ثالثاً

الفصل

الصف الثاني الثانوي

الفصل الدراسي الأول

النهايات

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة :

عندما س تؤول للعدد م (تقترب من العدد م)

فإن نهاية د(س) يرمز لها بالرمز نهــــا د(س) = د (م)
س ← م

وبالتالى لإيجاد نهاية الدالة نقوم بالتعويض المباشر

مثال نهــــا (٣س + ٢) الحـــــل
س ← ٤

نهــــا (٣س + ٢) = ٣×٤ + ٢ = ١٢ + ٢ = ١٤
س ← ٤

مثال٢ نهــــا (٤س^{٢} + س – ٨) الحـــــل
س ← ٢

نهــــا (٤س^{٢} + س – ٨) = (٤(٢)^{٢} + ٢ – ٨) = ١٦+٢ – ٨ = ١٠
س ← ٢

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١) $\frac{١٤}{٢}$ = ...٧..... (تسمى كميه معينه)

٢) $\frac{٠}{٢}$ = ...صفر..... (تسمى كميه معينه)

٣) $\frac{٣}{صفر}$ ليس لها معنى (تسمى كميه غير معرفه)

٤) $\frac{صفر}{صفر}$ = ... (تسمى كميه غير معينه)

أنوا الكميات :

١) الكميه المعينه : هى الكميه التى لها إجابه معروفه مثل (٢ ، ٣–٥ ، ٤×٥ ، $\frac{٠}{٦}$)

٢) الكميه غير المعينه : هى الكميه التى ليس لها إجابه معروفه مثل ($\frac{٠}{٠}$ ، $\infty - \infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$)

٣) الكميه غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى مثل ($\frac{س}{٠}$ ، $\frac{٥}{٠}$)

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٣ نهــا $\frac{س^{2} - ٤}{س^{2} - ٩}$ ، س ← ٢ **الحــــل**

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{2} - ٤}{س^{2} - ٩} = \frac{(٢)^{2} - ٤}{(٢)^{2} - ٩} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ٩} = \frac{٠}{-٥} = \text{صفر}$$

مثال٤ نهــا $\frac{س^{2} - ٤}{س^{2} - ٩}$ ، س ← ٣ **الحــــل**

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{2} - ٢}{س^{2} - ٩} = \frac{(٣)^{2} - ٤}{(٣)^{2} - ٩} = \frac{٩ - ٤}{٩ - ٩} = \frac{٥}{\text{صفر}}$$

ليس لها معنى أو ليس لها نهايه

مثال٥ نهــا $\frac{س^{2} - ٩}{س - ٣}$ ، س ← ٣ **الحــــل**

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{2} - ٩}{س - ٣} = \frac{(٣)^{2} - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٩ - ٩}{٩ - ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

كميه غير معينه

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٣)\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{س - ٣}} = \lim_{س \to ٣} (س + ٣) = ٣ + ٣ = ٦$$

ملحوظة : لمعرفة العامل الصفرى

١) إذا كان س ← م فإن العامل الصفرى هو س − م

٢) إذا كان س ← ٣ فإن العامل الصفرى هو س − ٣

٣) إذا كان س ← −٢ فإن العامل الصفرى هو س + ٢

٤) إذا كان ٢س ← ٥ فإن العامل الصفرى هو ٢س − ٥ أو س − $\frac{٥}{٢}$

مثال٦

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{3\text{س} + 2}{\text{س} + 2}$$

الحــــــل

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{3\text{س} + 2}{\text{س} + 2} = \frac{3 \times 1 + 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

مثال٧

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}^2 - 4\text{س}}{\text{س} - 2}$$

الحــــــل

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}^2 - 4\text{س}}{\text{س} - 2} = \frac{2 \times 4 - 4 \times 2}{2 - 2} = \frac{8 - 8}{\text{صفر}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}^2 - 4\text{س}}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}\cancel{(\text{س} - 2)}}{\cancel{\text{س} - 2}} = \lim_{\text{س} \to 2} 2\text{س} = 2 \times 2 = 4$$

مثال٨

$$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} - 6}$$

الحــــــل

$$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{9 - 9}{9 - 3 - 6} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س} + 3)}}{(\text{س} - 2)\cancel{(\text{س} + 3)}} = \lim_{\text{س} \to -3} \frac{\text{س}}{(\text{س} - 2)} = \frac{-3}{-3 - 2} = \frac{3}{5}$$

