الدرس الأول

الحاصل الديكارتي

تمهيد :

الزوج المرتب :

يُسمى (ٲ ، ب) زوجاً مرتباً ، ويُسمى ٲ بالمسقط الأول ، ويُسمى ب بالمسقط الثاني .

ويلاحظ أن :

① { ٲ ، ب } = { ب ، ٲ } ② (ٲ ، ب) ≠ (ب ، ٲ) ③ { ٲ ، ب } ≠ (ٲ ، ب)

④ **يمكن تكرار العنصر في الزوج المرتب ، لكن لا يمكن تكرار العنصر في المجموعة.**

فمثلاً : يمكن أن نكتب : (٥ ، ٥) ولكن لا يمكن أن نكتب : { ٥ ، ٥ }

⑤ **يوجد مجموعة خالية " $\varnothing$ " ، لكن لا يوجد زوج مرتب خال.**

تساوي زوجين مرتبين :

إذا كان : (س ، ص) = (ٲ ، ب) فإن : س = ٲ ، ص = ب

فمثلاً : إذا كان (س ، ص) = (- ١ ، ٣) فإن : س = - ١ ، ص = ٣

، إذا كان : (س ، - ٧) = (٦ ، ص) فإن : س = ٦ ، ص = - ٧

مثال

أوجد قيم س ، ص في كل مما يأتي :

① (س + ١ ، ص^{٢}) = (٥ ، ٩)	③ (س - ٢ ، ص + ١) = (٢ ، - ٣)
② (س^{٢} + ١ ، ٧) = (١٧ ، ص^{٣} - ١)	④ (س + ٣ ، س + ٢ص) = (٥ ، ٦)

الحل

① ∵ (س + ١ ، ص^{٢}) = (٥ ، ٩)

∴ س + ١ = ٥
∴ س = ٥ - ١
∴ س = ٤

∴ ص^{٢} = ٩
∴ ص = ± ٣

② ∵ (س - ٢ ، ص + ١) = (٢ ، - ٣)

∴ س - ٢ = ٢
∴ س = ٢ + ٢
∴ س = ٤

∴ ص + ١ = - ٣
∴ ص = - ٣ - ١
∴ ص = - ٤

③ ∵ (س^{٢} + ١ ، ٧) = (١٧ ، ص^{٣} - ١)

∴ س^{٢} + ١ = ١٧
∴ س^{٢} = ١٧ - ١
∴ س^{٢} = ١٦
∴ س = ± ٤

∴ ص^{٣} - ١ = ٧
∴ ص^{٣} = ٧ + ١
∴ ص^{٣} = ٨
∴ ص = ٢

④ ∵ (س + ٣ ، س + ٢ص) = (٥ ، ٦)

∴ س + ٣ = ٥
∴ س = ٥ - ٣
∴ س = ٢

∴ س + ٢ص = ٦
∴ ٢ + ٢ص = ٦
∴ ٢ص = ٦ - ٢
∴ ٢ص = ٤
∴ ص = ٢

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين وتمثيله

إذا كان : س، ص **مجموعتين غير خاليتين ومنتهيتين فإن:**

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة ص **في المجموعة** س **يرمز له بالرمز** (س × ص)

ويقرأ (س **ضرب** ص) **وهو : مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى** س **، ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى** ص. **أي أن :** س × ص = { (ا ، ب) : ا ∈ س، ب ∈ ص }

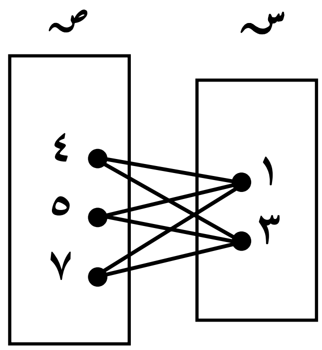
مثـــال

إذا كانت : س = { ١، ٣ } ، ص = { ٤، ٥، ٧ } **أوجد** س × ص

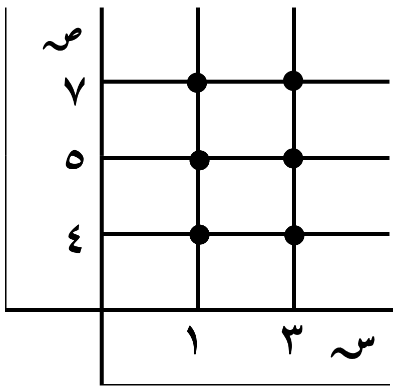
ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني (ديكارتي)

الحـــل

س × ص = { (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٧)، (٣، ٤) ، (٣، ٥)، (٣، ٧) }



مخطط سهمي



مخطط بياني (ديكارتي)

ملاحظات هامة

① **حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة** ص **في المجموعة** س **يرمز له بالرمز** (ص × س)

ويقرأ (ص **ضرب** س) **وهو : مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى** ص **، ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى** س. **أي أن :** ص × س = { (ا ، ب) : ا ∈ ص، ب ∈ س }

ففي المثال السابق يكون:

ص × س = { (٤، ١)، (٤، ٣)، (٥، ١)، (٥، ٣) ، (٧، ١)، (٧، ٣) }

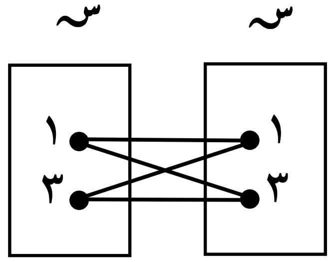
② **مما سبق نجد أن :** س × ص ≠ ص × س **(أي أن حاصل الضرب الديكارتي غير إبدالي)**

③ **حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة** س **في نفسها يرمز له بالرمز** (س × س) **أو** ($س^{٢}$)

ويقرأ (س **إثنين**) **وهو : مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول والثاني عنصر ينتمي إلى** س **. أي أن :** $س^{٢}$ = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ س }

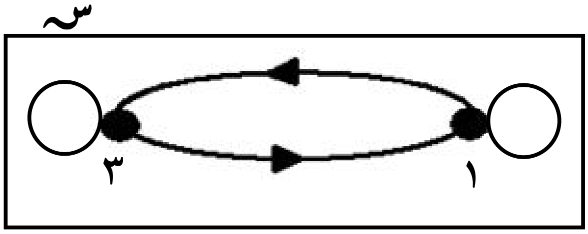
ففي المثال السابق يكون:

$\text{س}^{٢}$ = { (١،١)، (٣،١)، (١،٣)، (٣،٣) } والذي يمثل كالآتي :

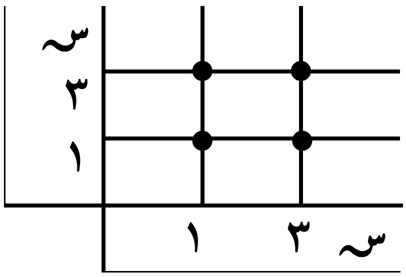


مخطط سهمي

أو



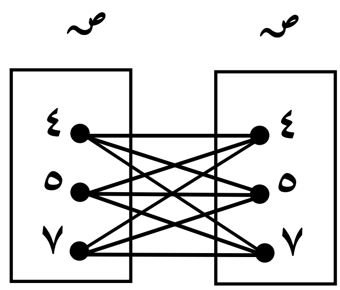
مخطط سهمي



مخطط بياني
(ديكارتي)

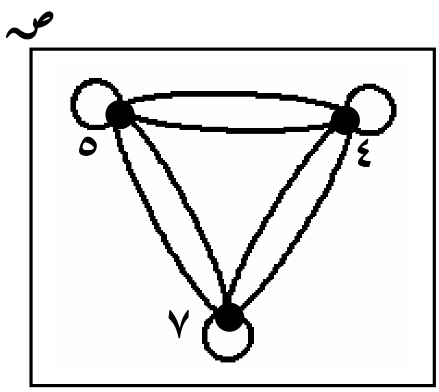
وأيضاً في المثال السابق يكون:

$\text{ص}^{٢}$ = { (٤،٤)، (٥،٤)، (٧،٤)، (٤،٥)، (٥،٥)، (٧،٥)، (٤،٧)، (٥،٧)، (٧،٧) }
والذي يمثل كالآتي :

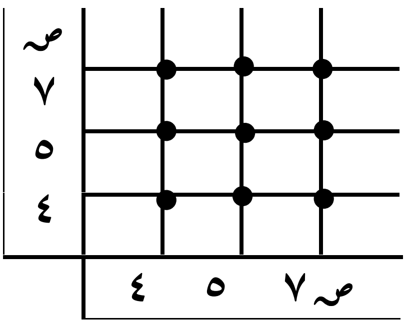


مخطط سهمي

أو



مخطط سهمي



مخطط بياني
(ديكارتي)

٤) س × ∅ = ∅ × س = ∅

٥) إذا رمزنا لعدد عناصر مجموعة ما بالرمز ن فإننا نجد من المثال السابق أن :

ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٣

ن(س × ص) = ٦   ن(ص × س) = ٦

✍ ن(س^{٢}) = ٤ ✍ ن(ص^{٢}) = ٩

أي أن : ن(س × ص) = ن(ص × س) = ن(س) × ن(ص)

ن(س^{٢}) = [ن(س)]^{٢} ،، ن(ص^{٢}) = [ن(ص)]^{٢}

مثال

إذا كانت : س = {٢،٦} ، ص = {٥،٦،٨} ، ع = {٣،٥} **أوجد :**

① ص × س ② س^{٢} ③ ع × ص

④ س × ع ⑤ ن(ع^{٢}) ⑥ ن(س × ص)

الحل

① ص × س = {٥،٦،٨} × {٢،٦}

= {(٥،٢)،(٥،٦)،(٦،٢)،(٦،٦)،(٨،٢)،(٨،٦)}

② س^{٢} = {٢،٦} × {٢،٦} = {(٢،٢)،(٢،٦)،(٦،٢)،(٦،٦)}

③ ع × ص = {٣،٥} × {٥،٦،٨}

= {(٣،٥)،(٣،٦)،(٣،٨)،(٥،٥)،(٥،٦)،(٥،٨)}

④ س × ع = {٢،٦} × {٣،٥}

= {(٢،٣)،(٢،٥)،(٦،٣)،(٦،٥)}

⑤ ن(ع^{٢}) = ن[(ع)]^{٢} = (٢)^{٢} = ٤

⑥ ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص) = ٢ × ٣ = ٦

مثال

إذا كانت : س = {١} ، ص = {٢،٣} ، ع = {٢،٥،٦}

مثل المجموعات س، ص، ع **بشكل فن ثم أوجد:**

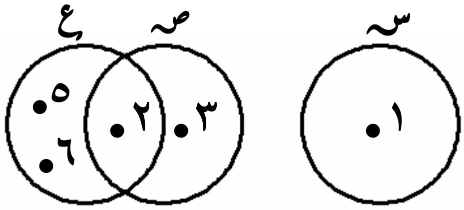
① س × ص ② ص × ع

③ س × ع ④ ص^{٢}

⑤ (س × ص) ∪ (ص × ع) ⑥ س × (ص ∩ ع)

⑦ (س ∪ ص) × (س ∩ ع) ⑧ (ع − ص) × (س ∩ ص)

الحل



① س × ص = {١} × {٢، ٣} = {(١، ٢)، (١، ٣)}	② ص × ع = {٢، ٣} × {٢، ٥، ٦} = {(٢، ٢)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٢) ، (٣، ٥)، (٣، ٦)}
③ س × ع = {١} × {٢، ٥، ٦} = {(١، ٢)، (١، ٥)، (١، ٦)}	④ ص² = {٢، ٣} × {٢، ٣} = {(٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٣، ٣)}
⑤ (س × ص) ∪ (ص × ع) = {(١، ٢)، (١، ٣)} ∪ {(٢، ٢)، (٢، ٥) ، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)} = {(١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ٢)، (٢، ٥) ، (٢، ٦)، (٣، ٢)، (٣، ٥)، (٣، ٦)}	⑥ س × (ص ∩ ع) = {١} × [{٢، ٣} ∩ {٢، ٥، ٦}] = {١} × {٢} = {(١، ٢)}
⑦ (س ∪ ص) × (س ∩ ع) = [{١} ∪ {٢، ٣}] × [{١} ∩ {٢، ٥، ٦}] = {١، ٢، ٣} × ∅ = ∅	⑧ (ع − ص) × (س ∩ ص) = [{٢، ٥، ٦} − {٢، ٣}] × [{١} ∩ {٢، ٣}] = {٥، ٦} × ∅ = ∅

ملاحظة هامة

إذا كان (أ، ب) ∈ س × ص **فإن** : أ ∈ س ، ب ∈ ص

فمثلاً: إذا كان (٥، ٤) ∈ س × ص **فإن** : ٥ ∈ س ، ٤ ∈ ص

وإذا كان (٤، ٢) ∈ {٣، ٤} × {٥، س} **فإن** : س = ٢

تمارين على الدرس الأول

❶ أوجد قيمة كل من س، ص في كل مما يأتي إذا كان :

① (س، ص) = (−٣، ٤)

② (س، ص) = (√٢٥ ، ∛٢٧)

③ (ص، ٧) = (−٢ ، س)

④ (س − ٢، ص + ١) = (٢ ، −٣)

⑤ (٦، ص − ٣) = (٢ − س، −١)

⑥ (س − ٧، ٢٦) = (−٢، ب^{٣} − ١)

⑦ (٢س^{٢} − ١، ص^{٣} − ٥) = (٧، ٥٩)

⑧ (٣س^{٣} + ٥، ٤ص − ١) = (٨ ، ١١)

⑨ (٢س + ص ، ٤) = (٧ ، س + ٣)

⑩ (٣، ص) = (٥س − ١، ٤س)

❷ إذا كان : س = { ١ ، ٣ } ، ص = { ٤ ، ٥ } **أوجد :**

① س × ص **ومثله بمخطط سهمي وأخر بياني.**

② ص × س **ومثله بمخطط سهمي وأخر بياني.**

③ س^{٢} **ومثله بمخطط سهمي .**

④ ص^{٢} **ومثله بمخطط ديكارتي.**

❸ إذا كان : س = { أ، ب، حـ } ، ص = { ب ، ء } **أوجد :**

① س × ص **ومثله بمخطط سهمي وأخر بياني.**

② ن(س^{٢})

③ ن(ص^{٢})

④ ن(ص × س)

❹ إذا كان : س = { ٥ } ، ص = { ٧ ، ٩ } **أوجد :**

① س × ص **ومثله بمخطط سهمي .**

② ص × س **ومثله بمخطط بياني.**

③ ن(ص^{٢})

④ ن(س^{٢})

❺ إذا كان : س = { م ، ن } **أوجد :** س^{٢} **ممثله بمخطط سهمي بطريقتين .**

❻ إذا كان : س × ص = { (١، ١)، (١، ٣)، (١، ٥) } **أوجد :**

① س، ص

② ص × س

③ ص^{٢}

❼ إذا كان: س × ص = { (٦ ، ٢)، (٢ ، ٢)، (٥ ، ٤)، (٦ ، ٤)، (٢ ، ٤)، (٥ ، ٢) }

أوجد:

① س، ص

② ص × س

③ ص^{٢}

❽ إذا كان: س × ص = { (٥ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٥ ، ٣)، (٢ ، ١) } **أوجد:** س^{٢}

❾ **إذا كان** : س = { ٢ ، - ١ } ، ص = { ٤ ، ٠ } ، ع = { ٤ ، ٥ ، - ٢ } **أوجد** :

① س × ص		② س × ع		③ س^٢

④ ن(س × ع)		⑤ ن(ص^٢)		⑥ ن(ع^٢)

❿ **إذا كان** : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } **أوجد** :

① (س ∩ ص) × ص		② (س - ص) × ص		③ (ص - س) × س

⓫ أكمل العبارات الآتية لتصبح صحيحة :

① **إذا كان** : س = { ٣ ، ١ } ، ص = { ٤ } **فإن** : ص × س = ...

② { ٥ } × { ٦ } = ...

③ **إذا كان**: س = { ٣ ، ٥ ، ٩ } **فإن** : ن(س^٢) = ...

④ **إذا كان**: (٢ ، ٥) ∈ ص × س **فإن** : (٥ ، ٥) ∈ ...... ، (٢ ، ٢) ∈ .... ، (٥ ، ٢) ∈ ....

⑤ **إذا كان** : س = { ٣ ، ٤ } **فإن** : س × ∅ = ...

⑥ **إذا كان** : س × ص = { (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩) }

فإن : س = ... ، ص = ...

⑦ **إذا كان**: س^٢ = { (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥) } **فإن** : س = ...

⑧ **إذا كان** : س × ص = { (١ ، ٧) ، (١ ، ٥) } **فإن** : (٥ ، ٧) ∈ ....

⑨ **إذا كان** : (٤ ، ٩) ∈ س × ص **فإن** : (٩ ، ٩) ∈ .... ، (٩ ، ٤) ∈ .... ، (٤ ، ٤) ∈ ....

⑩ **إذا كان** : ن(س) = ٣ ، ص = { ٢ ، ٤ } **فإن** : ن(ص × س) = ...

⑪ **إذا كان** : ن(س) = ٢ ، ن(ص) = ٤ **فإن** : ن(س × ص) = ...

⑫ **إذا كان** : ن(س) = ٤ ، ن(س × ص) = ١٢ **فإن** : ن(ص) = ...

⑬ **إذا كان** : ن(س × ص) = ١٥ ، ن(ص) = ٥ **فإن** : ن(س) = ...

⑭ **إذا كان** : ن(س^٢) = ٩ ، ن(ص) = ٥ **فإن** : ن(س × ص) = ...

⑮ **إذا كان** : ن(س^٢) = ٤ ، ن(ص^٢) = ١٦ **فإن** : ن(ص × س) = ...

⑯ **إذا كان** : ن(س^٢) = ٩ ، ن(ص^٢) = ٤٩ **فإن** : ن(س × ص) = ...

⑰ **إذا كان** : ن(س^٢) = ٩ ، ن(س × ص) = ١٥ **فإن** : ن(ص^٢) = ...

⑱ **إذا كان** : (س - ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) **فإن**: $\sqrt{\text{س} + ٢\text{ص}}$ = ...

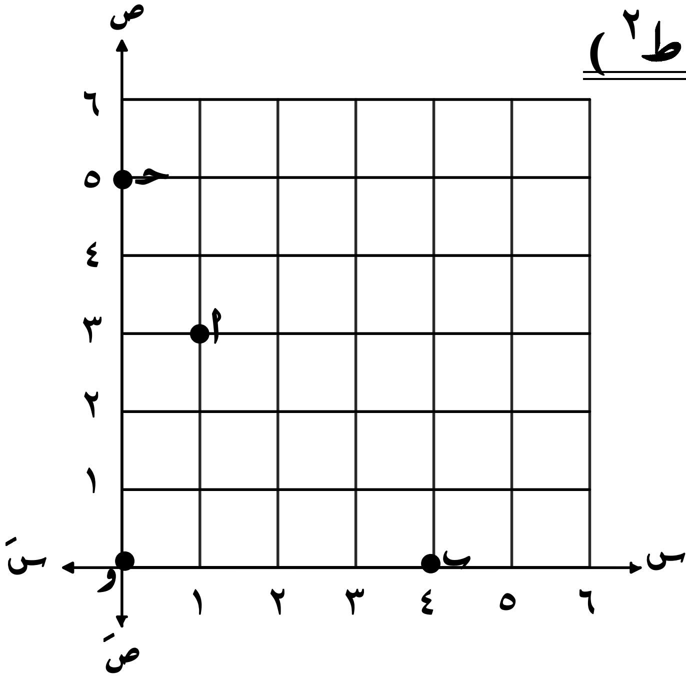
⑲ **إذا كان** : (س^٢ - ٥ ، $\frac{\text{ص}}{٢}$) = (١١ ، ٢) **فإن** : س = ... ، ص = ...

⑳ **إذا كان** : ($\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص + ٢) = (- ١ ، ٥) **فإن** : ص^س = ...

الدرس الثاني

الحاصل الديكارتي للمجموعات غير المنتهية والتمثيل البياني له

أولاً : الحاصل الديكارتي ط × ط (ط^{٢})



تذكر أن : ط = { ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، .... }

∴ ط × ط = { (س، ص) : س ∈ ط، ص ∈ ط }

نمثل الأعداد الطبيعية على مستقيمين متعامدين أحدهما أفقي ($\overleftrightarrow{س س َ}$) والآخر رأسي ($\overleftrightarrow{ص ص َ}$) يتقاطعان في النقطة " و " حيث و (٠، ٠) ثم نرسم مستقيمات رأسية وآخرى أفقية من النقط التي تمثل الأعداد الطبيعية على كل من المستقيمين : $\overleftrightarrow{س س َ}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص َ}$ فنحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ط × ط وتكون كل نقطة من نقاط هذه الشبكة ممثلة لأحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ط × ط.

فمثلاً : النقطة أ تمثل الزوج المرتب (١، ٣)

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٤، ٠)

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (٠، ٥)

النقطة و تمثل الزوج المرتب (٠، ٠)

ثانياً : الحاصل الديكارتي ص × ص (ص^{٢})

تذكر أن : ص = { ....، ٤، ٣، ٢، ١، ٠، −١، −٢، −٣، −٤، .... }

∴ ص × ص = { (س، ص) : س ∈ ص، ص ∈ ص }

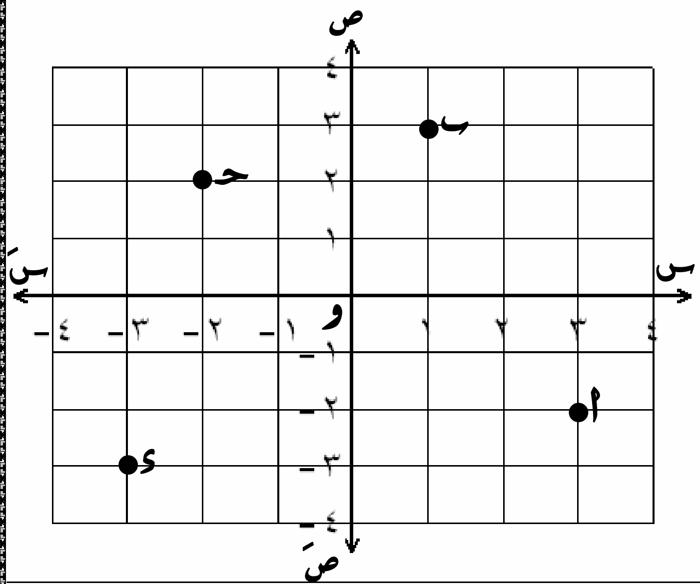
نمثل الأعداد الصحيحة على كل من المستقيمين المتعامدين ($\overleftrightarrow{س س َ}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص َ}$) يتقاطعان في النقطة " و " حيث و (٠، ٠) ثم نرسم مستقيمات رأسية وآخرى أفقية من النقط التي تمثل الأعداد الصحيحة على كل من المستقيمين ($\overleftrightarrow{س س َ}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص َ}$) فنحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ص × ص وتكون كل نقطة من نقاط هذه الشبكة ممثلة لأحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ص × ص.

فمثلاً : النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣، - ٢)

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (١، ٣)

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (- ٢، ٢)

النقطة ء تمثل الزوج المرتب (- ٣، - ٣)



ثالثاً : الحاصل الديكارتي ن × ن (ن^{٢})

تذكر أن : ن = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ }

∴ ن × ن = { (س، ص) : س ∈ ن، ص ∈ ن }

نمثل الأعداد النسبية على كل من المستقيمين المتعامدين ($\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$) يتقاطعان في النقطة " و " حيث و (٠، ٠) ثم نرسم مستقيمات رأسية وأخرى أفقية من النقط التي تمثل الأعداد النسبية على كل من المستقيمين ($\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$) فنحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ن × ن وتكون كل نقطة من نقاط هذه الشبكة ممثلة لأحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ن × ن .

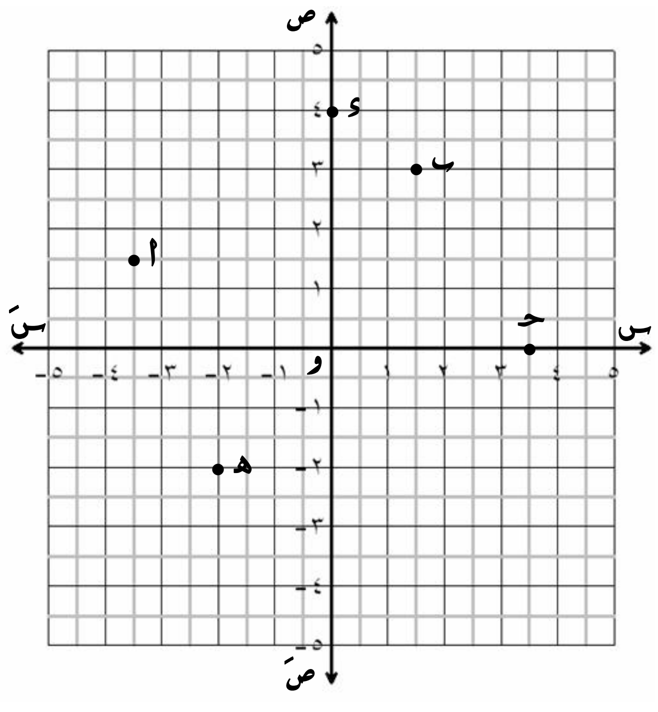
فمثلاً : النقطة أ تمثل الزوج المرتب (- ٣ $\frac{١}{٢}$ ، ١ $\frac{١}{٢}$)

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (١ $\frac{١}{٢}$ ، ٣)

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٠)

النقطة ء تمثل الزوج المرتب (٠، ٤)

النقطة هـ تمثل الزوج المرتب (- ٢، - ٢)

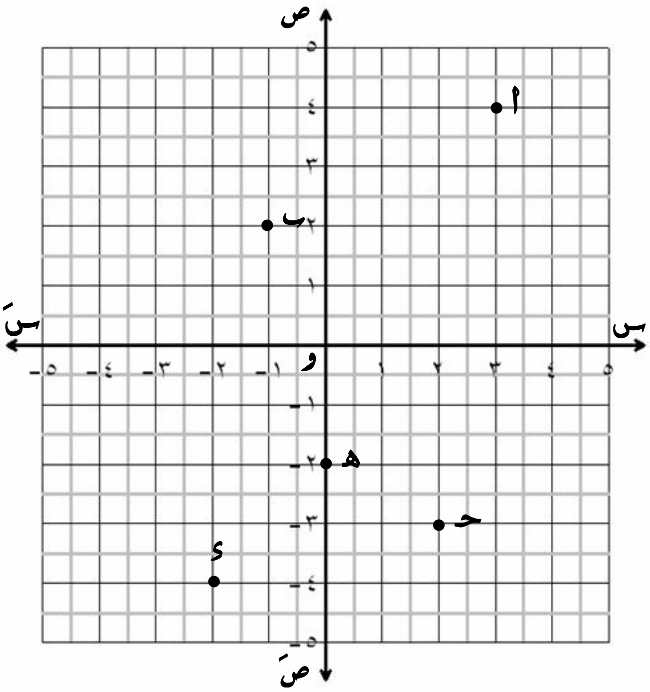


⑤ رابعاً : الحاصل الديكارتي ع × ع (ع^{2})

تذكر أن : ع = ى ∪ ىَ

∴ ع × ع = { (س، ص) : س ∈ ع، ص ∈ ع }

نمثل الأعداد الحقيقية على كل من المستقيمين المتعامدين ($\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$) يتقاطعان في النقطة " و " حيث و(٠، ٠) ثم نرسم مستقيمات رأسية وأخرى أفقية من النقط التي تمثل الأعداد الحقيقية على كل من المستقيمين ($\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$) فنحصل على الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ع × ع وتكون كل نقطة من نقاط هذه الشبكة ممثلة لأحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ع × ع .



