(1)

تمارين (٣ – ١)

① إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = ١٢$ فإن $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{ء} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix} =$

أ -١٢ ب -٦ ج ٦ د ١٢

$$\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{ء} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$ تبديل الصف الثالث و الأول $$= - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \\ \text{هـ} & \text{ء} & \text{و} \\ \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

تبديل العمود الثاني بالعمود الأول

$$= \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ء} \\ \text{ص} & \text{ع} & \text{س} \end{vmatrix}$$ تبديل العمود الثالث و الثاني

$$= - \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = -١٢$$

حل آخر نقل الصف الثالث بالثاني نقل العمود الثالث والأول

$$\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{ء} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix} \Leftarrow \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = -١٢$$

② إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = ١٥$ فإن $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \end{vmatrix}$

(أ) -٣٠ (ب) -١٥ (جـ) صفر (د) ١٥

$\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ بتبديل الصف الثالث والثاني

$- \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \end{vmatrix} = -١٥$

③ $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

(أ) صفر (ب) اجـ (جـ) ب جـ (د) اب جـ

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} \text{أ جـ} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

الصف الأول والثالث

∴ متساويان

∴ المحدد = صفر

حل آخر

$\begin{vmatrix} ٠ & \text{أ} & ٠ \\ \text{ب-جـ} & \text{ب} & \text{أ-ب} \\ ٠ & \text{جـ} & ٠ \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{ع}_٢ - \text{ع}_٣}}{=} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ٠ \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ-ب} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & ٠ \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{ع}_١ - \text{ع}_٢}}{=} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

نفك المحدد من الصف الأول

$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ-ب} \\ \text{جـ} & ٠ \end{vmatrix} \text{صفر} + \begin{vmatrix} \text{ب-جـ} & \text{أ-ب} \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} \text{أ} - \begin{vmatrix} \text{ب-جـ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{جـ} \end{vmatrix} \text{صفر}$

$\text{صفر} + (٠ \times (\text{ب-جـ}) - ٠ \times (\text{أ-ب}))\,\text{أ} - \text{صفر} = \Delta$

$= \text{صفر}$

④ $\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{ج}} & \text{ا} & \text{اب} \\ \frac{1}{\text{ب}} & \text{ج} & \text{اج} \\ \frac{1}{\text{ا}} & \text{ب} & \text{ب ج} \end{vmatrix}$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٥

$\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جـ}} & \text{أ} & \text{أب} \\ \frac{1}{\text{ب}} & \text{جـ} & \text{أجـ} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \text{ب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$

بأخذ عامل مشترك من الصف الأول أ

$\text{أ} \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جـأ}} & 1 & \text{ب} \\ \frac{1}{\text{ب}} & \text{جـ} & \text{أجـ} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \text{ب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$

بأخذ عامل مشترك من الصف الثاني جـ

$\text{جـأ} \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جـأ}} & 1 & \text{ب} \\ \frac{1}{\text{جـب}} & 1 & \text{أ} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \text{ب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$

بأخذ عامل مشترك من الصف الثالث ب

$\text{جـأب} \begin{vmatrix} \frac{1}{\text{جـأ}} & 1 & \text{ب} \\ \frac{1}{\text{جـب}} & 1 & \text{أ} \\ \frac{1}{\text{بأ}} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$

ثم نضرب أ ب جـ في العمود الثالث

$\begin{vmatrix} \text{ب} & 1 & \text{ب} \\ \text{أ} & 1 & \text{أ} \\ \text{جـ} & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$

∵ العمود الأول والثالث متساويان

∴ المحدد = صفر

(٥)
$$\begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{ص - ع} & \text{ع - س} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{س - ص} \\ \text{ع - ص} & \text{س - ص} & \text{ص - ع} \end{vmatrix}$$

(أ) صفر (ب) س - ص (ج) ص - ع (د) ع - س

$$\begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{ص - ع} & \text{ع - س} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{س - ص} \\ \text{ع - ص} & \text{س - ص} & \text{ص - ع} \end{vmatrix} \xLeftarrow{\text{ص}_2+\text{ص}_3} \begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{ص - ع} & \text{ع - س} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{س - ص} \\ \text{صفر} & \text{ع - ص} & \text{س - ع} \end{vmatrix}$$

$$\xLeftarrow{\text{ص}_1+\text{ص}_3} \begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{س - ص} \\ \text{صفر} & \text{ع - ص} & \text{س - ع} \end{vmatrix} \Leftarrow \text{ع}_2 + \text{ع}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{ص - ع} & \text{ع - س} & \text{ع - ص} \\ \text{صفر} & \text{ع - ص} & \text{س - ص} \end{vmatrix} \Leftarrow \text{ع}_1 + \text{ع}_3$$

$$\begin{vmatrix} \text{س - ص} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{ع - س} & \text{ع - ص} \\ \text{س - ص} & \text{ع - ص} & \text{س - ص} \end{vmatrix}$$ أضافة ص - س للعمود الأول

$$\begin{vmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{ص - س} & \text{ع - س} & \text{ع - ص} \\ \text{صفر} & \text{ع - ص} & \text{س - ص} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٦ إذا كانت $\text{ت}^{٢} = -١$ فإن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت}+١ \\ ٠ & ١ & \text{ت}-١ \\ ٠ & \text{ت} & \text{ت} \end{vmatrix}$$

أ $٢\text{ت}-١$ ب $٢\text{ت}+١$ ج ت د ١

أخذ ت عامل مشترك من الصف الثالث

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت}+١ \\ ٠ & ١ & \text{ت}-١ \\ ٠ & \text{ت} & \text{ت} \end{vmatrix} = \text{ت} \begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت}+١ \\ ٠ & ١ & \text{ت}-١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

