(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

(١) (أ) أوجد : (أولاً) $\int$ ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩)$^{\frac{٧}{٢}}$ ى س

(ثانيًا) $\int \frac{\text{حتا ٢ س}}{\text{حا س + حتا س}}$ ى س

(ب) عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة د حيث :

د (س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١٢ ، ثم أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية لهذه الدالة .

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) (أ) أوجد معادلة العمودى للمنحنى : س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص عند النقطة (٣ ، ٣) الواقعة عليه .

(ب) إذا كانت : د دالة بحيث :

د (س) = { ٣ س^{٢} + ١٢ س − ١ ، − ١ ≤ س ≤ ٢
             ٣٧ − س ، ٢ < س ≤ ٣ }

فابحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند س = ٢

ثم أوجد القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة لهذه الدالة فى [− ١ ، ٣]

(٣) (أ) إذا كان : س^{٣} ص^{٣} = ١ ، فأثبت أن : س^{٢} $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$ = ٢ ص

(ب) عيّن فترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل لمنحنى الدالة د حيث

د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} + ٣}$ ، وكذا نقط الانقلاب (إن وجدت) .

(٤) (أ) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا علم أن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ٦ (١ – س)

وللمنحنى قيمة صغرى محلية عند النقطة (صفر ، – ٦) .

(ب) ينصهر الجليد المنتظم السمك والكثافة المتراكم على كرة معدنية مصمتة طول قطرها ١٢ سم بمعدل مقداره ٢٠ سم^٣/ دقيقة في اللحظة التي كان فيها معدل تناقص سمك طبقة الجليد مساويًا $\frac{١}{٢٠ ط}$ سم/ دقيقة بحيث يظل الجليد متحفظًا بشكله الكروي خلال فترة الانصهار وأن ط هي النسبة التقريبية . أوجد عند هذه اللحظة كلًّا من :

(أولًا) سمك طبقة الجليد .

(ثانيًا) معدل تغير مساحة السطح الخارجي لهذه الطبقة .

(٥) (أ) إذا كانت : د دالة بحيث د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظتا س}}{\text{ط} - ٢\text{ س}} & ، \text{ س} < \frac{\text{ط}}{٢} \\ \text{حا (ط – س)} & ، \text{ س} > \frac{\text{ط}}{٢} \end{cases}$

فابحث وجود $\lim_{\text{س} \leftarrow \frac{\text{ط}}{٢}}$ د (س)

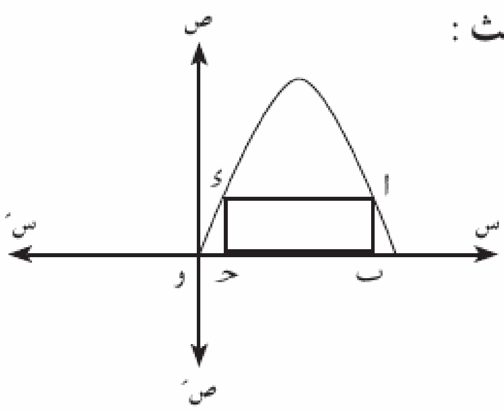
(ب) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث :

د (س) = ٤ – (س – ٢)^٢ ،

صفر ≥ س ≥ ٤ رسم المستطيل

أ ب حـ ء بحيث يقع الرأسان

أ ، ء على هذا المنحنى ،



$\overline{\text{ب حـ}} \subset \overleftarrow{\text{و س}}$. فإذا كان محيط المستطيل أ ب حـ ء أكبر ما يمكن ، فاحسب مساحة سطحه عندئذ .

الاجابة

① [أ] (أولاً) $\int \left((\text{٢ س} + \text{٣})^{\text{٢}} \right)^{\frac{\text{٧}}{\text{٢}}} \text{ ى س}$

$= \int (\text{٢ س} + \text{٣})^{\text{٧}} \text{ ى س}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{(\text{٢ س} + \text{٣})^{\text{٨}}}{\text{٨}} + \text{ث}$

$= \frac{\text{١}}{\text{١٦}} (\text{٢ س} + \text{٣})^{\text{٨}} + \text{ث}$

(ثانيًا) $\int \frac{\text{حتا}^{\text{٢}}\text{ س} - \text{حا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{حتا س} + \text{حا س}} \text{ ى س}$