فمثلاً : النقطة ا تمثل الزوج المرتب (٣، ٤)

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (- ١، ٢)

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (٢، -٣)

النقطة ء تمثل الزوج المرتب (- ٢، - ٤)

النقطة هـ تمثل الزوج المرتب (٠، - ٢)

ملاحظات

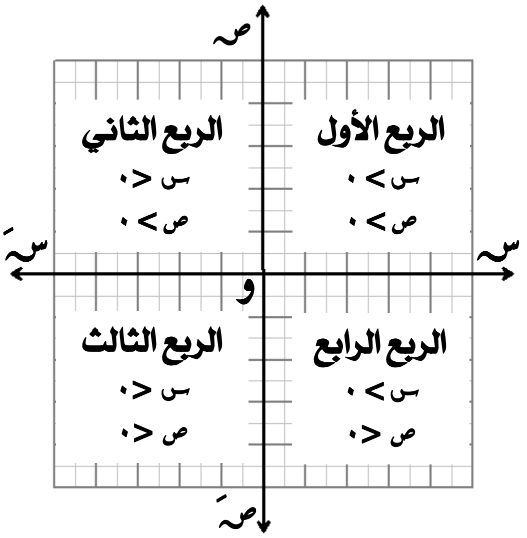
① **يسمى المستقيم** $\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ " *محور السينات أو المحور الأفقي* " **ويسمى** $\overrightarrow{\text{وس}}$ **الاتجاه الموجب لمحور السينات ،ويسمى** $\overrightarrow{\text{وسَ}}$ **الاتجاه السالب لمحور السينات .**

② **يسمى المستقيم** $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$ " *محور الصادات أو المحور الرأسي* " **ويسمى** $\overrightarrow{\text{وص}}$ **الاتجاه الموجب لمحور الصادات ،ويسمى** $\overrightarrow{\text{وصَ}}$ **الاتجاه السالب لمحور الصادات .**

③ **المستقيمان** $\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$ **متعامدان . لذا تسمى الشبكة البيانية المتعامدة .**

④ **نقطة تقاطع المحورين** $\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$ **تسمى نقطة الأصل ويرمز لها بالرمز "و" .**

⑤ إذا كانت النقطة ا تمثل الزوج المرتب (س،ص) فإن :



المسقط الأول "س" يسمى الإحداثي السيني للنقطة ا ،

المسقط الثاني "ص" يسمى الإحداثي الصادي للنقطة ا.

⑥ المستقيمان $\overleftrightarrow{سسَ}$ ، $\overleftrightarrow{صصَ}$:

يقسمان المستوى إلى أربعة أقسام كل قسم يسمى ربع

(١) مجموعة نقط الربع الأول = { (س،ص) : س ، ص ∈ ح ، س > ٠ ، ص > ٠ } (+ ، +)

(٢) مجموعة نقط الربع الثاني = { (س،ص) : س ، ص ∈ ح ، س < ٠ ، ص > ٠ } (- ، +)

(٣) مجموعة نقط الربع الثالث = { (س،ص) : س ، ص ∈ ح ، س < ٠ ، ص < ٠ } (- ، -)

(٤) مجموعة نقط الربع الرابع = { (س،ص) : س ، ص ∈ ح ، س > ٠ ، ص < ٠ } (+ ، -)

⑦ إذا كان الإحداثي السيني للنقطة يساوي صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات. (٠ ، ص)

⑧ إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة يساوي صفر فإن النقطة تقع على محور السينات. (س ، ٠)

مثـــال

أذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تقع عليه كل من النقاط الآتية :

ا (- ١،٣)	ب (٣،٥)	حـ (٣،- ٢)	ء (٠،٤)
هـ (- ٣،- ٩)	ل (- ٥،٠)	م (٠،- ٣)	ن (- ٧،٠)

الحــــل

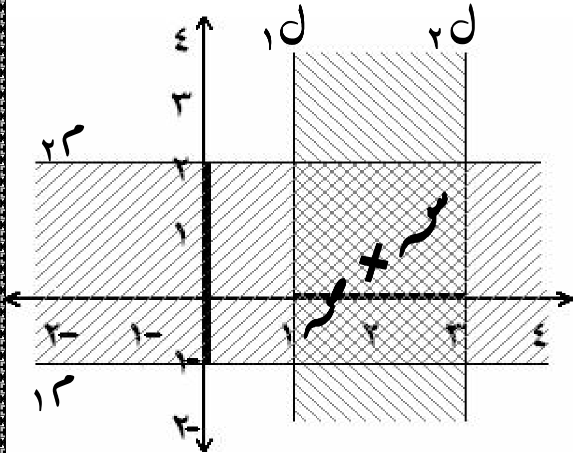
ا تقع في الربع الثاني	ب تقع في الربع الأول	حـ تقع في الربع الرابع	ء تقع على محور الصادات
هـ تقع في الربع الثالث	ل تقع على محور السينات	م تقع على محور الصادات	ن تقع على محور السينات

مثـــال

إذا كانت : س = [١،٣] ، ص = [- ١،٢] مثل بيانيا المنطقة التي تمثل س × ص

ثم بين أي النقط الآتية ينتمي إلى س × ص : (- ١،١) ، (٢،١) ، (٣،٢)

الحــــل



① نمثل الفترة س = [١، ٣] على محور السينات ونرسم خطين رأسيين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ من العددين ١ ، ٣ على الترتيب .

② نمثل الفترة ص = [−١، ٢] على محور الصادات ونرسم خطين أفقيين $م_{١}$ ، $م_{٢}$ من العددين −١ ، ٢ على الترتيب .

③ المنطقة المستطيلة الناتجة من تقاطع المستقيمات :

$ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $م_{١}$ ، $م_{٢}$ تمثل الحاصل الديكارتي س × ص

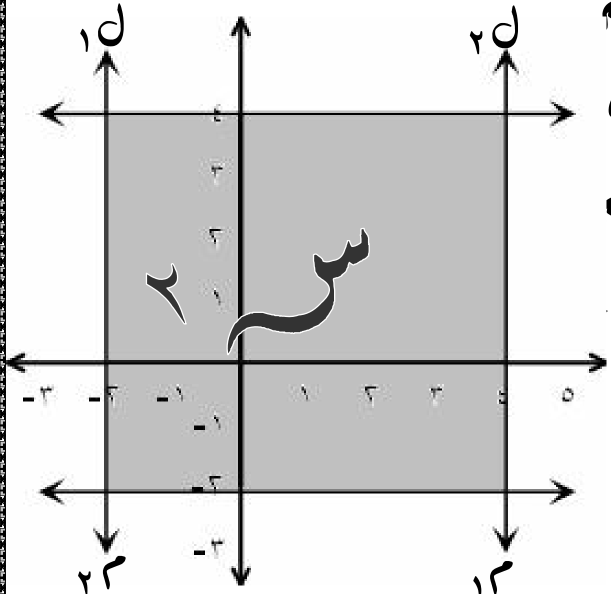
- **(−١، ١) ∉ س × ص**
- **(٢، ١) ∈ س × ص**
- **(٣، ٢) ∈ س × ص**

مثـــال

إذا كانت : س = [−٢، ٤] مثل بيانيا المنطقة التي تمثل $س^{٢}$

ثم بين أي النقط الآتية ينتمي إلى $س^{٢}$: (١، ٣)، (−١، ٣)، (٠، ٥)

الحـــل



① نمثل الفترة س = [−٢، ٤] على محور السينات ونرسم خطين رأسيين $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ من العددين −٢ ، ٤ على الترتيب

② نمثل الفترة س = [−٢، ٤] على محور الصادات ونرسم خطين أفقيين $م_{١}$ ، $م_{٢}$ من العددين −٢ ، ٤ على الترتيب

③ المنطقة المستطيلة الناتجة من تقاطع المستقيمات :

$ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $م_{١}$ ، $م_{٢}$ تمثل الحاصل الديكارتي $س^{٢}$

- **(١، ٣) ∈ $س^{٢}$**
- **(−١، ٣) ∈ $س^{٢}$**
- **(٠، ٥) ∉ $س^{٢}$**

MR. WALID ZAWAL

تمارين على الدرس الثاني

❶ على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتي (ع × ع) عين النقاط الآتية :
أ (٤،٥) ، ب (٦، -٣) ، حـ (-٢، ٧) ، ء (-١، ٦) ، هـ (-٤، -٥) ، م (٠، ٦) ، ك (٩، ٠)
ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من هذه النقاط .

❷ عين على الشبكة التربيعية المتعامدة $ع^2$ النقط الآتية: أ (-٢، ٣) ، ب (٢، ٣) ، حـ (٢، ٦)
ثم أوجد مساحة المثلث أ ب حـ ، طول $\overline{أحـ}$.

❸ عين على الشبكة التربيعية المتعامدة $ع^2$ النقط الآتية: أ (١، ٥) ، ب (١، ٢) ، حـ (٤، ٢)
ثم أوجد كل من : ق (∠ حـ) ، طول $\overline{أحـ}$.

❹ عين على الشبكة التربيعية المتعامدة $ع^2$ النقط الآتية: أ (-٣، ١) ، ب (-٣، -١)
، حـ (٣، -١) ثم أوجد إحداثيا النقطة " ء " التي تجعل الشكل أ ب حـ ء
مستطيلا وأوجد مساحته.

❺ عين على الشبكة التربيعية المتعامدة $ع^2$ النقط الآتية: أ (٣، -٢) ، ب (٣، ١) ، حـ (٠، ١)
ثم أوجد إحداثيا النقطة " ء " التي تجعل الشكل أ ب حـ ء مربعا وأوجد مساحته.

❻ إذا كانت : س = [٢، ٤] ، ص = [-١، ٣] أوجد المنطقة التي تمثل :
① س × ص ② ص × س ③ $س^2$ ④ $ص^2$

❼ كانت : س = [-٢، ٣] أوجد المنطقة التي تمثل : س × س ثم بين أي من النقاط الآتية
تنتمي للحاصل الديكارتي س × س : أ (١، ٢) ، ب (٣، -١) ، حـ (-١، ٤) ، ء (-٢، ٠)

❽ أكمل العبارات الآتية :

① النقطة (-١، ٢) تقع في الربع ....
② إذا كانت النقطة (٥، ب -٧) تقع على محور السينات فإن ب = ...
③ إذا كانت النقطة (س -٤، ٢ - س) حيث س ∋ ص تقع في الربع الثالث فإن س = ...
④ إذا كانت النقطة (س +٢، ٩) تقع على محور الصادات فإن س = ...
⑤ النقطة (٩، -٥) تقع في الربع ....
⑥ النقطة (٣، ٠) تقع على محور ....
⑦ إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع في الربع الثالث فإن : أ ب ....صفر
⑧ إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع في الربع الثاني فإن : أ ب ....صفر
⑨ إذا كانت النقطة (أ، ب) تقع على محور الصادات فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...
⑩ إذا كانت النقطة (س -٣، ٥ - س) حيث س ∋ ص تقع في الربع الأول فإن س = ...

الدرس الثالث

العلاقــات

أولا: العلاقة من مجموعة إلى مجموعة آخرى.

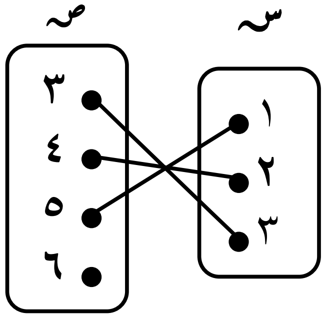
العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عنصر ص.
إذا كانت ع علاقة من س إلى ص فإن بيان ع هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر من س ومسقطها الثاني عنصر من ص ويرتبط المسقط الأول بالمسقط الثاني في كل من هذه الأزواج المرتبة بهذه العلاقة.

مثــال

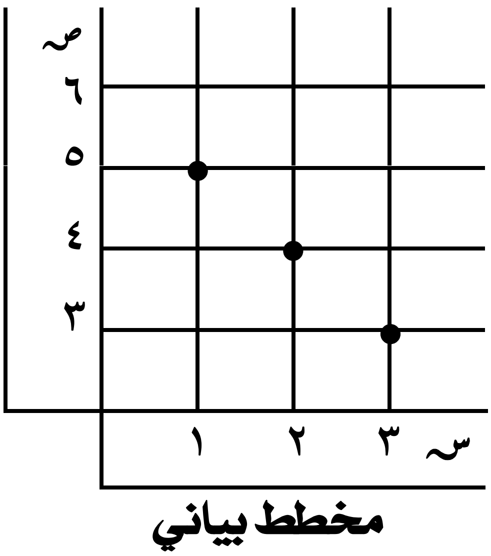
إذا كانت : س = { ١، ٢، ٣ } ، ص = { ٣، ٤، ٥، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب" تعني أن : ا + ب = ٦ ∀ ا ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.

الحــل

ع = { (١، ٥) ، (٢، ٤) ، (٣، ٣) }



مخطط سهمي



مخطط بياني

ملاحظات

① **إذا كان: (ا، ب) ∈ ع فإننا نكتب ا ع ب (أي العنصر ا من س يرتبط بالعلاقة ع مع العنصر ب من ص)**
② **إذا كان: (ا، ب) ∉ ع فإننا نكتب ا ~~ع~~ ب (أي العنصر ا من س لا يرتبط بالعلاقة ع مع العنصر ب من ص)**
③ **العلاقة ع من س إلى ص مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي "س × ص" (ع ⊂ س × ص)**
④ **إذا كان: ع ⊂ س × ص فإن ع تكون علاقة من س إلى ص**

*** الرمز: " ∀ " يقرأ لكل**

مثـــال

إذا كانت : س = { ٢، ٥ } ، ص = { ٣، ٥، ٧ }

فاكتب علاقتين من س إلى ص وعلاقات من ص إلى س.

الحـــل

نفرض أن : " ع$_1$ ، ع$_2$ " **علاقتين من س إلى ص** ، " ع$_3$ ، ع$_4$ " **علاقتين من ص إلى س**

∵ س × ص = { (٢، ٣) ، (٢، ٥) ، (٢، ٧) ، (٥، ٣) ، (٥، ٥) ، (٥، ٧) }

∴ ع$_1$ = { (٢، ٣) ، (٢، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥، ٧) }

، ع$_2$ = { (٢، ٥) ، (٢، ٧) ، (٥، ٥) }

∵ ص × س = { (٣، ٢) ، (٣، ٥) ، (٥، ٢) ، (٥، ٥) ، (٧، ٢) ، (٧، ٥) }

∴ ع$_3$ = { (٣، ٥) ، (٥، ٢) }

، ع$_4$ = { (٣، ٢) ، (٥، ٥) ، (٧، ٥) }

مثـــال

إذا كانت : س = { ١، ٤، ٥ } ، ص = { ٢، ٣ } **بين أي المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص.**

① ع$_1$ = { (٤، ٢) ، (١، ٢) ، (٥، ٣) }
② ع$_2$ = { (١، ٢) ، (٣، ١) ، (٤، ٣) }
③ ع$_3$ = { (٤، ٢) ، (٤، ٣) ، (٥، ٢) ، (١، ٣) }
④ ع$_4$ = { (١، ٣) ، (٢، ٦) }

الحـــل

∵ س × ص = { (١، ٢) ، (١، ٣) ، (٤، ٢) ، (٤، ٣) ، (٥، ٢) ، (٥، ٣) }

① ع$_1$ = { (٤، ٢) ، (١، ٢) ، (٥، ٣) } ⊂ س × ص

∴ ع$_1$ **علاقة من س إلى ص.**

② ع$_2$ = { (١، ٢) ، (٣، ١) ، (٤، ٣) } ⊄ س × ص (**لأن:** (٣، ١) ∉ س × ص)

∴ ع$_2$ **ليست علاقة من س إلى ص.**

③ ع$_3$ = { (٤، ٢) ، (٤، ٣) ، (٥، ٢) ، (١، ٣) } ⊂ س × ص

∴ ع$_3$ **علاقة من س إلى ص.**

④ ع$_4$ = { (١، ٣) ، (٢، ٦) } ⊄ س × ص (**لأن:** (٢، ٦) ∉ س × ص)

∴ ع$_4$ **ليست علاقة من س إلى ص.**

ثانيا: العلاقة من مجموعة إلى نفسها (العلاقة على مجموعة).

إذا كانت ع علاقة من المجموعة س إلى س فإننا نقول : ع علاقة على س
ويكون: ع ⊂ س^{٢}

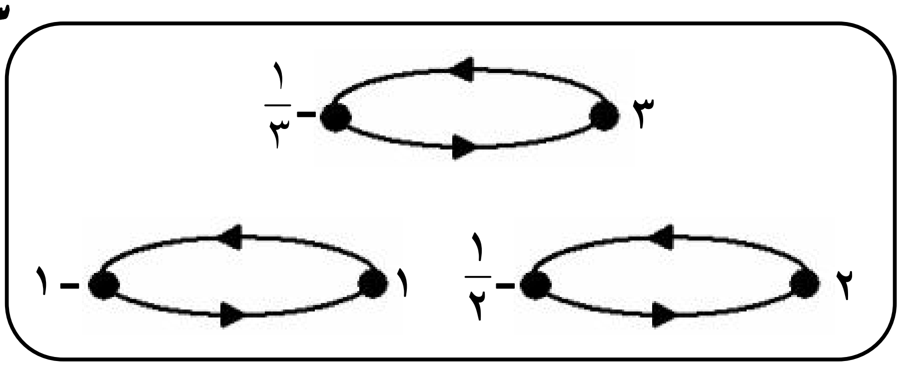
مثال

إذا كانت : س = {٣، ٢، ١، -$\frac{١}{٣}$، -$\frac{١}{٢}$، -١} **وكانت ع علاقة على س حيث "أ ع ب" تعني أن :** أ × ب = -١ ∀ أ ∈ س، ب ∈ س **أكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.**

الحل

ع = {(٣، -$\frac{١}{٣}$)، (٢، -$\frac{١}{٢}$)، (١، -١)، (-$\frac{١}{٣}$، ٣)، (-$\frac{١}{٢}$، ٢)، (-١، ١)}

س



مخطط سهمي

مثال

إذا كانت : س = {١، ٢، ٣، ٤} **وكانت ع علاقة على س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن :**

أ + ب = ٥ ∀ أ ∈ س، ب ∈ س.

① **أكتب بيان ع.** | ② **إذا كان :** (ل، ٢) ∈ ع **أوجد قيمة ل.** | ③ **إذا كان :** ٤ ع ك **أوجد قيمة ك.**

الحل

① ع = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

② ∵ (ل، ٢) ∈ ع ، (٣، ٢) ∈ ع ∴ ل = ٣

③ ∵ ٤ ع ك ، ٤ ع ١ ∴ ك = ١

تمارين على الدرس الثالث

❶ **إذا كانت :** س = { ١، ٢، ٣ }، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن :** ا + ب = ٧ ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

❷ **إذا كانت :** س = { ٢، ٤، ٥، ٧ }، ص = { ٤، ٥، ٦، ٧، ٩ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن :** ا ≥ ب ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

❸ **إذا كانت :** س = { -٢، -١، ١، ٢ }، ص = { $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٨ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن :** ا^{٣} = ب ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

❹ **إذا كانت :** س = { ١، ٢، ٣ }، ص = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن :" العدد ا هو المعكوس الضربي للعدد ب ".** ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

❺ **إذا كانت** س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } **وكانت ع علاقة من س إلي ص حيث" ا ع ب " تعني أن :** ب = ٢ا - ١ ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص. **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وإذا كان:** ك ع ٧ **أوجد قيمة :** ك.

❻ **إذا كانت :** س = { ٢، ٣، ٤ }، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن :** ا + ب = **عدد أولي.** ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

(إرشاد: مجموعة الأعداد الأولية = { ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ... })

❼ **إذا كانت :** س = { ٢، ٣، ٤ }، ص = { ٦، ٨، ١٠، ١١، ١٥ } **وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ا ع ب " تعني أن : " ا تقسم ب "** ∀ ا ∈ س، ب ∈ ص **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.**

(إرشاد: التعبير ا تقسم ب يعني أن ب تقبل القسمة على ا دون باق)

❽ **إذا كانت :** س = { ٢، ١، ٠، $\frac{١}{٢}$ } **وكانت ع علاقة على س حيث " ا ع ب " تعني أن : " العدد ا معكوسا ضربيا للعدد ب "** ∀ ا ∈ س، ب ∈ س **اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.**

(إرشاد: تذكر أن العدد صفر ليس له معكوس ضربي لأن القسمة على صفر غير معرفة)

⑨ إذا كانت : س = { ١، ٢، ٤، ٦ } وكانت ع علاقة على س حيث " ا ع ب " تعني أن : " ا مضاعف ب " ∀ ا ∈ س، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.

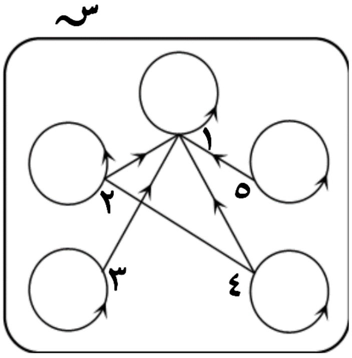
(إرشاد : التعبير ا مضاعف ب يعني أن ا يقبل القسمة على ب دون باق)

⑩ إذا كانت : س = { -١، ٠، ١ } وكانت ع علاقة على س حيث " ا ع ب " تعني أن : " ا = ب^{٢} " ∀ ا ∈ س، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني.

⑪ إذا كانت : س = { ١، ٢، ٣ } وكانت ع علاقة على س حيث " ا ع ب " تعني أن : " ا × ب = عددا أوليا " ∀ ا ∈ س، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.

⑫ إذا كانت : س = { ٤٣، ١٨، ٢٦، ٨١، ٦٢ } وكانت ع علاقة على س حيث " ا ع ب " تعني أن: "حاصل ضرب رقمي العدد ا = حاصل ضرب رقمي العدد ب" ∀ ا ∈ س، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي.

⑬ الشكل المقابل :



يمثل المخطط السهمي للعلاقة ع المعرفة على المجموعة س = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥ }

اكتب بيان ع ومثله بمخطط بياني.

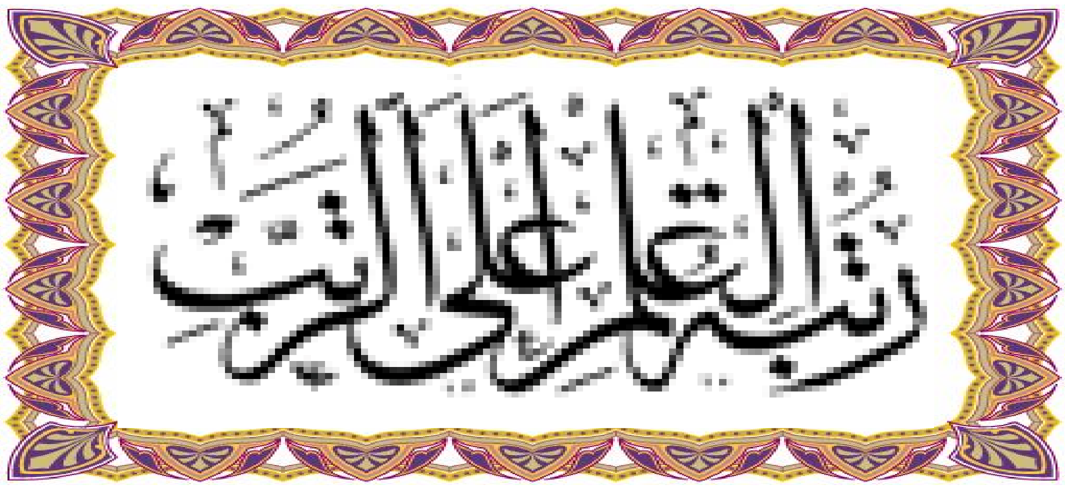
⑭ إذا كانت : س = { ٢، ٣، ٤ }، ص = { ١، ٤ } بين أي المجموعات الآتية تكون علاقة من س إلى ص.

① ع$_{١}$ = { (٤، ١)، (٢، ٤)، (٣، ٤) }

② ع$_{٢}$ = { (٢، ١)، (٣، ١)، (٤، ١) }

③ ع$_{٣}$ = { (٤، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٢)، (٤، ١) }

④ ع$_{٤}$ = { (٢، ٤)، (٤، ٤) }



الدرس الرابع

الدالـــــة (التطبيق)

تعريف :

يقال لعلاقة ع من س إلى ص أنها دالة إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :

(١) كل عنصر من عنصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة ع .

(٢) كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص في المخطط السهمي الممثل للعلاقة ع .

(٣) كل خط رأسي تقع علية نقطة واحدة فقط في المخطط البياني الممثل للعلاقة ع .

مثـــال

إذا كانت: س = { ١، ٢، ٣ } ، ص = { ٣، ٤، ٥، ٦ } بين أي العلاقات الآتية يمثل دالة من س إلى ص.

① ع١ = { (١، ٥)، (٢، ٤)، (٣، ٦) }

② ع٢ = { (١، ٦)، (٢، ٥)، (٣، ٣)، (٢، ٣) }

③ ع٣ = { (٢، ٦)، (٣، ٥) }

الحــــل

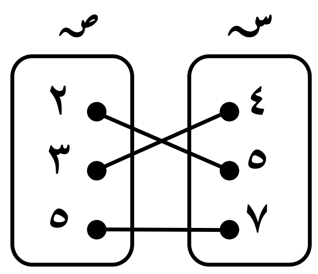
① ع١ دالة لأن كل عنصر من عنصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة.

② ع٢ ليست دالة لأن العنصر "٢" ظهر كمسقط أول مرتين في الزوجين المرتبين (٢، ٣) ، (٢، ٥)

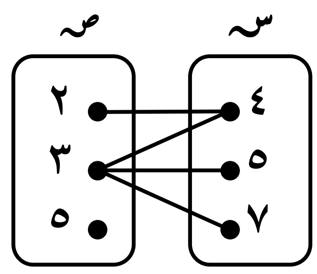
③ ع٣ ليست دالة لأن العنصر "١" لم يظهر كمسقط أول في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة.

مثـــال

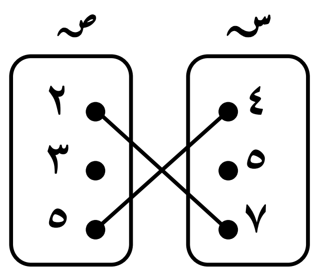
إذا كانت: س = { ٤، ٥، ٧ } ، ص = { ٢، ٣، ٥ } بين أي المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص.



ت١



ت٢



ت٣

الحـــل

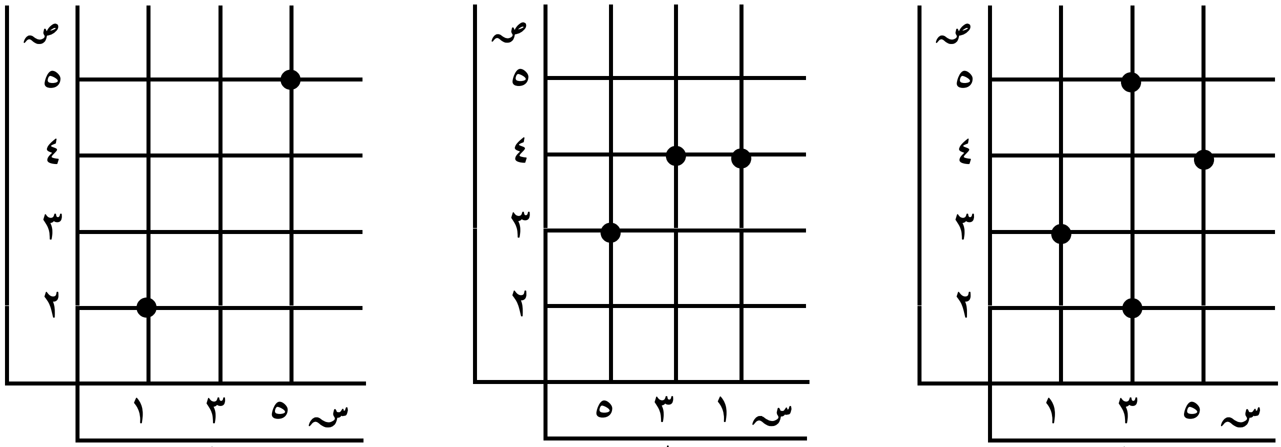
ت١ دالة لأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص.

ت٢ ليست دالة لأن العنصر "٤" خرج منه سهمان إلى عناصر ص.

ت٣ ليست دالة لأن العنصر "٥" لم يخرج منه أي سهم إلى عناصر ص.