ص٣ - ص٢

$$\text{ت}\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت}+١ \\ ٠ & ١ & \text{ت}-١ \\ ٠ & ١-١ & ١-(\text{ت}-١) \end{vmatrix} = \text{ت}\begin{vmatrix} ١ & \text{ت} & \text{ت}+١ \\ ٠ & ١ & \text{ت}-١ \\ ٠ & ٠ & ٢-\text{ت} \end{vmatrix}$$

$= \text{ت} \times ١ \times ١ \times (٢-\text{ت}) =$

$= ٢\text{ت} - \text{ت}^{٢}$

$= ٢\text{ت} - (-١)$

$= ٢\text{ت} + ١$

$\text{ت} = \sqrt{-١}$

⑦ مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٢\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & ٢\text{س} & ٣\text{س} \\ ٠ & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = ٩٦$ في ح هي

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) -٢

$$\begin{vmatrix} ٣\text{س} & ٢\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & ٢\text{س} & ٣\text{س} \\ ٠ & -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$$ أخذنا س عامل مشترك من الصفوف الأول والثاني والثالث

$$= \text{س}^٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

ص٢ - $\frac{١}{٣}$ ص١

$$\text{س}^٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١-\frac{٣}{٣} & ٢-\frac{٢}{٣} & ٣-\frac{١}{٣} \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix} = \text{س}^٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & \frac{٤}{٣} & \frac{٨}{٣} \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

ص٢ + ص٣

$$= \frac{٤}{٣}\text{س}^٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix} = \frac{٤}{٣}\text{س}^٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$$

تبديل الصف الثالث والأول

$$\frac{-٤}{٣}\text{س}^٣ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \frac{-٤}{٣}\text{س}^٣ \times ٣ \times ١ \times ٣ = -١٢\,\text{س}^٣$$

⑧ في Δ اب جـ يكون

$$\begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{جا ا} & \text{جا ب} & \text{جا جـ} \end{vmatrix}$$

(أ) ٥أ/ (ب) ٧ب/ (ج) ٨جـ/ (د) صفر

$$\frac{\text{جا ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جـ}'} = \text{م}$$

$$\text{جا ا} = \text{ا}'\,\text{م} \qquad \text{جا ب} = \text{ب}'\,\text{م} \qquad \text{جا جـ} = \text{جـ}'\,\text{م}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ا}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{جا ا} & \text{جا ب} & \text{جا جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{ا}'\,\text{م} & \text{ب}'\,\text{م} & \text{جـ}'\,\text{م} \end{vmatrix}$$

$$\text{م} \begin{vmatrix} \text{ا}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{ا}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

٩ إذا كان ن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن م =

أ ن　　ب ١٠ن　　ج ٢٠ن　　د ٣٠ن

ن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$

م = $\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$

نأخذ عامل مشترك من الصف الاول ٣
" " " " " الثاني ٢
" " " " " الثالث ٥

م = ٣ × ٢ × ٥ $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = ٣٠ن

⑩ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -7 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

أ -٩ ب -٧ ج ٤٩ د صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -7 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1+\frac{7}{9} & -\frac{7}{9} & 0 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$ ص٢ + $\frac{7}{9}$ ص١

$$\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 16 & -7 & 0 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$ ص٣ + ص٢

$$\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 16 & -7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ نقل العمود الأول والثالث

$$-\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \times 9 \times -7 \times 7 = 49$$

⑪ أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ص & ص^{٢} \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

ثم أوجد قيمة المحدد العددية إذا كان س - ص = ٥ ، ص - ع = ٧

ص١ - ص٢

$$\begin{vmatrix} ١ & س & س^{٢} \\ ١ & ص & ص^{٢} \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١-١ & س - ص & س^{٢} - ص^{٢} \\ ١ & ص & ص^{٢} \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix}$$

ص٢ - ص٣

$$= \begin{vmatrix} صفر & س - ص & س^{٢} - ص^{٢} \\ ١ & ص & ص^{٢} \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} صفر & س - ص & س^{٢} - ص^{٢} \\ صفر & ص - ع & ص^{٢} - ع^{٢} \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} صفر & س - ص & (س - ص)(س + ص) \\ صفر & ص - ع & (ص - ع)(ص + ع) \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} صفر & ١ & (س + ص) \\ صفر & ١ & (ص + ع) \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)$$

ص١ - ص٢

$$= \begin{vmatrix} صفر & صفر & س - ع \\ صفر & ١ & ص + ع \\ ١ & ع & ع^{٢} \end{vmatrix} (س - ص)(ص - ع)$$

$$= (\text{س} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} - \text{ع} & 0 & 0 \\ \text{ص} + \text{ع} & 1 & 0 \\ \text{ع}^2 & \text{ع} & 1 \end{vmatrix}$$

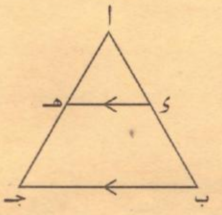
تبديل الصف الأول والثالث.

$$= (\text{س} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ع}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{س} - \text{ع} \\ 0 & 1 & \text{ص} + \text{ع} \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ع})(\text{س} - \text{ع})$$

(١٢) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل $\overline{\text{ده}} // \overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{اهـ} & \text{اء} & \text{ده} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$



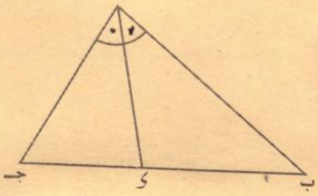
$\because \text{ده} // \text{ب جـ} \quad \therefore \dfrac{\text{اء}}{\text{اب}} = \dfrac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}} = \dfrac{\text{ده}}{\text{ب جـ}} = \text{م}$