تدريب١

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 1}{\text{س} - 1}$$

الحــــــل

تدريب٢

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 8}{3\text{س} - 6}$$

الحــــــل

مثال٩ $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١}$ **الحــــــــــل**

$\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١} = \dfrac{(١)^٢ - ١}{١ - ١} = \dfrac{صفر}{صفر}$ كميه غير معينه

$\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١} = \lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س - ١}} = \lim\limits_{س \to ١} (س+١) = ١ + ١ = ٢$

تدريب٣ $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ **الحــــــــــل**

تدريب٤ $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{س^٢ - ١}{س^٢ - س - ٢}$ **الحــــــــــل**

مثال١٠ $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{٤س^٢ - ٦٤}{س^٢ - ٤}$ **الحــــــــــل**

$\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{٤س^٢ - ٦٤}{س - ٤} = \lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{٤(س^٢ - ١٦)}{س - ٤} =$ ....

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١١ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$ **الحـــل**

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{٢\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢} = \frac{٢ + ١ - ٣}{١ + ١ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \text{كميه غير معينه}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{٢\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(\cancel{\text{س} - ١})(٢\text{س} + ٣)}{(\cancel{\text{س} - ١})(\text{س} + ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(٢\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٢)} = \frac{٥}{٣}$$

مثال١٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٢٧}{٢\text{س} - ٦}$ **الحـــل**

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{٢\text{س} - ٦} = \frac{٢٧ - ٢٧}{٦ - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad \text{كميه غير معينه}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{٢\text{س} - ٦} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{٢(\cancel{\text{س} - ٣})}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{٢} = \frac{(٣)^٢ + ٩ + ٩}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$$

تدريب٥ $\underset{\text{س} \leftarrow ١-}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٣ + ١}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢}$ **الحـــل**

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١٣ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+١)^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٤}$ الحـــــل

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+١)^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\left((\text{س}+١) - ٣\right)\left((\text{س}+١)^{٢} + ٣(\text{س}+١) + ٩\right)}{(\text{س} - ٢)(\text{س}+٢)}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ١ + ٦\text{س} + ٣\text{س} + ٣ + ٩)}{(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س} - ٢)}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + ١٣}{\text{س}+٢} = \dfrac{٤ + ١٨ + ١٣}{٢ + ٢} = \dfrac{٣٥}{٤}$$

مثال١٤ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ الحـــــل

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٠+٢)^{٢} - ٤}{(٠)^{٢} + ٣\times ٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \cancel{٤} - \cancel{٤}}{\text{س}(\text{س}+٣)} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س}}{\text{س}(\text{س}+٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+٤)}{\cancel{\text{س}}(\text{س}+٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}+٤}{\text{س}+٣} = \dfrac{٠ + ٤}{٠ + ٣} = \dfrac{٤}{٣}$$

حل أخر مثال١٤ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ الحـــــل

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left((\text{س}+٢) + ٢\right)\left((\text{س}+٢) - ٢\right)}{\text{س}(\text{س}+٣)}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+٤)}{\cancel{\text{س}}(\text{س}+٣)} = \dfrac{\text{س}+٤}{\text{س}+٣} = \dfrac{٠ + ٤}{٠ + ٣} = \dfrac{٤}{٣}$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

إستخدام القسمه المطوله فى إيجاد النهايه

مثال $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + \text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}$ الحـــل

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + \text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣} = \frac{٢٧ - ٣٦ + ٣ + ٦}{٩ - ١٢ + ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كميه غير معينه

العامل الصفرى هو س − ٣

وباستخدام القسمه المطوله نقسم البسط على س − ٣

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ & \\ \hline \text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + \text{س} + ٦ & \text{س} - ٣ \\ \text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ & \\ \hline -\text{س}^٢ + \text{س} + ٦ & \\ -\text{س}^٢ + ٣\text{س} & \\ \hline -٢\text{س} + ٦ & \\ -٢\text{س} + ٦ & \\ \hline ٠ \quad ٠ & \end{array}$$

طريقة أخرى

$$\begin{array}{cccc|c} ١ & -٤ & ١ & ٦ & ٣ \\ & ٣ & -٣ & -٦ & \\ \hline ١ & -١ & -٢ & ٠ & \end{array}$$

فيكون ناتج تحليل البسط $(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + \text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)\cancel{(\text{س} - ٣)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$ **الحل**

$$\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨} = \frac{-١٦ + ١٢ + ٤}{-٨ + ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