مثـــال

إذا كانت: س = { ١، ٣، ٥ } ، ص = { ٢، ٣، ٤، ٥ } بين أي المخططات البيانية الآتية يمثل دالة من س إلى ص.



ك١   ك٢   ك٣

الحـــل

ك١ ليست دالة لأن الخط الرأسي المار بالعنصر "٣" تقع علية نقطتين.

ك٢ دالة لأن كل خط رأسي تقع عليه نقط واحدة فقط .

ك٣ ليست دالة لأن الخط الراسي المار بالعنصر "٣" لا تقع علية أيه نقاط

التعبير الرمزي عن الدالة :

يرمز للدالة عادة بأحد الرموز (أو ن أو ر أو ك أو أو......)

فإذا كانت دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإننا نكتب : س ⟵ ص

أو (س) = ص حيث س ∈ س ، ص ∈ ص

ملاحظة :

إذا كانت دالة من س إلى س (: س ⟵ س) فإننا نقول دالة على س.

المجال و المجال المقابل و المدى للدالة :

إذا كانت دالة س إلى ص فإن :

(١) المجموعة س تسمى مجال الدالة

(٢) المجموعة ص تسمى المجال المقابل للدالة

(٣) مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة تسمى مدى الدالة

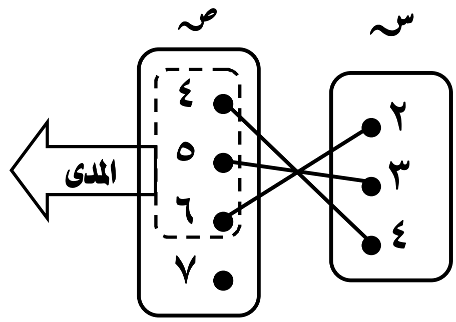
وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

مثال

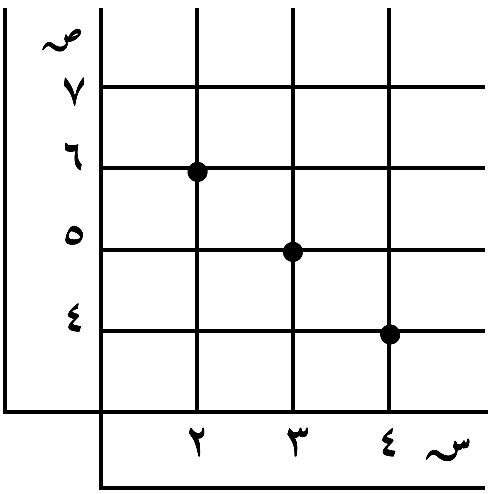
إذا كانت: س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٤، ٥، ٦، ٧} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن: أ + ب = ٨ ∀ أ ∈ س، ب ∈ ص. اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني. وبين مع ذكر السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا ؟ وإذا كانت دالة اكتب كلا من مجالها ومجالها المقابل ومداها.

الحل

ع = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٤، ٤)}



المخطط سهمي



المخطط بياني

∵ كل عنصر من عنصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة ع .

∴ ع دالة من س إلى ص.

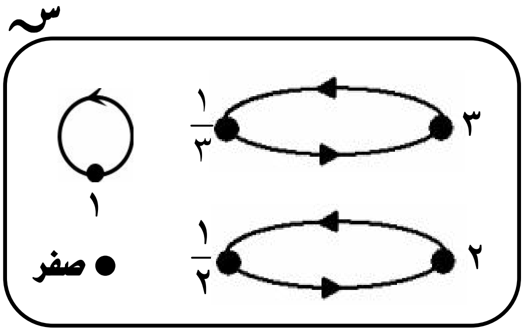
- **المجال = س = {٢، ٣، ٤}**
- **المجال المقابل = ص = {٤، ٥، ٦، ٧}**
- **المدى = {٤، ٥، ٦}**

مثـــال

إذا كانت: س = {٣، ٢، ١، ٠، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٢}$} وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني أن : أ معكوس ضربي للعدد ب ∀ أ ∈ س ، ب ∈ س. اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة على س أم لا ؟ وإذا كانت دالة اكتب المدى.

الحـــل

ع = {(٣، $\frac{١}{٣}$)، (٢، $\frac{١}{٢}$)، (١، ١)، ($\frac{١}{٣}$، ٣)، ($\frac{١}{٢}$، ٢)}



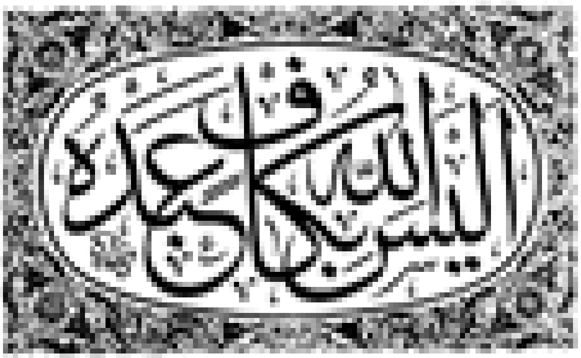
المخطط سهمي

∵ العنصر صفر لم يظهر كمسقط أول في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة.

∴ ع ليست دالة على س.

تذكر أن: العدد صفر ليس له معكوس ضربي!! لماذا ؟

لاحظ أن: العلاقة ع في المثال السابق ليست دالة وبالتالي ليس لها مجال أو مجال مقابل أو مدى !!!



﴿ اللهم صلي على محمد وعلى آل محمد كما صليت على إبراهيم وعلى آل إبراهيم وبارك

على محمد وعلى آل محمد كما باركت على إبراهيم وعلى آل إبراهيم ﴾

في العالمين إنك حميد مجيد

تمارين على الدرس الرابع

❶ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن : س تسمى ....

(أ) مدى الدالة د		(ب) مجال الدالة د

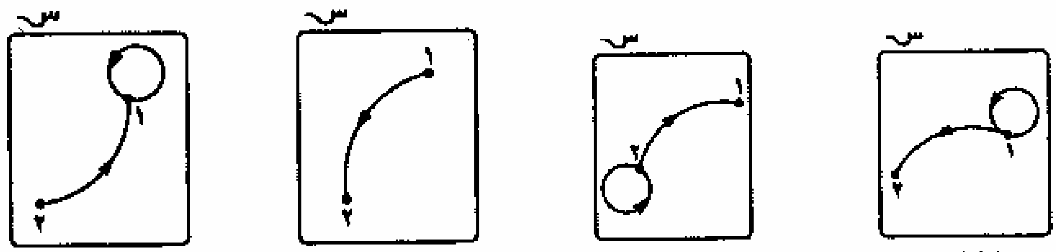
(جـ) المجال المقابل للدالة د		(د) قاعدة الدالة د

② إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن مجموعة صور عناصر المجموعة س بواسطة الدالة د تسمى ....

(أ) مجال الدالة.		(ب) المجال المقابل للدالة.

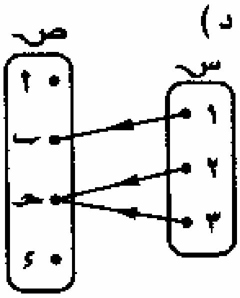
(جـ) مدى الدالة.		(د) قاعدة الدالة.

③ إذا كانت : س = {١ ، ٢} فإن : المخطط السهمي الذي يمثل دالة على س هو ....



(أ)		(ب)		(جـ)		(د)

④ الشكل المقابل يمثل دالة مداها ....



(أ) {١ ، ٢ ، ٣}		(ب) {أ ، ب ، حـ ، ء}

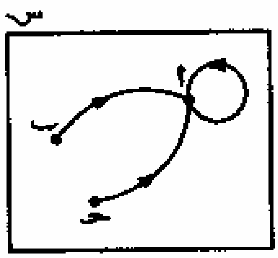
(جـ) {حـ ، ب}		(د) {أ ، ء}

⑤ إذا كانت ع دالة بيانها {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٧)} فإن مداها = ...

(أ) {١ ، ٢ ، ٤}		(ب) {٢ ، ٤ ، ٧}

(جـ) {٣ ، ٥ ، ٧}		(د) {١ ، ٣ ، ٥}

⑥ الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها ....



(أ) {أ}		(ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) {أ ، ب}		(د) {ب ، حـ}

⑦ إذا كانت : د (س) = س^{٢} – ١ فإن : د (١) = ...

(أ) صفر		(ب) ٢		(جـ) –٢		(د) ١

⑧ إذا كانت : ع دالة من س إلى ص حيث س = {٢ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٦ ، ٧}
وكانت ع = {(٢ ، ٦) ، (أ ، ٦) ، (٥ ، ٦)} فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٦

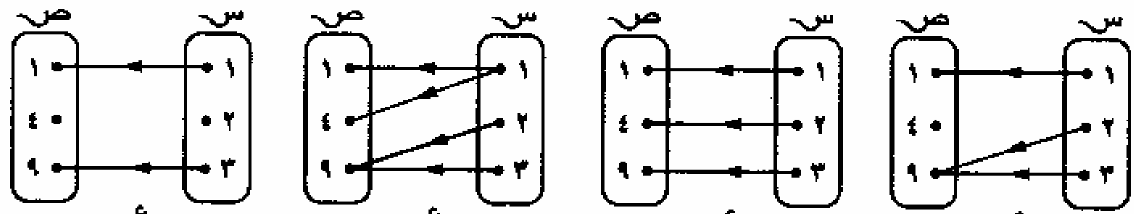
⑨ إذا كانت : س = {٢ ، ٤ ، ٦} وكان ن(ص) = ٤ وكانت الدالة د : س ← ص
، د (س) = $س^2$ − ١ فإن : ص يمكن أن تكون ....

(أ) {٣ ، ٧ ، ١٣} (ب) {٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٤٥}

(جـ) {٣ ، ١٥ ، ٣٥} (د) {٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥}

---

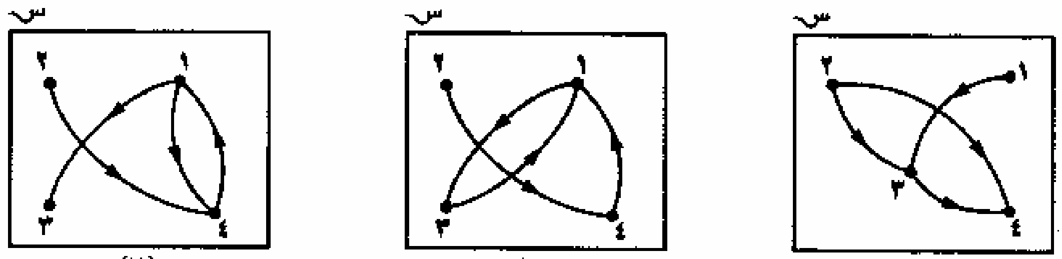
❷ أي من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت العلاقة تمثل دالة ، فأوجد مدى الدالة :



ع١ ع٢ ع٣ ع٤

---

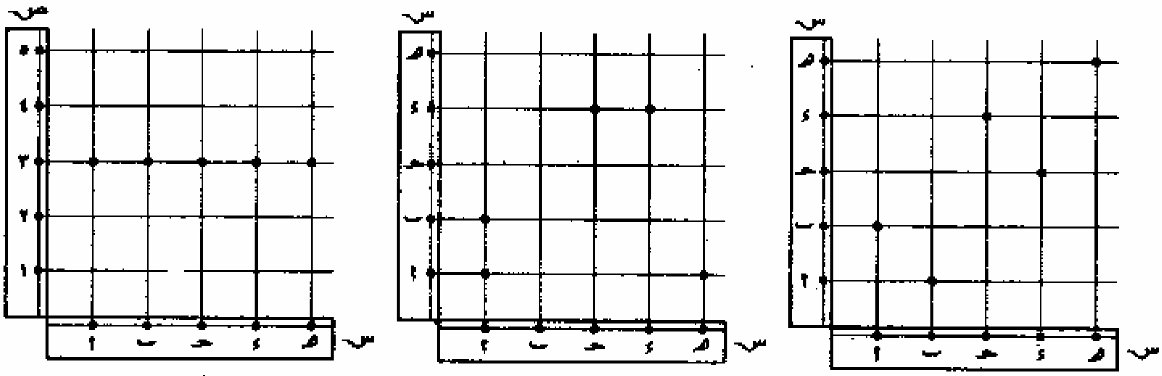
❸ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} فأي من المخططات السهمية الآتية تعبر عن دالة على المجموعة س؟



(١) (٢) (٣)

---

❹ بيّن أي المخططات البيانية الآتية يعبر عن دالة واذكر بيان كل دالة ومداها :



ت١ ت٢ ت٣

❺ إذا كانت : س = {أ ، ب ، جـ} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

فأي العلاقات الآتية دالة من س إلى ص وأيها ليست دالة مع ذكر السبب وعين مدى الدالة :

(١) $ع_١$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٤)}

(٢) $ع_٢$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٤) ، (ب ، ٦) ، (جـ ، ٨)}

(٣) $ع_٣$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٨) ، (جـ ، ١٠)}

(٤) $ع_٤$ = {(أ ، ٢) ، (أ ، ٤) ، (ب ، ٦) ، (ب ، ٨) ، (جـ ، ١٠)}

---

❻ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} **فبيِّن أي العلاقات الآتية تعبر عن دالة على س ثم أوجد مدى كل دالة :**

(١) $ت_١$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)}

(٢) $ت_٢$ = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣)}

(٣) $ت_٣$ = {(١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

(٤) $ت_٤$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤)}

---

❼ إذا كانت : س = {٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ = $\frac{١}{٢}$ ب»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص فاكتب بيان ع وبيِّن أن ع دالة ، واكتب مداها.

---

❽ إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٠ ، ٧ ، ٩ ، ٨ ، ١٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ + ٧ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا.

---

❾ إذا كانت : س = {٢ ، ٥ ، ٨} ، ص = {١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ عامل من عوامل ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

---

❿ إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ + ب < ٨» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(١١) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٧}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «ب = ٢ أ + ٣» لكل أ ∈ س

، ب ∈ ص فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبيِّن ما إذا كانت ع دالة

من س إلى ص أم لا مع بيان السبب.

---

(١٢) إذا كانت : س = {٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، −٢ ، −٤ ، −٦} ، وكانت ع علاقة على س حيث

«أ ع ب» تعني «أ معكوس جمعي لـ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س فاكتب بيان ع ومثلها

بمخطط سهمي وبيِّن مع ذكر السبب هل ع تمثل دالة أم لا ، وإذا كانت تمثل دالة اذكر مداها.

---

(١٣) إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$} وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب» تعني

«أ معكوس ضربي لـ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

وبيِّن ما إذا كانت ع دالة أم لا.

---

(١٤) 📖 إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠} وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب»

تعني «أ مضاعف ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر

بياني. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

---

(١٥) 📖 إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١} وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب»

تعني «أ + ٢ ب = عدد فردي» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط

سهمي. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

---

(١٦) إذا كانت : س = {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٦}

وكانت ع علاقة معرفة على س حيث «أ ع ب» تعني «$أ^٢$ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س ،

اكتب بيان ع ومثل هذه العلاقة بيانيًا واذكر موضحًا السبب هل ع دالة على س أم لا.

---

(١٧) إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ١٠ ≥ س ≥ ٢} وكانت ع علاقة على س

حيث «أ ع ب» تعني «أ + ب يقبل القسمة على ٣» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واذكر هل ع تمثل دالة أم لا.

الدرس الخامس

الدوال كثيرات الحدود

الدالــة كثيــرة الحدود هى دالــة قاعدتها (صورة س) هى حد أو مقــدار جبرى ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

(١) كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(٢) قوة (أس) المتغير س في أى حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي.

فمثلاً : • الدالة د : د (س) = ٣　　• الدالة ر : ر (س) = ٢ س + ٥

• الدالة ق : ق (س) = س^{٢} − ٢ س + ١

هى دوال كثيرات حدود لتوافر الشروط السابقة فيها.

بينما : • الدالة ن : ن (س) = س^{٣} + $\sqrt{\text{س}}$ − ٣ ليست كثيرة حدود لأن مجال الدالة ن لايساوى ح

لأنه لايمكن بواسطتها إيجاد صورة أى عدد حقيقى سالب لوجود الحد $\sqrt{\text{س}}$

مع ملاحظة أن : $\sqrt{\text{عدد حقيقي سالب}}$ ∌ ح

• الدالة ل : ل (س) = س^{٢} − $\frac{١}{\text{س}}$ ليست كثيرة حدود

لأن أس المتغير س فى الحد $\frac{١}{\text{س}}$ هو −١ ∌ ط

مع ملاحظة أن : $\frac{١}{\text{س}}$ = س$^{-١}$

◄◄ ملاحظة :

يجب التعرف على ما إذا كانت الدالة كثيرة حدود أم لا قبل وضع قاعدتها فى أبسط صورة

فمثلاً : الدالة ت : ت (س) = س $\left(\text{س} + \frac{٣}{\text{س}}\right)$ ليست كثيرة حدود لأن مجال الدالة ت لا يساوى ح لأنه لا يمكن إيجاد صورة العدد صفر بواسطتها لوجود الحد $\frac{٣}{\text{س}}$

مع ملاحظة أن : $\frac{٣}{\text{صفر}}$ ليس لها معنى.

ولكن عند وضع ت (س) فى أبسط صورة تكون ت (س) = س^{٢} + ٣

وهى قاعدة لدالة أخرى كثيرة حدود.

مما سبق نستنتج التعريف التالي :

تعريف

الدالة د : د (س) = $أ_0$ + $أ_1$ س + $أ_2$ $س^2$ + ... + $أ_ن$ $س^ن$

حيث $أ_0$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، ... ، $أ_ن$ ∈ ح ، ن ∈ ط تسمى دالة كثيرة حدود.

درجة الدالة كثيرة الحدود | **هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة.**

فمثلاً : (١) الدالة $د_1$: $د_1$ (س) = ٣ س − $\frac{1}{2}$ من الدرجة الأولى (دالة خطية)

(٢) الدالة $د_2$: $د_2$ (س) = $\sqrt{5}$ $س^2$ − ٣ س + ٤ من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

(٣) الدالة $د_3$: $د_3$ (س) = $س^3$ − ٥ $س^2$ + ٤ من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

ملاحظة

الدالة د : د (س) = أ حيث : أ ∈ ح − {٠} كثيرة حدود من الدرجة صفر (دالة ثابتة)

مثل د : د (س) = ٣

وفى حالة أ = ٠ أى عندما د (س) = ٠ فإن الدالة د ليس لها درجة

مثال (١) إذا كانت د : ح ⟵ ح فاذكر درجة د :

(١) د (س) = ٥ − ٣ س | (٢) د (س) = ٣ س − $س^2$

(٣) د (س) = ٥ س − ٣ $س^2$ + $س^3$ | (٤) د (س) = $س^2$ $(٢ + س)^2$

(٥) د (س) = س ($س^3$ + $س^2$) − $س^2$ ($س^2$ − ٢ س)

الحل

(١) د دالة من الدرجة الأولى. (٢) د دالة من الدرجة الثانية. (٣) د دالة من الدرجة الثالثة.

(٤) ∵ د (س) = $س^2$ (٤ + ٤ س + $س^2$)

= ٤ $س^2$ + ٤ $س^3$ + $س^4$

∴ د دالة من الدرجة الرابعة.

لاحظ أن

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى أبسط صورة قبل تعيين درجتها.

(٥) ∵ د (س) = $س^4$ + $س^3$ − $س^4$ + ٢ $س^3$ = ٣ $س^3$

∴ د دالة من الدرجة الثالثة.

مثال ٢

إذا كانت د دالة كثيرة حدود حيث $د(س) = س^{٢} - ٢س + ٥$

① **أوجد:** $د(١)$ ، $د(٠)$ ، $د(-٢)$ ، $د\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $د\left(\sqrt{٥}\right)$

② **أثبت أن:** $د\left(٢\sqrt{٢} + ١\right) = ٢\,د\left(١ - \sqrt{٢}\right)$

الحل

① $د(١) = (١)^{٢} - ٢ \times (١) + ٥ = ١ - ٢ + ٥ = ٤$

وبالمثل: $د(٠) = ٥$ ، $د(-٢) = ١٣$ ، $د\left(\frac{١}{٢}\right) = ٤\frac{١}{٤}$ ، $د\left(\sqrt{٥}\right) = ١٠ - ٢\sqrt{٥}$

② $\because د\left(٢\sqrt{٢} + ١\right) = \left(٢\sqrt{٢} + ١\right)^{٢} - ٢\left(٢\sqrt{٢} + ١\right) + ٥$

$= ٨ + ١ + ٤\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢} - ٢ + ٥ = ١٢$ (١)

، $د\left(١ - \sqrt{٢}\right) = \left(١ - \sqrt{٢}\right)^{٢} - ٢\left(١ - \sqrt{٢}\right) + ٥$

$= ١ + ٢ - ٢\sqrt{٢} - ٢ + ٢\sqrt{٢} + ٥ = ٦$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore د\left(٢\sqrt{٢} + ١\right) = ٢\,د\left(١ - \sqrt{٢}\right)$

حاول بنفسك

أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة كثيرة حدود وعين درجتها إذا كانت كثيرة حدود:

① $د_{١}(س) = س\left(س^{٢} - ٣\right)$

....

② $د_{٢}(س) = س\left(\frac{٣}{س} + ٥\right)$

....

③ $د_{٣}(س) = س^{٢} - \sqrt{س} + ١$

....

④ $د_{٤}(س) = س^{٢} - \left(س^{٢} - ٤\right)$

....

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولًا الدالة الخطية

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س + ب ، أ ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح
تسمى دالة خطية (دالة من الدرجة الأولى)

* **أمثلة لدوال خطية :**

- د : ح ← ح ، د (س) = س - ١
- د : ح ← ح ، د (س) = ٢ س + ١
- د : ح ← ح ، د (س) = ٣ - $\frac{١}{٢}$ س
- د : ح ← ح ، د (س) = ٣ س

التمثيل البياني للدالة الخطية

* **الدالة الخطية** د : ح ← ح حيث د (س) = أ س + ب ، أ ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح **يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع :**

- محور الصادات في النقطة (٠ ، ب) - محور السينات في النقطة $\left(\frac{-ب}{أ} ، ٠\right)$

* يكتفى عند تمثيل الدالة الخطية بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة ، ويفضل إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة الحل.

مثال ٣ مثل بيانيًا كلًا من الدالتين الخطيتين الآتيتين :

(١) د : د (س) = ٢ س - ٣ (٢) ر : ر (س) = - $\frac{١}{٢}$ س

الحل

(١) لتمثيل هذه الدالة بيانيًا نعين ثلاثة أزواج مرتبة تنتمي إلى بيانها :

∵ د (س) = ٢ س - ٣

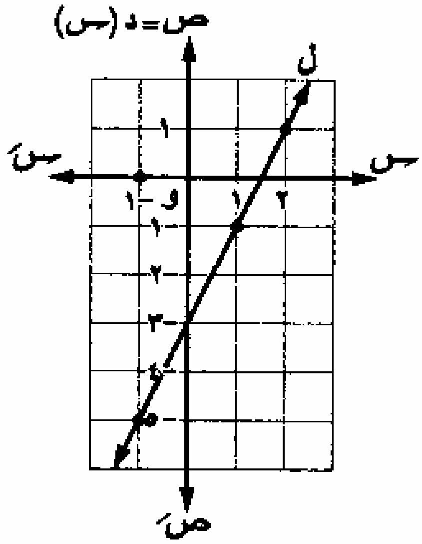
∴ د (-١) = ٢ × (-١) - ٣ = -٥ ∴ (-١ ، -٥) ∈ د

، د (١) = ٢ × ١ − ٣ = −١ ∴ (١ ، −١) ∈ د

، د (٢) = ٢ × ٢ − ٣ = ١ ∴ (٢ ، ١) ∈ د

ويمكن أن نرتب هذه الأزواج المرتبة فى الجدول الآتى :

س	−١	١	٢
ص = د (س)	−٥	−١	١



ثم نعين فى المستوى الديكارتى النقط الثلاث التى تمثل هذه الأزواج المرتبة ونرسم المستقيم ل المار بأى نقطتين منها ونتحقق من أن النقطة الثالثة تقع على هذا المستقيم فيكون المستقيم ل هو الشكل البيانى للدالة د

لاحظ أنه : يمكن إيجاد نقط التقاطع مع المحورين واستخدامهما فى التمثيل :

- نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، ب) = (٠ ، −٣)
- نقطة التقاطع مع محور السينات = $\left(\frac{-ب}{أ} ، ٠\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، ٠\right)$

(٢) ∵ ر (س) = $-\frac{١}{٢}$ س

س	٠	٢	−٤
ص = د (س)	٠	−١	٢

لاحظ أن :

إذا كان معامل س كسر يفضل أن نختار أعدادًا تقبل القسمة على مقام هذا الكسر لسهولة التمثيل.

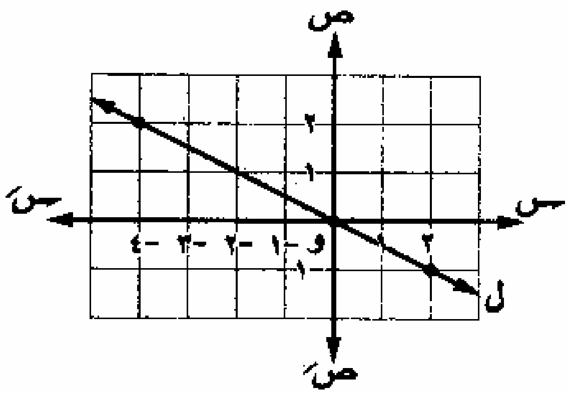
لاحظ من الشكل المقابل أن :

المستقيم ل الممثل للدالة

د : ح ← ح

، د (س) = $-\frac{١}{٢}$ س

يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)



ملاحظة

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س ، أ ∈ ح*

يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

ثانيًا الدالة الثابتة

تعريف

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∈ ح

تسمى دالة كثيرة حدود ثابتة أو دالة ثابتة.