$\therefore \text{اء} = \text{م} \cdot \text{اب} \qquad \text{اهـ} = \text{م} \cdot \text{اجـ} \qquad \text{ده} = \text{م} \cdot \text{ب جـ}$

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{اهـ} & \text{اء} & \text{ده} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{م اجـ} & \text{م اب} & \text{م ب جـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$ أخذ م عامل مشترك

$= \text{م} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} \qquad \text{ص}_٢ = \text{ص}_٣$

$\therefore$ المحدد = صفر



(١٣) في الشكل المقابل:

أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ \text{اب} & \text{اجـ} & \text{اب} + \text{اجـ} \\ \text{بء} & \text{ءجـ} & \text{بجـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

∵ $\overline{\text{أء}}$ ينصف زاوية الرأس ∴ $\frac{\text{جـء}}{\text{بء}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{أب}} = م$

∴ $\text{جـء} = م \cdot \text{ءب}$ $\text{جـأ} = م \cdot \text{أب}$

$\frac{\text{جـء}}{\text{جـأ}} = \frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = م$ $\text{جـء} = م \cdot \text{أجـ}$ $\text{بء} = م \cdot \text{بأ}$

$\frac{\text{جـء} + \text{بء}}{\text{جـأ} + \text{بأ}} = م \Leftarrow م(\text{جـأ} + \text{بأ}) = \text{جـء} + \text{بء}$

$\text{جـء} + \text{ءب} = \text{بجـ}$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ \text{أب} & \text{أجـ} & \text{أب} + \text{أجـ} \\ \text{بء} & \text{ءجـ} & \text{بجـ} \end{vmatrix} \Leftarrow ع_١ + ع_٢$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٥ \\ \text{أب} & \text{أب} + \text{أجـ} & \text{أب} + \text{أجـ} \\ \text{بء} & \text{بء} + \text{ءجـ} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٥ \\ \text{أب} & \text{أب} + \text{أجـ} & \text{أب} + \text{أجـ} \\ \text{بء} & \text{بء} + \text{ءجـ} & \text{بء} + \text{ءجـ} \end{vmatrix}$$

$ع_٢ = ع_٣$

∴ المحدد = صفر

حل آخر (١٣)

∵ أد ينصف زاوية الرأس ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{دب}} = \text{م}$

∴ أهـ = م . أب ، دهـ = م . دب ، بهـ = بد + دهـ

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ \text{أب} + \text{أهـ} & \text{أهـ} & \text{أب} \\ \text{بهـ} & \text{دهـ} & \text{بد} \end{vmatrix}$$

بالتعويض عن أهـ ، دهـ في المحدد

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ \text{أب} (\text{١+م}) & \text{م . أب} & \text{أب} \\ \text{بد + م . بد} & \text{م . بد} & \text{بد} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ \text{م . أب + أب} & \text{م . أب} & \text{أب} \\ \text{بد + دهـ} & \text{م . بد} & \text{بد} \end{vmatrix}$$

بأخذ أب عامل مشترك من الصف الثاني

بد " " " " الثالث

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ \text{١+م} & \text{م} & ١ \\ \text{١+م} & \text{م} & ١ \end{vmatrix} (\text{أب})(\text{بد})$$

نلاحظ أن الصف الثاني = الصف الثالث (ص٢ = ص٣)

∴ المحدد = صفر

⑭ أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{س} & \text{جا}^٢\text{س} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ص} & \text{جا}^٢\text{ص} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ع} & \text{جا}^٢\text{ع} \end{vmatrix}$ = صفر

$$\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ \qquad \begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{س} & \text{جا}^٢\text{س} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ص} & \text{جا}^٢\text{ص} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ع} & \text{جا}^٢\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{س} & \text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ص} & \text{جا}^٢\text{ص} + \text{جتا}^٢\text{ص} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ع} & \text{جا}^٢\text{ع} + \text{جتا}^٢\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\text{ع}_٣ = \text{ع}_١ \ \text{لأن} \qquad \text{صفر} = \begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{س} & ١ \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ص} & ١ \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ع} & ١ \end{vmatrix}$$

ستخدام خواص المحددات حل المعاد

(١٥) $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & \text{س} \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ \text{س} & ٥ & \text{س} \end{vmatrix} = ١٦$

$\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & \text{س} \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ \text{س} & ٥ & \text{س} \end{vmatrix}$ - ص١ + ص٣

$\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & \text{س} \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ ⇐ فك المحدد باستخدام الصف الثالث

صفر $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ - ٤ $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ + صفر $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

(-٤) (٤س - ٢س) = ٢س × -٤ = -٨س

∴ -٨س = ١٦

س = -٢

$$⑯\quad \begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ \text{س} & 1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^2 & 1 \\ -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ \text{س} & 1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س}^2 & 1 \\ -\text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س} \begin{vmatrix} \text{س}^2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}\,(\text{س}^2 + 1) = \text{س}^3 + \text{س}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ \text{س} & 1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} \qquad -\text{ص}_1 + \text{ص}_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ \text{س}-1 & \text{س}+1 & -\text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} \qquad -\text{س} \times \text{ص}_1 + \text{ص}_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ -1 & \text{س}^2+\text{س}+1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} \qquad \text{ص}_1 + \text{ص}_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\text{س} & 0 \\ 0 & \text{س}^2+1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} \qquad \text{ص}_1 \times -1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \text{س} & 0 \\ 0 & \text{س}^2+1 & \text{س} \\ 1 & -1 & \text{س}+1 \end{vmatrix} \qquad \text{ص}_1 + \text{ص}_3$$

$$\begin{vmatrix} 1+ & -س & 0 \\ 0 & س^2+1 & س \\ 0 & س-1 & س+1 \end{vmatrix} = س^3 + س$$