العامل الصفرى هو س +٢

وباستخدام القسمه المطوله تقسم البسط على س + ٢

	$٢س^٢ - س + ٢$
$س + ٢$	$٢س^٣ + ٣س^٢ \quad + ٤$
	$-(٢س^٣ + ٤س^٢)$
	$-س^٢ \quad + ٤$
	$-(-س^٢ - ٢س)$
	$٢س + ٤$
	$-(٢س + ٤)$
	٠ ٠

طريقة أخرى

٢	٣	٠	٤	-٢
	-٤	٢	-٤	
٢	-١	٢	٠	

فيكون ناتج تحليل البسط $(٢س^٢ - س + ٢)(س + ٢)$

$$\therefore \lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨} = \lim\limits_{س \to -٢} \frac{\cancel{(س + ٢)}(٢س^٢ - س + ٢)}{\cancel{(س + ٢)}(س^٢ - ٢س + ٤)}$$

$$= \lim\limits_{س \to -٢} \frac{(٢س^٢ - س + ٢)}{(س^٢ - ٢س + ٤)} = \frac{٨ + ٢ + ٢}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{١٢}{١٢} = ١$$

تدريب $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + ٣س + ١}{س^٢ - ١}$ **الحل**

أ/ أحمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

إستخدام الضرب فى المرافق لإيجاد النهايه :

مثال١ $\underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}}$ **الحـل**

$$\underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}} = \frac{\sqrt{\text{٥} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{٥} - \text{٥}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \ \text{كميه غير معينه}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}} = \underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - \text{١}} - \text{٢}}{\text{س} - \text{٥}} \times \frac{\sqrt{\text{س} - \text{١}} + \text{٢}}{\sqrt{\text{س} - \text{١}} + \text{٢}}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \text{١} - \text{٤}}{(\text{س} - \text{٥})(\sqrt{\text{س} - \text{١}} + \text{٢})}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س} - \text{٥}}}{(\cancel{\text{س} - \text{٥}})(\sqrt{\text{س} - \text{١}} + \text{٢})}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{(\sqrt{\text{س} - \text{١}} + \text{٢})} = \frac{\text{١}}{(\sqrt{\text{٥} - \text{١}} + \text{٢})} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$$

مثال٢ $\underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}}$ **الحـل**

$$\underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} = \frac{\sqrt{\text{٣} + \text{١}} - \text{٢}}{\text{٩} - \text{١٥} + \text{٦}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \ \text{كميه غير معينه}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} = \underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} \times \frac{\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{٢}}{\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{٢}}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \text{١} - \text{٤}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦})(\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{٢})}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س} - \text{٣}}}{(\text{س} - \text{٢})(\cancel{\text{س} - \text{٣}})(\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{٢})}$$

$$= \underset{\text{س} \to \text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{(\text{س} - \text{٢})(\sqrt{\text{س} + \text{١}} + \text{٢})} = \frac{\text{١}}{(\text{١})(\sqrt{\text{٣} + \text{١}} + \text{٢})} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٣ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣}$ الحـــل

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} = \frac{٠ + ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س}^٢ + ٢\text{س})(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣)}{\text{س} + ٩ - ٩}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + ٢)(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣)}{\cancel{\text{س}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} (\text{س} + ٢)(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣)$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} (٠ + ٢)(\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = (٢)(٣ + ٣) = ١٢$$

تدريب ١ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}$ الحـــل

مثال ٤ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}$ الحـــل

بتوحيد المقامات

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س} + ١) = ٢ + ١ = ٣$$

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

نظريه

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن} - 1}$$

نتيجه هامه

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن} - \text{م}}$$

مثال١ $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^4 - 81}{\text{س} - 3}$ **الحـــــل**

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^4 - 81}{\text{س} - 3} = \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{\text{صفر}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كميه غير معينه}$$

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^4 - 3^4}{\text{س} - 3} = 4 \times 3^{4-1} = 4 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

مثال٢ $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{10} - 1024}{\text{س}^4 - 16}$ **الحـــــل**

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{10} - 1024}{\text{س}^4 - 16} = \frac{2^{10} - 1024}{2^4 - 16} = \frac{1024 - 1024}{16 - 16} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كميه غير معينه}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{10} - 1024}{\text{س}^4 - 16} = \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{10} - 2^{10}}{\text{س}^4 - 2^4} = \frac{10}{4} \times 2^{10-4} = 160$$