فمثلاً : إذا كانت د : د (س) = ٥ فإن : د (١) = ٥ ، د (٠) = ٥ ، د (-٢) = ٥ ، ... وهكذا

التمثيل البياني للدالة الثابتة

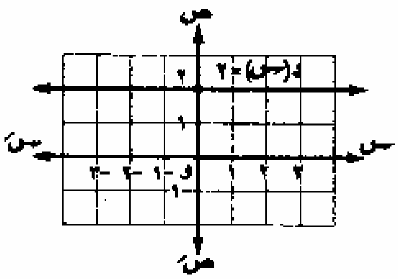
الدالة الثابتة د : د (س) = ب (حيث ب ∈ ح) يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازي محور السينات

ويمر بالنقطة (٠ ، ب) **ويكون هذا الخط :**

- **أعلى** محور السينات — إذا كان : ب > ٠
- **أسفل** محور السينات — إذا كان : ب < ٠
- **منطبق** على محور السينات — إذا كان : ب = ٠

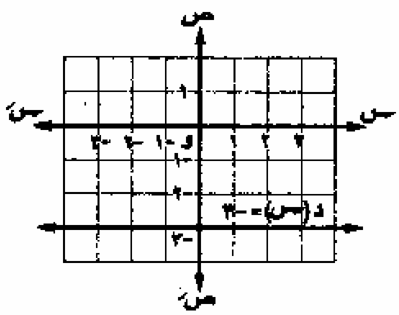
*** والأمثلة التالية توضح ذلك :**

د(س) = ٢



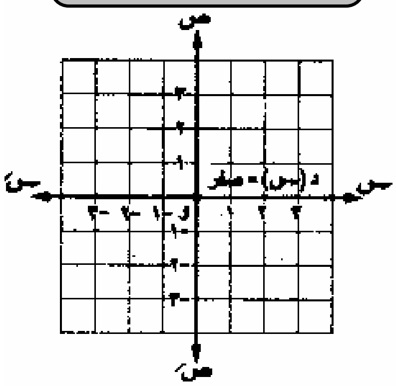
المستقيم أعلى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٢)

د(س) = -٣



المستقيم أسفل محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، -٣)

د(س) = صفر



المستقيم منطبق على محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٠)

ثالثًا الدالة التربيعية

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ $\neq$ ٠

تُسمى دالة تربيعية وهى كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

* أمثلة لدوال تربيعية :

- د : ح ← ح ، د (س) = س^{٢}
- د : ح ← ح ، د (س) = س^{٢} − ٢
- د : ح ← ح ، د (س) = ٣ س^{٢} − ٧ س + ٢
- د : ح ← ح ، د (س) = ٦ − س^{٢} + س

التمثيل البيانى للدالة التربيعية

نعلـم أن مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية **ولكن لتسـهيل التمثيل البيانى لها فسوف نقوم بتمثيلها على فترة معينة** عن طريق تعيين بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان الدالة ثم نرسم منحنى ممهدًا يمر بالنقط التى تمثلها والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال ٤ **مثل بيانيًا كلًا من الدالتين التربيعيتين الآتيتين :**

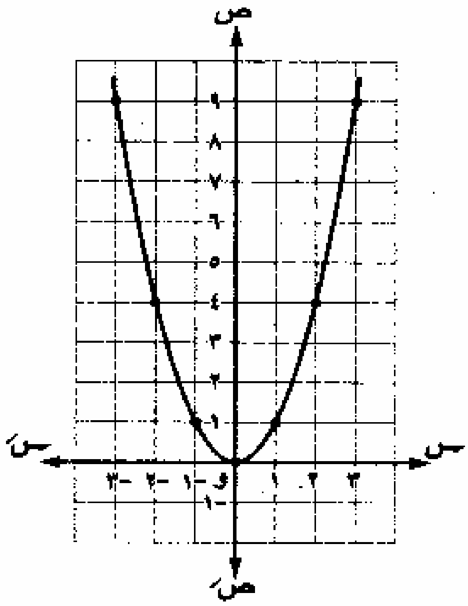
(١) د : د (س) = س^{٢} متخذًا س $\in$ [−٣ ، ٣]

(٢) د : د (س) = − س^{٢} متخذًا س $\in$ [−٣ ، ٣]

الحل

① د (س) = $س^٢$

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



لاحظ أن : معامل $س^٢$ > ٠

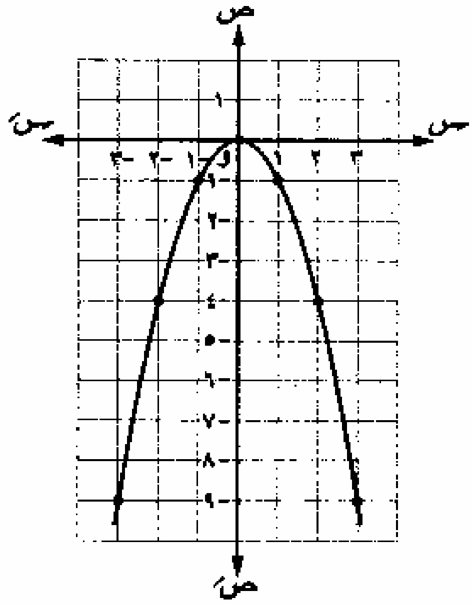
① المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أي أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته هى س = ٠

② النقطة (٠ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى وهى نقطة قيمة صغرى لأن المنحنى يقع بتمامه فوقها.

③ القيمة الصغرى للدالة هى صفر وهى الإحداثى الصادى لنقطة رأس المنحنى

② د (س) = $-س^٢$

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د (س)	٩-	٤-	١-	٠	١-	٤-	٩-



لاحظ أن : معامل $س^٢$ < ٠

① المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أي أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته هى س = ٠

② النقطة (٠ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى وهى نقطة قيمة عظمى لأن المنحنى يقع بتمامه أسفلها.

③ القيمة العظمى للدالة هى صفر وهى الإحداثى الصادى لنقطة رأس المنحنى

مما سبق نلاحظ أن :

① إذا كان معامل $س^٢$ موجبًا فإن المنحني يكون مفتوح لأعلي ويكون للدالة نقطة قيمة صغرى.

② إذا كان معامل $س^٢$ سالبًا فإن المنحني يكون مفتوح لأسفل ويكون للدالة نقطة قيمة عظمى.

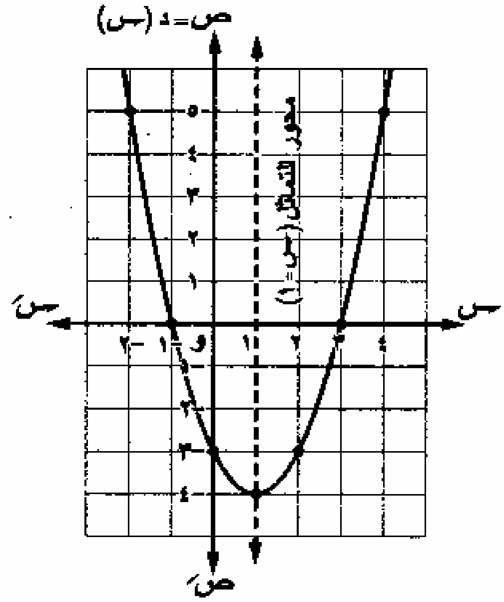
مثال ٥

ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ متخذًا س ∋ [−٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد:

(١) نقطة رأس المنحنى. (٢) معادلة محور التماثل.

(٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



الحل

∵ د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

من الرسم نجد أن :

(١) نقطة رأس المنحنى : (١ ، −٤)

(٢) معادلة محور التماثل : س = ١

«وهو مستقيم يوازى محور الصادات ويمر بنقطة رأس المنحنى».

(٣) القيمة الصغرى للدالة = − ٤

مثال ٦

ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٣ س + ٢ متخذًا س ∋ [−١ ، ٤]

ومن الرسم أوجد:

(١) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة. (٢) معادلة محور التماثل.

الحل

∵ د (س) = − س^{٢} + ٣ س + ٢

∴

س	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢

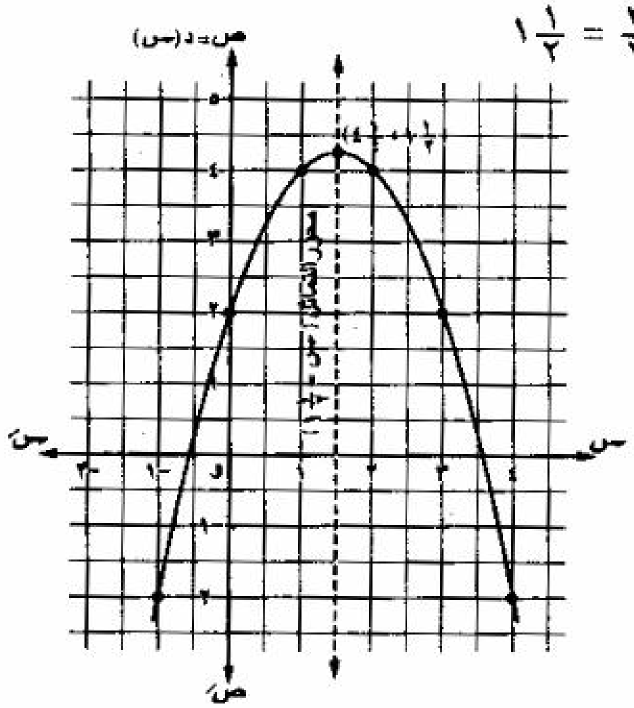
وعند تمثيل الأزواج المرتبة نلاحظ أن نقطة رأس المنحنى ليست ضمن هذه النقط مما يجعل رسم ودراسة المنحنى صعبًا.

*** إيجاد نقطة رأس المنحنى :**

عند رأس منحنى الدالة التربيعية يكون :

* الإحداثي السيني = $\frac{-ب}{٢أ}$ * الإحداثي الصادي = د $\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

حيث ب معامل س ، أ معامل $س^٢$



∴ س عند رأس المنحنى = $\frac{-٣}{٢ \times (-١)} = \frac{-٣}{-٢} = ١\frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(١\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٩}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٢ = ٤\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى عند النقطة $\left(١\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٤}\right)$

*** من الرسم نجد أن :**

(١) القيمة العظمى للدالة = $٤\frac{١}{٤}$

(٢) معادلة محور التماثل هي : س = $١\frac{١}{٢}$

وهو مستقيم يوازي محور الصادات

ويمر بنقطة رأس المنحنى.

تمارين على الدرس الخامس

❶ أي من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود :

① د : د (س) = ٢ س − ٥
② د : د (س) = ٣
③ د : د (س) = س + $\frac{١}{س}$
④ 📖 د : د (س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣
⑤ 📖 د : د (س) = س^{٢} + $\sqrt{س}$ + ٨
⑥ 📖 د : د (س) = س (س + $\frac{١}{س}$ − ٢)
⑦ د : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ + ٨
⑧ د : د (س) = س (س^{٢} + س$^{-٢}$ − ٤)

---

❷ 📖 إذا كانت د : ح ← ح ، اذكر درجة د ثم أوجد د (−٢) ، د (٠) ، د ($\frac{١}{٢}$) حيث :

① د (س) = ٣ ② د (س) = ٣ − ٢ س ③ د (س) = س^{٢} − ٤

---

❸ إذا كانت د : د (س) = ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢

① اذكر درجة د ② **أثبت أن:** د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$) **(المنوفية ٢٠٠٩)**

---

❹ 📖 إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ٣ س ، ر (س) = س − ٣

① **أوجد:** د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$) ② **أثبت أن:** د (٣) = ر (٣) = صفر

---

❺ إذا كانت د : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٥

أثبت أن: د (١ + $\sqrt{٦}$) = د (١ − $\sqrt{٦}$) = ٠

---

❻ أكمل ما يأتي:

① الدالة د : د (س) = س^{٤} − ٢ س^{٢} + ٧ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

② الدالة د : د (س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٣) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

③ الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٥ يمثلها خط مستقيم يوازى .... ويقطع محور الصادات في النقطة .... **(أسيوط ٢٠٠٣)**

④ محور السينات هو التمثيل البياني للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ...

⑤ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : د (٥) + د (−٥) = ... **(الجيزة ٢٠٠٨)**

(٦) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : $\frac{د (٥)}{د (١٠)}$ = ... (سوهاج ٢٠٠٩)

(٧) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٢ س − ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

(٨) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٣ س + ٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

(٩) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٤ س − ٥ فإن : أ = ...

(١٠) منحنى الدالة التربيعية يكون له قيمة عظمى إذا كانت إشارة معامل $س^٢$ .... ويكون له قيمة صغرى إذا كانت إشارة معامل $س^٢$ ....

(١١) إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية المعرفة على ح قيمة عظمى فإن هذا المنحنى يكون مفتوحًا لـ ....

(١٢) معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ هي .... (سوهاج ٢٠٠٩)

(١٣) عند تمثيل د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ حيث أ ∈ *ح فإن الإحداثي السيني لرأس المنحنى = ... (قنا ٢٠٠٩)

(١٤) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = ٢ $س^٢$ − ٤ س + ٥ هي .... (الشرقية ٢٠٠٨)

(١٥) إذا كانت : (−٢ ، ص) تنتمي لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ١ فإن : ص = ... (ج.سيناء ٢٠٠٩)

---

❷ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = س (س − ٢ $س^٢$) هي دالة كثيرة حدود من الدرجة ....
(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

(٢) الدالة د : د (س) = $س^٢$ $(س − ٣)^٢$ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة ....
(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

(٣) إذا كانت : د (س) = ٧ فإن : د (٨) = ... (الدقهلية ٢٠٠٦)
(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥٦

(٤) إذا كانت : د (س) = ٢ فإن : ٣ د $(\sqrt{٢})$ = ...
(أ) د $(٣\sqrt{٢})$ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٢

⑤ إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : د (٣) − د (١) = ... (القاهرة ٢٠٠٦)

(أ) د (٢) (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١٠

⑥ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : $\frac{\text{٢ د (٣)}}{\text{٣ د (٢)}}$ = ... (الإسكندرية ٢٠٠٥)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٣٢}{٢٣}$

⑦ إذا كانت : د (٢ س) = ٤ فإن : د (− س) = ... (الدقهلية ٢٠٠٩)

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٢

⑧ إذا كانت : د (س) = أ س + ٦ ، د (٢) = ٢ فإن : أ = ... (الوادي الجديد ٢٠٠٦)

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٦

⑨ إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي رأس منحنى الدالة التربيعية د

فإن معادلة خط التماثل هي ....

(أ) س = ٣ (ب) س = ٢ (جـ) ص = ٣ (د) ص = −٣

⑩ الشكل البياني المقابل :

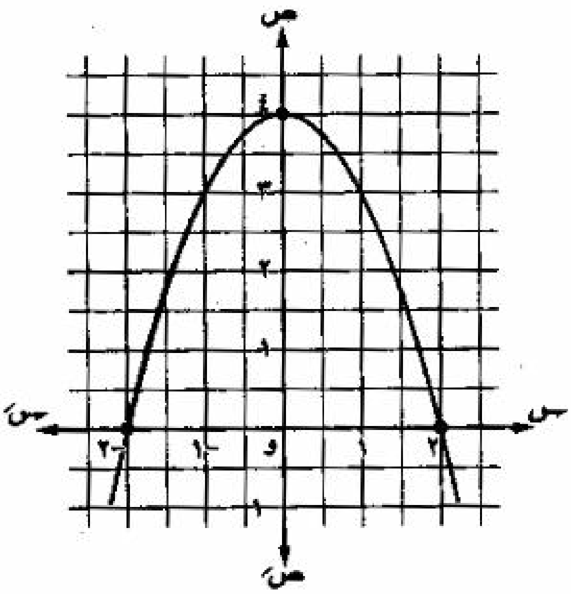
يمثل الدالة د حيث ....

(أ) د (س) = س^{٢} + ٤

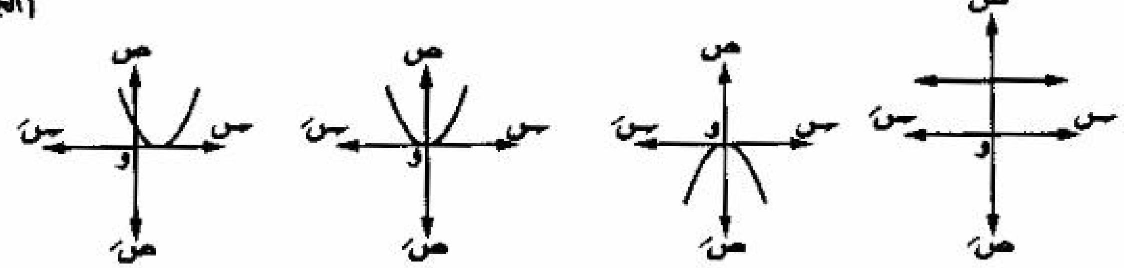
(ب) د (س) = − س^{٢} + ٤

(جـ) د (س) = س^{٢} − ٤

(د) د (س) = − س^{٢} − ٤



⑪ الشكل البياني للدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ س + ١ هو الشكل رقم .... (الجيزة ٢٠٠٨)



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑫ إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، س ∈ [-٢ ، ٢]

فإن : د (س) ∈ .... (الدقهلية ٢٠٠٨)

(أ)]٠ ، ٤] (ب)]٠ ، ٤[(جـ) [٠ ، ٤] (د) [-٤ ، ٤]

● 📖 مثل بيانيًا كلًا من الدوال الآتية :

① د : د (س) = ٥
② د : د (س) = -٤
③ د : د (س) = صفر
④ د : د (س) = ٢$\frac{١}{٢}$

● مثل بيانيًا كلًا من الدوال الخطية الآتية ، وأوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات :

① د : د (س) = س
② د : د (س) = -س
③ 📖 د : د (س) = ٢ س
④ 📖 د : د (س) = -٢ س
⑤ 📖 د : د (س) = س + ٢
⑥ 📖 د : د (س) = ٢ - س
⑦ 📖 د : د (س) = ٣ س - ١
⑧ 📖 د : د (س) = -٢ س + ٣
⑨ د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ س
⑩ 📖 د : د (س) = ٥ - $\frac{١}{٢}$ س

● مثل بيانيًا كلًا من الدوال الآتية ، ومن الرسم استنتج إحداثيي رأس المنحنى ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة :

① د : د (س) = ٢ س^{٢} متخذًا س ∈ [-٢ ، ٢]

② د : د (س) = س^{٢} + ١ متخذًا س ∈ [-٣ ، ٣]

③ 📖 د : د (س) = س^{٢} - ٢ متخذًا س ∈ [-٣ ، ٣]

④ 📖 د : د (س) = ٢ - س^{٢} متخذًا س ∈ [-٣ ، ٣]

⑤ 📖 د : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٢]

⑥ 📖 د : د (س) = (س - ٢)^{٢} متخذًا س ∈ [-١ ، ٥]

⑦ د : د (س) = ٣ - ٢ س - س^{٢} متخذًا س ∈ [-٤ ، ٢]

⑧ د : د (س) = ٤ س + ٣ - ٢ س^{٢} متخذًا س ∈ [-٢ ، ٣]

⑨ د : د (س) = س^{٢} - ٤ س + ٥ متخذًا س ∈ [٠ ، ٥]

⑩ 📖 د : د (س) = ١ - ٣ س + س^{٢} متخذًا س ∈ [-١ ، ٤]

الدرس الأول

النســبة

تمهيد :

إذا كان لدى محمد ٦٠٠ قرشاً ولدى شهد ٣٠٠ قرشاً فإننا نقول أن :

ما مع محمد ضعف ما مع شهد لأن : $\frac{\text{ما مع محمد}}{\text{ما مع شهد}} = \frac{٦٠٠}{٣٠٠} = ٢$

أو ما مع شهد نصف ما مع محمد لأن : $\frac{\text{ما مع شهد}}{\text{ما مع محمد}} = \frac{٣٠٠}{٦٠٠} = \frac{١}{٢}$

ويسمى الكسر $\frac{\text{ما مع محمد}}{\text{ما مع شهد}}$ **" النسبة بين مامع محمد إلى ما مع شهد "**

ويسمى الكسر $\frac{\text{ما مع شهد}}{\text{ما مع محمد}}$ **" النسبة بين مامع شهد إلى ما مع محمد "**

تعريف النسبة :

النسبة بين الكميتين ا ، ب هي عدد مرات احتواء العدد ا على العدد ب.

و تكتب النسبة بين الكميتين ا ، ب بإحدى الصورتين " ا : ب أو $\frac{ا}{ب}$ **"**

و يسمى ا بمقدم النسبة ، ويسمى ب بتالي النسبة ، ويسمى ا ، ب معاً بحدي النسبة .

خواص النسبة :

خاصية (١):

النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها في أو قسما على عدد حقيقي لا يساوي صفر .

أى أن : $\frac{ا}{ب} = \frac{ا \times م}{ب \times م}$ **حيث** $م \in ع^*$

فمثلاً : $\frac{٣}{٥} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٢١}{٣٥} = \frac{٣٠}{٥٠}$ **وذلك بضرب حديها في (٢ ، ٧ ، ١٠ على الترتيب)**

وأيضاً : $\frac{ا}{ب} = \frac{ا \div ك}{ب \div ك}$ **حيث** $ك \in ع^*$

فمثلاً : $\frac{٢٤}{٣٦} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ **وذلك بقسمة حديها على (٢ ، ٤ ، ١٢ على الترتيب)**

خاصية (٢):

النسبة تتغير إذا أضيف إلى حديها أو طرح منهما عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر

أى أن : $\frac{أ}{ب} \neq \frac{أ \pm م}{ب \pm م}$ **حيث** $م \in ح^*$

فمثلاً : $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٨}{١٠}$ **(وذلك بإضافة ٥ إلى حديها)** **لأن :** $\frac{٣}{٥} = ٦٠ \%$ **أما** $\frac{٨}{١٠} = ٨٠ \%$

وأيضاً : $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٢}{٤}$ **(وذلك بطرح ١ من حديها)** **لأن :** $\frac{٣}{٥} = ٦٠ \%$ **أما** $\frac{٢}{٤} = ٥٠ \%$

خاصية (٣) : خاصية الضرب التبادلي

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ **فإن :** أ × ء = ب × جـ

فمثلاً : $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ **(لأن : ٣ × ٢٠ = ٤ × ١٥ كلٍ يساوي ٦٠)**

ملاحظة هامة

إذا كانت النسبة بين عددين حقيقين تساوي ٣ : ٥

فإننا نفرض أن العدد الأول = ٣ س ، والعدد الثاني = ٥ س (حيث س ثابت حقيقي لا يساوي الصفر)

مثـــال

عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ وإذا أضيف للعدد الأصغر ٤ ، وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة بينهما ٨ : ٩ . أوجد العددين .

الحـــل

نفرض أن العدد الأصغر = ٣ س

∴ العدد الأكبر = ٤ س

∴ $\frac{٣س + ٤}{٤س - ٣} = \frac{٨}{٩}$ **(بالضرب التبادلي)**

∴ ٩ (٣س + ٤) = ٨ (٤ س - ٣)

∴ ٢٧س + ٣٦ = ٣٢ س - ٢٤

∴ ٢٧ س - ٣٢ س = - ٢٤ - ٣٦

∴ - ٥ س = - ٦٠

∴ س = $\frac{-٦٠}{-٥}$

∴ س = ١٢

∴ **العدد الأصغر** = ٣ × ١٢ = ٣٦

∴ **العدد الأكبر** = ٤ × ١٢ = ٤٨

مثال

أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كلٍ من حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥ .

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ **مربعه** = $س^٢$

∴ $\frac{٧ + س^٢}{١١ + س^٢} = \frac{٤}{٥}$ (بالضرب التبادلي)

∴ ٥ (٧ + $س^٢$) = ٤ (١١ + $س^٢$)

∴ ٣٥ + ٥ $س^٢$ = ٤٤ + ٤ $س^٢$

∴ ٥ $س^٢$ − ٤ $س^٢$ = ٤٤ − ٣٥

∴ $س^٢$ = ٩

∴ س = ± ٣

∴ **العدد** = ٣ أ، − ٣

مثال

ما العدد الموجب الذي إذا طرح من مقدم النسبة ١٣ : ١٥ وأضيف مربعه إلى تاليها فإنها تساوي المعكوس الضربي للعدد ٥ .

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ **مربعه** = $س^٢$

∴ $\frac{١٣ - س}{١٥ + س^٢} = \frac{١}{٥}$ (بالضرب التبادلي)

∴ ١٥ + $س^٢$ = ٥ (١٣ − س)

∴ ١٥ + $س^٢$ = ٦٥ − ٥ س

∴ ١٥ + $س^٢$ − ٦٥ + ٥ س = ٠

∴ $س^٢$ + ٥ س − ٥٠ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١٠) = ٠

∴ س − ٥ = ٠ ∴ س = ٥

∴ س + ١٠ = ٠ ∴ س = − ١٠ **مرفوض؟؟؟**

∴ **العدد الموجب** = ٥

مثال

عددان صحيحان النسبة بينهما ٤ : ٥ ونصف مربع أصغرهما يزيد عن ثلاثة أمثال أكبرهما بمقدار ٢٧ . أوجد العددين .

الحل

نفرض أن العدد الأصغر = ٤ س

،، **العدد الأكبر** = ٥ س

∴ $\frac{١}{٢}$ (٤ س $)^٢$ − ٣ (٥ س) = ٢٧

∴ ٨ $س^٢$ − ١٥ س − ٢٧ = ٠

∴ (س − ٣) (٨ س + ٩) = ٠

∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

∴ **العدد الأصغر** = ٤ × ٣ = ١٢

∴ **العدد الأكبر** = ٥ × ٣ = ١٥

∴ ٨ س + ٩ = ٠

∴ س = $-\frac{٩}{٨}$

مرفوض؟؟؟

تمارين على الدرس الأول

❶ أوجد قيمة " س " في كل مما يأتي :

① (٢س − ٥) : (س − ١) = ١ : ٢
② (٢س − ٣) : (٣س + ١) = ١ : ٢
③ (٤س − ١) : (٨س + ٣) = ٣ : ٧
④ (٥س − ١١) : (٤س + ١) = ٢ : ٣
⑤ س : ٣ = ١٢ : س
⑥ (س^{٢} − ٨) : (٢س^{٢} + ١) = ١ : ٣
⑦ (س^{٢} + ١) : (٣س − ٤) = ٢ : ١
⑧ (٢س − ١) : ٣ = (س^{٢} − ٩) : ٨

❷ عددان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ أوجد العددين .

❸ عددان النسبة بينهما ٢ : ٣ ، وإذا أضيف للأول ٧ ، وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددين .

❹ عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٣ ومربع أصغرهما يزيد عن خمسة أمثال أكبرهما بمقدار ٤ . أوجد العددين .

❺ أوجد عددين نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٧ : ١٢ وأحدها يزيد عن الآخر بمقدار ٢٧٥ .

❻ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كلٍ من حدي النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥ .

❼ أوجد العدد الذي إذا طُرح ثلاثة أمثاله من حدي النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$.

❽ أوجد العدد الذي إذا أضيف مكعبه إلى حدي النسبة $\frac{٥}{٣٧}$ فإنها تصبح $\frac{١}{٢}$.

❾ عددان موجبان النسبة بينها ١ : ٣ والفرق بينهما ٤٨ أوجد العددين

❿ عددان حقيقيان النسبة بينهما ٢ : ٣ وإذا أضيف إلى الأصغر ٤ ، وطرح من الأكبر ٢ أصبحت النسبة بينهما ٤ : ٥ .

⓫ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ . أوجد العددين .

الدرس الثاني

التناسب

تمهيد :

س	٦	٩	١٢	١٥
ص	٨	١٢	١٦	٢٠

الجدول المقابل يوضح العلاقة بين مجموعتين من الأعداد " س ، ص " و إذ تأملنا هاتين المجموعتين نجد أن :

$\frac{٦}{٨} = \frac{٩}{١٢} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠}$ **(لأن كل منها يساوي** $\frac{٣}{٤}$ **)**

وهنا يمكننا القول بأن الأعداد : ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٥ ، ٢٠ متناسبة

تعريف التناسب :

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر .

أى أنه إذا كان :

① $\frac{\text{م}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ **فإن :** م ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة .**

② م ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة فإن :** $\frac{\text{م}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$.

ويسمى م **الأول المتناسب ،** ب **الثاني المتناسب ،** حـ **الثالث المتناسب ،** ء **الرابع المتناسب**

كما يسمى م ، ء **طرفا التناسب** حـ ، ء **وسطا التناسب .**

مثال

أوجد الثالث المتناسب للكميات : ٥ م ب ، ٢ م ب^{٢} ، ٤ م^{٢} ب

الحل

نفرض أن الثالث المتناسب هو : س

$\because$ **الكميات المتناسبة هي :**

٥ م ب ، ٢ م ب^{٢} ، س ، ٤ م^{٢} ب

$\therefore \frac{\text{٥ م ب}}{\text{٢ م ب}^{٢}} = \frac{\text{س}}{\text{٤ م}^{٢}\text{ ب}}$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{٥ م ب} \times \text{٤ م}^{٢}\text{ ب}}{\text{٢ م ب}^{٢}}$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{٢٠ م}^{٣}\text{ ب}^{٢}}{\text{٢ م ب}^{٢}}$

$\therefore \text{س} = \text{١٠ م}^{٢}$

$\therefore$ **الثالث المتناسب =** ١٠ م^{٢}

مثـــال

أوجد الثاني المتناسب للكميات : (س^{٢} − ٣س) ، (س^{٢} − ٩) ، (س + ٣)

الحـــــل

نفرض أن الثاني المتناسب هو : ك

∴ **الكميات المتناسبة هي :**

(س^{٢} − ٣س) ، ك ، (س^{٢} − ٩) ، (س + ٣)

∴ $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{ك}} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٣}$

∴ ك = $\frac{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})(\text{س} + ٣)}{(\text{س}^{٢} - ٩)}$

∴ ك = $\frac{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

∴ ك = س

∴ **الثاني المتناسب** = س

مثـــال

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ **لحصلنا على أعداد متناسبة**

الحـــــل

نفرض أن العدد هو : س

∴ **الكميات المتناسبة هي :**

(١ + س) ، (١٣ + س) ، (٧ + س) ، (٣١ + س)

∴ $\frac{١ + \text{س}}{١٣ + \text{س}} = \frac{٧ + \text{س}}{٣١ + \text{س}}$

∴ (١ + س) (٣١ + س) = (٧ + س) (١٣ + س)

∴ ٣١ + س + ٣١س + س^{٢} = ٩١ + ٧س + ١٣س + س^{٢}

∴ ٣١ + س + ٣١س + $\cancel{\text{س}^{٢}}$ − ٩١ − ٧س − ١٣س − $\cancel{\text{س}^{٢}}$ = ٠

∴ ١٢س − ٦٠ = ٠

∴ ١٢س = ٦٠

∴ س = $\frac{٦٠}{١٢}$

∴ س = ٥

∴ **العدد** = ٥

خواص التناسب :

خاصية (١) : خاصية الضرب التبادلي

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ﺣ}{ء}$ فإن : أ × ء = ب × ﺣ

وقد سبق دراستها في درس النسبة .