فك المحدد بالعمود الأول

$$1+ \begin{vmatrix} س^2+1 & س \\ س-1 & س+1 \end{vmatrix} = س^3 + س$$

$$1+ \left[(س^2+1)(س+1) - (س-1)\,س \right] = س^3 + س$$

$$\cancel{س^3} + \underline{س^2} + \cancel{س} + 1 - \underline{س^2} + س = \cancel{س^3} + \cancel{س}$$

$$س + 1 = \text{صفر}$$

$$س = -1$$

⑰ $\begin{vmatrix} 2 & -س & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ س+1 & 1 & س \end{vmatrix} = 2س + 1$

$\begin{vmatrix} 2 & -س & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ س+1 & 1 & س \end{vmatrix} = 2س + 1 \quad \Leftarrow \quad ع_1 + ع_2$

$\begin{vmatrix} 2 & 2-س & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ س+1 & س+2 & س \end{vmatrix} = 2س + 1$ فك المحدد من الصف الثاني

$-1 \begin{vmatrix} 2-س & 1 \\ س+2 & س \end{vmatrix} = 2س + 1$

$-1 \left[(2-س)(س) - 1(س+2) \right] = 2س + 1$

$-1 \left[2س - س^2 - س - 2 \right] = 2س + 1$

$-1 (-س^2 + س - 2) = 2س + 1$

$س^2 - س + 2 = 2س + 1$

$س^2 - س + 2 - 2س - 1 = 0$

$س^2 - 3س + 1 = 0$

$أ = 1 \quad ب = -3 \quad جـ = 1 \qquad س = \dfrac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

$س = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$⑱\quad \begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix} = س - ١$$

$$\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix} \overset{ص_٣ - ص_٢}{=} \begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ٠ & ٢-س & س-٢ \end{vmatrix}$$

بأخذ (٢-س) عامل مشترك من الصف الثالث

$$(٢-س)\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} \overset{ص_٢ - ص_١}{\Longleftarrow} = \begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١-س & س-١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

بأخذ (١-س) عامل مشترك من الصف الثاني

$$(٢-س)(١-س)\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} \Longleftarrow ع_٢ + ع_٣$$

$$(٢-س)(١-س)\begin{vmatrix} س & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{vmatrix} \Longleftarrow ع_١ + ع_٢$$

$$(٢-س)(١-س)\begin{vmatrix} س+٣ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & -١ \end{vmatrix}$$

$$(٢-س)\cancel{(١-س)}(س+٣) = \cancel{(س-١)}$$

$$(٢-س)(س+٣) = ٠$$

$$\therefore س = ٢ \qquad س = -٣$$

ـــتخدام خواص المحددات لـــا

(١٩) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب})$

ع٢ - ع١

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب}-\text{أ} & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}+\text{أ}) & \text{أ}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب}-\text{أ} & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2-\text{أ}^2 & \text{أ}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

ع٣ - ع١

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \text{جـ}-\text{أ} & 1 & \text{أ} \\ \text{جـ}^2-\text{أ}^2 & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}^2 \end{vmatrix} (\text{ب}-\text{أ}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \text{جـ} & 1 & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}^2 \end{vmatrix} (\text{ب}-\text{أ})$$

$$= (\text{ب}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \text{جـ}-\text{أ} & 1 & \text{أ} \\ (\text{جـ}+\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

ع٣ - ع٢

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

$$(\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \text{أ} \\ \text{جـ}-\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب})$$

وهو المطلوب

(٢٠)

$$\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{ب}-\text{جـ} & ٢\text{ا} & ٢\text{ا} \\ ٢\text{ب} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ ٢\text{جـ} & ٢\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})^{٣}$$

$$\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{ب}-\text{جـ} & ٢\text{ا} & ٢\text{ا} \\ ٢\text{ب} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ ٢\text{جـ} & ٢\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$\underline{\text{ص}_١}+\text{ص}_٢+\text{ص}_٣$

$$\begin{vmatrix} \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} \\ ٢\text{ب} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ ٢\text{جـ} & ٢\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ ا + ب + جـ عامل مشترك من الصف الأول

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢\text{ب} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ ٢\text{جـ} & ٢\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$\underline{\text{ع}_١}-\text{ع}_٣$

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & \text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & ٢\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$\underline{\text{ع}_٢}-\text{ع}_٣$

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & -\text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} & ٢\text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

بفك المحدد باستخدام الصف الأول

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} ٠ & -\text{ب}-\text{جـ}-\text{ا} \\ \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ا}+\text{ب}+\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\left[-(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})(-\text{ا}-\text{ب}-\text{جـ})\right]$$

$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})^{٣}$ وهو المطلوب

(٢١) $\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ أ} & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{أ}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ أ} & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{أ}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

⟸ بأخذ عامل مشترك من الصف الأول ب جـ

$$\text{ب جـ} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} & \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ أ} & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{أ}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ جـ أ عامل مشترك من الصف الثاني

$$\text{ب جـ} \times \text{جـ أ} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} & \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \\ \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} & 1 & \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \\ \text{ب}^2 & \text{أ}^2 & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك من الصف الثالث ب أ

$$\text{ب جـ} \times \text{جـ أ} \times \text{ب أ} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} & \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \\ \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} & 1 & \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \\ \frac{\text{ب}}{\text{أ}} & \frac{\text{أ}}{\text{ب}} & 1 \end{vmatrix}$$

بضرب العمود الأول في أ
ضرب العمود الثاني في ب
ضرب العمود الثالث في جـ

$$\text{ب جـ أ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٢٢)

