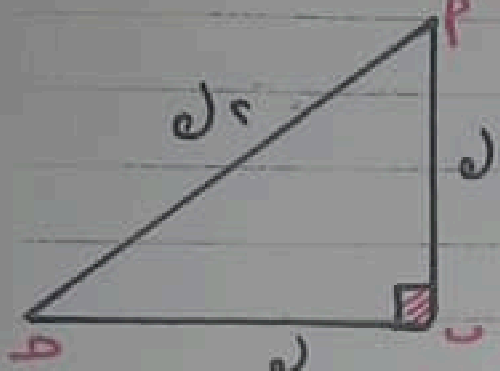



جا جـ = $\frac{٨}{١٧}$ | جتا جـ = $\frac{١٥}{١٧}$

جتا أ = $\frac{٨}{١٧}$ | ظا جـ = $\frac{٨}{١٥}$

⑥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ
فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ.

"الحل"




٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أ ب = $\sqrt{٣}$ ل

أ جـ = ٢ ل

جا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$

---

⑦ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٩٠° ، أ جـ = ١٥سم ، أ ب = ٢٠سم

أثبت أن: جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب = صفر


"الحل"

من فيثاغورث ب جـ = ٢٥ سم

جتا جـ = $\frac{١٥}{٢٥}$ ، جتا ب = $\frac{٢٠}{٢٥}$

جا جـ = $\frac{٢٠}{٢٥}$ ، جا ب = $\frac{١٥}{٢٥}$

جتا جـ جتا ب - جا جـ جا ب = $\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$

= صفر

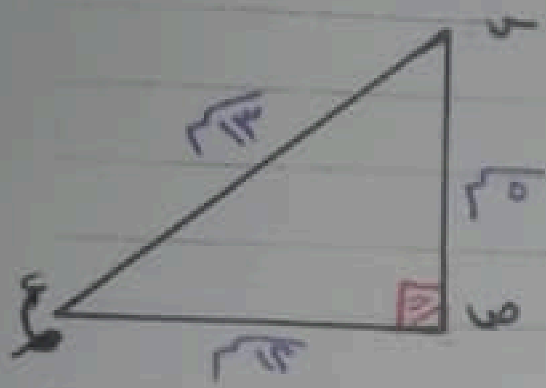
⑧ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم

أوجد قيمة : (أ) ظا س + ظا ع (ب) جتا س جتا ع - جا س جا ع

(ج) جا س جتا ع + جتا س جا ع



« الحل »




(١) ظا س + ظا ع

$= \frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

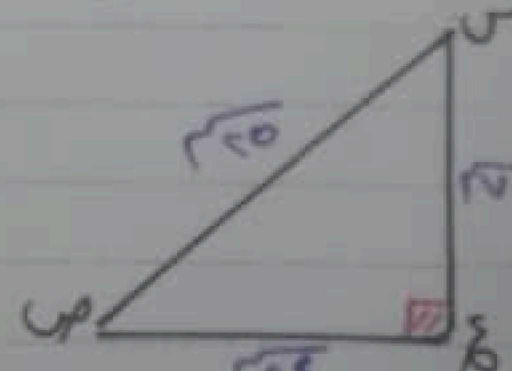
(٢) جتا س جتا ع - جا س جا ع $= \frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = ٠$

(٣) جا س جتا ع + جتا س جا ع $= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = ١$

⑨ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم ،

أوجد قيمة كل من : (أ) ظا س × ظا ص (ب) جا² س + جا² ص

« الحل »




ظا س × ظا ص $= \frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٤} = ١$

جا² س + جا² ص $= \left(\frac{٢٤}{٢٥}\right)^2 + \left(\frac{٧}{٢٥}\right)^2$

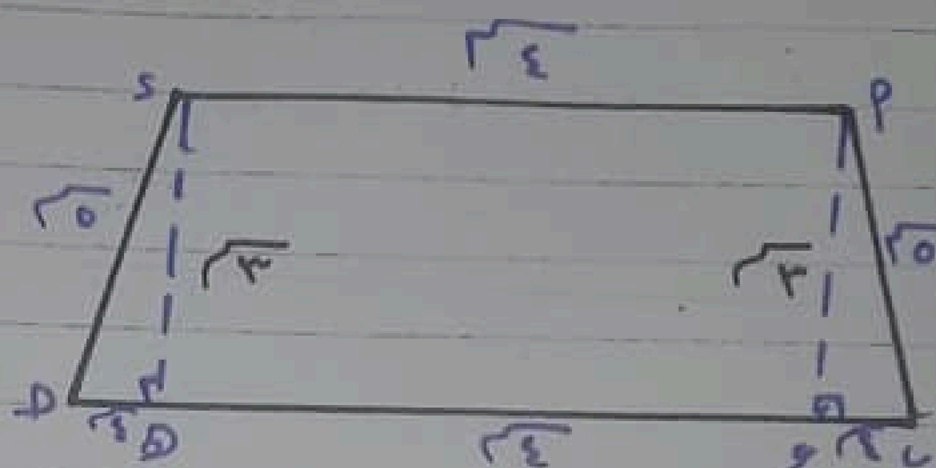
$= \frac{٥٧٨}{٦٢٥} + \frac{٤٩}{٦٢٥} = ١$

(١٢) اب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{\text{اء}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، اء = ٤سم ، اب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم

أثبت أن: $\frac{\text{٥ ظا ب جتا حـ}}{\text{جا}^{٢}\text{ حـ + جتا}^{٢}\text{ ب}} = ٣$

«الحل»

من هندسة الشكل




∆ اب و ≡ ∆ ء د هـ

$\text{ظا ب} = \frac{\text{او}}{\text{وب}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\text{جتا د} = \frac{٤}{٥}$

$\text{جا}^{٢}\text{ د} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥}$ ، $\text{جتا}^{٢}\text{ ب} = \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$

$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{٥ ظا ب جتا د}}{\text{جا}^{٢}\text{ د + جتا}^{٢}\text{ د}} = \frac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}}$

$= \frac{٣}{١} = ٣$

= الطرف الأيسر #

(١١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، رسم $\overleftrightarrow{أى} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أى} \cap \overline{ب جـ} = \{ى\}$

**أولاً:** أوجد قيمة : جا ( ∠ جـ أ ى ) ، جتا ( ∠ جـ أ ى ) ، ظا ( ∠ جـ أ ى )

**ثانياً:** أثبت أن: جا² جـ + جتا² جـ = ١      جا ب + جتا جـ > ١

## « الحل »

من هندسة الشكل : في △ المتساوي الساقين

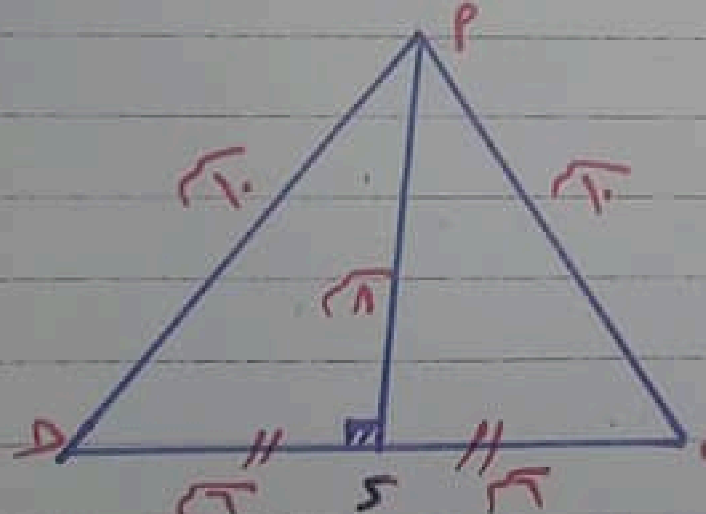
العمودي على القاعدة ينصفها ∵ $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

∴ ى منتصف $\overline{ب جـ}$ ⇐ ب ى = ى جـ = ٦ سم

في △ أ ب ى القائم الزاوية في ى ∴ أ ى = ٨ سم

(١) جا ( ∠ جـ أ ى ) = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جتا ( ∠ جـ أ ى ) = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

ظا ( ∠ جـ أ ى ) = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$




(٢) جا² جـ + جتا² جـ = $(\frac{٤}{٥})^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢$

= $\frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = ١$

(٣) جا ب + جتا جـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥} > ١$

(٢)

# النسب المثلثية لبعض

# الزوايا الخاصة

أ/ صلاح جمال

# النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

## تمارين (٤ - ٢)

① أكمل ما يأتي :

① إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق($\angle$ س) = ٣٠°

shift sin (1/2) = 30°

② إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن ق($\angle$ س) = ١٢٠°

shift cos (1/2) = 60°

$\frac{س}{٢}$ = ٦٠° ⇐ س = ١٢٠°



③ جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = صفر

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\sqrt{٣}$ = صفر

④ إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق($\angle$ س) = ٥٠°

shift Tan ($\sqrt{3}$) = 60°

(س + ١٠) = ٦٠° ⇐ س = ٥٠°

⑤ إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق($\angle$ س) = ٢٠°

shift Tan ($\sqrt{3}$) = 60°

٣س = ٦٠ ⇐ س = ٢٠°

② أوجد قيمة المقدار التالى مبيناً خطوات العمل

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا² ٣٠°

« الحل »

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$ صفر

③ أثبت أن:

أ جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° - ١

ب ظا² ٦٠° - ظا² ٤٥° = جا² ٦٠° + جتا² ٦٠° + ٢ جا ٣٠°



« الحل »

(أ) الطرف الأيمن = جتا ٦٠ = $\frac{1}{2}$

الطرف الأيسر = ٢ جتا² ٣٠ − ١ = $2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$

$= 2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$ ∴ الطرفان متساويان

(ب) الطرف الأيمن = ظا² ٦٠ − ظا² ٤٥ = $(\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 2$

الطرف الأيسر = جا² ٦٠ + جتا² ٦٠ + ٢ جا ٣٠

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}$

$= 2$ ∴ الطرفان متساويان

④ أوجد قيمة س اذا كان:

٤س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

"الحل"

٤س = جتا² ٣٠ ظا² ٣٠ ظا² ٤٥ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^2 \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^2 \times (١)^2$

٤س = $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٤}$

٤س = $\frac{١}{٤}$ ⟸ س = $\frac{١}{١٦}$

⑤ أوجد هـ، حيث هـ زاوية حادة.

جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

"الحل"

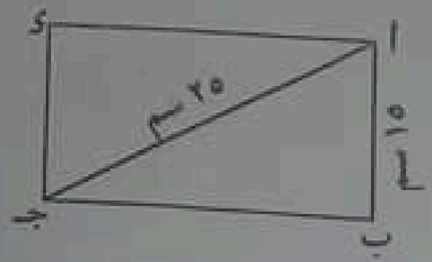
جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ - جتا ٦٠ جا ٣٠

جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ shift sin (1/2) = 30°

ق($\hat{هـ}$) = ٣٠°




⑥ **الربط بالهندسة:** فى الشكل المقابل:

أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم .

**أوجد : أولاً:** ق(∠ أ جـ ب)

**ثانياً:** مساحة سطح المستطيل أ ب جـ ء .

"الحل"

الشكل أ ب جـ د مستطيل ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

في △ أ ب جـ القائم الزاوية في (ب) ب جـ = ٢٠ سم

• جا(∠ أ جـ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ Shift sin (3/5)

ق(∠ أ جـ ب) ≃ ٣٦° ٥٢' ١٢" ← المطلوب أولاً

• مساحة المستطيل = الطول × العرض

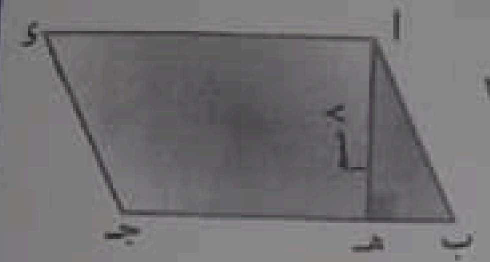
= ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ سم² ← المطلوب ثانياً

لاحظ أن :-

في حل مسائل حساب المثلثات يعتمد على نظريات هندسية سابقة . كذلك خواص الأشكال

فالمثال السابق عند ذكر أن الشكل مستطيل استنتجنا أن ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

⑦ **الربط بالهندسة:** فى الشكل المقابل:




اب جـ ء متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم² ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

اهـ ⊥ ب جـ ، اهـ = ٨سم

**أوجد: أولاً:** طول ا ء    **ثانياً:** ق(∠ب)

**ثالثاً:** طول اب لأقرب رقم عشري واحد    **(استخدم أكثر من طريقة)**

"الحل"

ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣ ⟸ $\boxed{\text{ب هـ = م}}$ ، $\boxed{\text{هـ جـ = ٣م}}$

ب جـ = ب هـ + هـ جـ = ٤م

مساحة متوازي الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

٩٦ = ٨ × ٤م

٩٦ = ٣٢م ⟸ م = ٣ ⟸ ب هـ = ٣سم

هـ جـ = ٩سم

$\boxed{\text{ب جـ = ١٢سم}}$

∵ اء = ب جـ = ١٢سم (خواص متوازي الأضلاع)

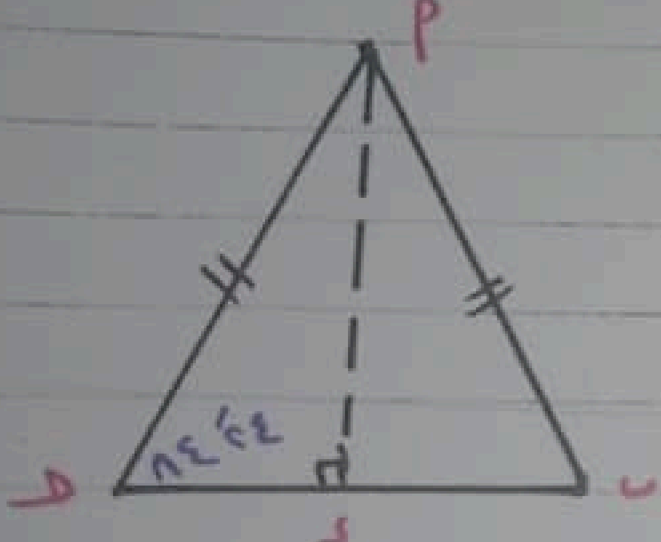
طا(∠ب) = $\frac{٨}{٣}$ ⟸ ق(∠ب) = ٦٩° ٢٦َ ٣٨ً

(اب)² = (ب هـ)² + (اهـ)² = ٩ + ٦٤ = ٧٣

اب ≃ ٨,٥سم

③ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦ سم ، ق(∠ جـ) = ٨٤° ٢٤َ .
أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول ب جـ .

"الحل"




△ أ ب جـ متساوي الساقين

نرسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

في △ أ ء جـ

جتا(جـ) = $\frac{ء جـ}{أ جـ}$ ⟸ جتا ٨٤° ٢٤َ = $\frac{ء جـ}{١٢,٦}$

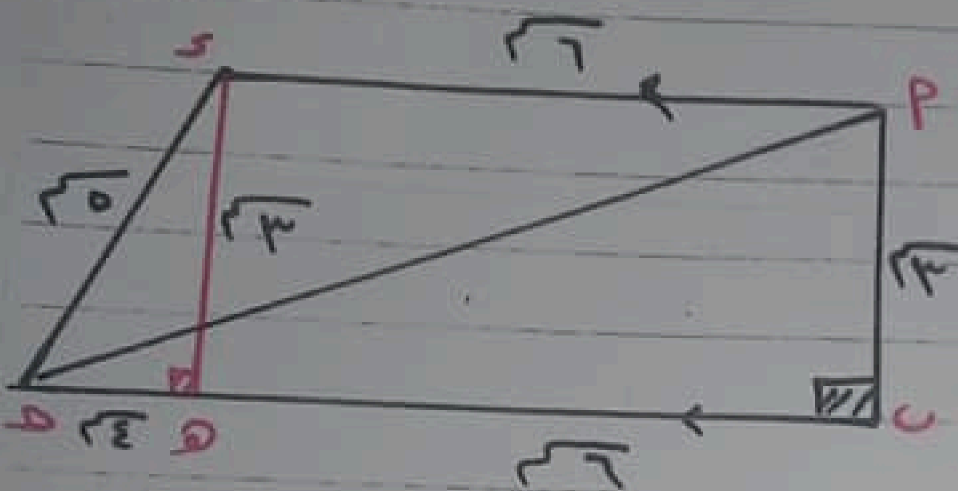
ء جـ = ١٢,٦ × جتا ٨٤° ٢٤َ ≃ ١,٢

ب جـ = ٢ ء جـ ≃ ٢,٤٦ سم

تذكر أنه : في △ المتساوي الساقين العمود على القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس

(٤) اب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{اء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، فإذا كان اب = ٣سم ، اء = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم.
أثبت أن : جتا (∠ء جـ ب) - ظا (∠ا جـ ب) = $\frac{1}{2}$

"الحل"




العمل: نرسم $\overline{ءهـ} \perp \overline{ب جـ}$

من هندسة الشكل

ب هـ = اء = ٦سم

هـ جـ = ٤سم

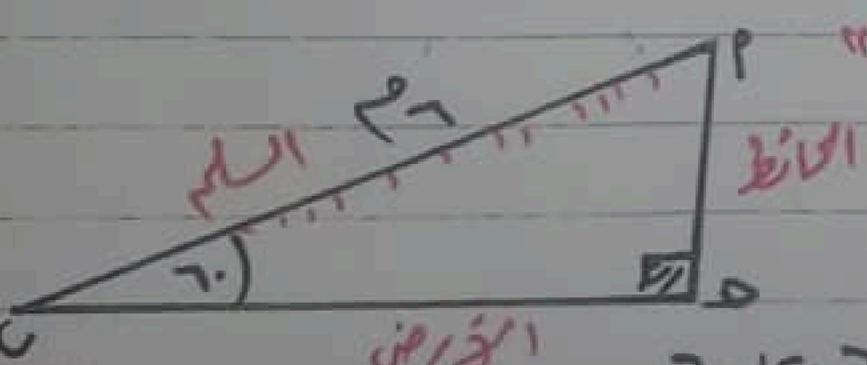
في △ ء هـ جـ جتا (∠ء جـ ب) = $\frac{٤}{٥}$

في △ ا ب جـ : ظا (∠ا جـ ب) = $\frac{٣}{١٠}$

جتا (∠ء جـ ب) - ظا (∠ا جـ ب) = $\frac{٤}{٥}$ - $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ #

(٥) سُلم $\overline{اب}$ طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوي ا على حائط رأسي وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هي مسقط نقطة ا على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{اجـ}$ .