خاصية (٢) :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ﺣ}{ء}$ فإن : أ = م ﺣ ، ب = م ء حيث م ∈ ع*

أى أن : مقدم = ثابت × مقدم ، تالي = ثابت × تالي

فمثلاً : إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ = ٣ م ، ب = ٥ م حيث م ≠ صفر

مثـــال

إذا كان س : ص = ٢ : ٣ فأوجد النسبة (٣ س + ٢ ص) : (٢ س + ص)

الحـــــل

∵ س : ص = ٢ : ٣

∴ س = ٢ م ، ص = ٣ م

∴ $\frac{٣ س + ٢ ص}{٢ س + ص} = \frac{٣ × ٢ م + ٢ × ٣ م}{٢ × ٢ م + ٥ م}$

∴ $\frac{٣ س + ٢ ص}{٢ س + ص} = \frac{٦ م + ٦ م}{٤ م + ٥ م}$

∴ $\frac{٣ س + ٢ ص}{٢ س + ص} = \frac{١٢ م}{٩ م} = \frac{٤}{٣}$

ALSHAHD
IN
MATH

مثال

إذا كان : أ : ب = ١ : ٢ ، س : ص = ٣ : ٥

فأوجد في أبسط صورة قيمة النسبة : (٢ أ س + ب ص) : (٥ ب س − ٢ أ ص)

الحل

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ أ = ك ، ب = ٢ك

∵ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

∴ س = ٣م ، ص = ٥م

∴ $\frac{\text{٢ أ س + ب ص}}{\text{٥ ب س − ٢ أ ص}} = \frac{\text{٢ × ك × ٣م + ٢ك × ٥م}}{\text{٥ × ٢ك × ٣م − ٢ × ك × ٥م}}$

∴ $\frac{\text{٢ أ س + ب ص}}{\text{٥ ب س − ٢ أ ص}} = \frac{\text{٦ك م + ١٠ ك م}}{\text{٣٠ك م − ١٠ ك م}}$

∴ $\frac{\text{٢ أ س + ب ص}}{\text{٥ ب س − ٢ أ ص}} = \frac{\text{١٦ك م}}{\text{٢٠ ك م}} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

مثال

إذا كان : أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : جـ = ٢ : ٥ **وكان** : ٣أ + ب − جـ = ٩

أوجد قيمة كل من : أ ، ب ، جـ

الحل

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٢}}{\text{٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٦}}$ >>>>>(١)

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٣}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٥}}$ >>>>>(٢)

من (١) ، (٢)

∴ أ : ب : جـ = ٤ : ٦ : ١٥

∴ أ = ٤ك ، ب = ٦ك ، جـ = ١٥ك

∵ ٣أ + ب − جـ = ٩

∴ ٣ × ٤ ك + ٦ ك − ١٥ ك = ٩

∴ ١٢ك + ٦ ك − ١٥ ك = ٩

∴ ٣ ك = ٩

∴ ك = ٣

∴ أ = ٤ × ٣ = ١٢

∴ ب = ٦ × ٣ = ١٨

∴ جـ = ١٥ × ٣ = ٤٥

مثـــال

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$

فأثبت أن : (٧ أ س + ٤ ب ص) ، (١١ أ ص + ب س) ، ١٢ ، ١٤ **كميات متناسبة .**

الحـــــل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٣}$

∵ أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك

∵ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$

∴ س = ٣ م ، ص = ٥ م

∴ $\frac{\text{٧ أ س + ٤ ب ص}}{\text{١١ أ ص + ب س}}$

$= \frac{\text{٧ × ٢ ك × ٣ م + ٤ × ٣ ك × ٥ م}}{\text{١١ × ٢ ك × ٥ م + ٣ ك × ٣ م}}$

∴ $\frac{\text{٧ أ س + ٤ ب ص}}{\text{١١ أ ص + ب س}} = \frac{\text{٤٢ ك م + ٦٠ ك م}}{\text{١١٠ ك م + ٩ ك م}}$

$= \frac{\text{١٠٢ ك م}}{\text{١١٩ ك م}} = \frac{٦}{٧}$ >>>>>(١)

∵ $\frac{١٢}{١٤} = \frac{٦}{٧}$ >>>>>(٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{٧ أ س + ٤ ب ص}}{\text{١١ أ ص + ب س}} = \frac{١٢}{١٤}$

خاصية (٣):

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ **فإن :** $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

أى أن : $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}$

فمثلاً : إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٧} = \frac{\text{ب}}{٢١}$ **فإن :** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣}$

وأيضاً : إذا كانت : ٥ أ ، ٢ ص ، ٣ ب ، ٧ ص **كميات متناسبة فإن :** $\frac{\text{٥ أ}}{\text{٢ ص}} = \frac{\text{٣ ب}}{\text{٧ ص}}$

∴ $\frac{\text{٥ أ}}{\text{٣ ب}} = \frac{\text{٢ ص}}{\text{٧ ص}}$ ⟸ $\frac{\text{٥ أ}}{\text{٣ ب}} = \frac{٢}{٧}$ ⟸ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٦}{٣٥}$

خاصية (٤):

إذا كان : $\text{أ} \times \text{ء} = \text{ب} \times \text{حـ}$ **فإن :** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$

أى أن : إذا كان حاصل ضرب كميتين يساوى حاصل ضرب كميتين أخريين فإن الكميات الأربع تكوّن تناسباً طرفاه هما عاملا أحد حاصلي الضرب ووسطاه هما عاملا حاصل الضرب الآخر.

فمثلاً : إذا كان : $\text{٣ س} = \text{٥ ص}$ **فإن :** $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

وأيضاً : إذا كان : $\text{٧ أ} = \text{٢ ب}$ **فإن :** $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$

مثال

إذا كان : $\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ س ص} = \text{٤ ص}^{\text{٢}}$ **فأوجد :** س : ص

الحل

$\because \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ س ص} = \text{٤ ص}^{\text{٢}}$

$\therefore \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ س ص} - \text{٤ ص}^{\text{٢}} = \text{٠}$

$\therefore (\text{٣س} - \text{٢ ص})(\text{س} + \text{٢ص}) = \text{٠}$

$\therefore \text{٣س} - \text{٢ ص} = \text{٠}$

$\therefore \text{٣س} = \text{٢ص}$

$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

$\therefore \text{س} + \text{٢ص} = \text{٠}$

$\therefore \text{س} = -\text{٢ ص}$

$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{-\text{٢}}{\text{١}}$

مثال

إذا كان : $(\text{٣ص} - \text{٥ س}) : (\text{٣س} + \text{ص}) = \text{٣} : \text{٨}$

أوجد في أبسط صورة النسبة س : ص **ثم أوجد في أبسط صورة قيمة النسبة**
$(\text{٥ س}^{\text{٢}} - \text{ص}^{\text{٢}}) : (\text{١٢س}^{\text{٢}} - \text{٢ ص}^{\text{٢}})$

الحل

$\because \frac{\text{٣ص} - \text{٥ س}}{\text{ص} + \text{٣ س}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}}$

$\therefore \text{٨}(\text{٣ص} - \text{٥س}) = \text{٣}(\text{ص} + \text{٣ س})$

$\therefore \text{٢٤ ص} - \text{٤٠ س} = \text{٣ ص} + \text{٩ س}$

$\therefore \text{٢٤ ص} - \text{٣ ص} = \text{٩ س} + \text{٤٠ س}$

$\therefore \text{٢١ ص} = \text{٤٩ س}$

$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢١}}{\text{٤٩}} = \frac{\text{٣}}{\text{٧}}$

$\therefore \text{س} = \text{٣ك}$ ، $\text{ص} = \text{٧ك}$

$\therefore \frac{\text{٥س}^{\text{٢}} - \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{١٢س}^{\text{٢}} - \text{٢ص}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٥} \times \text{٩ك}^{\text{٢}} - \text{٤٩ ك}^{\text{٢}}}{\text{١٢} \times \text{٩ك}^{\text{٢}} - \text{٢} \times \text{٤٩ ك}^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{٤٥ ك}^{\text{٢}} - \text{٤٩ ك}^{\text{٢}}}{\text{١٠٨ ك}^{\text{٢}} - \text{٩٨ ك}^{\text{٢}}} = \frac{-\text{٤ ك}^{\text{٢}}}{\text{١٠ ك}^{\text{٢}}} = -\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

تمارين على الدرس الثاني

❶ أوجد الأول المتناسب لكل من الكميات الآتية :

(١) ٥ ، ٩ ، ١٥
(٢) ٤ ، ٥ ، ٢٠
(٣) $٦ س ص^{٢}$ ، $٢ س^{٢}$ ، ٣ س ص
(٤) $(٢أ^{٢} - ٤أ)$ ، $(٣أ + ٦)$ ، $(أ^{٢} - ٤)$

❷ أوجد الثاني المتناسب لكل من الكميات الآتية :

(١) ٣ ، ٦ ، ٨
(٢) ٢ ، ٤ ، ٦
(٣) $٥ ل^{٣} م$ ، $١٥ ل^{٢} م$ ، $٦ م^{٢}$
(٤) $(أ^{٢} + أ)$ ، $(٢أ^{٢} + ٢أ)$ ، ٦

❸ أوجد الثالث المتناسب لكل من الكميات الآتية :

(١) ٨ ، ٦ ، ١٢
(٢) ٣ ، ٢٠ ، ٢
(٣) ١ ، $\sqrt{٨}$ ، $١٤\sqrt{٢}$
(٤) $(أ^{٢} + أ)$ ، $(٢أ^{٢} + ٢أ)$ ، ٦

❹ أوجد الرابع المتناسب لكل من الكميات الآتية :

(١) ٤ ، ١٢ ، ١٦
(٢) −٤ ، ٨ ، ٥
(٣) ٢أب ، $أ^{٢}$ ، $٤أ^{٢}ب$
(٤) (٢س + ص) ، ١ ، $(٤س^{٢} - ص^{٢})$

❺ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ١٥ ، ٢٠ ، ١١ ، ١٤ فإنها تصبح متناسبة .

❻ أوجد العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد : ٣ ، ١٠ ، ٢ ، ٨ فإنها تصبح متناسبة .

❼ أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من الأعداد : ١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ٢١ لأصبحت متناسبة.

❽ إذا كانت : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة كل من :

(١) $\frac{٣س + ٢ص}{٥س - ص}$
(٢) $\frac{س^{٢} + ٢ص^{٢}}{ص^{٢} - س^{٢}}$

❾ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة : $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$

❿ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة : (٧أ + ٩ب) : (٤أ + ٢ب)

⑪ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ع}{ل} = \frac{٧}{٢}$ أوجد في أبسط صورة قيمة : $\frac{٢س ع + ص ل}{ص ع - ٣ س ل}$

---

⑫ إذا كان : أ : ب = ٣ : ٧ ، أ : حـ = ٢ : ٥ وكان : ب + حـ - ٣ أ = ٣٣

أوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ

---

⑬ إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ أثبت أن :

① $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$ ② $\sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢} = ٢س + ص$

---

⑭ إذا كان : أ : ب : حـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان : أ + ب = ٢٧,٦ أوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ

---

⑮ إذا كان : س : ص : ع = ١ : ٢ : ٥ وكان : س + ٢ص + ٣ع = ٨٠ أوجد قيمة: س ، ص ، ع

---

⑯ إذا كان : أ : ب = ٢ : ٥ فأثبت أن : (٢س + ص) ، (س + ٢ ص) ، ١٢ ، ١٦ كميات متناسبة .

---

⑰ إذا كان : $٩س^٢ + ٢٥ص^٢ = ٣٠ س ص$ فأوجد : س : ص

---

⑱ إذا كان : $س(٢س + ص) = ص^٢$ حيث س ص > ٠ فأوجد : س : ص

---

⑲ إذا كان : ٣ س ، ٢ ص ، ٦ ع ، ٩ ص كميات متناسبة أوجد في أبسط صورة قيمة : $\frac{س}{ع}$.

---

⑳ إذا كان : ٢ أ = ٣ ب = ٤ حـ فأوجد أ : ب : حـ وإذا كان : ٢ ب + حـ - أ = ٧,٥

أوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ .

㉑ أكمل العبارات الآتية :

① إذا كان : ٣ س + ٢ ص = ٠ فإن : $\left(\frac{ص}{س}\right)^٣$ = ...

② إذا كان : $٤٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ٠$ حيث : س ، ص ∈ $ع^+$ فإن : س : ص = ...

③ إذا كان : أ : ب = ٢ : ٥ ، أ : حـ = ٣ : ٤ فإن : ب : حـ = ...

④ إذا كان : ٢ م = ٣ ن فإن : $(٦م - ٩ن + ١)^{٢٠١٢}$ = ...

⑤ $\frac{٤س^٢ - ٩ص^٢}{.................} = \frac{٢س - ٣ص}{٢س + ٣ص}$

⑥ إذا كان : س ص > ٠ ، وكان : $\frac{٣س}{٢ص} = \frac{٢ص}{٢٧س}$ فإن : $\frac{س}{ص}$ = ...

⑦ إذا كان : (س - ١) ، ٣ ، ٥ ، (س + ١) كميات متناسبة فإن س = ...أ،.......

الدرس الثالث

تابع خواص التناسب

خاصية (٥):

إذا كان ٪ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، .....،.....،.....،......

كميات متناسبة فإنه كما سبق يكون :

$$\frac{٪}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ... = ك \text{ (فرضاً)}$$

ويكون : ٪ = ك ب ، حـ = ك ء ، هـ = ك و ، **وهكذا** ....

أى أن : مقدم = ثابت × تالى

مثـــال

إذا كان : ٪ ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة أثبت أن :**

① $\left(\frac{٪ + ب}{حـ + ء}\right)^٢ = \frac{٢٪^٢ - ٣ب^٢}{٢حـ^٢ - ٣ء^٢}$ ② $\sqrt[٣]{\frac{٥٪^٣ - ٣حـ^٣}{٥ب^٣ - ٣ء^٣}} = \frac{٪ + حـ}{ب + ء}$

الحـــل

∴ ٪ ، ب ، حـ ، ء **كميات متناسبة**

$\because \frac{٪}{ب} = \frac{حـ}{ء} = ك$ **(فرضاً)**

∴ ٪ = ك ب ، حـ = ك ء

① **الطرف الأيمن** = $\left(\frac{ك ب + ب}{ك ء + ء}\right)^٢$

$= \left[\frac{ب(ك \cancel{+} ١)}{ء(ك \cancel{+} ١)}\right]^٢ = \left(\frac{ب}{ء}\right)^٢$ <<<< (١)

الطرف الأيسر = $\frac{٢(ك ب)^٢ - ٣ب^٢}{٢(ك ء)^٢ - ٣ء^٢}$

$= \frac{٢ك^٢ب^٢ - ٣ب^٢}{٢ك^٢ء^٢ - ٣ء^٢} = \frac{ب^٢(٢ك^٢ \cancel{-} ٣)}{ء^٢(٢ك^٢ \cancel{-} ٣)}$

$= \left(\frac{ب}{ء}\right)^٢$ <<<< (٢)

من (١)،(٢)

$\therefore \left(\frac{٪ + ب}{حـ + ء}\right)^٢ = \frac{٢٪^٢ - ٣ب^٢}{٢حـ^٢ - ٣ء^٢}$

② **الطرف الأيمن** $= \sqrt[3]{\frac{5(كب)^3 - 3(كء)^3}{5ب^3 - 3ء^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{5ك^3ب^3 - 3ك^3ء^3}{5ب^3 - 3ء^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{ك^3(5ب^3 - 3ء^3)}{5ب^3 - 3ء^3}} = \sqrt[3]{ك^3}$ >> (1)

الطرف الأيسر $= \frac{كب + كء}{ب + ء}$

$= \frac{ك(\cancel{ب + ء})}{\cancel{ب + ء}} = ك$ >> (2)

من (1) ، (2)

$\therefore \sqrt[3]{\frac{5أ^3 - 3حـ^3}{5ب^3 - 3ء^3}} = \frac{أ + حـ}{ب + ء}$

مثـــال

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و **كميات متناسبة أثبت أن :**

$$\sqrt{\frac{5أ^2 - 7حـهـ}{5ب^2 - 7ءو}} = \frac{2أ + حـ}{2ب + ء}$$

الحــــل

$\therefore$ أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و **كميات متناسبة**

$\because \frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ك$ **(فرضاً)**

$\therefore$ أ = ك ب ، حـ = ك ء ، هـ = ك و

الطرف الأيمن =

$\sqrt{\frac{5(كب)^2 - 7 \times كء \times كو}{5ب^2 - 7ءو}}$

$= \sqrt{\frac{5ب^2ك^2 - 7ك^2ءو}{5ب^2 - 7ءو}}$

$= \sqrt{\frac{ك^2(\cancel{5ب^2 - 7ءو})}{\cancel{5ب^2 - 7ءو}}}$

$= \sqrt{ك^2} = ك$ >>>> (1)

الطرف الأيسر $= \frac{2كب + كء}{2ب + ء}$

$= \frac{ك(\cancel{2ب + ء})}{\cancel{2ب + ء}} = ك$ >>>> (2)

من (1) ، (2)

$\therefore \sqrt{\frac{5أ^2 - 7حـهـ}{5ب^2 - 7ءو}} = \frac{2أ + حـ}{2ب + ء}$

مثال

إذا كان : $\frac{أ^2 - 2 حـ^2}{ب^2 - 2 د^2} = \frac{أ^2}{ب^2}$ **أثبت أن:**

أ ، ب ، حـ ، د **كميات متناسبة .**

الحل

$\because \frac{أ^2 - 2 حـ^2}{ب^2 - 2 د^2} = \frac{أ^2}{ب^2}$

$\therefore ب^2 (أ^2 - 2 حـ^2) = أ^2 (ب^2 - 2 د^2)$

$\therefore أ^2 ب^2 - 2 ب^2 حـ^2 = أ^2 ب^2 - 2 أ^2 د^2$

$\therefore - 2 ب^2 حـ^2 = - 2 أ^2 د^2$ [÷(-2)]

$\therefore ب^2 حـ^2 = أ^2 د^2$

$\therefore \frac{أ^2}{ب^2} = \frac{حـ^2}{د^2}$ **[بأخذ الجزر التربيعي للطرفين]**

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ ، د **كميات متناسبة**

خاصية (٦):

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د} = \frac{هـ}{و} =$ .... = ك **(فرضاً)**

وكانت : $م_1 ، م_2 ، م_3 ،$ .... **أعداد حقيقية**

فإن: $\frac{م_1 أ + م_2 حـ + م_3 هـ + ...}{م_1 ب + م_2 د + م_3 و + ...} =$ ك (إحدى النسب)

أي أن : $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}} =$ إحدى النسب

مثال

إذا كان : $\frac{أ}{4 س + ص} = \frac{ب}{س - 4 ص}$ **أثبت أن :** $\frac{أ + ب}{5 س - 3 ص} = \frac{أ - ب}{3 س + 5 ص}$

الحل

$\because \frac{أ}{4 س + ص} = \frac{ب}{س - 4 ص}$

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\therefore \frac{أ + ب}{4 س + ص + س - 4 ص} =$ **إحدى النسب**

$\therefore \frac{أ + ب}{5 س - 3 ص} =$ **إحدى النسب** <<<<< (١)

بضرب حدي النسب الثانية في(-١) وجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\therefore \frac{أ - ب}{4 س + ص - س + 4 ص} =$ **إحدى النسب**

$\therefore \frac{أ - ب}{3 س + 5 ص} =$ **إحدى النسب** <<<<<< (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{أ + ب}{5 س - 3 ص} = \frac{أ - ب}{3 س + 5 ص}$

مثال

إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{٢أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب} - \text{ح}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢ح} - \text{أ}}$

فأثبت أن: $\frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{ح}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$

الحل

$\because \frac{\text{س}}{\text{٢أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب} - \text{ح}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢ح} - \text{أ}}$

بضرب حدي النسبة الأولى في (٢) وجمع مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثانية

$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٢ب} + \text{٢ب} - \text{ح}}$ = **إحدى النسب**

$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{ح}}$ = **إحدى النسب** >>>>> (١)

بضرب حدي النسبة الأولى في (٢) والثانية في (٢)وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة.

$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٤أ} + \text{٢ب} + \text{٤ب} - \text{٢ح} + \text{٢ح} - \text{أ}}$ = **إحدى النسب**

$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$ = **إحدى النسب** >>>>> (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{ح}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$

مثال

إذا كان : $\frac{\text{أ} + \text{٣ب}}{\text{س} + \text{٥ع}} = \frac{\text{٣ب} + \text{٥ح}}{\text{٥ص} + \text{٧ع}} = \frac{\text{٥ح} + \text{أ}}{\text{٧ع} + \text{س}}$ **فأثبت أن :** $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

الحل

$\because \frac{\text{أ} + \text{٣ب}}{\text{س} + \text{٥ع}} = \frac{\text{٣ب} + \text{٥ح}}{\text{٥ص} + \text{٧ع}} = \frac{\text{٥ح} + \text{أ}}{\text{٧ع} + \text{س}}$

بضرب حدي النسبة الثانية في (-١) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة .

$\therefore \frac{\text{أ} + \text{٣ب} - \text{٣ب} - \text{٥ح} + \text{٥ح} + \text{أ}}{\text{س} + \text{٥ص} - \text{٥ص} - \text{٧ع} + \text{٧ع} + \text{س}}$ = **إحدى النسب**

∴ $\frac{\text{٢أ}}{\text{٢س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ = إحدى النسب .   >>>>> (١)

بضرب حدي النسبة الثالثة في (-١) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة .

∴ $\frac{\text{أ + ٣ب + ٣ب + ٥حـ - ٥حـ - أ}}{\text{س + ٥ص + ٥ص + ٧ع - ٧ع - س}}$ = **إحدى النسب**

∴ $\frac{\text{٦ب}}{\text{١٠ص}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$ = **إحدى النسب**   >>>>> (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٥ص}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{٣ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٥ص}}$

مثال

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٣س}}$ **أوجد قيمة :** س

الحل

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٤}}$

بضرب حدي النسبة ألأولى في (٢) والثانية في(-١) والثالثة في (٥) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة

∴ $\frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٢ × ٢ - ٣ + ٥ × ٤}}$ = **إحدى النسب**

∴ $\frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٢١}}$ = **إحدى النسب**

∴ $\frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٣س}}$ = **إحدى النسب**

∴ $\frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٢١}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥حـ}}{\text{٣س}}$

∴ ٣س = ٢١

∴ س = ٧

أ/وليد زوال ٢٠١٢-٢٠١٣

تمارين على الدرس الثالث

❶ إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{د}}$

② $\frac{2\text{أ}+3\text{جـ}}{2\text{ب}+3\text{د}} = \frac{\text{أ}-2\text{جـ}}{\text{ب}-2\text{د}}$

③ $\frac{\text{أ}^2-\text{جـ}^2}{\text{ب}^2-\text{د}^2} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}$

④ $\sqrt{\frac{3\text{أ}^2-5\text{جـ}^2}{3\text{ب}^2-5\text{د}^2}} = \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}}$

❷ إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و كميات متناسبة أثبت أن :

① $\frac{\text{أ}+5\text{جـ}}{\text{ب}+5\text{د}} = \frac{\text{جـ}-3\text{هـ}}{\text{د}-3\text{و}}$

② $\sqrt{\frac{2\text{أ}^2-3\text{جـ هـ}}{2\text{ب}^2-3\text{د و}}} = \sqrt[3]{\frac{\text{أ جـ هـ}}{\text{ب د و}}}$

❸ أثبت أن: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة إذا كان :

① $\frac{\text{أ}}{\text{أ}-\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}-\text{د}}$

② $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}-\text{ب}} = \frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{جـ}-\text{د}}$

❹ إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{أ}-\text{ب}+\text{جـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}-\text{جـ}+\text{أ}} = \frac{\text{ع}}{\text{جـ}-\text{أ}+\text{ب}}$

أثبت أن : $\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{\text{ب}}$

❺ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{2\text{س}-\text{ص}} = \frac{\text{ب}}{2\text{ص}-\text{س}}$ **أثبت أن :** $\frac{2\text{أ}+\text{ب}}{\text{أ}+2\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

❻ إذا كان : $\frac{\text{س}+\text{ص}}{7} = \frac{\text{ص}+\text{ع}}{5} = \frac{\text{ع}+\text{س}}{8}$ **أثبت أن :** $\frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{س}-\text{ع}} = 5$

❼ إذا كان : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{3} = \frac{\text{ب}+\text{جـ}}{6} = \frac{\text{جـ}+\text{أ}}{5}$ **أثبت أن :** $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{أ}} = 7$

❽ إذا كان : $\frac{\text{ص}}{\text{س}-\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}}$ **فأثبت أن كلاً من هذه النسب يساوي ٢**

(ما لم تكن $\text{س}+\text{ص}=0$ **) ثم أوجد** $\text{س}:\text{ص}:\text{ع}$

❾ أكمل العبارات الآتية :

① **إذا كان :** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{3}{7}$ **فإن :** $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{د}} = $ ....

② **إذا كان :** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{1}{3}$ **فإن :** $\frac{\text{أ}-5\text{جـ}+\text{هـ}}{\text{ب}-5\text{د}+\text{و}} = $ ....

③ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{3\text{أ}+\text{.....}-2\text{هـ}}{\text{.....}+5\text{د}-\text{.....}}$

④ $\frac{\text{س}}{2} = \text{ص} = \frac{\text{ع}}{6} = \frac{\text{س}+\text{ص}+\text{ع}}{\text{............}} = \frac{\text{ع}-\text{ص}-\text{س}}{\text{............}}$

الدرس الرابع

التناسب المتسلسل

إذا كان :

① $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ **فإننا نقول : أ ، ب ، ح في تناسب متسلسل.**

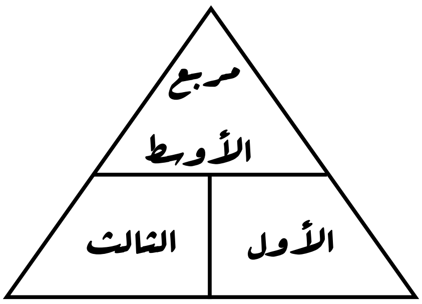
② أ ، ب ، ح **في تناسب متسلسل فإن :** $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$.