(٢٢) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص+ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{٤ س ص ع}$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص+ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & \text{ص+٠} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع+٠} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & ٠ \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{ص٣ − ص١} \\ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & ٠ \\ \text{ص} & \text{ع−س} & ٠ \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{ص٢ − ص١} \\ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص−س} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س+ص} & \text{ع} & ٠ \end{vmatrix} \end{array}$$

تبديل العمود الثالث مع العمود الثاني

$$\begin{array}{c} \text{ص٢ − ص٣} \\ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & ٠ \\ ٠ & \text{−٢س} & ٠ \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{ص٣ − ص٢} \\ \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص−س} & \text{ع} & ٠ \\ \text{٢س} & ٠ & ٠ \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{ع+س} & \text{ص} & ٠ \\ \text{−٢س} & ٠ & ٠ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص−س} & \text{ع} & ٠ \\ \text{٢س} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

(٢ص س ع) − (ع ص (−٢س))

٢ص س ع + ٢ص س ع = ٤ ص س ع

وهو المطلوب

㉓ بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} = \text{س}^2 - \text{ص}^2$

$\text{ع}_1 - \text{ع}_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \text{س}-\text{ص} & \text{ص} & \text{س} \\ 0 & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} =$$

تبديل الصف الثاني مع الأول

$$\begin{vmatrix} \text{س}-\text{ص} & \text{ص} & \text{س} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix}$$

نأخذ (س - ص) عامل مشترك من العمود الأول

$\text{ع}_2 - \text{ع}_3$

$$(\text{س}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{س} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \text{س} & -\text{ص} \end{vmatrix} = -(\text{س}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص}-\text{س} & \text{س} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \text{س}+\text{ص} & -\text{ص} \end{vmatrix}$$

تبديل الصف الثاني مع الثالث

$$(\text{س}-\text{ص}) \begin{vmatrix} 1 & \text{ص}-\text{س} & \text{س} \\ 0 & \text{س}+\text{ص} & -\text{ص} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\text{س}-\text{ص})(\text{س}+\text{ص})$$

$$= \text{س}^2 - \text{ص}^2$$

وهو المطلوب

بدون فك المحدد

(٢٤) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix} =$$

بأخذ عامل مشترك له من الصف الثاني ٢

بأخذ عامل مشترك له من العمود الثالث ٢

$$2 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

العمود الأول = العمود الثالث

∴ قيمة المحدد = صفر

(٢٥)

٢٥ $\left|\begin{array}{ccc} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -٤ \end{array}\right|$

$\left|\begin{array}{ccc} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -٤ \end{array}\right|$ بأخذ عامل مشترك من الصف الثالث ٢

$= ٢ \left|\begin{array}{ccc} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{array}\right|$ ضرب العمود الصف الثاني × -١

$= -٢ \left|\begin{array}{ccc} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ -١ & ٣ & -٢ \end{array}\right| = ٠$ الصف الثاني = الصف الثالث

∴ المحدد = صفر

ـــتخدام خواص المحددات لـــا

(٣٦)
$$\begin{vmatrix} \text{(س+ص)}^2 & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{(ع+ل)}^2 & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{(م+ن)}^2 & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\begin{vmatrix} \text{(س+ص)}^2 & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{(ع+ل)}^2 & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{(م+ن)}^2 & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix}$$

فك الأقواس في العمود الأول

$$\begin{vmatrix} \text{(س}^2+\text{ص}^2+\text{٢س ص)} & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{(ع}^2+\text{ل}^2+\text{٢ع ل)} & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{(م}^2+\text{ن}^2+\text{٢م ن)} & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix}$$

باستخدام خاصية الجمع

$$\begin{vmatrix} \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{٢س ص} & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{٢ع ل} & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{٢م ن} & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix}$$

العمود الأول = العمود الثاني ∴ المحدد = صفر

$$0 + \begin{vmatrix} \text{٢س ص} & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{٣س ص} \\ \text{٢ع ل} & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{٣ع ل} \\ \text{٢م ن} & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{٣م ن} \end{vmatrix}$$

بأخذ ٢ عامل مشترك من العمود الأول
، بأخذ ٣ عامل مشترك من العمود الثالث

$$0 + 2\times 3 \begin{vmatrix} \text{س ص} & \text{س}^2+\text{ص}^2 & \text{س ص} \\ \text{ع ل} & \text{ع}^2+\text{ل}^2 & \text{ع ل} \\ \text{م ن} & \text{م}^2+\text{ن}^2 & \text{م ن} \end{vmatrix}$$

العمود الأول والعمود الثالث متساويان المحدد = صفر

∴ صفر + ٢ × ٣ × صفر = صفر وهو المطلوب

(٢٧)

٢٧) $\begin{vmatrix} -م & ل & ٠ \\ -ن & ٠ & -ل \\ ٠ & ن & م \end{vmatrix}$ = صفر

$\begin{vmatrix} -م & ل & ٠ \\ -ن & ٠ & -ل \\ ٠ & ن & م \end{vmatrix}$ ⟸ أستخدم خاصية الجمع للتبسيط بالعمود الثاني

$$\begin{vmatrix} -م & ٠ & ٠ \\ -ن & ٠ & -ل \\ ٠ & ن & م \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -م & ل & ٠ \\ -ن & ٠ & -ل \\ ٠ & ٠ & م \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -م & ٠+ل & ٠ \\ -ن & ٠+٠ & -ل \\ ٠ & ٠+ن & م \end{vmatrix}$$

تبديل العمود الثاني والثالث — تبديل العمود الثاني والأول

$$= \begin{vmatrix} ٠ & -م & ٠ \\ ٠ & -ن & -ل \\ ن & ٠ & م \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -م & ٠ & ل \\ -ن & -ل & ٠ \\ ٠ & م & ٠ \end{vmatrix} -$$