"الحل"




• جتا ب = $\frac{ب جـ}{ا ب}$

• جتا ٦٠ = $\frac{ب جـ}{٦}$ ⟸ ب جـ = ٦ جتا ٦٠

ب جـ = ٣م

(1)

# البعد بين نقطتين

أ/ صلاح جمال

## تمارين (٥ - ١)

**أولاً: أكمل ما يأتي:**

① البعد بين النقطة (-٣، ٤) ونقطة الأصل يساوى ....٥....

البعد بين النقطة (-٣، ٤) و (٠، ٠) = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

② البعد بين النقطتين (-٥، ٠)، (٠، ١٢) يساوى ..١٣..

البعد بين النقطتين (-٥، ٠) ، (٠، ١٢)

= $\sqrt{(-٥-٠)^٢ + (٠-١٢)^٢}$ = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

③ البعد بين النقطتين (١٥، ٠)، (٦، ٠) يساوى ....٩....

البعد = $\sqrt{(١٥-٦)^٢ + (٠-٠)^٢}$ = $\sqrt{(٩)^٢}$ = ٩

④ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوى ..٥....

نق = $\sqrt{(٧-٣)^٢ + (٤-١)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

⑤ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠)، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة؛ فإن أ = ....صفر

$\sqrt{(أ-٠)^٢+(٠-١)^٢} = ١$

$\sqrt{أ^٢+١} = ١$ (بتربيع الطرفين)

$أ^٢ + ١ = ١ \Leftarrow أ^٢ = صفر \Leftarrow أ = صفر$

---

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

① النقط (٠، ٠)، (٦، ٠)، (٠، ٨) :

أ تكون مثلث منفرج الزاوية
ب تكون مثلث حاد الزوايا
ج تكون مثلث قائم الزاوية ✓
د تقع على استقامة واحدة

"الحل"

نفرض أ = (٠، ٠) ب = (٦، ٠) ء (٠، ٨)

$(أب)^٢ = (٦)^٢ + (٠)^٢ = ٣٦$

$(ب ء)^٢ = (٦)^٢ + (٨)^٢ = ١٠٠$

$(أ ء)^٢ = (٨)^٢ + (٠)^٢ = ٦٤$

$\because (ب ء)^٢ = (أ ء)^٢ + (أ ب)^٢$

$\therefore \triangle$ أ ب ء قائم الزاوية في أ

② دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة ، فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟

أ (١ ، ٢)　　ب (-٢ ، ١)　　جـ ($\sqrt{٣}$ ، ١) ✓　　د ($\sqrt{٢}$ ، ١)

"الحل"

* نحسب البعد بين كل من النقط المعطاه ونقطة الأصل

• $أم = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ ∉ للدائرة

• $بم = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$ ∉ للدائرة

• $جـم = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$ ∈ للدائرة

• $دم = \sqrt{٢ + ١} = \sqrt{٣}$ ∉ للدائرة ،

---

③ بيِّن أيًا من مجموعات النقط الآتية تقع على استقامة واحدة :

أ (١ ، ٤)، (٣ ، -٢)، (-٣ ، ١٦) ✓　　ب (٧ ، ٠)، (-٣ ، -٣)، (٢٢ ، ٩)

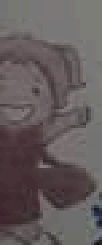
جـ (-١ ، -٤)، (١ ، ٠)، (٢ ، ٢)　　د (-١ ، -٤)، (١ ، ٠)، (٠ ، -٢)

"الحل"

$أب = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٤+٢)^٢} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$

$بجـ = \sqrt{(٣+٣)^٢ + (-٢-١٦)^٢} = ٦\sqrt{١٠}$　　∴ بجـ = أب + أجـ

$أجـ = \sqrt{(١+٣)^٢ + (٤-١٦)^٢} = ٤\sqrt{١٠}$　　∴ النقط أ، ب، جـ على استقامة واحدة



**ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:**

① أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (-٢، ٣) يساوى ٥



"الحل"

$$\sqrt{(أ+٢)^٢+(٧-٣)^٢}=٥$$

$$\sqrt{(أ+٢)^٢+١٦}=٥$$ (بتربيع الطرفين)

$$(أ+٢)^٢+١٦=٢٥ \Leftarrow (أ+٢)^٢=٩$$

$$(أ+٢)=\pm٣ \qquad أ+٢=٣ \qquad أ+٢=-٣$$

$$أ=١ \quad | \quad أ=-٥$$

ب إذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٧)، (٣أ-١، -٥) يساوى ١٣

"الحل"

$$\sqrt{(أ-(٣أ-١))^٢+(٧+٥)^٢}=\sqrt{(-٢أ+١)^٢+(١٢)^٢}=١٣$$

$$\sqrt{(-٢أ+١)^٢+١٤٤}=١٣$$ (بتربيع الطرفين)

$$(-٢أ+١)^٢+١٤٤=١٦٩ \Leftarrow (-٢أ+١)^٢=٢٥$$

$$-٢أ+١=٥ \Leftarrow أ=-٢ \qquad -٢أ+١=-٥ \qquad أ=٣$$

② إذا كانت أ (س، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (٥، ١) وكانت أ ب = ب جـ، فأوجد قيمة س.

"الحل"

$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}}$$

$$\text{ب جـ} = \sqrt{(٣ - ٥)^{٢} + (٢ - ١)^{٢}}$$

أ ب = ب جـ

$$\sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + ١} = \sqrt{(٤) + ١}$$ (بتربيع الطرفين)

$$(\text{س} - ٣)^{٢} + ١ = ٥$$

$$(\text{س} - ٣)^{٢} = ٤$$ $\sqrt{}$ للطرفين

| | |
|---|---|
| $\text{س} - ٣ = ٢$ | $\text{س} - ٣ = -٢$ |
| $\text{س} = ٥$ | $\text{س} = ١$ |

④ بيّن نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة إلى زواياه :

أ) أ (٣، ١٠)، ب (٨، ٥)، جـ (٥، ٢)      ب) أ (١، -١)، ب (٢، ١)، جـ (-٣، -٢)

جـ) أ (٣، ٢)، ب (٤، -١)، جـ (١، ١)

"الحل"

① أب $= \sqrt{(٣-٨)^2 + (١٠-٥)^2} = \sqrt{٥^2 + ٥^2} = \sqrt{٥٠}$

(أب)$^2 = ٥٠$

(ب جـ) $= \sqrt{(٨-٥)^2 + (٥-٢)^2} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

(ب جـ)$^2 = ١٨$

أ جـ $= \sqrt{(٣-٥)^2 + (١٠-٢)^2} = \sqrt{٤ + ٦٤} = \sqrt{٦٨}$

(أ جـ)$^2 = ٦٨$

$\because$ (أ جـ)$^2$ = (أب)$^2$ + (ب جـ)$^2$

$\therefore$ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

تذكر أن :

(أ جـ)$^2$ > (أب)$^2$ + (ب جـ)$^2$ △ منفرج في ب

(أ جـ)$^2$ = (أب)$^2$ + (ب جـ)$^2$ △ قائم في ب

(أ جـ)$^2$ < (أب)$^2$ + (ب جـ)$^2$ △ حاد الزوايا

⑤ بيّن نوع المثلث الذي رؤوسه النقط أ (-٢، ٤)، ب (٣، -١)، جـ (٤، ٥) بالنسبة لأضلاعه.

"الحل"

$\text{أب} = \sqrt{(-٢-٣)^٢ + (٤+١)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٢٥} = \sqrt{٥٠}$

$\text{بجـ} = \sqrt{(٣-٤)^٢ + (-١-٥)^٢} = \sqrt{١ + ٣٦} = \sqrt{٣٧}$

$\text{أجـ} = \sqrt{(-٢-٤)^٢ + (٤-٥)^٢} = \sqrt{٣٦ + ١} = \sqrt{٣٧}$

∵ أجـ = بجـ ∴ △ أبجـ متساوي الساقين

⑥ أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ (٥، -٥)، ب (-١، ٧)، جـ (١٥، ١٥) قائم الزاوية في ب، ثم أوجد مساحته.