ويسمى أ الأول المتناسب ، ب الوسط المتناسب (الوسط الهندسي) ، ح الثالث المتناسب

ملاحظات هامة

① **الكميتين : " أ ، ح " يجب أن تكون موجبتين معاً أو سالبتين معاً (لهما نفس الإشارة)**

② ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ ⟸ $أ = \frac{ب^{2}}{ح}$ ، $ح = \frac{ب^{2}}{أ}$



أى أن : الأول المتناسب = $\frac{\text{مربع الأوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}}$

،،، الثالث المتناسب = $\frac{\text{مربع الأوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}}$

③ **وأيضاً:** $ب^{2} = أ\,ح$ ⟸ $ب = \pm\sqrt{\text{الأول المتناسب} \times \text{الثالث المتناسب}}$

(أنظر الشكل الموضح)

④ **إذا كان : أ ، ب ، ح ، ء في تناسب متسلسل فإن :**

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{ء} = م$ **(فرضاً)**

∴ ح = ء م (١) ،، ب = ح م (٢) ،، أ = ب م (٣)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ ب = ء م × م = $ء م^{2}$ (٤)

بالتعويض من (٤) في (٣)

∴ أ = $ء م^{2}$ × م = $ء م^{3}$

وخلاصة القول :

أ = $ء م^{3}$ ،، ب = $ء م^{2}$ ،، ح = ء م

مثال

في كل مما يأتي أوجد قيمة "س" بحيث تكون الكميات في تناسب متسلسل

① س ، ٤ ، ٨ ② ٣ ، س ، ١٢ ③ ٢ ، ٦ ، س

الحل

① ∵ س ، ٤ ، ٨ **في تناسب متسلسل**

$\therefore$ س $= \frac{(٤)^{٢}}{٨} = \frac{١٦}{٨}$

$\therefore$ س $= ٢$

② ∵ ٣ ، س ، ١٢ **في تناسب متسلسل**

$\therefore$ س $= \pm \sqrt{٣ \times ١٢}$

$\therefore$ س $= \pm ٦$

③ ∵ ٢ ، ٦ ، س **في تناسب متسلسل**

$\therefore$ س $= \frac{(٦)^{٢}}{٢} = \frac{٣٦}{٢}$

$\therefore$ س $= ١٨$

مثال

إذا كان : أ ، ب ، حـ في تناسب متسلسل

أو بصيغة أخرى (إذا كانت : ب وسطاً متناسباً بين أ ، حـ) أثبت أن :

① $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + حـ^{٢}} = \frac{أ}{حـ}$ ② $\frac{أ^{٢} + أب + ب^{٢}}{ب^{٢} + ب حـ + حـ^{٢}} = \frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{ب^{٢} - حـ^{٢}}$

الحل

∵ أ ، ب ، حـ **في تناسب متسلسل**

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م$ **(فرضاً)**

$\therefore$ أ $=$ حـ م^{٢} ، ب $=$ حـ م

① **الطرف الأيمن** $= \frac{(حـ م^{٢})^{٢} + (حـ م)^{٢}}{(حـ م)^{٢} + حـ^{٢}} = \frac{حـ^{٢} م^{٤} + حـ^{٢} م^{٢}}{حـ^{٢} م^{٢} + حـ^{٢}}$

$= \frac{حـ^{٢} م^{٢} (م^{٢} + ١)}{حـ^{٢} (م^{٢} + ١)} = م^{٢}$ >>>>> (١)

الطرف الأيسر $= \frac{حـ م^{٢}}{حـ} = م^{٢}$ >>>>> (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + حـ^{٢}} = \frac{أ}{حـ}$

② الطرف الأيمن = $\frac{(حـ م^{2})^{2} + حـ م^{2} \times حـ م + (حـ م)^{2}}{(حـ م)^{2} + حـ م \times حـ + حـ^{2}}$

$= \frac{حـ^{2} م^{4} + حـ^{2} م^{3} + حـ^{2} م^{2}}{حـ^{2} م^{2} + حـ^{2} م + حـ^{2}}$

$= \frac{حـ^{2} م^{2} (م^{2} + م + 1)}{حـ^{2} (م^{2} + م + 1)} = م^{2}$ >>>>> (١)

الطرف الأيسر = $\frac{(حـ م^{2})^{2} - (حـ م)^{2}}{(حـ م)^{2} - حـ^{2}}$

$= \frac{حـ^{2} م^{4} - حـ^{2} م^{2}}{حـ^{2} م^{2} - حـ^{2}} = \frac{حـ^{2} م^{2} (م^{2} - 1)}{حـ^{2} (م^{2} - 1)} = م^{2}$ >>>>> (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{أ^{2} + أ ب + ب^{2}}{ب^{2} + ب حـ + حـ^{2}} = \frac{أ^{2} - ب^{2}}{ب^{2} - حـ^{2}}$

مثـــال

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء **في تناسب متسلسل أثبت أن :**

$\frac{أ - ء}{أ + ب + حـ} = \frac{أ - 2 ب + حـ}{أ - ب}$

الحـــل

$\because$ أ ، ب ، حـ ، ء **في تناسب متسلسل**

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$ (فرضاً)

$\therefore$ أ = ء $م^{3}$ ، ب = ء $م^{2}$ ، حـ = ء م

الطرف الأيمن = $\frac{ء م^{3} - ء}{ء م^{3} + ء م^{2} + ء م}$

$= \frac{ء (م^{3} - 1)}{ء م (م^{2} + م + 1)} = \frac{ء (م - 1)(م^{2} + م + 1)}{ء م (م^{2} + م + 1)}$

$= \frac{م - 1}{م}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ءم}^{٣} - ٢\,\text{ءم}^{٢} + \text{ءم}}{\text{ءم}^{٣} - \text{ءم}^{٢}}$

$= \frac{\text{ءم}^{٢}\,(\text{م}^{٢} - ٢\text{م} + ١)}{\text{ءم}^{٢}\,(\text{م} - ١)} = \frac{\text{ءم}\,(\text{م} - ١)^{٢}}{\text{ءم}^{٢}\,(\text{م} - ١)}$

$= \frac{\text{م} - ١}{\text{م}}$

مثـــال

إذا كانت : ب **وسطاً متناسباً بين** أ ، حـ **وكانت :** حـ **وسطاً متناسباً بين** ب ، ء

أثبت أن : $\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{حـ}^{٢}} + \frac{\text{حـ}^{٢}}{\text{ء}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{حـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ء}} + \frac{\text{أ حـ}}{\text{ب ء}}$

الحـــــل

∵ ب **وسطاً متناسباً بين** أ ، حـ

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ (١)

∵ حـ **وسطاً متناسباً بين** ب ، ء

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ **(فرضاً)**

∴ $\text{أ} = \text{ءم}^{٣}$ ، $\text{ب} = \text{ءم}^{٢}$ ، $\text{حـ} = \text{ءم}$

الطرف الأيمن $= \frac{(\text{ءم}^{٣})^{٢}}{(\text{ءم}^{٢})^{٢}} + \frac{(\text{ءم}^{٢})^{٢}}{(\text{ءم})^{٢}} + \frac{(\text{ءم})^{٢}}{\text{ء}^{٢}}$

$= \frac{\text{ء}^{٢}\,\text{م}^{٦}}{\text{ء}^{٢}\,\text{م}^{٤}} + \frac{\text{ء}^{٢}\,\text{م}^{٤}}{\text{ء}^{٢}\,\text{م}^{٢}} + \frac{\text{ء}^{٢}\,\text{م}^{٢}}{\text{ء}^{٢}}$

$= \text{م}^{٢} + \text{م}^{٢} + \text{م}^{٢} = ٣\,\text{م}^{٢}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ءم}^{٣}}{\text{ءم}} + \frac{\text{ءم}^{٢}}{\text{ء}} + \frac{\text{ءم}^{٣} \times \text{ءم}}{\text{ءم}^{٢} \times \text{ء}}$

$= \text{م}^{٢} + \text{م}^{٢} + \text{م}^{٢} = ٣\,\text{م}^{٢}$

أ/وليد زوال
٢٠١٢-٢٠١٣

تمارين على الدرس الرابع

❶ أوجد الأول المتناسب بين:

① ٤ ، ٨ ② $ر$ ، $ر^{٢}$ ③ ٦ س ص ، − ٤ س ص

❷ أوجد الثالث المتناسب بين:

① ٦ ، ١٢ ② $س^{٢}$ ، $-٣س^{٢}$ ③

❸ أوجد الوسط المتناسب بين:

① ٣ ، ٢٧ ② $٨ س^{٢}$ ، $٢ ص^{٤}$ ③

❹ إذا كان : أ ، ب ، حـ في تناسب متسلسل أثبت أن :

① $\frac{أ - ب}{ب - حـ} = \frac{أ + ٣ ب}{ب + ٣ حـ}$ ② $\left(\frac{ب - حـ}{أ - ب}\right)^{٢} = \frac{حـ}{أ}$

③ $\frac{أ^{٣} - ٤ ب^{٣}}{ب^{٣} - ٤ حـ^{٣}} = \frac{ب^{٣}}{حـ^{٣}}$ ④ $\frac{٢ حـ^{٢} - ٣ ب^{٢}}{٢ ب^{٢} - ٣ أ^{٢}} = \frac{حـ}{أ} = \frac{حـ^{٢}}{ب^{٢}}$

❺ إذا كان : أ ، ب ، حـ ، د في تناسب متسلسل أثبت أن :

① $\frac{أ - ٢ ب}{ب - ٢ حـ} = \frac{٣ ب + ٤ حـ}{٣ حـ + ٤ د}$ ② $\left(\frac{أ + ب}{ب + حـ}\right)^{٢} = \frac{أ}{٢ حـ} + \frac{ب}{٢ د}$

③ $\frac{أ ب - حـ د}{ب^{٢} - حـ^{٢}} = \frac{أ + حـ}{ب}$ ④ $\frac{٢ أ^{٣} + ٣ ب^{٣}}{٣ أ^{٣} - ٤ ب^{٣}} = \frac{٢ أ + ٣ د}{٣ أ - ٤ د}$

❻ إذا كان : ٥ أ ، ٦ ب ، ٧ حـ ، ٨ د كميات موجبة في تناسب متسلسل

فأثبت أن : $\sqrt[٣]{\frac{٥ أ}{٨ د}} = \sqrt{\frac{٥ أ + ٦ ب}{٧ حـ + ٨ د}}$

❼ إذا كان : س ، ص ، ع أطوال أضلاع متناسبة في مثلث ، وكان : س + ص = ١٥ سم ، ص + ع = ٢٢,٥ سم أوجد س : ص

❽ إذا كان : س ، ٣ ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل أوجد قيمة كل من : س ، ص

❾ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ١ ، ٥ ، ١٣ فإنها تصبح متناسبة.

❿ إذا كانت : ٢ ، س + ٤ ، ١٨ كميات متناسبة . أوجد قيم : س

الدرس الخامس

التغير الطردي و التغير العكسي

أولاً التغير الطردي :

تمهيد :

ت	١	٢	٣	٤
فہ	٥	١٠	١٥	٢٠

إذا تأملنا الجدول المقابل والذي يوضح العلاقة بين شدة التيار (ت) المار في موصل ما وفرق الجهد بين طرفي هذا الموصل (فہ) نـجد أنه : إذا أخذنا قيمتين لشدة التيار $ت_١ = ٢$ ، $ت_٢ = ٤$ ، القيمـتين المناظرتين لهما لفرق الجهد $فہ_١ = ١٠$ ، $فہ_٢ = ٢٠$ يكون :

$$\frac{ت_١}{ت_٢} = \frac{١}{٢} \quad \text{وأيضاً :} \quad \frac{فہ_١}{فہ_٢} = \frac{١}{٢}$$

أي أن : $\frac{ت_١}{ت_٢} = \frac{فہ_١}{فہ_٢} = \frac{١}{٢} =$ **مقدار ثابت**

أى أن : التغير فى شدة التيار نتج عنه تغير فى فرق الجهد بنفس النسبة .

عندئذٍ نقول : أن العلاقة بين فہ ، ت هى علاقة تغير طردى أو علاقة طردية. ونعبر عن ذلك رمزياً كالآتى : $فہ \propto ت$

لاحظ أيضاً أن : $\frac{فہ_١}{ت_١} = \frac{فہ_٢}{ت_٢} = ... = ٥$ (ثابت)

أى أن: $\frac{فہ}{ت} =$ ثابت أو: فہ = ثابت × ت.

خلاصة القول : يقال أن ص تتغير طردياً مع س وتكتب $ص \propto س$.

إذا كان: $ص = م\, س$ أو $\frac{ص}{س} = م$ (حيث م ثابت حقيقى لا يساوى الصفر)

أو إذا كان : $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ حيث : $س_١$ ، $س_٢$ قيمتين للمتغير س أما : $ص_١$ ، $ص_٢$ القيمتين المناظرتين لهما للمتغير ص . والعكس صحيح .

مثــــال

إذا كان : $ص \propto س$ **وكانت** : $ص = ١٥$ **عندما** : $س = ٣$ **أوجد** :

① **العلاقة بين المتغيرين** : س ، ص ② **قيمة** : ص **عندما** : $س = ٧$

③ **قيمة** : س **عندما** : $ص = ٩٠$

الحـــــل

$\because ص \propto س$

$\therefore ص = م\ س$

$\because ص = ١٥ \quad ، \quad س = ٣$

$\therefore ١٥ = م \times ٣$

$\therefore م = ٥$

$\therefore$ **العلاقة بين** ص ، س **هي** :

$\boxed{ص = ٥\ س}$.

عندما $س = ٧$

$\therefore ص = ٥ \times ٧ = ٣٥$

عندما $ص = ٩٠$

$\therefore ٩٠ = ٥\ س$

$\therefore س = \frac{٩٠}{٥} = ١٨$

مثــــال

إذا كان : $ص \propto \sqrt[٣]{س}$ **وكانت** : $ص = \frac{٢}{٣}$ **عندما** : $س = ٨$ **أوجد** :

قيمة : س **عندما** : $ص = ١$

الحـــــل

<u>حل أول :</u>

$\because ص \propto \sqrt[٣]{س}$

$\therefore ص = م\ \sqrt[٣]{س}$

$\because ص = \frac{٢}{٣} \quad ، \quad س = ٨$

$\therefore \frac{٢}{٣} = م \times \sqrt[٣]{٨}$

$\therefore \frac{٢}{٣} = م \times ٢$

$\therefore م = \frac{١}{٣}$

$\therefore$ **العلاقة بين** ص ، س **هي** :

$\boxed{ص = \frac{١}{٣}\ \sqrt[٣]{س}}$.

عندما $ص = ١$

$\therefore ١ = \frac{١}{٣}\ \sqrt[٣]{س}$

$\therefore \sqrt[٣]{س} = ٣$ **بتكعيب الطرفين**

$س = (٣)^٣ = ٢٧$

حل آخر :

∵ ص ∝ $\sqrt[3]{س}$

∴ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{\sqrt[3]{س_١}}{\sqrt[3]{س_٢}}$

حيث : ص$_١$ = $\frac{٢}{٣}$ ، س$_١$ = ٨ | ص$_٢$ = ١ ، س = ؟؟؟

∴ $\frac{\frac{٢}{٣}}{١} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{س_٢}}$

∴ $\frac{\frac{٢}{٣}}{١} = \frac{٢}{\sqrt[3]{س_٢}}$

∴ $\frac{٢}{٣}\sqrt[3]{س_٢} = ٢$

∴ $\sqrt[3]{س_٢} = ٢ \times \frac{٣}{٢}$

∴ $\sqrt[3]{س_٢} = ٣$ **بتكعيب الطرفين**

∴ س$_٢$ = $(٣)^٣$ = ٢٧

لاحظ أن : في المثال السابق لم يطلب العلاقة لذا أمكن الحل بأحد الحلين أما في المثال السابق له طلب العلاقة ؛ لذا لزم الحل كما في الحل الأول لأن الحل الآخر لا يعطي العلاقة ولكن يعطي قيمة المتغير المجهول فقط .

مثال

إذا كان : $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع} = \frac{ص}{ع}$ **أثبت أن** : ص ∝ ع

الحل

∴ ص (٧س - ع) = ع (٢١ س - ص)

∴ ٧س ص - ص ع = ٢١ س ع - ع ص

∴ ٧ س ص = ٢١ س ع

∴ ص = ٣ ع

∴ $\frac{ص}{ع}$ = ٣ (ثابت)

∴ ص ∝ ع

> لاحظ أنه لإثبات أن : ص ∝ ع
>
> يجب إثبات أن : ($\frac{ص}{ع}$ = ثابت)

مثال

إذا كان : ص ∝ س **أثبت أن** : (ص^٢ + س^٢) ∝ (ص^٢ - س^٢)

الحـــــل

$\therefore$ ص $\propto$ س

$\therefore$ ص = ك س

$$\therefore \frac{ص^2 + س^2}{ص^2 - س^2} = \frac{(ك س)^2 + س^2}{(ك س)^2 - س^2}$$

$$= \frac{ك^2 س^2 + س^2}{ك^2 س^2 - س^2} = \frac{س^2 (ك^2 + 1)}{س^2 (ك^2 - 1)} = \frac{ك^2 + 1}{ك^2 - 1} = \text{ثابت}$$

$\therefore$ $(ص^2 + س^2) \propto (ص^2 - س^2)$

تطبيقات على التغير الطردي

تطبيق فيزيائي: تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن ، فإذا قطعت السيارة مسافة ١٥٠ كيلومتراً في ٦ ساعات ، فكم كيلو متراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات .

الحـــــل

نفرض المسافة المقطوعة (ف) كيلومتر ، في زمن قدرة (ن) ساعة .

$\because$ ف $\propto$ ن

$$\therefore \frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ن_1}{ن_2}$$

حيث : $ف_1 = 150$ كم ، $ن_1 = 6$ ساعات | $ف_2 = ؟؟؟؟$ ، $ن_2 = 10$ ساعات

$$\therefore \frac{150}{ف_2} = \frac{6}{10}$$

$$\therefore ف_2 = \frac{150 \times 10}{6} = 250 \text{ كيلو متراً}$$

تطبيق فلكي: إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طردياً مع وزنه على الأرض (م) وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلوجراماً على الأرض ، ووزنه على القمر ١٤ كيلوجراماً ،فماذا يكون وزن جسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلوجرام .

الحـــــل

∵ وزن الجسم على القمر (و) كيلوجرام

، وزن الجسم على الأرض (ر) كيلوجرام

∵ و ∝ ر

∴ $\frac{و_1}{و_2} = \frac{ر_1}{ر_2}$

حيث : $ر_1 = ٨٤$ كجم | $ر_2 = ١٤$ كيلوجرام

$و_1 = ١٤٤$ كجم | $و_2 = ؟؟؟؟$

∴ $\frac{١٤٤}{و_2} = \frac{٨٤}{١٤}$

∴ $و_2 = \frac{١٤٤ \times ١٤}{٨٤} = ٢٤$ كيلوجرام

ثانياً التغير العكسي :

تمهيد :

س	٩	١٢	١٨	٣٦
ص	٤	٣	٢	١

إذا تأملنا الجدول المقابل والذي يوضح العلاقة بين بعدي مستطيل ثابت المساحة (٣٦ $سم^2$) حيث طول مستطيل (س) وعرضه (ص) نجد أنه : إذا أخذنا قيمتين للطول $س_1 = ١٢$ ، $س_2 = ٣٦$ ، القيمتين المناظرتين لهما للعرض $ص_1 = ٣$ ، $ص_2 = ١$ يكون :

$\frac{س_1}{س_2} = \frac{١}{٣}$ وأيضاً : $\frac{ص_1}{ص_2} = ٣$ أي أن : $\frac{س_1}{س_2} = \frac{ص_2}{ص_1} = \frac{١}{٣}$ = مقدار ثابت

أى أن : التغير فى طول المستطيل نتج عنه تغير فى عرض المستطيل بنسبة عكسية .

عندئذٍ نقول : أن العلاقة بين ص ، س هى علاقة تغير عكسى أو علاقة عكسية . ونعبر عن ذلك رمزياً كالآتى : ص $\propto \frac{١}{س}$

لاحظ أيضاً أن: $س_1 ص_1 = س_2 ص_2 = ...= ٢٤$ (ثابت)

أى أن : س ص = ثابت

خلاصة القول : يقال أن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب ص $\propto \frac{١}{س}$.

إذا كان: ص = $\frac{م}{س}$ أو ص س = م (حيث م ثابت حقيقى لا يساوى الصفر)

أو إذا كان : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ حيث : $س_1$ ، $س_2$ قيمتين للمتغير س أما : $ص_1$ ، $ص_2$ القيمتين المناظرتين لهما للمتغير ص . والعكس صحيح .

مثـــال

إذا كان : $ص^2 \propto \frac{1}{س^3}$ **وكانت**: $ص = \frac{1}{3}$ **عندما** : $س = 3$ **أوجد** :

① **العلاقة بين** ص ، س .　　② **قيمة** س **عندما** $ص = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

الحـــل

$\because ص^2 \propto \frac{1}{س^3}$

$\therefore ص^2 = \frac{م}{س^3}$

$\because ص = \frac{1}{3}$ ، $س = 3$

$\therefore (\frac{1}{3})^2 = \frac{م}{(3)^3}$

$\therefore \frac{1}{9} = \frac{م}{27}$

$\therefore 9\,م = 27$

$\therefore م = \frac{27}{9} = 3$

$\therefore$ **العلاقة بين** ص ، س **هي** :

$\boxed{ص^2 = \frac{3}{س^3}}$.

عندما : $ص = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{3}{س^3}$

$\therefore \frac{8}{9} = \frac{3}{س^3}$

$\therefore س^3 = \frac{3 \times 9}{8} = \frac{27}{8}$

$\therefore س = \frac{3}{2}$

مثـــال

إذا كان : $ص = أ + 5$ **حيث** : $أ \propto \frac{1}{س^2}$ **وكانت** $ص = 9$ **عندما** $س = \frac{1}{2}$ **أوجد** :

① **العلاقة بين** ص ، س .　　② **قيمة** س **عندما** $ص = 6$

الحـــل

$\because أ \propto \frac{1}{س^2}$

$\therefore أ = \frac{م}{س^2}$

$\because ص = أ + 5$

$\therefore ص = \frac{م}{س^2} + 5$

عندما: $ص = 9$ ، $س = \frac{1}{2}$

$\therefore 9 = \frac{م}{(\frac{1}{2})^2} + 5$

$\therefore \frac{م}{\frac{1}{4}} = 4$

$\therefore$ م $= 4 \times \frac{1}{4} = 1$

$\therefore$ **العلاقة بين** س ، ص **هي :**

$$\boxed{\text{ص} = \frac{1}{\text{س}^2} + 5}$$

عندما: ص $= 6$

$\therefore 6 = \frac{1}{\text{س}^2} + 5$

$\therefore \frac{1}{\text{س}^2} = 6 - 5 = 1$

$\therefore$ س$^2 = 1$

$\therefore$ س $= \pm 1$

مثـــال

إذا كان : س^4 ص^2 $-$ 14 س^2 ص $+$ 49 $= 0$ **فأثبت أن** : ص $\propto \frac{1}{\text{س}^2}$

الحــــل

$\because$ س^4 ص^2 $-$ 14 س^2 ص $+ 49 = 0$

$\therefore$ (س^2 ص $- 7$) (س^2 ص $- 7$) $= 0$

$\therefore$ س^2 ص $= 7$ (ثابت)

$\therefore$ ص $\propto \frac{1}{\text{س}^2}$

لاحظ أنه لإثبات أن : ص $\propto \frac{1}{\text{س}^2}$

يجب إثبات أن : (ص $\times$ س^2 = ثابت)

تطبيقات على التغير العكسي

تطبيق فيزيائي: **إذا كان مقدار السرعة (ع) التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (نق) وكانت ع = 5 سم / ث عندما نق = 3 سم**

أوجد : ع عندما : نق = 2,5 سم

الحــــل

$\because$ ع $\propto \frac{1}{\text{نق}^2}$

$\therefore \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{نق}_2^2}{\text{نق}_1^2}$

حيث : ع$_1$ = 5 سم/ث ، نق$_1$ = 3 سم

ع$_2$ = ؟؟؟؟ ، نق$_2$ = 2,5 سم

$\therefore \frac{5}{\text{ع}_2} = \frac{(2,5)^2}{(3)^2}$

$\therefore \frac{5}{\text{ع}_2} = \frac{6,25}{9}$

$\therefore$ ع$_2$ $= \frac{5 \times 9}{6,25} = 7,2$ سم

تمارين على الدرس الخامس

أولاً التغير الطردي :

❶ **إذا كان** : ص $\propto$ س **وكانت** : ص = ١٢ **عندما** : س = ٣ **أوجد** :

① **العلاقة بين** س ، ص ② **قيمة** ص **عندما** : س = ٩

③ **قيمة** س **عندما** : ص = ٦

❷ **إذا كان** : ص $\propto$ $\sqrt{س}$ **وكانت** : ص = ١٠ **عندما** : س = ٤ **أوجد** :

① **العلاقة بين** س ، ص ② **قيمة** ص **عندما** : س = ٣٦

③ **قيمة** س **عندما** : ص = ١٥

❸ **إذا كان** : $س^{٣} \propto ص^{٢}$ **وكانت** : س = ٢ **عندما** : ص = ٤ **أوجد** :

① **العلاقة بين** س ، ص ② **قيمة** س **عندما** : ص = ٠,٥

③ **قيمة** ص **عندما** : س = ٨

❹ **إذا كان** : $أ^{٣} \propto ب$ **وكانت** : أ = ب = $\frac{١}{٢}$ **أوجد** : أ **عندما** : ب = ٣٢

❺ **إذا كان** : (س + ٢) $\propto$ (ص + ١) **وكانت** : س = ٨ **عندما** : ص = ١

أوجد قيمة : س **عندما** ص = ٣

❻ **إذا كان** : س = ل + ٩ **وكانت** : ل $\propto$ ص **فأوجد العلاقة بين** : ل ، ص

علماً بأن : س = ٢٤ ، ص = ٥ . **ثم أوجد قيمة** ص **عندما** : ل = ١٢

❼ **إذا كان** : $٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٢$ س ص **فأثبت أن** : س $\propto$ ص

❽ **إذا كان** : $\frac{٢أ + ب}{٥أ + ٣ب} = \frac{٤}{١١}$ **فأثبت أن** : س $\propto$ ص

❾ **إذا كانت سرعة جسيم يتحرك رأسياً من السكون تعطى بالعلاقة** : ع = ٩,٨ ن **حيث** (ع) **سرعة الجسم بالمتر/ث ،** ن **الزمن بالثانية . أوجد سرعة الجسم بعد مرور خمس ثواني من بداية الحركة ، ومتى تصل سرعته ١٤٧ متر/ث.**

⑩ إذا كان ضغط الغاز (ض) داخل إناء يتغير طردياً بتغير درجة حرارته (ر) وكان: ر = ٢٠ درجة مئوية عندما ض = ١٠٠٠ سم زئبق. أوجد ض عندما : ر = ١٥ درجة مئوية .

ثانياً التغير العكسي :

❶ إذا كان : $ص \propto \frac{١}{س}$ **وكانت :** ص = ٤ **عندما :** س = ٦ **أوجد :**

① **العلاقة بين** س ، ص ② **قيمة** ص **عندما :** س = ٣

③ **قيمة** س **عندما :** ص = ٢

❷ إذا كان : $س \propto \frac{١}{ص^{٢}}$ **وكانت :** س = ٣ **عندما :** ص = ٢ **أوجد :**

① **العلاقة بين** س ، ص ② **قيمة** ص **عندما :** $س = \frac{١}{٣}$

③ **قيمة** س **عندما :** ص = - ١

❸ إذا كانت : ص **تتغير عكسياً بتغير** $\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ **وكانت :** ص = ٥ **عندما :** س = ٨

أوجد قيمة: س **عندما** ص = ٢

❹ إذا كانت : ص = م + ١ **حيث** $م \propto \frac{١}{س}$ **وكانت :** ص = ٥ **عندما :** $س = \frac{١}{٢}$

أوجد العلاقة بين س ، ص **ثم أوجد قيمة** س **عندما** ص = ٣

❺ إذا كان : $س^{٦} ص^{٢} = ٣ س^{٣} ص + ٤ ص^{٢}$ **أثبت أن :** $ص \propto س^{-٣}$

❻ إذا كان : $(س - ص) \propto (\frac{١}{ص} - \frac{١}{س})$ **فأثبت أن:** س **تتغير عكسياً بتغير** ص.

❼ إذا كانت : ص = ع + ٣ **وكانت :** ع **تتناسب عكسياً بتغير مربع** س ، **وكانت** س = ٣ **عندما :** ص = ٧ ، **أوجد العلاقة بين** س ، ص **ثم أوجد قيمة:** ص **عندما :** س = ٢

⑧ إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات ، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟

⑨ أكمل العبارات الآتية :

① **إذا كان** : ص $\propto$ س **فإن** : ص =........... **(حيث م ثابت لا يساوي الصفر)**

② **إذا كان** : س ص^{٢} = ٨ **فإن** : س $\propto$ ....

③ **إذا كان** : ص − ٣س = ٠ **فإن** : س $\propto$ ....

④ **إذا كان** : ص $\propto$ س **وكانت** : ص = ٢ **عندما** : س = ٨ **فإن** ص =........ **عندما** : س = ١٢

⑤ **إذا كان** : $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$ **فإن** : ص $\propto$ ....