تبديل ع١، ع٢ — تبديل ع٣، ع٢

$$\text{ن م ل + ن م ل-} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & -م \\ ٠ & -ل & -ن \\ ن & م & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & -م & ل \\ -ل & -ن & ٠ \\ م & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

= صفر

وهو المطلوب

(٢٨)
$$\begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{س ص}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{س ص}+\text{م ن} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{س ص}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{س ص}+\text{م ن} \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{ص}_١-\text{ص}_٢} \begin{vmatrix} ٠ & (\text{م ن}-\text{س ص}) & (\text{س ص}-\text{م ن}) \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{س ص}+\text{م ن} \end{vmatrix}$$

بأخذ (م ن - س ص) عامل مشترك من الصف الأول

$$(\text{م ن}-\text{س ص})\begin{vmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{س ص}+\text{م ن} \end{vmatrix} \xRightarrow{\text{ص}_٣-\text{ص}_٢}$$

$$(\text{م ن}-\text{س ص})\begin{vmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ٠ & \text{ع ل}-\text{س ص} & \text{س ص}-\text{ع ل} \end{vmatrix}$$

بأخذ ع ل - س ص عامل مشترك من الصف الثالث

$$(\text{م ن}-\text{س ص})(\text{ع ل}-\text{س ص})\begin{vmatrix} ٠ & ١ & -١ \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن الصف الأول يماثل الصف الثالث

بدون فك المحدد لـــا

(٢٩) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{س} \\ \text{ا} & \text{س} & \text{ا} \\ \text{س} & \text{ا} & \text{ا} \end{vmatrix} = (\text{س} + ٢\text{ا})(\text{س} - \text{ا})^{٢}$

بجمع ع١ + ع٢ + ع٣

$\begin{vmatrix} \text{س} + ٢\text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{س} + ٢\text{ا} & \text{س} & \text{ا} \\ \text{س} + ٢\text{ا} & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{س} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix}$

بأخذ (س+٢ا) عامل مشترك من ع١

$(\text{س} + ٢\text{ا}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ا} & \text{ا} \\ ١ & \text{س} & \text{ا} \\ ١ & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix} \Leftarrow$ ص١ - ص٢

$(\text{س} + ٢\text{ا}) \begin{vmatrix} ٠ & \text{ا} - \text{س} & ٠ \\ ١ & \text{س} & \text{ا} \\ ١ & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix}$

بأخذ ا - س عامل مشترك من الصف الأول

$(\text{س} + ٢\text{ا})(\text{ا} - \text{س}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & \text{س} & \text{ا} \\ ١ & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix} \Leftarrow$ ص٢ - ص٣

$(\text{س} + ٢\text{ا})(\text{ا} - \text{س}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & \text{س} - \text{ا} & \text{ا} - \text{س} \\ ١ & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix}$

بأخذ س - ا عامل مشترك من الصف الثاني

$(\text{س} + ٢\text{ا})(\text{ا} - \text{س})(\text{س} - \text{ا}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ١ & \text{ا} & \text{س} \end{vmatrix}$

بتبديل ع٣ بـ ع١

$-(-١)(\text{س} + ٢\text{ا})(\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ا}) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -١ & ١ & ٠ \\ \text{س} & \text{ا} & ١ \end{vmatrix}$

بتبديل ع٢ بـ ع١

تابع ٢٩

$(-\text{١})(\text{س}+\text{٢أ})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{١} & -\text{١} & \text{٠} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$

$\therefore (-\text{١})(\text{س}+\text{٢أ})(\text{س}-\text{أ})(\text{س}-\text{١})(-\text{١})$

$(\text{س}+\text{٢أ})(\text{س}-\text{أ})^{\text{٢}}$

وهو المطلوب

(٣٠)

③⓪ $\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & ١+س^٢ & س ص \\ ص & س ص & ١+ص^٢ \end{vmatrix} = ١$

$\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & ١+س^٢ & س ص \\ ص & س ص & ١+ص^٢ \end{vmatrix}$ نستخدم خاصية الجمع للعمود الثاني

$\begin{vmatrix} ١ & س+٠ & ص \\ س & ١+س^٢ & س ص \\ ص & س ص+٠ & ١+ص^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص \\ س & ١ & س ص \\ ص & ٠ & ١+ص^٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ س & س^٢ & س ص \\ ص & س ص & ١+ص^٢ \end{vmatrix}$

نأخذ س عامل مشترك من ع٢

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص \\ س & ١ & س ص \\ ص & ٠ & ١+ص^٢ \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ١ & ١ & ص \\ س & س & س ص \\ ص & ص & ١+ص^٢ \end{vmatrix}$ العمود الأول والثاني متساويان

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص \\ س & ١ & س ص \\ ص & ٠ & ١+ص^٢ \end{vmatrix} + س \times صفر$ نستخدم خاصية الجمع للعمود الثالث

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص+٠ \\ س & ١ & س ص+٠ \\ ص & ٠ & ١+ص^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & ١ & ٠ \\ ص & ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص \\ س & ١ & س ص \\ ص & ٠ & ص^٢ \end{vmatrix}$

$= ١ + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ص \\ س & ١ & س ص \\ ص & ٠ & ص^٢ \end{vmatrix} = ١ + ص \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ س & ١ & س \\ ص & ٠ & ص \end{vmatrix}$ ع١ = ع٣

$١ + ص \times صفر = ١$ وهو المطلوب

(٣١) $\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = س + ص^٢ + ع^٣$

$\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س+٠ & -ص & -ع \\ ص+٠ & ١ & ٠ \\ ع^٢+٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ استخدام خاصية الجمع

$= \begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ نأخذ س عامل مشترك من العمود الأول