"الحل"

$\text{أب} = \sqrt{(٥+١)^٢ + (-٥-٧)^٢} = \sqrt{٣٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٨٠}$

$(\text{أب})^٢ = ١٨٠$

$\text{بجـ} = \sqrt{(-١-١٥)^٢ + (٧-١٥)^٢} = \sqrt{٢٥٦ + ٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$

$(\text{بجـ})^٢ = ٣٢٠$

$\text{أجـ} = \sqrt{(٥-١٥)^٢ + (-٥-١٥)^٢} = \sqrt{١٠٠ + ٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$

$(\text{أجـ})^٢ = ٥٠٠$ ∵ $(\text{أجـ})^٢ = (\text{بجـ})^٢ + (\text{أب})^٢$ ∴ △ قائم

(٢)

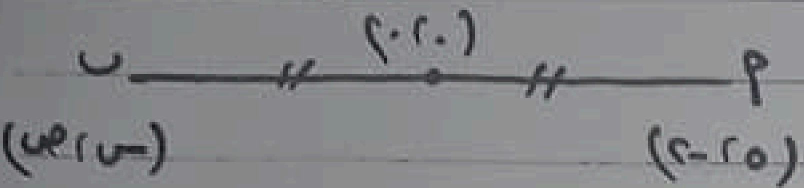
# احداثي منتصف قطعة مستقيمة

أ/ صلاح جمال

**أولا : أكمل**

1) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٥، -٢) فإن إحداثيي النقطة ب هي ...... (-٥، ٢)

## "الحل"




$$(٠، ٠) = \left(\frac{٥ + س}{٢} ، \frac{-٢ + ص}{٢}\right)$$

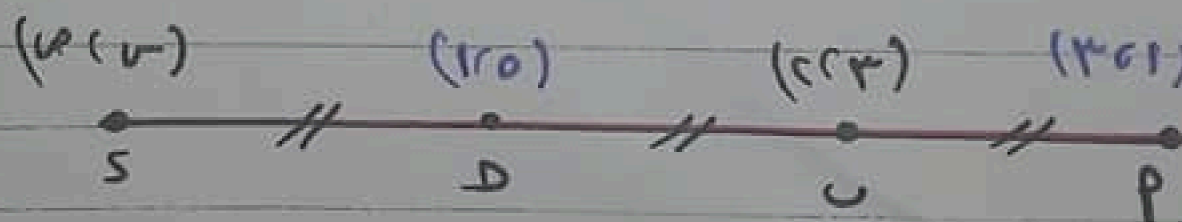
$$\frac{٥ + س}{٢} = ٠ \Leftarrow س = -٥ \qquad \frac{-٢ + ص}{٢} = ٠ ، ص = ٢$$

ب) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط على استقامة واحدة ، كان أ ب = ب جـ = جـ د، أ(١، ٣)، جـ (٥، ١) أوجد :

أولاً : إحداثيي النقطة ب هي (٣، ٢)

ثانيًا : إحداثيي النقطة د هي (٧، ٠)






ب منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ ب = $\left(\frac{١ + ٥}{٢} ، \frac{٣ + ١}{٢}\right) = (٣، ٢)$

جـ منتصف $\overline{ب د}$ ∴ $\left(\frac{٣ + س}{٢} ، \frac{٢ + ص}{٢}\right) = (٥، ١)$

$$\frac{٣ + س}{٢} = ٥ \qquad \frac{٢ + ص}{٢} = ١$$

$$٣ + س = ١٠ ، س = ٧ \qquad ٢ + ص = ٢ ، ص = ٠$$

③ أثبت أن النقط أ (٦، ٠)، ب (٢، -٤)، جـ (-٤، ٢) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب، ثم أوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلاً.

## "الحل"

أجـ $= \sqrt{(٦+٤)^2 + (٠-٢)^2} = \sqrt{١٠٠+٤} = \sqrt{١٠٤}$

(أجـ)$^2$ = ١٠٤

أب $= \sqrt{(٦-٢)^2 + (٠+٤)^2} = \sqrt{١٦+١٦} = \sqrt{٣٢}$

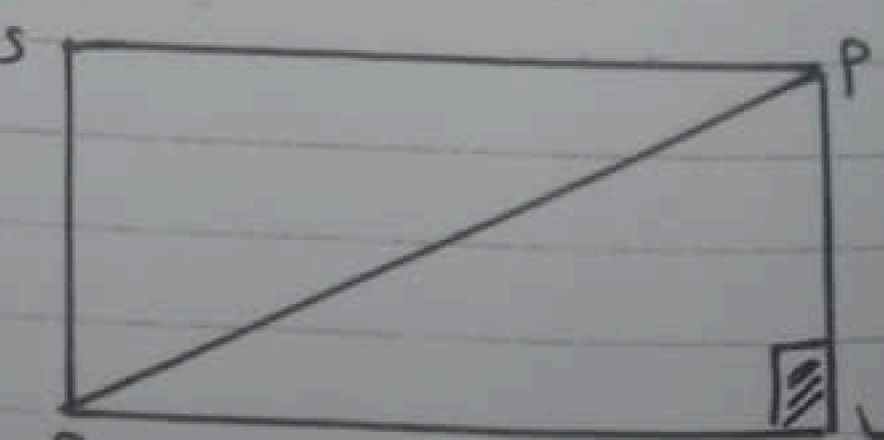
(أب)$^2$ = ٣٢

ب جـ $= \sqrt{(٢+٤)^2 + (-٤-٢)^2} = \sqrt{٣٦+٣٦} = \sqrt{٧٢}$

(ب جـ)$^2$ = ٧٢

∵ (أجـ)$^2$ = (أب)$^2$ + (ب جـ)$^2$

∴ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب




منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{ب د}}$

(٢ ، ١) = ( $\frac{٢ + س}{٢}$ ، $\frac{-٤ + ص}{٢}$ )

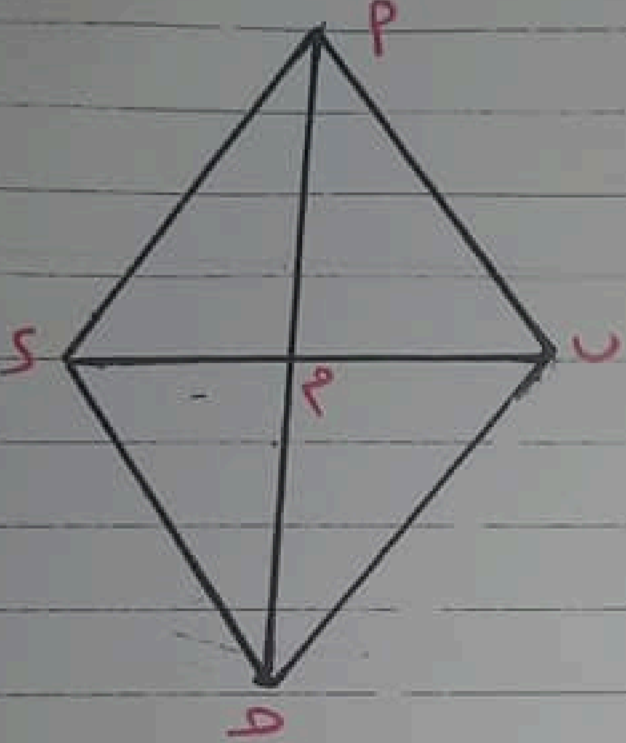
٢ + س = ٤ ⟸ س = ٢

-٤ + ص = ٢ ⟸ ص = ٦

٤ إذا كانت النقط أ (٣، ٢)، ب (٤، -٣)، جـ (-١، -٢)، د (-٢، ٣) هي رؤوس معين ؛ فأوجد :

أ إحداثيي نقطة تقاطع القطرين.

ب مساحة المعين أ ب جـ د.




القطران ينصف كل منهما الآخر.

م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

م = $\left( \frac{٣-١}{٢} ، \frac{٢-٢}{٢} \right)$

م = (١ ، ٠) ← ١

أجـ = $\sqrt{(٣+١)^٢ + (٢+٢)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$

ب د = $\sqrt{(٤+٢)^٢ + (-٣-٣)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٣٦} = \sqrt{٧٢}$

م. المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي قطريه

= $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢}$

= $\frac{١}{٢} \times ٤٨$

= ٢٤ سم²

٥ أثبت أن النقط أ (-٣، ٠)، ب (٣، ٤)، جـ(١، -٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{\text{ب جـ}}$.

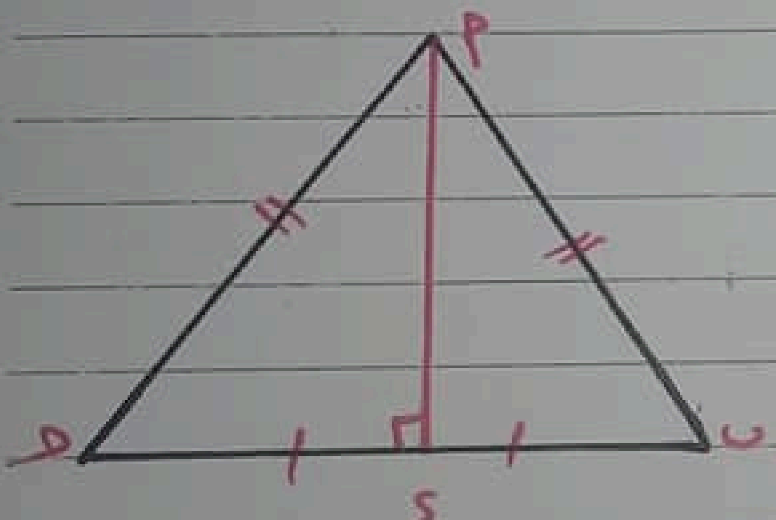
## "الحل"

أب = $\sqrt{(-٣-٣)^2 + (٠-٤)^2} = \sqrt{٣٦+١٦} = \sqrt{٥٢} = ٢\sqrt{١٣}$

ب جـ = $\sqrt{(٣-١)^2 + (٤+٦)^2} = \sqrt{٤ + ١٠٠} = \sqrt{١٠٤} = ٢\sqrt{٢٦}$

أ جـ = $\sqrt{(-٣-١)^2 + (٠+٦)^2} = \sqrt{١٦+٣٦} = \sqrt{٥٢} = ٢\sqrt{١٣}$

∵ أ جـ = أ ب ∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين




د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

د = (٢، -١)

أ د = $\sqrt{(-٣-٢)^2 + (٠+١)^2}$

= $\sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$ وحدة طول

⑥ إذا كانت أ (-١، -١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠)، د (٣، -٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد.
أثبت أن $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{بد}}$ ينصف كل منها الآخر، ثم عين نوع الشكل.