⑥ **إذا كان** : $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$ **فإن** : ص $\propto$ ....

⑦ **إذا كان** : $\frac{س_١ ص_١}{س_٢ ص_٢} = ١$ **فإن** : ص $\propto$ ....

⑧ **إذا كان** : $\frac{س_١ ص_٢}{س_٢ ص_١} = ١$ **فإن** : ص $\propto$ ....

⑨ **إذا كانت طاقة الحركة (ط) لجسم ثابت الكتلة (ك) عند أي لحظة تعطى بالعلاقة:**

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} **حيث (ع) سرعة الجسم عند هذه اللحظة فإن** : ط $\propto$ ....

⑩ **إذا كانت العلاقة بين حجم أسطوانة دائرية قائمة (ح) ،وطول نصف قطر قاعدتها (نق) ، وارتفاعها (ع) يتحدد بالعلاقة** : ح = ط نق^{٢} ع **فإن** : ع $\propto$ .... **(عند ثبوت ح)**

الدرس الأول

جمع البيانات

تمهيد :

يقوم الباحث الإحصائي بجمع البيانات وتحليلها بغرض الوصول إلى نتائج يتم في ضوئها إتخاذ القرارات المناسبة حيال الموضوع محل الدراسة ، كما أنه بقدر دقة البيانات تكون دقة النتائج وبالتالي سلامة القرارات ، وعلى ذلك فإن مرحلة جمع البيانات تعتبر من أهم المراحل التي يقوم بها الباحث ، لذا فإنه من الضروري أن يتبع الباحث اسلوب علمي صحيح عند جمع البيانات .

والآن هيا بنا نتعرف على : مصادر جمع البيانات ، و أساليب جمعها .

مصادر جمع البيانات

	مصادر أولية	مصادر ثانوية
تعريفه	هي المصادر التي يقوم الباحث بالحصول على البيانات منها بنفسه بشكل مباشر	هي المصادر التي يقوم الباحث بالحصول على البيانات منها من أجهزة أو هيئات رسمية .
أمثلة	المقابلة الشخصية ـ الاستبيان ـ المقابلة الشخصية ـ الملاحظة والقياس	نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والإحصاء ـ الإنترنت ـ وسائل الإعلام (راديو ، تليفزيون ، صحف)
مميزاته	دقة النتائج .	يوفر الوقت و الجهد والمال .
عيوبه	يحتاج إلى وقت طويل ، ومجهود كبير ، وتكلفة باهظة	عدم دقة النتائج في بعض الأحيان .

أساليب جمع البيانات

	أسلوب الحصر الشامل	أسلوب العينات
تعريفه	وهو الأسلوب الذي يعتمد على جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع الإحصائي	وهو الأسلوب الذي يعتمد على جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع الإحصائي
أمثلة	التعداد العام للسكان ـ الإنتخابات	فحص دم المريض ـ فحص إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية لتحديد عمر المصباح
مميزاته	دقة النتائج ـ الشمول ـ عدم التحيز	يوفر الوقت و الجهد والمال . الأسلوب الوحيد لجمع البيانات من المجتمعات غير المحدودة أو المحدودة أحياناً
عيوبه	يحتاج إلى وقت طويل ، ومجهود كبير ، وتكلفة باهظة	عدم دقة النتائج في بعض الأحيان .

العينات

العينة : هي جزء صغير من المجتمع الاحصائي تشبه المجتمع وتمثله .

العينات

العينات غير العشوائية[العينة العمدية]:
وهي العينات التي يتم اختيارها من مفردات المجتمع الإحصائي دون غيرها بحيث تناسب أهداف البحث.

العينات العشوائية:
وهي العينات التي يتم اختيارها من مفردات المجتمع الإحصائي بحيث تكون فرص ظهور أي من مفردات المجتمع متساوية.

العينة العشوائية البسيطة :
وتستخدم مع المجتمعات الغير مقسمة بطبيعتها إلى فئات أو طبقات.

العينة العشوائية الطبقية:
وتستخدم مع المجتمعات المقسمة بطبيعتها إلى فئات أو طبقات.

مثال

إذا كان هناك في احدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحجمها ، فاحسب عدد مفردات كل طبقة .

الحل

	الفرقة الأولى	الفرقة الثانية	الفرقة الثالثة	الفرقة الرابعة	المجموع
المجتمع	٤٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
العينة	؟	؟؟	؟؟؟	؟؟؟؟	٥٠٠

عدد مفردات طبقة الفرقة الأولى $= \frac{٤٠٠٠ \times ٥٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ٢٠٠ طالب

عدد مفردات طبقة الفرقة الثانية $= \frac{٣٠٠٠ \times ٥٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ١٥٠ طالب

عدد مفردات طبقة الفرقة الثالثة $= \frac{٢٠٠٠ \times ٥٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ١٠٠ طالب

عدد مفردات طبقة الفرقة الرابعة $= \frac{١٠٠٠ \times ٥٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ٥٠ طالب

تمارين على الدرس الأول

❶ أكمل العبارات الآتية:

① الملاحظة المباشرة من المصادر .... للبيانات.

② نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والإحصاء من المصادر .... للبيانات .

③ البحث في سجلات مدرستك عن أسماء الطلاب العشرة الأوائل في العام الماضي من المصادر........ للبيانات

④ الأسلوب المناسب لفحص دم المريض.........................

⑤ الأسلوب المناسب لمعرفة نسبة الغياب في إحدى المدارس هو اسلوب...............

⑥ الأسلوب المناسب عند فرز أصوات الناخبين في إنتخابات مجلس الشعب هو اسلوب.........

⑦ الأسلوب المناسب عند فحص إنتاج مصنع ما للوقوف على نسبة الوحدات التالفة ....

⑧ الأسلوب المناسب لفحص نسبة العذوبة لمياه أحد الأبار هو اسلوب ....

⑨ الأسلوب المناسب لمعرفة البرنامج التليفزيوني الذي يفضله المشاهد هو اسلوب ....

⑩ الأسلوب المناسب لمعرفة تعداد السكان هو اسلوب ....

❷ إذا كان بأحد المصانع ٥٠٠ عامل ، ٢٠٠ فني ، ٥٠ مهندس ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ١٥٠ شخصاً تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها . فأحسب عدد مفردات كل طبقة في العينة .

❸ يراد سحب عينة طبقية عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة ، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالي :

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى في العينة ٢٤٠ مفردة . أوجد حجم العينة كلها.

❹ مجتمع به ٢٠٠٠ مفردة مقسمة إلى ٤ طبقات ، يراد سحب عينة تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها فقام الباحث بتصميم الجدول التالي :

أكمل الجدول :

	١	٢	٣	٤	المجموع
المجتمع	٥٠٠	٧٠٠	....	٤٥٠	....
العينة	....	....	٧	....	....

الدرس الثاني

التشـــتت

تذكر أن :

مقاييس النزعة المركزية

- **الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عددها}}$**
- **الوسيط لمجموعة من القيم هو: القيمة التي تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .**
- **المنوال لمجموعة من القيم : هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً).**

مثـــال

أوجد الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال للمجموعتين ﻫ ، ب التاليتين :

المجموعة ﻫ : ٥ ، ١٠ ، ٧ ، ٥ ، ١٣

المجموعة ب : ١١ ، ٥ ، ١٢ ، ٥ ، ٧

الحـــــل

	المجموعة ب
الوسط الحسابي = $\frac{٥ + ١٠ + ٧ + ٥ + ١٣}{٥}$ = ٨	**الوسط الحسابي** = $\frac{١١ + ٥ + ١٢ + ٥ + ٧}{٥}$ = ٨
الترتيب التنازلي : ١٣ ، ١٠ ، ٧ ، ٥ ، ٥	**الترتيب التنازلي** : ١٢ ، ١١ ، ٧ ، ٥ ، ٥
الوسيط = ٧	**الوسيط** = ٧
المنوال = ٥	**المنوال** = ٥

لاحظ أن :

- **الوسط الحسابي للمجموعة ﻫ = الوسط الحسابي للمجموعة ب = ٨**
- **الوسيط للمجموعة ﻫ = الوسيط للمجموعة ب = ٧**
- **المنوال للمجموعة ﻫ = المنوال للمجموعة ب = ٥**

مما سبق نـجد أن :

على الرغم من أن مقاييس النزعة المركزية الثلاثة (الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال) متساوية إلا أن قيم المجموعتين مختلفة . لذلك فإن مقاييس النزعة المركزية غير قادرة وحدها على وصف مجموعة من القيم . من هنا دعت الحاجة الى ضرورة وجود نوع آخر من المقاييس والتى تسمى مقاييس التشتت .

تعريف التشتت:

يقصد به التباعد أو الإختلاف بين مفردات مجموعة القيم ، ويكون التشتت كبيراً - التجانس صغيراً - إذا كان الإختلاف بين المفردات كبيراً ، ويكون التشتت صغيراً - التجانس كبيراً - إذا كان الإختلاف بين المفردات صغيراً ، ويكون التشتت صفراً - التجانس تاماً - إذا كانت جميع القيم متساوية .

مقاييس التشتت

المدى : (هو أبسط مقاييس التشتت).
ويعرف بأنه الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة
المدى = أكبر مفردة − أصغر مفردة .

الإنحراف المعياري : (هو أهم وأصدق مقاييس التشتت)
ويعرف بأنه الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى .

مثال

أوجد المدى لمجموعتي القيم :

المجموعة (أ) : ٤٠ ، ٣٥ ، ١٦ ، ٤٥ ، ١٩ ، ٢٩

المجموعة (ب) : ١٧ ، ٢٣ ، ٣١ ، ١٢ ، ٢٤ ، ١٠

ثم بين أي المجموعتين أكثر تجانساً .

الحل

∵ المدى = أكبر مفردة - أصغر مفردة

∴ المدى للمجموعة (أ) = ٤٥ - ١٩ = ٢٦

، المدى للمجموعة (ب) = ٣١ - ١٠ = ٢١

∵ المدى للمجموعة (ب) < المدى للمجموعة (أ)

∴ المجموعة (ب) أكثر تجانساً (أقل تشتتاً) .

مميزات المدى : **أسهل وأبسط طرق قياس التشتت - طريقة سهلة للغاية ويعطي فكرة سريعة عن تباعد وتقارب المفردات .**

عيوب المدى : **لايعكس أثر جميع المفردات لأن حسابه يعتمد على أكبر و أصغر قيمة فقط. يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة .**

الإنحراف المعياري (σ)

حساب الإنحراف المعيارى لمجموعة من القيم

حساب الإنحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط

حساب الإنحراف المعيارى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

أولاً : حساب الإنحراف المعياري لمجموعة من القيم (٣)

الإنحراف المعيارى (σ) يحسب من القانون : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$

حيث : س ترمز إلى مفردة من المفردات ، $\bar{س}$ ترمز للوسط الحسابى (تقرأ س بار)

، ن عدد المفردات ، $\sum$ تشير إلى عملية الجمع (تقرأ ***SUMMATION***)

مثــــال

أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري للقيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحــــل

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٦ + ٣٢ + ٥ + ٢٠ + ٢٧}{٥} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$$

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^{٢}
١٦	− ٤	١٦
٣٢	١٢	١٤٤
٥	− ١٥	٢٢٥
٢٠	صفر	صفر
٢٧	٧	٤٩
١٠٠		٤٣٤

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣٢$$

ثانياً : حساب الإنحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط (٦)

الإنحراف المعيارى (σ) يحسب من القانون : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}}}$

حيث : س ترمز إلى القيمة ، ك ترمز لتكرار القيمة ، $\sum$ ك لمجموع المفردات

$\bar{\text{س}}$ ترمز للوسط الحسابى $= \dfrac{\sum (\text{س} \times \text{ك})}{\sum \text{ك}}$

مثـــال

الجدول الآتي يبين درجات ١٠٠ تلميذ في أحد الإمتحانات :

الدرجة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩	١٠٠

أوجد الانحراف المعيارى لدرجات التلاميذ

الحــــــل

نوجد الوسط الحسابى			نوجد الانحراف المعيارى		
س	ك	س × ك	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}$
٠	٣	٠	٣-	٩	٢٧
١	١٦	١٦	٢-	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	١-	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	٠	٠	٠
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
المجموع	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

$\bar{\text{س}} = \dfrac{\sum (\text{س} \times \text{ك})}{\sum \text{ك}} = \dfrac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

$\because \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}}}$

$\therefore \sigma = \sqrt{\dfrac{٢٠٤}{١٠٠}} = ١,٤٢٨$

ثالثاً : حساب الإنحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي مجموعات (٧)

الإنحراف المعيارى (σ) يحسب من القانون : $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}}{\Sigma \text{ك}}}$

حيث : س ترمز إلى مركز المجموعة ، ك ترمز لتكرار المجموعة ، Σ ك لمجموع التكرارات

$\bar{\text{س}}$ ترمز للوسط الحسابى $= \dfrac{\Sigma(\text{س} \times \text{ك})}{\Sigma \text{ك}}$

تذكر أن

مركز المجموعة(س)= $\dfrac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{٢}$

مثـــال

التوزيع التكراري التالي يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ في إحدى المدارس:

الوزن بالكيلو جرام	٣٥ـ	٤٥ـ	٥٥ـ	٦٥ـ	٧٥ـ	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

أوجد (أ) الوسط الحسابي لأوزان التلاميذ (ب) الإنحراف المعياري لأوزان التلاميذ

الحـــــــل

نوجد الوسط الحسابى				نوجد الانحراف المعيارى		
المجموعات	التكرار (ك)	مركز المجموعة (س)	س × ك	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}$
٣٥ـ	٢٠	٤٠	٨٠٠	١٨,٢٥ـ	٣٣٣,٠٦٢٥	٦٦٦١,٢٥٠٠
٤٥ـ	٥٥	٥٠	٢٧٥٠	٨,٢٥ـ	٦٨,٠٦٢٥	٣٧٤٣,٤٣٧٥
٥٥ـ	٨٠	٦٠	٤٨٠٠	١,٧٥	٣,٠٦٢٥	٢٤٥,٠٠٠٠
٦٥ـ	٣٠	٧٠	٢١٠٠	١١,٧٥	١٣٨,٠٦٢٥	٤١٤١,٨٧٥٠
٧٥ـ	١٥	٨٠	١٢٠٠	٢١,٧٥	٤٧٣,٠٦٢٥	٧٠٩٥,٩٣١٥
المجموع	٢٠٠		١١٦٥٠			٢١٨٨٧,٤٩٤٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma(\text{س} \times \text{ك})}{\Sigma \text{ك}} = \frac{١١٦٥٠}{٢٠٠} = ٥٨,٢٥$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{ك}}{\Sigma \text{ك}}} = \sqrt{\frac{٢١٨٨٧,٤٩٤}{٢٠٠}} = ١٠,٤٦$$

تمارين على الدرس الثاني

❶ احسب المدى و الوسط الحسابي والإنحراف المعياري في كل مما يأتي :

① ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

② ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

③ ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

④ ١٥ ، –١٢ ، –٩ ، ٢٧ ، –٦

❷ الجدول التالي يبين عدد أطفال بعض الأسر في مدينة المنصورة :

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لعدد الأطفال

❸ فيما يلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الاطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لأعمار الأطفال .

❹ التوزيع التكرارى التالى يبين أوزان ٢٠٠ تلميذ فى أحدى المدارس

الوزن	٣٥ –	٤٥ –	٥٥ –	٦٥ –	٧٥ –	المجموع
عدد التلاميذ	٢٠	٥٥	٨٠	٣٠	١٥	٢٠٠

احسب الوسط الحسابي والإنحراف المعياري .

❺ التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات

عدد اللترات	٥ –	٧ –	٩ –	١١ –	١٣ –	١٥ –	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

احسب الوسط الحسابي والإنحراف المعياري .

❻ الجدولان التاليان يمثلان التوزيع التكرارى لدرجات تلاميذ الفصلين: أ ، ب
فى الصف الثالث الإعدادي فى أحد الأختبارات

	الفئات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	المجموع
فصل أ	عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠
فصل ب		س	٣	٩س	٧	٥س	٤٠

① أوجد قيمة س

② أوجد الوسط الحسابى والأنحراف المعيارى لكل توزيع

③ أى الفصلين أكثر تجانساً فى مستوى التحصيل؟

❶ إذا كانت: س = {٣، ٤} ، ص = {٤، ٥} ، ع = {٦، ٥} أوجد :

[١] س × (ص ∩ ع)

[٢] (س - ص) × ع

[٣] (س - ص) × (ص - ع)

الحـــــل

[١] س × (ص ∩ ع) = {٣، ٤} × {٥}

= {[٣، ٥]، [٤، ٥]}

[٢] (س - ص) × ع = {٣} × {٥، ٦}

= {[٣، ٥]، [٣، ٦]}

[٣] (س - ص) × (ص - ع)

= {٣} × {٤} = {[٣، ٤]}

❷ إذا كانت: س = {٣، ٤، ٥} ، ص = {٤، ٦، ٨، ١٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث "أ ع ب" تعني أن: "أ = $\frac{١}{٢}$ ب" لكل أ ∈ س، ب ∈ ص فاكتب بيان ع وبين أن ع دالة ، واكتب مداها

الحـــــل

ع = {(٣، ٦)، (٤، ٨)، (٥، ١٠)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة

المدى = {٦، ٨، ١٠}

❸ إذا كانت: س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٤، ٥، ٦، ٧} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن: أ + ب = ٨ H أ ∈ س، ب ∈ ص.

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني .

وبين مع ذكر السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا ؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

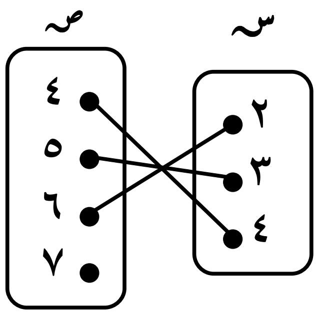
الحـــــل

ع = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٤، ٤)}

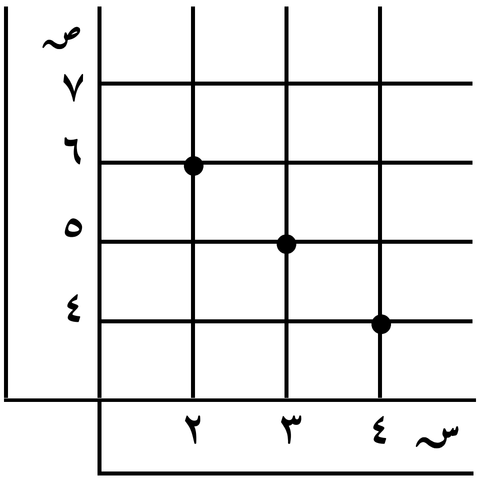
∵ كل عنصر من عنصر المجموعة س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة ع.

∴ ع دالة من س إلى ص.

المدى = {٤، ٥، ٦}



المخطط سهمي



المخطط بياني

❹ إذا كان: د(س) = س^2 - ٤س + ٣

أوجد درجة الدالة د.

ثم أثبت أن: د(١) = د(٣) = ٠

الحل

درجة الدالة د هي الثانية. (أكبر أس للمتغير س)

∵ د(س) = س^2 - ٤س + ٣

∴ د(١) = (١)^2 - ٤(١) + ٣

∵ د(١) = ١ - ٤ + ٣ = صفر (١)

، د(٣) = (٣)^2 - ٤(٣) + ٣

∴ د(٣) = ٩ - ١٢ + ٣ = صفر (٢)

من (١)، (٢)

∴ د(١) = د(٣) = ٠

❺ إذا كانت: د(س) = س^2 - ٢س + ٥

أثبت أن: د(٢$\sqrt{٢}$ + ١) = ٢د(١ - $\sqrt{٢}$)

الحل

∵ د(س) = س^2 - ٢س + ٥

∴ د(٢$\sqrt{٢}$ + ١)

= (٢$\sqrt{٢}$ + ١)^2 - ٢(٢$\sqrt{٢}$ + ١) + ٥

= ٨ + ٤$\sqrt{٢}$ + ١ - ٤$\sqrt{٢}$ - ٢ + ٥ = ١٢ (١)

∴ د(١ - $\sqrt{٢}$)

= (١ - $\sqrt{٢}$)^2 - ٢(١ - $\sqrt{٢}$) + ٥

= ١ - ٢$\sqrt{٢}$ + ٢ - ٢ + ٢$\sqrt{٢}$ + ٥ = ٦ (٢)

من (١)، (٢)

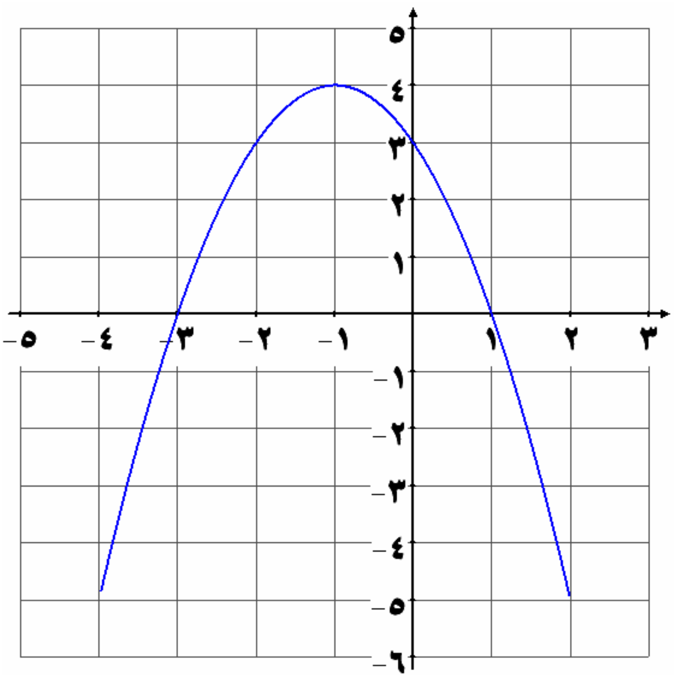
∴ د(٢$\sqrt{٢}$ + ١) = ٢د(١ - $\sqrt{٢}$)

❻ ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣ - ٢س - س^2

حيث س ∈ [- ٤، ٢] ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

الحل

س	٣ - ٢س - س^2	ص	(س، ص)
- ٤	٣ + ٨ - ١٦	- ٥	(- ٤، - ٥)
- ٣	٣ + ٦ - ٩	٠	(- ٣، ٠)
- ٢	٣ + ٤ - ٤	٣	(- ٢، ٣)
- ١	٣ + ٢ - ١	٤	(- ١، ٤)
٠	٣ - ٠ - ٠	٣	(٠، ٣)
١	٣ - ٢ - ١	٠	(١، ٠)
٢	٣ - ٤ - ٤	- ٥	(٢، - ٥)



نقطة رأس المنحنى: (- ١، ٤)

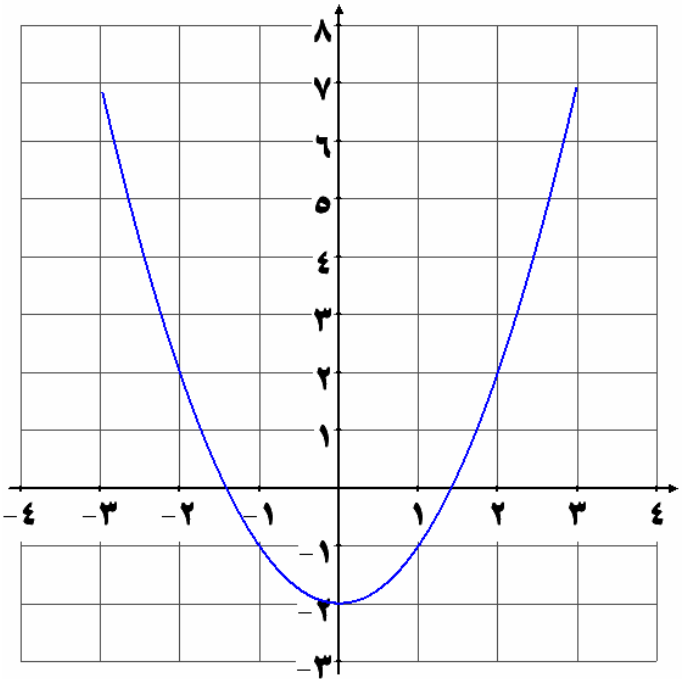
معادلة محور التماثل: س = - ١

القيمة العظمى للدالة: ص = ٤

❼ ارسم منحنى الدالة د: د(س) = $س^2$ - ٢
حيث س ∈ [- ٣، ٣] ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

الحــــــل

س	$س^2$ - ٢	ص	(س، ص)
- ٣	٩ - ٢	٧	(- ٣، ٧)
- ٢	٤ - ٢	٢	(- ٢، ٢)
- ١	١ - ٢	- ١	(- ١، - ١)
٠	٠ - ٢	- ٢	(٠، - ٢)
١	١ - ٢	- ١	(١، - ١)
٢	٤ - ٢	٢	(٢، ٢)
٣	٩ - ٢	٧	(٣، ٧)



نقطة رأس المنحنى : (٠، - ٢)

معادلة محور التماثل : س = ٠

القيمة الصغرى للدالة : ص = - ٢

❽ مثل بيانيا الدالة : د(س) = ٢س - ٣
ومن الرسم أوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لها مع محوري الإحداثيات.

الحــــــل

س	١	٢
ص	- ١	١

لإيجاد نقطتي التقاطع مع محوري الإحداثيات

مع محور السينات:

بوضع : ص = ٠

∴ ٢س - ٣ = ٠

∴ ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

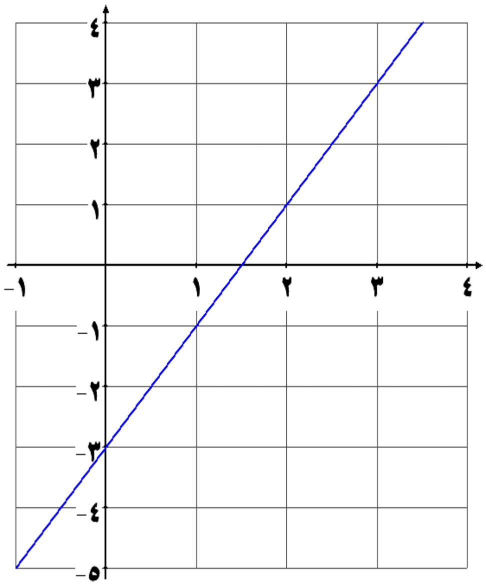
مع محور الصادات :

بوضع : س = ٠

∴ ص = ٢ × ٠ - ٣

∴ ص = - ٣

∴ (٠، - ٣)



أو من الرسم نجد أن : المستقيم يقطع محوري الإحداثيات السيني والصادي في النقطتين :

($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)، (٠، - ٣) على الترتيب

⑨ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد : ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة.

الحـــل

نفرض أن العدد هو س

∴ الأعداد المتناسبة هي :

٣+س ، ٥+س ، ٨+س ، ١٢ + س

$$\because \frac{\text{٣ + س}}{\text{٥ + س}} = \frac{\text{٨ + س}}{\text{١٢ + س}}$$

∴ (٣ + س) (١٢ + س) = (٥ + س) (٨ + س)

∴ ٣٦ + ١٥س + س^2 = ٤٠ + ١٣س + س^2

∴ ٢س = ٤

∴ س = ٢

∴ العدد = ٢

⑩ إذا كان مقدار السرعة (ع) التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتناسب عكسيا مع مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (نق) وكانت ع = ٥ سم/ث عندما نق = ٣ سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم.