$= \int (\text{حتا س} - \text{حا س}) \text{ ى س}$

$= \text{حا س} + \text{حتا س} + \text{ث}$

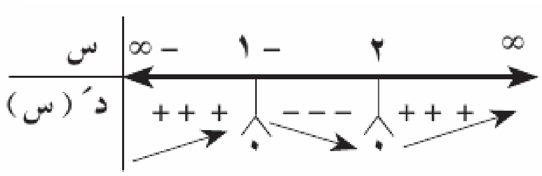
[ب] $\because$ $\text{د}'(\text{س}) = \text{٦ س}^{\text{٢}} - \text{٦ س} - \text{١٢}$

بوضع $\text{د}'(\text{س}) = \text{٠}$

$\therefore \text{٦} (\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}) = \text{٠}$

$\therefore (\text{س} - \text{٢})(\text{س} + \text{١}) = \text{٠}$

$\therefore$ س = ٢ أو س = − ١



الدالة متزايدة فى ع – [– ١ ، ٢]

الدالة متناقصة فى ع –] – ١ ، ٢ [

د´´ (س) = ١٢ س – ٦

عندما : س = – ١ ∴ د´´ (– ١) = – ٨

د (– ١) = – ٢ – ٣ + ١٢ + ١٢ = ١٩

∴ (– ١ ، ١٩) قيمة عظمى محلية

عندما : س = ٢

∴ د´´ (٢) = ٢٤ – ٦ = ١٨

د (٢) = ١٦ – ١٢ – ٢٤ + ١٢ = – ٨

∴ د (٢ ، – ٨) قيمة صغرى محلية

(٢) [أ] $\because$ س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص

$\therefore$ ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} × $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

= ٦ (س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص × ١)

$\therefore$ س^{٢} + ص^{٢} $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ (س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص)

$\therefore$ ٩ + ٩ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ (٣ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٣)

$\therefore$ ٣ + ٣ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٢

$\therefore$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = − ١

$\because$ ميل المماس = − ١

$\therefore$ ميل العمودى = ٠

$\therefore$ ص − ٣ = س − ٣ $\therefore$ س − ص = ٠

[ب] $د'(٢^-)$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٣(٢+هـ)^٢ + ١٢(٢+هـ) - ١ - ٣٥}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٣هـ^٢ + ٢٤هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} ٣هـ + ٢٤ = ٢٤$$

$$د'(٢^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{٣٧ - (٢+هـ) - ٣٥}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-هـ}{هـ} = -١$$

$\because$ $د'(٢^+) \neq د'(٢^-)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ٢

لإيجاد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة فى [− ١ ، ٣]

توجد نقطة حرجة عند : س = ٢

لأن : ٢ $\in$ [− ١ ، ٣]

د (− ١) = ٣ − ١٢ − ١ = − ١٠

قيمة صغرى مطلقة

د (٢) = ٣ × ٤ + ٢٤ − ١ = ٣٥

قيمة عظمى مطلقة

د (٣) = ٣٧ − ٣ = ٣٤

(٣) [أ] ∵ $س^{٣} ص^{٣} = ١$ ∴ $س ص = ١$

∴ $ص = س^{-١}$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = - س^{-٢}$

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢ س^{-٣}$ ∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

بضرب طرفى المعادلة × $س^{٢}$

∴ $س^{٢} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{٢}{س} = ٢ س^{-١} = ٢ ص$

∴ $س^{٢} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢ ص$

[ب] $د'(س)$

$$= \frac{(س^{٢} + ٣) \times ٢ س - (س^{٢} + ١) \times ٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$$

∵ $د'(س) = \frac{٤ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

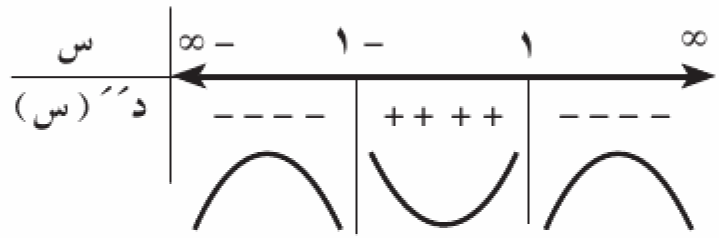
$د''(س)$

$$= \frac{(س^{٢} + ٣)^{٢} \times ٤ - ٤ س \times ٤ س (س^{٢} + ٣)}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$$

$$د''(س) = \frac{- ١٢ (س^{٢} - ١)}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$$

بوضع : $د''(س) = ٠$ ∴ $س^{٢} - ١ = ٠$

∴ س = ± ١



المنحنى محدب لأعلى فى ح − [−١ ، ١]