$= س + \begin{vmatrix} صفر & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = س + \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ص+٠ & ١ & ٠ \\ ع^٢+٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ خاصية الجمع

$= س + \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

تبديل ص١ بـ ص٢

$= س + \begin{vmatrix} ص & ١ & ٠ \\ ٠ & -ص & -ع \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ع^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \Leftarrow$ بأخذ ع² مشترك من العمود الأول

$= س + ص^٢ + ع^٢ \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ $\underline{ع}_٣ - ع_١$

$= س + ص^٢ + ع^٢ \begin{vmatrix} ٠ & -ص & -ع \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ تبديل ص٣ مع ص١

$= س + ص^٢ - ع^٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & -ص & -ع \end{vmatrix} = س + ص^٢ + ع^٣$ وهو المطلوب

حل أطر ٣١

$$\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص}^2 & 1 & 0 \\ \text{ع}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ع}_1 \Leftarrow \text{ع}_1 - \text{ص} \times \text{ع}_2$$

$$\begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص}^2 & -\text{ص} & -\text{ع} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{ع}^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ع}_1 \Leftarrow \text{ع}_1 - \text{ع}^2 \times \text{ع}_3$$

ضرب العمود الثالث × ع² ثم طرحه من العمود الأول

$$\begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3 & -\text{ص} & -\text{ع} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

نأخذ عامل مشترك من العمود الأول $(\text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3)$

$$(\text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3) \begin{vmatrix} 1 & -\text{ص} & -\text{ع} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore (\text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3) \times 1$$

$$= \text{س} + \text{ص}^2 + \text{ع}^3$$

وهو المطلوب

(٣٢)

٣٢ باستخدام خواص المحددات

أثبت أن $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$ صفر

بأخذ عامل مشترك ٢ من العمود الأول والعمود الثالث في المحدد الثاني

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{2\times 2}{4}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

بتدوير المحدد الأول ثم جمعه على المحدد الثاني عدا العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5+6 & 1 \\ 4 & -1+6 & 5 \\ 6 & -7+9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

العمود الثاني والعمود الثالث متساويان

∴ المحدد = صفر

وهو المطلوب

(٣٣) بدون فك المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ جـ & أ & ب \\ أ & جـ & ب \end{vmatrix} = (أ - ب)(أ - جـ)(أ + ب + جـ)$$

ص١ - ص٢

$$\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ جـ & أ & ب \\ أ & جـ & ب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ - ب & ب - أ & ٠ \\ ب & أ & جـ \\ ب & جـ & أ \end{vmatrix}$$

بأخذ (أ - ب) عامل مشترك من الصف الأول

ص٢ - ص٣

$$= (أ - ب)\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ب & أ & جـ \\ ب & جـ & أ \end{vmatrix} = (أ - ب)\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & أ - جـ & جـ - أ \\ ب & جـ & أ \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك (أ - جـ) من الصف الثاني

$$(أ - ب)(أ - جـ)\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ب & جـ & أ \end{vmatrix} \Leftarrow ع_١ + ع_٢ + ع_٣$$

$$(أ - ب)(أ - جـ)\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ب & جـ & أ + ب + جـ \end{vmatrix} \Leftarrow ص_١ + ص_٢$$

$$(أ - ب)(أ - جـ)\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ب & جـ & أ + ب + جـ \end{vmatrix}$$

$$= (أ - ب)(أ - جـ)(أ + ب + جـ)$$

وهو المطلوب

(٣٤)

٣٤ باستخدام خواص المحددات

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} ١ & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{اجـ} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا}+\text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & ١ \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^٢ & \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & ١ \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^٢ & \text{ب} \end{vmatrix} (\text{ا}+\text{ب}) = \begin{vmatrix} ١ & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{اجـ} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

الطرف الأيسر ضرب (ا+ب) في الصف الأول

$$\Leftarrow \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ \qquad \begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ا} & \text{ب}^٢+\text{ا ب} & \text{ب}+\text{ا} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^٢ & \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{بأخذ عامل مشترك جـ من الصف الثالث} \qquad \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{اب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^٢ & \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{ضرب جـ في العمود الأول} \qquad \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{اب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{ا} \\ ١ & \text{جـ} & \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \end{vmatrix} \text{جـ}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^٢ & \text{اجـ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

وهو المطلوب

(٣٤)

٣٤ باستخدام خواص المحدودات

أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & اب & ب جـ \\ ب & ب^2 & اجـ \\ ا & جـ & ب \end{vmatrix} = (ا+ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ب & ب^2 & ا \\ جـ & جـ^2 & ب \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ ب & ب^2 & ا \\ جـ & جـ^2 & ب \end{vmatrix} (ا+ب) = \begin{vmatrix} ١ & اب & ب جـ \\ ب & ب^2 & اجـ \\ ا & جـ & ب \end{vmatrix}$$

الطرف الأيسر ضرب (ا+ب) في الصف الأول

$$\begin{vmatrix} ب+ا & ب^2+اب & ا+ب \\ ب & ب^2 & ا \\ جـ & جـ^2 & ب \end{vmatrix} \Leftarrow ص_1 - ص_2$$

$$\begin{vmatrix} ا & اب & ب \\ ب & ب^2 & ا \\ جـ & جـ^2 & ب \end{vmatrix} \Leftarrow \text{بأخذ عامل مشترك جـ من الصف الثالث}$$

$$\text{جـ} \begin{vmatrix} ا & اب & ب \\ ب & ب^2 & ا \\ ١ & جـ & \frac{ب}{جـ} \end{vmatrix} \Leftarrow \text{ضرب جـ في العمود الأول}$$

$$\begin{vmatrix} ا & اب & ب جـ \\ ب & ب^2 & اجـ \\ ١ & جـ & ب \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيمن}$$