الحـــل

$$\because \text{ع} \propto \frac{\text{١}}{\text{نق}^2}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ك}}{\text{نق}^2}$$

عندما: ع = ٥ ، نق = ٣

$$\therefore \text{٥} = \frac{\text{ك}}{\text{٩}}$$

∴ ك = ٤٥

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{٤٥}}{\text{نق}^2}$$

عندما : نق = ٢,٥

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{٤٥}}{(\text{٢,٥})^2}$$

∴ ع = ٧,٢ سم/ث

⑪ إذا كان : $\frac{\text{٢س - ص}}{\text{٣س + ٢ص}} = \frac{\text{١}}{\text{١٢}}$

أوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{٥س + ص}}{\text{٢س + ٣ص}}$

الحـــل

$$\because \frac{\text{٢س - ص}}{\text{٣س + ٢ص}} = \frac{\text{١}}{\text{١٢}}$$

∴ ١٢ (٢س - ص) = ٣س + ٢ص

∴ ٢٤س - ١٢ص = ٣س + ٢ص

∴ ٢٤س - ٣س = ٢ص + ١٢ص

∴ ٢١س = ١٤ص

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٢١}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

∴ س = ٢ك ، ص = ٣ك

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{\text{٥} \times \text{٢ك} + \text{٣ك}}{\text{٢} \times \text{٢ك} + \text{٣} \times \text{٣ك}}$$

$$= \frac{\text{١٠ك + ٣ك}}{\text{٤ك + ٩ك}} = \frac{\text{١٣ك}}{\text{١٣ك}} = \text{١}$$

⑫ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٣س}}$

أوجد قيمة : س

الحـــل

بضرب حدي النسبة الأولى في (٢) والثانية في (-١) والثالثة في (٥) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاثة :

$$\therefore \text{احدى النسب} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٢} \times \text{٢} + \text{٣} \times \text{-١} + \text{٤} \times \text{٥}}$$

$$\therefore \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٢١}} = \frac{\text{٢أ - ب + ٥جـ}}{\text{٣س}}$$

∴ ٣س = ٢١

∴ س = ٧

⓭ إذا كان : أ ، ب ، ح ، ء في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\dfrac{\text{أ}^2 - ٣\text{ح}^2}{\text{ب}^2 - ٣\text{ء}^2} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ء}}$

الحـــل

∵ أ ، ب ، ح ، ء في تناسب متسلسل

∴ $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{ح}} = \dfrac{\text{ح}}{\text{ء}} = \text{ك}$

∴ $\text{أ} = \text{ء ك}^3$ ،، $\text{ب} = \text{ء ك}^2$ ،، $\text{ح} = \text{ء ك}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{(\text{ء ك}^3)^2 - ٣(\text{ء ك})^2}{(\text{ء ك}^2)^2 - ٣\text{ء}^2}$

$= \dfrac{\text{ء}^2\text{ك}^6 - ٣\text{ء}^2\text{ك}^2}{\text{ء}^2\text{ك}^4 - ٣\text{ء}^2}$

$= \dfrac{\text{ء}^2\text{ك}^2(\text{ك}^4 - ٣)}{\text{ء}^2(\text{ك}^4 - ٣)} = \text{ك}^2$

الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{ء ك}^2}{\text{ء}} = \text{ك}^2$

∴ الطرفان متساويان

⓮ إذا كان : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فأثبت أن: $\sqrt[3]{\dfrac{٥\text{س}^3 - ٣\text{ع}^3}{٥\text{ص}^3 - ٣\text{ل}^3}} = \dfrac{\text{س} + \text{ع}}{\text{ص} + \text{ل}}$

الحـــل

∵ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

∴ $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{ع}}{\text{ل}} = \text{م}$

∴ $\text{س} = \text{م ص}$ ،،، $\text{ع} = \text{م ل}$

الطرف الأيمن $= \sqrt[3]{\dfrac{٥\text{م}^3\text{ص}^3 - ٣\text{م}^3\text{ل}^3}{٥\text{ص}^3 - ٣\text{ل}^3}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{\text{م}^3(٥\text{ص}^3 - ٣\text{ل}^3)}{٥\text{ص}^3 - ٣\text{ل}^3}} = \text{م}$

الطرف الأيسر $= \dfrac{\text{م ص} + \text{م ل}}{\text{ص} + \text{ل}}$

$= \dfrac{\text{م}[\text{ل} + \text{ص}]}{\text{ل} + \text{ص}} = \text{م}$

∴ الطرفان متساويان

⓯ إذا كان: $\dfrac{٢١\text{س} - \text{ص}}{٧\text{س} - \text{ع}} = \dfrac{\text{ص}}{\text{ع}}$

أثبت أن : $\text{ص} \propto \text{ع}$

الحـــل

∴ $\text{ص}(٧\text{س} - \text{ع}) = \text{ع}(٢١\text{س} - \text{ص})$

∴ $٧\text{س ص} - \text{ص ع} = ٢١\text{س ع} - \text{ع ص}$

∴ $٧\text{س ص} = ٢١\text{س ع}$

∴ $\text{ص} = ٣\text{ع}$

∴ $\dfrac{\text{ص}}{\text{ع}} = ٣$

∴ $\text{ص} \propto \text{ع}$

⓰ إذا كان: $\text{س}^6\text{ص}^4 + ٢٥ = ١٠\text{س}^3\text{ص}^2$

فأثبت أن: $\text{س}^3 \propto \dfrac{١}{\text{ص}^2}$

الحـــل

∵ $\text{س}^6\text{ص}^4 + ٢٥ = ١٠\text{س}^3\text{ص}^2$

∴ $\text{س}^6\text{ص}^4 - ١٠\text{س}^3\text{ص}^2 + ٢٥ = ٠$

∴ $(\text{س}^3\text{ص}^2 - ٥)(\text{س}^3\text{ص}^2 - ٥) = ٠$

∴ $\text{س}^3\text{ص}^2 = ٥$

∴ س^3 تتغير عكسيا مع ص^2

∴ $\text{س}^3 \propto \dfrac{١}{\text{ص}^2}$

⓱ إذا كان: ص = أ + ٥ حيث: أ $\propto$ $\frac{١}{س^{٢}}$

وكانت ص = ٩ عندما س = $\frac{١}{٢}$ أوجد:

① العلاقة بين ص ، س

② قيمة س عندما ص = ٦

الحل

أ $\propto$ $\frac{١}{س^{٢}}$

∴ أ = $\frac{م}{س^{٢}}$

∵ ص = أ + ٥

∴ ص = $\frac{م}{س^{٢}}$ + ٥

عندما: ص = ٩، س = $\frac{١}{٢}$

∴ ٩ = $\frac{م}{(\frac{١}{٢})^{٢}}$ + ٥

∴ $\frac{م}{\frac{١}{٤}}$ = ٤

∴ م = ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

∴ العلاقة بين س ، ص:

ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ + ٥

عندما: ص = ٦

∴ ٦ = $\frac{١}{س^{٢}}$ + ٥

∴ $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٦ - ٥ = ١

∴ س² = ١

∴ س = ± ١

⓲ إذا كان: $\frac{أ + ب}{٣}$ = $\frac{ب + ح}{٦}$ = $\frac{ح + أ}{٥}$

أثبت أن: $\frac{أ + ب + ح}{أ}$ = ٧

الحل

بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاث

∴ $\frac{٢أ + ٢ب + ٢ح}{٣ + ٦ + ٥}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{٢(أ + ب + ح)}{١٤}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{أ + ب + ح}{٧}$ = إحدى النسب ------ (١)

بضرب حدي النسبة الثانية في (-١) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاث

∴ $\frac{أ + ب - ب - ح + ح + أ}{٣ - ٦ + ٥}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{٢أ}{٢}$ = أ = إحدى النسب ------- (٢)

من (١)،(٢):

∴ $\frac{أ + ب + ح}{٧}$ = أ

∴ $\frac{أ + ب + ح}{أ}$ = ٧

⓳ إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات ، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟

الحل

∵ ن تتغير عكسيا مع س

∴ ن تتغير طرديا مع $\frac{١}{س}$

∴ ن $\propto$ $\frac{١}{س}$

∴ ن = $\frac{ك}{س}$

عندما: ن = ٤ ، س = ٦

∴ ٤ = $\frac{ك}{٦}$

∴ ك = ٢٤

∴ ن = $\frac{٢٤}{س}$

عندما: س = ٨

∴ ن = $\frac{٢٤}{٨}$ = ٣ ساعات

⑳ أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري للقيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحــــل

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{١٦ + ٣٢ + ٥ + ٢٠ + ٢٧}{٥} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$$

س	س - س̄	(س - س̄)²
١٦	٤ -	١٦
٣٢	١٢	١٤٤
٥	١٥ -	٢٢٥
٢٠	صفر	صفر
٢٧	٧	٤٩
المجموع		٤٣٤

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣٢$$

㉑ التوزيع التكراري التالي يبين أعمار ٢٠ شخص بالسنوات :

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

أوجد

(١) الوسط الحسابي للأعمار (٢) الإنحراف المعياري للأعمار

الحــــل

س	ك	س × ك	س - س̄	(س - س̄)²	(س - س̄)² × ك
١٥	٢	٣٠	٨ -	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	٦٠	٣ -	٩	٢٧
٢٢	٥	١١٠	١ -	١	٥
٢٣	٥	١١٥	٠	٠	٠
٢٥	١	٢٥	٢	٤	٤
٣٠	٤	١٢	٧	٤٩	١٩٦
المجموع	٢٠	٤٦٠			٣٦٠

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum (\text{س} \times \text{ك})}{\sum \text{ك}} = \frac{٤٦٠}{٢٠} = ٢٣$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{ك}}{\sum \text{ك}}} = \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٠}} = \sqrt{١٨} = ٤,٢٤$$

٢٢ أحسب الوسط الحسابي والإنحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٢ -	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨ -	٢٢ -	٢٦ -
التكرار	٤	٥	٨	١٠	٧	٥	١

الحـــل

المجموعات	ك	س	س × ك	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
٢ -	٤	٤	١٦	١١-	١٢١	٤٨٤
٦ -	٥	٨	٤٠	٧-	٤٩	٢٤٥
١٠ -	٨	١٢	٩٦	٣-	٩	٧٢
١٤ -	١٠	١٦	١٦٠	١	١	١٠
١٨ -	٧	٢٠	١٤٠	٥	٢٥	١٧٥
٢٢ -	٥	٢٤	١٢٠	٩	٨١	٤٠٥
٢٦ -	١	٢٨	٢٨	١٣	١٦٩	١٦٩
المجموع	٤٠		٦٠٠			١٥٦٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{٦٠٠}{٤٠} = ١٥$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^2 \times ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{١٥٦٠}{٤٠}} = ٦,٢٤$$

٢٣ أكمل العبارات الآتية:

أولاً : على العلاقات والدوال

(١) النقطة (٥ ، - ٣) تقع في الربع ....

(٢) إذا كان : (س + ٥، ٨) = (١ ، ص + س) فإن : ص = ...

(٣) إذا كان : ن(سـ) = ٥ ، ن(صـ×سـ) = ١٥ فإن : ن (صـ) =.................

(٤) النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور.....................

(٥) إذا كان : (٥، س - ٧) = (ص + ١ ، - ٥) فإن : س + ص = ...

(٦) إذا كـــــــــان : سـ× صـ= { (١،٥)، (١،٧)، (٢،٥)، (٢،٧)، (٣،٥)، (٣،٧) } فـــــإن :
سـ= ....، صـ= ....

(٧) إذا كان : ن(سـ@)= ٩ ، ن(صـ@) =٤٩ فإن : ن(سـ× صـ)=.............

(٨) إذا كانت النقطة (ا، ب) تقع في الربع الثالث فإن : ا ب..............صفر

(٩) إذا كانت النقطة (ا، ب) تقع في الربع الثاني فإن : ا ب..............صفر

(١٠) إذا كانت النقطة (ا، ب) تقع على محور الصادات فإن : ا/ب =..............

(١١) إذا كانت النقطة (س - ٣، ٥ - س) حيث س ∋ صـ تقع في الربع الأول فإن: س =........

(١٢) إذا كانت النقطة (س+ ٢، ٩) تقع على محور الصادات فإن س =........

(١٣) إذا كانت النقطة (٥، ب - ٧) تقع على محور السينات فإن ب =............

(١٤) إذا كان : س، ص عددان سالبان فإن النقطة : (س@، ص@) تقع في الربع ....

(١٥) إذا كان : ن(سـ@) = ٢٥ ، ن(س× صـ) = ١٥ فإن : ن(صـ@)=.............

(١٦) إذا كانت د:د (س) = اس+ ٣ وكان (١، ٤) ∋ د فإن: ا = ...

(١٧) إذا كانت النقطة (س - ٤، ٢ - س) حيث س∋ صـ تقع في الربع الثالث فإن س =........

(١٨) إذا كان : (س - ١، ١١) =(٨ ، ص+ ٣) فإن: √(س+ ٢ص) = ...

(١٩) إذا كان : ن(سـ) = ٤ ، ن(سـ× صـ)= ١٢ فإن : ن(صـ)=.............

(٢٠) إذا كان : ن(سـ@)= ٤ ، ن(صـ@) = ١٦ فإن : ن(صـ×سـ)=.............

(٢١) إذا كان : د (س) = ٥س - ٧ فإن : د (٣) = ...

(٢٢) إذا كان : د (س) = ٦س فإن : د (٢) +د (- ٢) =...............

(٢٣) إذا كان :د (س) = ٣س+ ب ،د (٤) = ١٣ فإن : ب=..........

(٢٤) الدالة د:د ع ← ع حيث د (س) = ٣س يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (- ٤ ،......)

(٢٥) الدالة د:د ع ← ع حيث ص = ٣س يمثلها خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ......

(٢٦) الدالة د : ح ← ح حيث ص = ٢س - ١ يمثلها خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ...

(٢٧) الدالة د : د (س) = ٢س + ٨ يمثلها مستقيم يقطع محور السينات في النقطة........

(٢٨) إذا كانت : النقطة (١، ٣) تقع على المستقيم الممثل للدالة د ح ← ح
حيث د (س) = ٤س - ٥ فإن : ا = ...

(٢٩) إذا كانت : د (س) = س - ٦ وكان : $\frac{١}{٣}$ د (ا) = - ٢ فإن : ا = ...

(٣٠) إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، د : س ← ح حيث د (س) = ٢س + ١ فإن : مدى الدالة د = ...

(٣١) إذا كانت : د دالة من س إلى ص فإن : س تسمى ....، ص تسمى ....

(٣٢) إذا كانت : د دالة من س إلى ص فإن : مدى الدالة د يكون ⊂ ....

(٣٣) إذا كانت : د (س) = ٣س - ١ يمثلها بيانيا مستقيم يمر بالنقطة (ا، ٢) فإن : ا = ...

(٣٤) إذا كانت : (٢، - ٦) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = ك س + ٨ فإن : ك = ...

(٣٥) إذا كان : ن(س^{2}) = ٩ فإن : ن(س) = ...

(٣٦) النقطة : (- ٣، ٤) تقع في الربع ....

(٣٧) إذا كانت : س = { ٥، ٦، ٧ } فإن : ن(س^{2}) = ...

(٣٨) إذا كانت : س × ص = { (١، ٣)، (١، ٤) } فإن : ن(س) = ...

(٣٩) إذا كانت : س = { ٥ } ، ص = { ٣ } فإن : ن(س × ص) = ...

(٤٠) إذا كانت : النقطة (س، ٧) تقع على محور الصادات فإن : ٥س + ١ = ...

(٤١) إذا كانت : ع دالة من س إلى ص حيث س = { ٢، ٥، ٨ } ، ص = { ٣، ٥ } وكانت
ع = { (٢، ٣)، (٥، ٣)، (س، ٣) } فإن : س = ... ومدى الدالة هو..............

(٤٢) إذا كانت : ع دالة حيث بيان ع = { (٤، ٣)، (٥، ٦) (٩، ٣) } فإن مدى الدالة ع هو ....

(٤٣) إذا كانت د (س) = ٧س - $\frac{١}{٢}$ فإن : د ($\frac{١}{٢}$) = ...

(٤٤) إذا كانت : د (س) = ٤س + ب وكان : د (٣) = ١٥ فإن : ب = ...

(٤٥) إذا كانت : د (س) = س^{2} + ٧ فإن : د (٣) = ...

(٤٦) إذا كانت : د (س) = س^{3} فإن : د (- ٢) + د (٢) = ...

(٤٧) إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : د (- ٨) + د (٨) = ...

(٤٨) الدالة د : د (س) = - ٨ يمثلها بيانيا مستقيم يوازي محور............ ويقطع محور............ في النقطة .... ويقع هذا المستقيم .... محور ....

(٤٩) إذا كانت د : د (س) = ٥ فإن : $\frac{د (٥) + د (- ٥)}{٥}$ = ...

(٥٠) إذا كانت د دالة من س إلى ص فإن مجموعة صور عناصر س بالدالة د يسمى..............

(٥١) الدالة د : د (س) = $س^2$ - س (س - ٤) كثيرة حدود من الدرجة ....

(٥٢) الدالة د : د (س) = $(س + ٢)^2$ - س (س + ٢) كثيرة حدود من الدرجة ....

(٥٣) إذا كانت :نقطة رأس منحنى دالة تربيعية هي (- ٢، ٥) فإن معادلة محور تماثل منحناها هي........

(٥٤) منحنى الدالة التربيعية يكون له قيمة عظمى إذا كان معامل $س^2$ .... ويكون له قيمة صغرى إذا كان معامل $س^2$...............

(٥٥) إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى فإن منحنى الدالة يكون مفتوحا ....

(٥٦) نقطة رأس المنحنى للدالة د : د (س) = $س^2$ - ٤س + ٥ هي..........................

(٥٧) إذا كانت :د : د (س) = ٢س - ٨ فإن د دالة كثيرة حدود من الدرجة .... وتمثل بيانيا بمستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

(٥٨) إذا كانت د : د (س) = $س^2$ + ٢س + ١ فإن معادلة محور تماثلها هي.........................

(٥٩) إذا كانت د دالة : د (س) = ٤ - ٢س - $س^2$ فإن قيمتها .... تساوي................

(٦٠) الدالة د : د (س) = ٣س + حـ تمثل مستقيم يمر بنقطة الأصل إذا كان : حـ=.............

ثانياً : على النسبة والتناسب والتغير الطردي والعكسي

(١) إذا كان: س ص = ٩ فإن س تتغير............ مع ص

(٢) إذا كان : ص O $\frac{١}{س}$ فإن : $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{.......}{.......}$

(٣) إذا كان : ص O س فإن : $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{.......}{.......}$

(٤) إذا كان: $\frac{س}{٣}$ = $\frac{ص}{٥}$ فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(٥) إذا كان: ٣ ا + ٥ ب = ٤ ا - ب فإن : $\frac{ب}{ا}$ = ...

(٦) إذا كان : $\frac{ص}{س}$ = $\frac{س}{٣}$ فإن: ص تتغير طرديا مع............

(٧) إذا كان: س : ص = ٤ : ٣ ، ع : س = ٥ : ٣ فإن ص : ع =...........

(٨) $\frac{ا}{ب}$ = $\frac{ح}{ء}$ = $\frac{ا + ٣ ح}{.......+.......}$

(٩) إذا كان: ٤ ا = ٣ ب = ٢ ح فإن: ا : ب : ح =............

(١٠) الوسط المتناسب للكميات: ٢ ا@ ب ، ٨ ب# هو............

(١١) إذا كان: ٥ ا ، ٢ ص ، ٣ ب ، ٧ ص كميات متناسبة فإن: ا : ب =............

(١٢) إذا كان : ا@ - ٤ ب@ = ٣ ا ب حيث : ا ، ب ∈ $ع^+$ فإن: ا : ب =.........

(١٣) الرابع المتناسب للأعداد : ٣ ، ٧ ، ٢٧ هو.........

(١٤) إذا كان: س ، $\sqrt{٨}$ ، ٧ ، ١٤ $\sqrt{٢}$ كميات متناسبة فإن: س =.........

(١٥) إذا كان: $\frac{ا}{ب}$ = $\frac{ب}{ح}$ = $\frac{ح}{٣}$ = ٢ فإن: ا = ...

(١٦) إذا كان: س ص - ٧ = ٠ فإن: س تتغير ....مع ص

(١٧) إذا كانت س تتغير عكسيا مع ص@ فإن: $\frac{س_١}{س_٢}$ =..........

(١٨) إذا كانت ص تتغير طرديا مع س@ وكانت ص = ١٢ عندما س = ٢ فإنه عندما ص = ٧٥ فإن س =.........

(١٩) إذا كان : ص تتغير طرديا مع س وكانت س = ٤ عندما ص = ١,٥ فإن ثابت التناسب =.........

(٢٠) الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ....

(٢١) الوسط المتناسب بين : ٣ ، ٢٧ هو ....

(٢٢) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٢}$ فإن : $\frac{أ + ب}{أ - ب} =$ ....

(٢٣) العلاقة: $\frac{ص}{س} - \frac{١}{٣} = ١٥$ تمثل تغير .... بين س، ص

(٢٤) إذا كانت : ص ٥ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢ فإن ص = ... عندما س = ١٢

(٢٥) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٧}$ فإن : (٢ب - ٧أ - ٥)@ = ...

(٢٦) إذا كان : $\frac{٩}{أ@} = \frac{٤}{ب@}$ (حيث أ ، ب { ٠) فإن : $\frac{أ}{ب} =$ ....

(٢٧) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{حـ} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ : ب : حـ = ... : .... : ....

(٢٨) إذا كان : أ ، ب ، ٢ ، ٣ متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} =$ ....

(٢٩) إذا كان س ، ص متغيران حقيقيان وكان : $\frac{س_١ ص_١}{س_٢ ص_٢} = ١$ فإن : س ٥..........

(٣٠) $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤} = \frac{.............}{٨} = \frac{٢ص + ع}{.............}$

(٣١) إذا كان: ٣أ = ٤ ب فإن : $\frac{أ}{ب} =$ ....

(٣٢) إذا كانت : ٣ ، ٤ ، ك ، ٨ كميات متناسبة فإن : ك = ...

(٣٣) الوسط المتناسب بين : ٣أب@ ، ٢٧ أ# ب@ هو ....

(٣٤) إذا كانت : ٩ ، ٢س ، $\frac{١}{ص@}$ كميات متناسبة فإن : س ص = ...

(٣٥) إذا كان : ٤ س@ - ١٢ س ص + ٩ ص@ = ٠ فإن : $\frac{س}{ص} =$ ....

(٣٦) إذا كانت : ١ ، س ، ٩ ، ص كميات في تناسب متسلسل فإن : س = ...، ص = ...

(٣٧) الأول المتناسب للكميات : ٦ س ص@، ٢ س@ ، ٣ س ص هو ....

(٣٨) الثالث المتناسب للكميات : ١ ، $\sqrt{٨}$ ، ١٤ $\sqrt{٢}$ هو ....

(٣٩) الرابع المتناسب للكميات : ٢أ ب ، أ@ ، ٤أ@ ب هو ....

(٤٠) إذا كان : ٣س + ٢ص = ٠ فإن : $[\frac{ص}{س}]$# = ...

(٤١) إذا كان : ٤٩س@ - ١٦ ص@ = ٠ حيث : س ، ص ∋ ح+ فإن : س : ص = ...

(٤٢) إذا كان: أ : ب = ٢ : ٥ ، أ : ح = ٣ : ٤ فإن: ب : ح = ...

(٤٣) إذا كان: ٢م = ٣ن فإن: (٦م - ٩ن + ١)#!(@ = ...

(٤٤) $\frac{\text{٤س}^{٢} - \text{٩ص}^{٢}}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\text{٢س} - \text{٣ص}}{\text{٢س} + \text{٣ص}}$

(٤٥) إذا كان: س ص < ٠ ، وكان: $\frac{\text{٣س}}{\text{٢ص}} = \frac{\text{٢ص}}{\text{٢٧س}}$ فإن: $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

(٤٦) إذا كان: (س - ١) ، ٣ ، ٥ ، (س + ١) كميات متناسبة فإن س = ...أ،.......

(٤٧) إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{٣}}{\text{٧}}$ فإن: $\frac{\text{أ} + \text{ح}}{\text{ب} + \text{ء}}$ = ...

(٤٨) إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ فإن: $\frac{\text{أ} - \text{٥ح} + \text{هـ}}{\text{ب} - \text{٥ء} + \text{و}}$ = ...

(٤٩) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{٣أ} + \ldots\ldots - \text{٢هـ}}{\ldots\ldots + \text{٥ء} - \ldots\ldots}$

(٥٠) $\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{٦}} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\text{ع} - \text{ص} - \text{س}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

(٥١) الوسط المتناسب بين الكميتين: $\text{٨س}^{٢}$ ، $\text{٢ص}^{٤}$ هو ....

(٥٢) الأول المتناسب للكميتين: ٦س ص ، - ٤س ص هو ....

(٥٣) الثالث المتناسب للكميتين: $\text{س}^{٢}$ ، $-\text{٣س}^{٢}$ هو ....

(٥٤) إذا كان: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥}} = \text{٢٠}$ فإن: ب = ...

(٥٥) إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}}$ وكان: س + ص = ١٨ فإن: ص = ...

(٥٦) إذا كان: $\frac{\text{٥س} - \text{٣ص}}{\text{٤س} + \text{٩ص}}$ = صفر فإن: $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

(٥٧) إذا كان: $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ فإن: $\frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{ص}}$ = ...

(٥٨) إذا كان: $\text{س ص}^{٢} = \text{٥}$ فإن: س $\propto$ ....

(٥٩) $\frac{\text{١}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}$

(٦٠) إذا كان: أ ، ٤س ، ب ، ٥س كميات متناسبة فإن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(٦١) إذا كانت طاقة الحركة (ط) لجسم ثابت الكتلة (ك) عند أي لحظة تعطى بالعلاقة: ط $= \frac{1}{2}$ ك $ع^2$ حيث (ع) سرعة الجسم عند هذه اللحظة فإن : ط $\propto$ ....

(٦٢) إذا كانت العلاقة بين حجم أسطوانة دائرية قائمة (ح) ،وطول نصف قطر قاعدتها (نق) ، وارتفاعها (ع) يتحدد بالعلاقة : ح = ط $نق^2$ ع فإن : ع $\propto$ .... (عند ثبوت ح)

(٦٣) إذا كان : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$ فإن : ص $\propto$ ....

(٦٤) إذا كان : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ فإن : ص $\propto$ ....

(٦٥) إذا كان : $\frac{س_1 ص_1}{س_2 ص_2} = 1$ فإن : ص $\propto$ ....

(٦٦) إذا كان : $\frac{س_1 ص_2}{س_2 ص_1} = 1$ فإن : ص $\propto$ ....

(٦٧) إذا كان : س $ص^2 = 8$ فإن : س $\propto$ ....

ثالثا : على الاحصاء

(١) المدى لمجموعة القيم : ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ١٣ هو.......

(٢) القيمة الأكثر تكرارا لمجموعة من القيم هي..............

(٣) الوسط الحسابي للأعداد : ٢٣ ، ١٥ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ١٣ هو.......

(٤) من مصادر جمع البيانات .... ، ....

(٥) من أساليب جمع البيانات ....

(٦) فحص دم المريض من أساليب ....

(٧) التعداد العام للسكان من أساليب......................

(٨) الحصول على بيانات عن تعداد السكان في مصر عام ١٩٨٠ يعتبر من المصادر .... للبيانات

(٩) إجراء استبيان حول الهوايات التي يفضلها تلاميذ مدرستك من المصادر .... لجمع البيانات

(١٠) اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمى بالعينة ....

(١٠) إذا كان : z ك (س - $\overline{س}$)@ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩ فإن : σ = ...

(١١) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي...............

(١٢) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(١٣) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي هو............

(١٤) العينة الإحصائية هي جزء من ....

(١٥) إذا كانت ٨٧ هي أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى يساوي ٣٩ فإن أصغر مفردة هي ....

(١٦) إذا كان الإنحراف المعياري لخمسة قيم يساوي $\sqrt{٢}$ فإن : z (س - $\overline{س}$)@ = ...

(١٧) الوسط الحسابي هو أحد مقاييس .... أما المدى فهو أحد مقاييس ....

(١٨) الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات يساوي ....

(١٩) إذا تم أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ ثلاجة من بين ٢٠٠ ثلاجة من النوع (أ) ، ٣٠٠ ثلاجة من النوع (ب) فإن عدد المفردات في العينة من النوع ب يساوي................

(٢٠) إذا كانت جميع المفردات متساوية في القيمة فإن .... يساوي صفر .

مع أصدق الدعوات بأطيب الأمنيات ، ، ،

أستاذ / وليد زوال

ت: ٠١٠٠ ٨٠ ٨٧ ٨٣ ٤

مدرس اون لاين
www.modars1.com

مدرس اون لاين

WWW.MODARS1.COM

مدرس اون لاين
www.modars1.com