المنحنى محدب لأسفل] −١ ، ١ [

عندما : س = ١ فإن : د (١) = $\frac{١}{٢}$

عندما : س = − ١ فإن : د (− ١) = $\frac{١}{٢}$

نقطتا الانقلاب هما :

(− ١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (١ ، $\frac{١}{٢}$)

④ [أ] ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ ٦ (١ – س) ء س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س – ٣ س^{٢} + ث

∵ عند : س = ٠ توجد قيمة صغرى

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ ث = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س – ٣ س^{٢}

∵ ص = ∫ (٦ س – ٣ س^{٢}) ء س

∴ ص = ٣ س^{٢} – س^{٣} + ث َ

∵ (٠ ، – ٦) تحقق معادلة المنحنى

∴ ث َ = – ٦

∴ معادلة المنحنى هى :

ص = ٣ س^{٢} – س^{٣} – ٦

[ب] (أولًا) بفرض أن سمك الجليد = س سم

∴ حجم الجليد

= $\frac{٤}{٣}$ ط (س + ٦)^{٣} – $\frac{٤}{٣}$ ط × ٢١٦

$\frac{ءع}{ءن}$ = ٤ ط (س + ٦)^{٢} × $\frac{ءس}{ءن}$

– ٢٠ = ٤ ط (س + ٦)^{٢} × $\frac{-١}{٢٠ ط}$

∴ (س + ٦)^{٢} = ١٠٠

∴ س + ٦ = ١٠

∴ س = ٤ سم

(ثانيًا) مساحة سطح الكرة $= ٤ \, ط \, (٦ + س)^{٢}$

$$\frac{ء م}{ء ن} = ٨ \, ط \, (٦ + س) \times \frac{ء س}{ء ن}$$

$$= ٨ \, ط \times ١٠ \times \frac{-١}{٢٠ \, ط}$$

$= -\ ٤$ سم^{٢}/ دقيقة

أى أن : مساحة السطح الخارجي يتناقص

بمعدل ٤ سم^{٢}/ دقيقة

⑤ [أ] ∵ $ظا\left(\frac{ط}{٢} - س\right) = ظتا\,س$ ،

$$د\left(\frac{ط}{٢}\right)^{-} = \lim_{س \leftarrow \frac{ط}{٢}^{-}} \frac{ظتا\,س}{٢\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}$$

$$= \lim_{\frac{ط}{٢} - س \leftarrow \bar{٠}} \frac{ظا\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{٢\left(\frac{ط}{٢} - س\right)} = \frac{١}{٢}$$

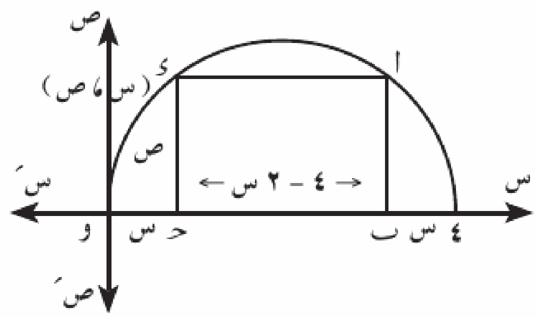
$$د\left(\frac{ط}{٢}\right)^{+} = \lim_{س \leftarrow \frac{ط}{٢}^{+}} حا\left(ط - س\right)$$

$$= \lim_{س \leftarrow \frac{ط}{٢}^{+}} حا\,\frac{ط}{٢} = ١$$

∵ $د\left(\frac{ط}{٢}\right)^{-} \neq د\left(\frac{ط}{٢}\right)^{+}$

∴ $\lim_{س \leftarrow \frac{ط}{٢}} د(س)$ ليس لها وجود

[ب]



∵ محيط المستطيل = ٨ − ٤ س + ٢ ص

∵ ص = ٤ − (س − ٢)^{٢} ..... (١)

∴ ح = ٨ − ٤ س + ٢ (٤ − (س − ٢)^{٢})

∴ ح = ١٦ − ٤ س − ٢ (س − ٢)^{٢}

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = − ٤ − ٤ (س − ٢) × ١

بوضع : $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ ١ + س − ٢ = ٠ ∴ س = ١

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ح}}{\text{ءس}^{٢}}$ = − ٤ < ٠

∴ يكون المحيط أكبر ما يمكن عندما :

س = ١

عندما : س = ١ ∴ ص = ٤ − ١ = ٣

∵ مساحة المستطيل = ص (٤ − ٢ س)

∴ مساحة المستطيل = ٣ × ٢

= ٦ وحدات مربعة