مثال٣ $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س} + 2}$ **الحـــــل**

$$\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س} + 2} = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 - (-2)^5}{\text{س} - (-2)} = 5 \times (-2)^{5-1} = 5 \times (-2)^4 = 80$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب١ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س - ٢}$ الحـــــــــل

تدريب٢ $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س^{٣} + ٨}$ الحـــــــــل

مثال٤ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢س^{٥} - ٦٤}{٨س^{٣} - ٦٤}$ الحـــــــــل

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٥} - ٦٤}{٨س^{٣} - ٦٤} = \frac{٢ \times ٣٢ - ٦٤}{٨ \times ٨ - ١٦} = \frac{٦٤ - ٦٤}{٦٤ - ٦٤} = \frac{صفر}{صفر}$$ كميه غير معينه

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٥} - ٦٤}{٨س^{٣} - ٦٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢(س^{٥} - ٣٢)}{٨(س^{٣} - ٨)} = \frac{(س^{٥} - ٢^{٥})}{٤(س^{٣} - ٢^{٣})} = \frac{١}{٤} \times \frac{٥}{٣} \times ٢^{٥-٣} = \frac{٥}{٣}$$

مثال٥ $\lim\limits_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{س^{٤} - ٩}$ الحـــــــــل

$$\lim_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{س^{٤} - ٩} = \frac{(\sqrt{٣})^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{(\sqrt{٣})^{٤} - ٩} = \frac{٩\sqrt{٣} - ٩\sqrt{٣}}{٩ - ٩} = \frac{صفر}{صفر}$$ كميه غير معينه

$$\lim_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٥} - ٩\sqrt{٣}}{س^{٤} - ٩} = \lim_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٥} - (\sqrt{٣})^{٥}}{س^{٤} - (\sqrt{٣})^{٤}} = \frac{٥}{٤} \times (\sqrt{٣})^{٥-٤} = \frac{٥}{٤}\sqrt{٣}$$

مثال٦

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٥} + ٤\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢}$$

الحـــــــل

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٥} + ٤\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢} = \frac{(\sqrt{٢})^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{(\sqrt{٢})^{٢} - ٢} = \frac{٤\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كميه غير معينه

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٥} + ٤\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٥} - (-\sqrt{٢})^{٥}}{\text{س}^{٢} - (-\sqrt{٢})^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-\sqrt{٢})^{٥-٢}$$

$$= \frac{٥}{٢} \times (-\sqrt{٢})^{٣} = -٥\sqrt{٢}$$

تدريب٣

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \sqrt{٥}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س} - \sqrt{٥}}$$

الحـــــــل

مثال٧

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} + ٢٤٣}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$$

الحـــــــل

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} + ٢٤٣}{٤\text{س} - ٩} = \frac{٣٢\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٥} + ٢٤٣}{٤\left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - ٩} = \frac{٣٢\left(-\frac{٢٤٣}{٣٢}\right) + ٢٤٣}{٤\left(\frac{٩}{٤}\right) - ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـــا}_{٢\text{س} \to -٣} \frac{٣٢\text{س}^{٥} + ٢٤٣}{٤\text{س}^{٢} - ٩} = \text{نهـــا}_{٢\text{س} \to -٣} \frac{(٢\text{س})^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢\text{س})^{٢} - (-٣)^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-٣)^{٥-٢} = \frac{-١٣٥}{٢}$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{١٢٨\text{س}^{-٧} - ١}{\text{س} - ٢}$ **الحـــــل**

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{١٢٨\,\text{س}^{-٧} - ١}{\text{س} - ٢} = \dfrac{١٢٨(٢)^{-٧} - ١}{٢ - ٢} = \dfrac{١ - ١}{٢ - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كميه غير معينه

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{١٢٨\,\text{س}^{-٧} - ١}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{١٢٨\left(\text{س}^{-٧} - ٢^{-٧}\right)}{\text{س} - ٢} = ١٢٨ \times \dfrac{-٧}{١} \times ٢^{-٧-١} = \dfrac{-٧}{٢}$

مثال ٨ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}}$ **الحـــــل**

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}} = \dfrac{(٠ + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كميه غير معينه

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}+٥ \to ٥} \dfrac{(\text{س} + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(\text{س} + ٥) - ٥} = \dfrac{٤}{١} \times ٥^{٤-١} = ٥٠٠$

مثال ٨ $\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} + ١}{\text{س} + ٤}$ **الحـــــل**

$\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} + ١}{\text{س} + ٤} = \dfrac{(-٤ + ٣)^{٥} + ١}{-٤ + ٤} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كميه غير معينه