وهو المطلوب

تابع ٣٥

$$\text{أ}^2 + \begin{vmatrix} 1 & \text{أب} & \text{أهـ} \\ 0 & \text{ب}^2 & \text{بهـ} \\ 0 & \text{بهـ} & \text{هـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \text{أهـ} \\ 0 & 1 & \text{بهـ} \\ 1 & 0 & \text{هـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

بأخذ ب عامل مشترك
من العمود الثاني
في الصف الثاني

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أهـ} \\ 0 & 1 & \text{هـ} \\ 0 & \text{هـ} & \text{هـ}^2+1 \end{vmatrix} + (\text{هـ}^2+1)$$

ضرب الصف الثاني × ـهـ
ثم جمعه مع الصف الثالث

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أهـ} \\ 0 & 1 & \text{هـ} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (\text{هـ}^2+1)$$

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{هـ}^2 + 1$$

وهو المطلوب

٣٦ بدون فك المحددات أثبت أن:

$$\left(1+\frac{1}{ج}+\frac{1}{ب}+\frac{1}{أ}\right)\text{أب ج} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & أ+1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ ج+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

استخدام خاصية الجمع

$$\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & ب+أ & 0 \\ ج+1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}^{ص} + \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ ج+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}^{س} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & أ+1 \\ 1 & ب+1 & 0+1 \\ ج+1 & 1 & 0+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{ص_2 - ص_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ب & 0 \\ ج & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \overset{ص_3 - ص_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ ج & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & ب+1 & 1 \\ ج+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = س$$

$$\boxed{ج\ ب = س}$$

استخدام خاصية الجمع مع العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} 1 & 0+1 & أ \\ 1 & ب+1 & 0 \\ ج+1 & 0+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & ب+1 & 0 \\ ج+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ص$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & أ \\ 1 & ب & 0 \\ ج+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underset{ص_3 - ص_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & 1 & 0 \\ ج+1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} =$$

$$(ج+1)(ب\ أ) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & 1 & 0 \\ ج & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(ج+1)(ب\ أ) + (ج\ أ) =$$

$$(ج+1)\,ب\ أ + ج\ أ + ج\ ب = ص + س$$

$$\left[1 + \frac{1}{ج} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{أ}\right] ج\ ب\ أ = \quad \text{وهو المطلوب}$$

(٣٧)

(٣٧) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ}^3-1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ \text{ب}^3-1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3-1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$ = صفر حيث أ ≠ ب ≠ جـ

أثبت أن أ ب جـ = ١

نستخدم خاصية الجمع على العمود الأول

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^3-1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ \text{ب}^3-1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3-1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \text{أ}^3 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ \text{ب}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}}_{\text{س}} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ -1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ -1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}}_{\text{ص}}$$

المحدد س بأخذ عامل مشترك أ من ص١ ، ب من ص٢ ، جـ من ص٣

$$\text{س} = \begin{vmatrix} \text{أ}^3 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ \text{ب}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

المحدد ص تبديل العمود الثاني بالعمود الأول

$$\text{ص} = - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & -1 & \text{أ} \\ \text{ب}^2 & -1 & \text{ب} \\ \text{جـ}^2 & -1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

بأخذ -١ عامل مشترك من العمود الثاني

$$\text{ص} = (-)(-1) \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & 1 & \text{أ} \\ \text{ب}^2 & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ}^2 & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & 1 & \text{أ} \\ \text{ب}^2 & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ}^2 & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

∴ س + ص =

$$\text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & 1 & \text{أ} \\ \text{ب}^2 & 1 & \text{ب} \\ \text{جـ}^2 & 1 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

تبديل العمود الثالث مع الثاني

$$\text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

تابع ٣٧

بأخذ المحدده عامل مشترك

$$(\text{أ ب جـ} - ١)\begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢ & \text{ب} & ١ \\ \text{جـ}^٢ & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\text{أ ب جـ} - ١ = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{أ ب جـ} = ١$$

وهو المطلوب

(٣٨)

(٣٨) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

تبديل الصفوف مع الأعمدة

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ 1 & \text{ب} & \text{أ جـ} \\ 1 & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$$

نضرب الصف الأول × أ
الصف الثاني × ب
الصف الثالث × جـ

$$= \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{1}{\text{ب}} \times \frac{1}{\text{جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & \text{أ ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{أ ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & \text{أ ب جـ} \end{vmatrix}$$

أخذ عامل مشترك
أ ب جـ من العمود الثالث

$$= \frac{\cancel{\text{أ ب جـ}}}{\cancel{\text{أ ب جـ}}} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ}^2 & 1 \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & 1 \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

تبديل العمود الأول
مكان العمود الثالث

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}^2 & \text{أ} \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ 1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

تبديل العمود الثاني مكان الثالث

$$= (-)(-1) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$ = الطرف الأيسر

وهو المطلوب

(٣٩) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{جا} & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جا} & \text{ا ب} \\ \text{اب} & \text{ب جـ} & \text{ا جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}^2 & \text{ا}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{ب}^2 & \text{جا} & \text{ب}^2 \\ \text{اب} & \text{جـ}^2 & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك أ من الصف الأول، ب من الصف الثاني، جـ من الصف الثالث

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ}} \\ \text{ب} & \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب}} & \text{ب} \\ \frac{\text{أ ب}}{\text{جـ}} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} \text{أ ب جـ} = $$

ضرب العمود الأول × أ

ضرب العمود الثاني × ب

ضرب العمود الثالث × جـ

$$\begin{vmatrix} \text{أ جـ} & \text{أ ب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{أ جـ} & \text{أ ب} \\ \text{أ ب} & \text{ب جـ} & \text{أ جـ} \end{vmatrix} = $$

وهو المطلوب