## الحل

منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = $\left(\frac{-١+٦}{٢} ، \frac{-١+٠}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$

منتصف $\overline{\text{بد}}$ = $\left(\frac{٢+٣}{٢} ، \frac{٣-٤}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٥}{٢} ، \frac{-١}{٢}\right)$



∵ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{بد}}$

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بد}}$ ينصف كلاً منهما الآخر

∴ الشكل أبجـد متوازي أضلاع.

أب = $\sqrt{١٦+٩}$ = ٥     بجـ = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

جـد = $\sqrt{١٦+٩}$ = ٥     أد = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

أجـ = $\sqrt{٤٩+١}$ = $\sqrt{٥٠}$     بد = $\sqrt{١+٤٩}$ = $\sqrt{٥٠}$

أب = بجـ = جـد = دأ     أجـ = بد     ∴ الشكل مربع

⑦ أثبت أن النقط أ (٥، ٣)، ب (٣، -٢)، جـ (-٢، -٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب، ثم أوجد إحداثيى نقطة د التى تجعل الشكل أ ب جـ د معينًا وأوجد مساحة سطحه.

"الحل"

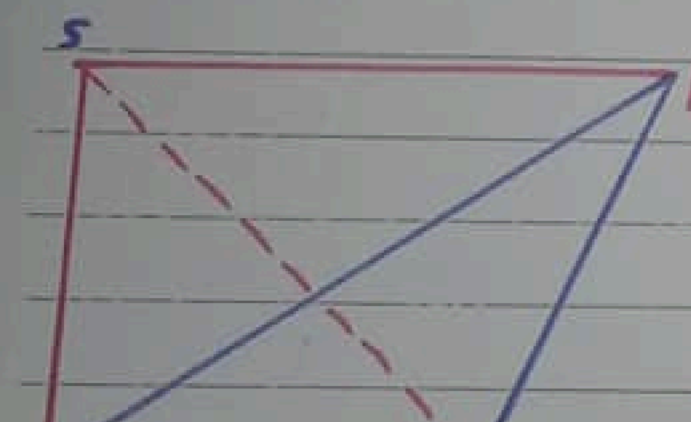
• أ ب = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$ ، (أ ب)$^٢$ = ٢٩

• ب جـ = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$ ، (ب جـ)$^٢$ = ٢٩

• (أ جـ) = $\sqrt{٤٩ + ٤٩}$ = $\sqrt{٩٨}$ ، (أ جـ)$^٢$ = ٩٨

∴ (أ جـ)$^٢$ > (أ ب)$^٢$ + (ب جـ)$^٢$

∴ Δ أ ب جـ منفرج الزاوية ∠ ب منفرجة




منتصف $\overline{أ جـ}$ = ( $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$ )

منتصف $\overline{ب د}$ = ( $\frac{٣ + س}{٢}$ ، $\frac{-٢ + ص}{٢}$ )

$\frac{٣ + س}{٢} = \frac{٣}{٢}$ | $\frac{-٢ + ص}{٢} = \frac{-١}{٢}$

س + ٣ = ٣ | ص - ٢ = -١

س = ٠ | ص = ١

د = (٠ ، ١)

ب د = $\sqrt{٩ + ٩}$ = $\sqrt{١٨}$

م = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{١٨}$ × $\sqrt{٩٨}$

= ٢١ ع$^٢$

⑧ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (٣، ٤)، ب (٢، -١)، جـ (-٤، -٣) ؛ أوجد إحداثيي د .
خذ هـ ∈ $\overrightarrow{\text{أد}}$ حيث أهـ = ٢ أد . ما إحداثيا النقطة هـ ؟

## «الحل»

• منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = $\left(\frac{-1}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

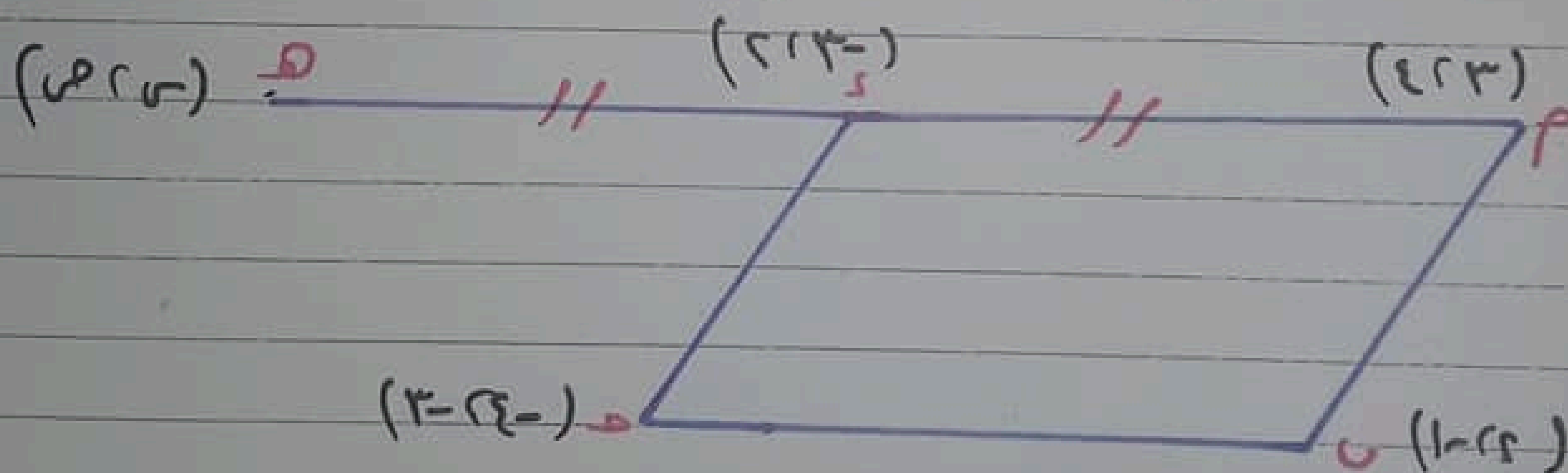
• منتصف $\overline{\text{ب د}}$ = $\left(\frac{2+س}{2} ، \frac{-1+ص}{2}\right)$

• منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{ب د}}$

• $\left(\frac{2+س}{2} ، \frac{-1+ص}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

س + ٢ = -١ | ص - ١ = ١

س = -٣ | ص = ٢




د منتصف $\overline{\text{أهـ}}$ $\left(\frac{س+3}{2} ، \frac{ص+4}{2}\right) = (-3 ، 2)$

س + ٣ = -٦ | ص + ٤ = ٤

س = -٩ | ص = صفر

هـ = (-٩ ، ٠)



(٣)

# ميل الخط المستقيم

أ/ صلاح جمال

# ميل الخط المستقيم

**أولاً: أكمل ما يأتي**

(١) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يساوي $\frac{٢}{٣}$

«الحل»

$\because \overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ د}} \Leftarrow \text{م}(\overleftrightarrow{\text{أب}}) = \text{م}(\overleftrightarrow{\text{جـ د}})$

(٢) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{١}{٢}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يساوي ...-٢...

«الحل»

$\because \overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}} \Leftarrow \text{م}(\overleftrightarrow{\text{أب}}) \times \text{م}(\overleftrightarrow{\text{جـ د}}) = -١$

(٣) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣)، (-٢، ٣) يساوي صفر

«الحل»

ميل المستقيم المعطى $= \frac{٣ - ٣}{-٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{-٤} = \text{صفر}$

ميل المستقيم المطلوب = صفر

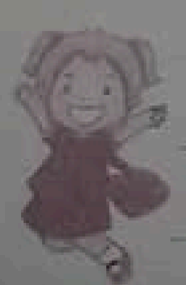
(٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازي محور السينات حيث أ (٨، ٣)، ب (٢، ك) فإن ك = ...٣...

«الحل»

ميل المستقيم $= \frac{\text{ك} - ٣}{٢ - ٨} = \frac{\text{ك} - ٣}{-٦}$

المستقيم يوازي محور السينات $\Leftarrow$ ميله = صفر

$\frac{\text{ك} - ٣}{-٦} = \text{صفر} \Leftarrow \text{ك} - ٣ = \text{صفر} \qquad \text{ك} = ٣$



⑤ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يوازي محور الصادات حيث جـ (م، ٤)، د (-٥، ٧) فإن م تساوي -٥

«الحل»

ميل المستقيم $= \frac{٧ - ٤}{-٥ - م} = \frac{٣}{-٥ - م}$

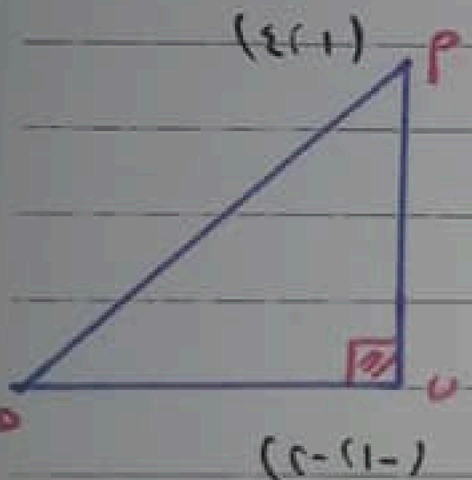
المستقيم يوازي محور الصادات ⟸ ميله غير معرف مقامه صفر

$-٥ - م = ٠ \Leftarrow م = -٥$

---

⑥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ (١، ٤)، ب (-١، -٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يساوي $\frac{-١}{٣}$

«الحل»




ميل $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{-٢ - ٤}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

$\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{ب جـ} = \frac{-١}{٣}$

---

⑦ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ، ٠)، (٠، ٣) والمستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ = ...$\sqrt{٣}$

«الحل»

ميل المستقيم المار بالنقطتين (أ، ٠)، (٠، ٣) $= \frac{-٣}{أ}$

ميل المستقيم الذي يصنع زاوية ٣٠° = ظا ٣٠ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$ل_١ \perp ل_٢ \Leftarrow \frac{أ}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \Leftarrow أ = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

**ثانيًا :**

① أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (-٣، ٤)، جـ (-٣، ٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢)، د (-٣، ٢) .

«الحل»

$م_١ = \frac{٢-٤}{-٣-(-٣)} = \frac{-٦}{صفر} \Leftarrow$ ل١ يوازى محور الصادات

$م_٢ = \frac{٢-٢}{-٣-١} = \frac{صفر}{٤} =$ صفر $\Leftarrow$ ل٢ : يوازى لمحور السينات

ل١ : يوازى الصادات ، ل٢ : يوازى السينات

$\therefore$ ل١ $\perp$ ل٢

② إذا كانت أ (-١، -١)، ب (٢، ٣)، جـ (٦، ٠) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب.

«الحل»

ميل $(\overleftrightarrow{أب}) = \frac{٣-(-١)}{٢-(-١)} = \frac{٣+١}{٢+١} = \frac{٤}{٣}$

ميل $(\overleftrightarrow{ب جـ}) = \frac{٠-٣}{٦-٢} = \frac{-٣}{٤}$

$م_١ \times م_٢ = \frac{٤}{٣} \times \frac{-٣}{٤} = -١$

$\therefore \overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$ $\therefore$ $\triangle$ أ ب جـ قائم فى ب

③ إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣، ١)، (٢، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°، فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$، $ل_٢$:

أ متوازيين — ب متعامدين

«الحل»

$م_١ = \frac{ك - ١}{٢ - ٣} = \frac{ك - ١}{-١}$ — $م_٢ = ظا ٤٥° = ١$

أولاً: $ل_١ \parallel ل_٢ \Leftarrow م_١ = م_٢$

$\frac{ك - ١}{-١} = ١ \Leftarrow ك - ١ = -١$

$ك = صفر$

ثانياً: $ل_١ \perp ل_٢ \Leftarrow م_١ \times م_٢ = -١$

$\frac{ك - ١}{-١} = -١ \Leftarrow ك - ١ = ١$

$ك = ٢$

---

④ إذا كانت النقط (٠، ١)، (أ، ٣)، (٢، ٥) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة أ.

«الحل»

$م_١ = \frac{٣ - ١}{أ} = \frac{٢}{أ}$ ، $م_٢ = \frac{٥ - ٣}{٢ - أ} = \frac{٢}{٢ - أ}$

$م_١ = م_٢ \Leftarrow \frac{٢}{أ} = \frac{٢}{٢ - أ} \Leftarrow ٢أ = ٤ - ٢أ$

$٤أ = ٤ \Leftarrow أ = ١$

⑥ أثبت باستخدام الميل أن النقط ا (-١، ٣)، ب (٥، ١)، جـ (٦، ٤)، د (٠، ٦) هي رؤوس مستطيل .

«الحل»

• ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ = $\frac{\text{١ - ٣}}{\text{٥ - (-١)}}$ = $\frac{\text{-٢}}{\text{٦}}$ = $\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$

• ميل $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$ = $\frac{\text{٤ - ١}}{\text{٦ - ٥}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{١}}$ = ٣

• ميل $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ = $\frac{\text{٦ - ٤}}{\text{٠ - ٦}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{-٦}}$ = $\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$

• ميل $\overleftrightarrow{\text{اد}}$ = $\frac{\text{٦ - ٣}}{\text{٠ - (-١)}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{١}}$ = ٣

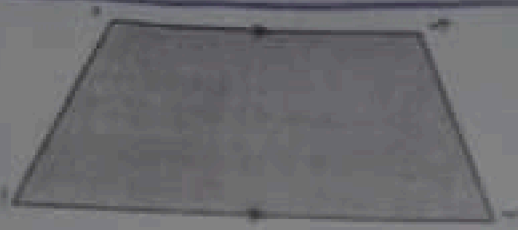
∵ ميل ($\overleftrightarrow{\text{اب}}$) = م ($\overleftrightarrow{\text{جـد}}$) ⟸ $\overline{\text{اب}}$ // $\overline{\text{جـد}}$

م ($\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$) = م ($\overleftrightarrow{\text{اد}}$) ⟸ $\overline{\text{بجـ}}$ // $\overline{\text{اد}}$

∴ الشكل ابجـد متوازي أضلاع

∵ م ($\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$) × م ($\overleftrightarrow{\text{جـد}}$) = ٣ × $\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$ = -١

∴ $\overline{\text{بجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـد}}$



⑦ في الشكل المرسوم:
أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$،
أ (٩، -٢)، ب (٣، ٢)، جـ (س، س)،
د (٤، -٣)، أوجد إحداثي نقطة جـ.

«الحل»

* $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$ ⟸ م($\overline{أب}$) = م($\overline{جـد}$)

* م($\overline{أب}$) = $\frac{-٢-٢}{٩-٣} = \frac{-٤}{٦} = \frac{-٢}{٣}$

* م($\overline{جـد}$) = $\frac{-٣+س}{٤-س}$ ⟸ $\frac{-٣+س}{٤-س} = \frac{-٢}{٣}$

-٩ + ٣س = -٨ + ٢س ⟸ س = ١

---

⑧ أثبت أن النقط أ (٤، ٣)، ب (٧، ٠)، جـ (١، -٢) هي رؤوس مثلث. وإذا كانت نقطة د (١، ٢) فأثبت أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف وأوجد النسبة بين أد، ب جـ.

«الحل»

• لإثبات أن أ، ب، جـ تمثل رؤوس مثلث
∴ لابد أن نحقق أطوال أضلاعه متباينة المثلث
أي أن مجموع أي ضلعين > الضلع الثالث

أب = $\sqrt{(٣-٠)^٢ + (٤-٧)^٢} = \sqrt{٩+٩} = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$

ب جـ = $\sqrt{(-٢-٠)^٢ + (١-٧)^٢} = \sqrt{٤+٣٦} = \sqrt{٤٠} = ٢\sqrt{١٠}$

أ جـ = $\sqrt{(٣+٢)^٢ + (٤-١)^٢} = \sqrt{٢٥+٩} = \sqrt{٣٤}$

أب + أجـ > ب جـ

∴ أ ، ب ، جـ تمثل رؤوس مثلث ← "المطلوب أولاً"

م( $\overline{\text{أد}}$ ) = $\frac{٣-٢}{٤-١}$ = $\frac{١}{٣}$

م( $\overline{\text{ب جـ}}$ ) = $\frac{٠-(-٢)}{٧-١}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

م( $\overline{\text{أد}}$ ) = م( $\overline{\text{ب جـ}}$ ) ⟸ $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أد = $\sqrt{(٤-١)^٢ + (٣-٢)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١}$ = $\sqrt{١٠}$

أد ≠ ب جـ ∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف #

"المطلوب ثانياً"

أد : ب جـ = $\cancel{\sqrt{١٠}}$ : ٢ $\cancel{\sqrt{١٠}}$

أد : ب جـ = ١ : ٢ ← "المطلوب ثالثاً"

(٤)

# معادلة الخط المستقيم

أ/ صلاح جمال

# معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

② أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات فى كل مما يأتى :

أ ٢س − ٣ص − ٦ = ٠    ب ٥ س + ٤ص − ١٠ = ٠    جـ $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

«الحل»

أ) ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ ⟸ ٣ص = ٢س − ٦

$\text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س} - ٢ \Leftarrow \text{م} = \frac{٢}{٣}$    جـ = −٢

ب) ٥س + ٤ص − ١٠ = ٠ ⟸ ٤ص = −٥س + ١٠

$\text{ص} = \frac{-٥}{٤}\text{س} + \frac{٥}{٢} \Leftarrow \text{م} = \frac{-٥}{٤}$    $\text{جـ} = \frac{٥}{٢}$

جـ) $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

$\frac{\text{٣س} + \text{٢ص}}{٦} = ١ \Leftarrow \text{٣س} + \text{٢ص} = ٦$

$\text{٢ص} = -\text{٣س} + ٦ \Leftarrow \text{ص} = \frac{-٣}{٢}\text{س} + ٣$

$\text{م} = \frac{-٣}{٢}$ ، جـ = ٣

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات الآتية :

أ ميله يساوى ٢ و يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

ب ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{\text{ص}-١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ .

جـ يمر بالنقطتين (٢، -١) ، (١، ١) .

د معادلة الخط المستقيم عندما م = صفر، جـ = صفر .

## "الحل"

(أ) م = ٢ ، جـ = ٧ ⟸ (ص = ٢س + ٧)

(ب) المستقيم المعطى $\frac{\text{ص}-١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$

٣ص − ٣ = س ⟸ ٣ص = س + ٣

ص = $\frac{١}{٣}$ س + ١ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٣}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١}{٣}$ ، جـ = −٣

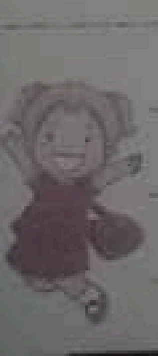
(ص = $\frac{١}{٣}$ س − ٣)

(جـ) م = $\frac{١-(-١)}{١-٢} = \frac{٢}{-١}$ = −٢

ص = −٢س + جـ (٢، −١) ∈ للمستقيم

−١ = −٢×٢ + جـ ⟸ جـ = ٣

(ص = −٢س + ٣)



④ ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية:

أ) ميله يساوي $\frac{-1}{2}$ ويقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوي وحدة واحدة.

ب) ميله يساوي ٢ ويقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوي ٣ وحدات.

جـ) يقطع من الجزءين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزءين طوليهما ٢، ٣ من الوحدات على الترتيب.

«الحل»

• يمكن تكوين معادلة الخط المستقيم ورسمه

لانه دالة خطية

(أ) ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ١

(ب) ص = ٢ س − ٣

(جـ) يقطع محور السينات في النقطة (٢ ، ٠)

يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣)

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

ص = م س + حـ      م = $\frac{٣}{-٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + حـ

٠ = $\frac{-٣}{٢}$ × ٢ + حـ      حـ = ٣

(ص = $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣)

⑤ الجدول الآتي يمثل علاقة خطية.

أ أوجد معادلة الخط المستقيم.

ب أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

جـ أوجد قيمة أ.

| س | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| ص = د (س) | ١ | ٣ | أ |

"الحل"

أ المستقيم يمر بالنقطتين (١،١) ، (٢،٣)

ص = م س + جـ      م = $\frac{٣-١}{٢-١}$ = ٢

ص = ٢س + جـ      ٣ = ٢ × ٢ + جـ      (جـ = -١)

ص = ٢س - ١ ← $\boxed{١}$

ب "يقطع جزء طوله وحدة واحدة من الاتجاه السالب للصادات"

جـ النقطة (٣، أ) ∈ للمستقيم ∴ تحقق معادلته

ص = ٢س - ١ ⟸ أ = ٢ × ٣ - ١

أ = ٥ ← $\boxed{٢}$

مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س -٤ص = ١٢، س = ٠، ص = ٠ يساوى :

أ) ٦ ب) ٧ جـ) ١٢ د) ٥

"الحل"

المثلث محدد بالمستقيمات ٣س - ٤ص = ١٢

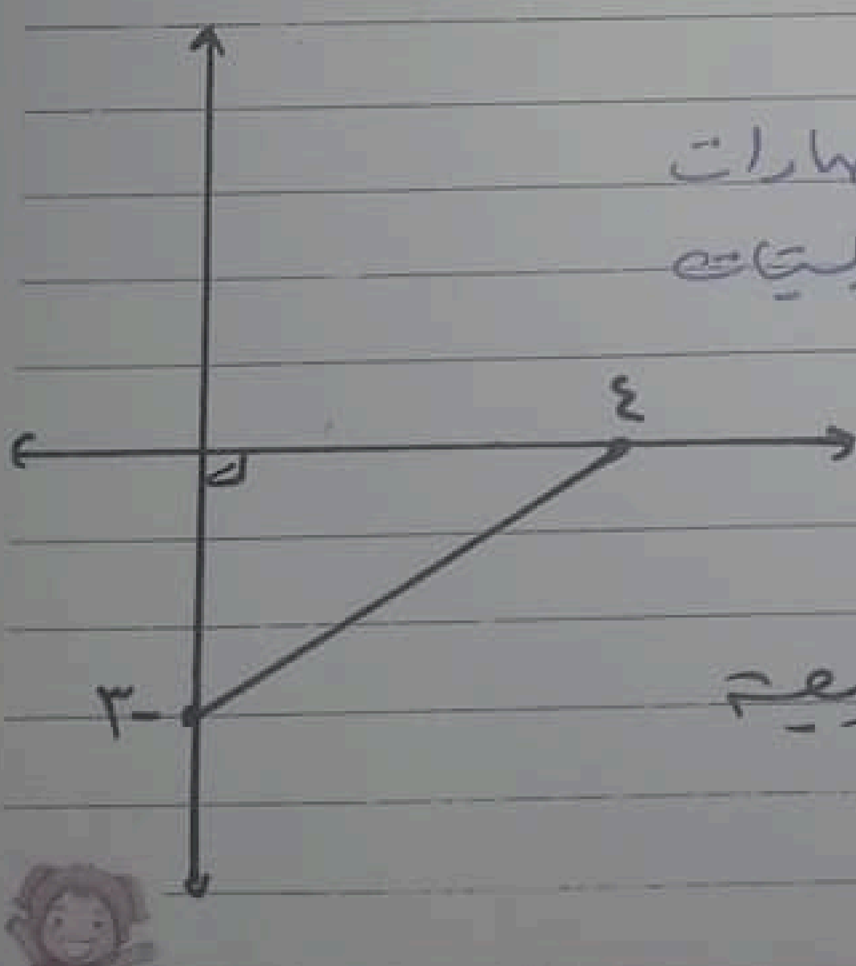
٤ص = ٣س - ١٢ ⟸ ص = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

* لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

(٤ ، ٠)

* لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

(٠ ، -٣)




* س = ٠ ⟸ معادلة محور الصادات
* ص = ٠ ⟸ معادلة محور السينات

* مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٣

= ٦ وحدة مربعة

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٥)، (٥، ٢)؛ أي من النقط التالية $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$

أ (١، ٦) ✓ ب (٢، ٣) جـ (٠، ٠) د (٣، -٤)

"الحل"

* لمعرفة أي هذه النقط تنتمي للمستقيم نكون معادلة المستقيم.

م = $\frac{٥ - ٢}{٢ - ٥}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = -١

ص = -س + جـ ⟸ ٥ = -٢ + جـ ⟸ جـ = ٧

$\boxed{\text{ص} = -\text{س} + ٧}$

* لمعرفة أي هذه النقط $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$ نعوض بكل نقطة

(١، ٦) ⟸ ص = -١ + ٧ = ٦ $\in \overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٢، ٣) ⟸ ص = -٢ + ٧ = ٥ $\notin \overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٠، ٠) ⟸ ص = ٠ + ٧ = ٧ $\notin \overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٣، -٤) ⟸ ص = -٣ + ٧ = ٤ $\notin \overleftrightarrow{\text{أب}}$

إذا كان أ (٣، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (س، ص) فإن إحداثيي نقطة جـ التي تجعل △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب هي:

أ (٦، -١)  ب (-٤، ٥)  جـ (٣، -٢)  د (٨، -٢)

## "الحل"

ميل $(\overleftrightarrow{\text{أب}})$ = $\frac{\text{-١ - ٥}}{\text{٢ - ٣}} = \frac{\text{-٦}}{\text{-١}}$ = ٦

النقطة التي تحقق أنه △ أ ب جـ قائم في ب
هي النقطة التي تجعل ميل $(\overline{\text{أب}})$ × ميل $(\overline{\text{ب جـ}})$ = -١

$\boxed{\text{ميل } (\overline{\text{ب جـ}}) = \frac{\text{ص + ١}}{\text{س - ٢}} = \frac{\text{-١}}{\text{٦}}}$

* بالتعويض بالنقطة (٦، -١) ⇐ $\frac{\text{-١ + ١}}{\text{٦ - ٢}}$ = صفر (لا تحقق)

* بالتعويض بالنقطة (-٤، ٥) ⇐ $\frac{\text{٥ + ١}}{\text{-٤ - ٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{-٦}}$ = -١

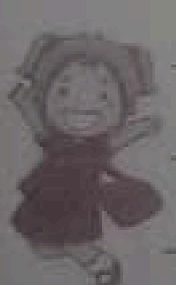
(لا تحقق)

* بالتعويض بالنقطة (٣، -٢) ⇐ $\frac{\text{-٢ + ١}}{\text{٣ - ٢}} = \frac{\text{-١}}{\text{١}}$ = -١

(لا تحقق)

* بالتعويض بالنقطة (٨، -٢) ⇐ $\frac{\text{-٢ + ١}}{\text{٨ - ٢}}$

= $\frac{\text{-١}}{\text{٦}}$ تحقق



③ أ $(٥ ، -٦)$، ب $(٣ ، ٧)$، جـ $(١ ، -٣)$؛ فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

«الحل»

* المستقيم المطلوب يمر بالنقطة أ $(٥ ، -٦)$ وبمنتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ $= \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٤}{٢}\right) = (٢ ، ٢)$

* المستقيم يمر بالنقطتين $(٥ ، -٦)$ ، $(٢ ، ٢)$

$م = \frac{-٦ - ٢}{٥ - ٢} = \frac{-٨}{٣}$

$ص = \frac{-٨}{٣} س + جـ \Leftarrow ٢ = \frac{-٨}{٣} \times ٢ + جـ$

$جـ = \frac{٢٢}{٣} \Leftarrow \left(ص = \frac{-٨}{٣} س + \frac{٢٢}{٣}\right)$

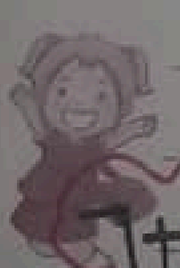
④ أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة منتصفها حيث أ $(١ ، ٣)$، ب $(٣ ، ٥)$.

«الحل»

المستقيم عمودي على $\overline{\text{أ ب}}$ $\Leftarrow$ ميل $\overline{\text{أ ب}}$ $= \frac{٢}{٢} = ١$

ميل المستقيم المطلوب $= -١$

المستقيم يمر بمنتصف $\overline{\text{أ ب}}$ $\Leftarrow$ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ $= (٢ ، ٤)$



$ص = -س + جـ \Leftarrow ٤ = -٢ + جـ \Leftarrow جـ = ٦ \Leftarrow \boxed{ص = -س + ٦}$

⑦ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٤، ٩ على الترتيب.

"الحل"

المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٤، ٠)
يقطع محور الصادات فى النقطة (٠، ٩)

م = $\frac{٠ - ٩}{٤ - ٠}$ = $\frac{-٩}{٤}$

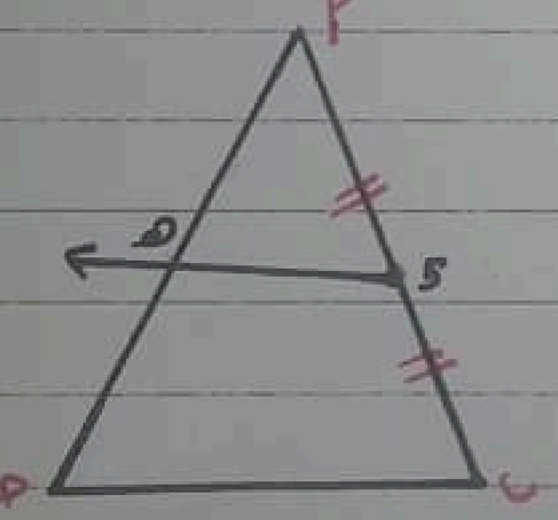
ص = $\frac{-٩}{٤}$ س + جـ   بالتعويض بالنقطة (٤، ٠)

٠ = $\frac{-٩}{٤}$ × ٤ + جـ ⟸ جـ = ٩

ص = $\frac{-٩}{٤}$ س + ٩

⑧ أ ب جـ مثلث فيه أ (١، ٢)، ب (٥، −٢)، جـ (−٣، ٤)، د منتصف $\overline{أب}$، رسم $\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ ؛ أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{د هـ}$.

"الحل"

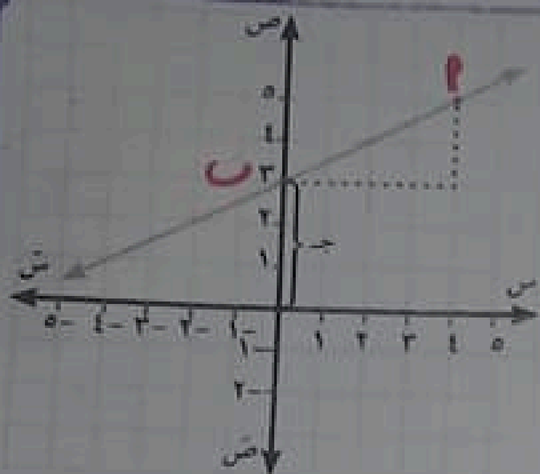



من هندسة الشكل هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

د = (٣، ٠) ، هـ = (−١، ٣)

م = $\frac{٠ - ٣}{٣ - ٢}$ = −٣     ص = −٣ س + جـ

٠ = −٣ × ٣ + جـ ⟸ جـ = ٩     ص = −٣ س + ٩




١٤ في الشكل المقابل أوجد :

أ ميل الخط المستقيم (م).

ب طول الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ).

جـ معادلة الخط المستقيم بمعلومية م، جـ.

د طول الجزء المقطوع من محور السينات .

هـ مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محوري الإحداثيات .

«الحل»

باختيار نقطتي أ، ب على الرسم أ = (٤، ٥) ب (٠، ٣)

م = $\frac{٥ - ٣}{٤ - ٠}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ← (١)

ص = $\frac{١}{٢}$ س + جـ بالتعويض بالنقطة (٠، ٣)

٣ = $\frac{١}{٢}$ × ٠ + جـ ⟸ جـ = ٣ ← (٢)

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠

٠ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ⟸ س = −٦

المستقيم يقطع محور السينات في النقطة (−٦، ٠) ← (٤)

مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة ← (٥)

⑤ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، -٥) و يوازي المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠ .

"الحل"

• ميل المستقيم المعطى = $\frac{\text{-معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-١}{٢}$

• ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٢}$

• ص = $\frac{-١}{٢}$ س + حـ      المستقيم يمر بالنقطة (٣، -٥)

-٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + حـ ⟸ حـ = $\frac{-٧}{٢}$

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − $\frac{٧}{٢}$

---

⑥ أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٢)، (-٢، - ١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

الحل

م = $\frac{٢+١}{٤+٢}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ص = $\frac{١}{٢}$ س + حـ      بالتعويض بالنقطة (٤، ٢)

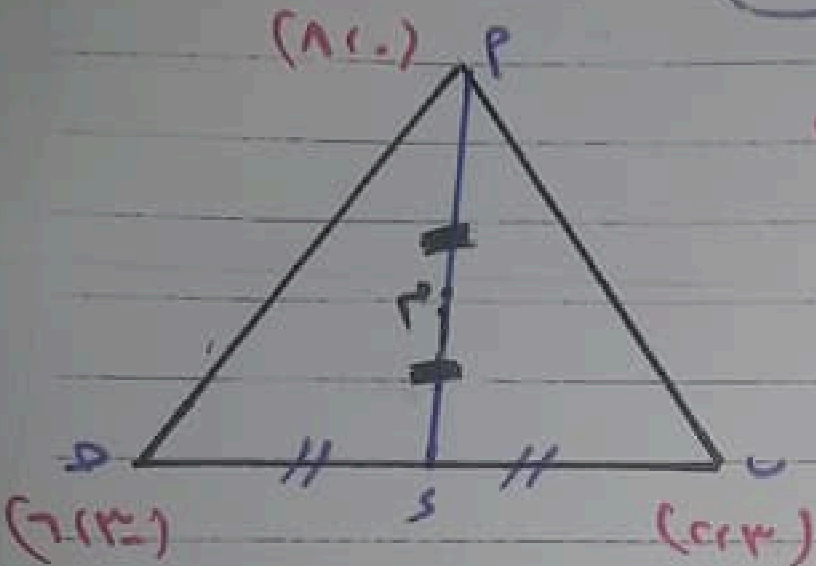
٢ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ + حـ      حـ = ٠

ص = $\frac{١}{٢}$ س

بوضع س = ٠

ص = ٠

- أد متوسط فى △ اب جـ، م منتصف أد
حيث أ (٠، ٨)، ب (٣، ٢)، جـ (-٣، ٦) أوجد :
أولاً : إحداثيى نقطة د هى (......... .........)
ثانيًا : إحداثيى نقطة م هى (.........، .........)




"الحل"

د منتصف ب جـ

د = (صفر ، ٤)

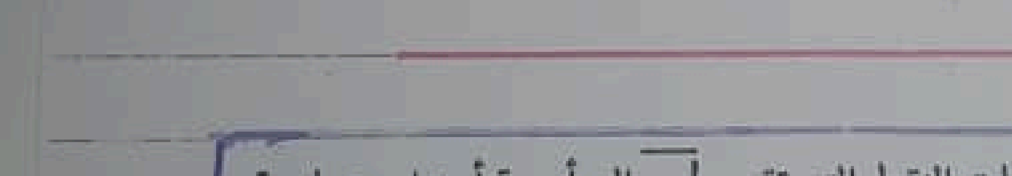
م منتصف أ د

$$م = \left( \frac{٠ + ٠}{٢} ، \frac{٨ + ٤}{٢} \right) = (٠ ، ٦)$$

---

(٢) إذا كانت أ (١، -٦)، ب (٩، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم أب إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول .

"الحل"




هـ منتصف أ ب

هـ = (٥ ، -٢) ، د منتصف أ هـ   د = (٣ ، -٤)

و منتصف هـ ب   و = (٧ ، ٠)