$\lim\limits_{\text{س} \to -٤} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} + ١}{\text{س} + ٤} = \lim\limits_{\text{س}+٣ \to -١} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} + ١}{(\text{س} + ٣) + ١} = \lim\limits_{\text{س}+٣ \to -١} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} - (-١)^{٥}}{(\text{س} + ٣) - (-١)} = \dfrac{٥}{١} \times (-١)^{٤} = ٥$

تدريب $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١}{\text{س} - ٦}$ **الحـــــل**

تدريب منزلى $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٧} - ١}{\text{س} - ٤}$ **الحـــــل**

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٨ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{(س^{٧} - ١)(س^{٨} - ١)}{س^{٢} - ٢س + ١}$ الحــــل

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(س^{٧} - ١)(س^{٨} - ١)}{س^{٢} - ٢س + ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(١^{٧} - ١)(١^{٨} - ١)}{١ - ٢ + ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كمية غير معينه}$$

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(س^{٧} - ١)(س^{٨} - ١)}{س^{٢} - ٢س + ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(س^{٧} - ١)(س^{٨} - ١)}{(س - ١)(س - ١)}$$

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(س^{٧} - ١^{٧})}{(س - ١)} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(س^{٧} - ١^{٨})}{(س - ١)} = \frac{٧}{١} \times ١^{٧-١} \times \frac{٨}{١} \times ١^{٨-١} = ٥٦$$

مثال ٩ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ الحــــل

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \frac{١٠٢٤ - ١٠٢٤}{٤ - ١٠ + ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \text{ كمية غير معينه}$$

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^{١٠} - ٢^{١٠}}{(س - ٢)(س - ٣)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{س^{١٠} - ٢^{١٠}}{(س - ٢)} \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{١}{(س - ٣)} = \frac{١٠}{١} \times ٢^{١٠-١} \times \frac{١}{٢ - ٣} = -٥١٢٠$$

تدريب منزلى (م الشرقيه) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{(س - ٥)(س^{٨} - ١)}{س^{٢} - ١}$ الحــــل

مثال ١٠ $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 243}{9\text{هـ}}$ الحـــــــــل

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 243}{9\text{هـ}} = \frac{(3+0)^7 - 243}{9 \times 0} = \frac{243 - 243}{0} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

هـ $\to 0$

5هـ $\to 0$

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 243}{9\text{هـ}} = \frac{1}{9} \times \frac{5}{5} \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 243}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{5}{9} \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 243}{5\text{هـ}}$$

$$= \frac{5}{9} \lim_{3+5\text{هـ} \to 3} \frac{(3+5\text{هـ})^7 - 3^7}{(3+5\text{هـ}) - 3} = \frac{5}{9} \times \frac{7}{1} \times 3^{7-1} = 2835$$

تدريب $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س}+5\text{هـ})^7 - \text{س}^7}{3\text{هـ}}$ الحـــــــــل

مثال ١١ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[4]{2\text{س}+14} - 2}{\text{س} - 1}$ الحـــــــــل

س $\to 1$

2س $\to 2$

2س $+ 14 \to 2 + 14$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[4]{2\text{س}+14} - 2}{\text{س} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2+14} - 2}{\text{س} - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ كمية غير معينة

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[4]{2\text{س}+14} - 2}{\text{س} - 1} = \frac{2}{2} \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}} - 2}{\text{س} - 1}$$

$$= 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}} - 2}{(2\text{س} - 2)}$$

$$= 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}} - 2}{(2\text{س} + 14 - 14 - 2)} = 2 \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}} - 2}{(2\text{س} + 14) - 16}$$

$$= 2 \lim_{2\text{س}+14 \to 16} \frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{4}}}{(2\text{س} + 14) - 16} = 2 \times \frac{1}{4} \times 16^{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{16}$$

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١٢

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)^{٤}}{(س^{٢} - ٤)^{٣}(س^{٥} - ٣٢)}$$

الحـــل

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)^{٤}}{(س^{٢} - ٤)^{٣}(س^{٥} - ٣٢)} = \frac{(١٦ - ١٦)^{٤}}{(٤ - ٤)^{٣}(٣٢ - ٣٢)} = \frac{صفر}{صفر}$$ كمية غير معينة

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)^{٤}}{(س^{٢} - ٤)^{٣}(س^{٥} - ٣٢)} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)^{٣}}{(س^{٢} - ٤)^{٣}} \times \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)}{(س^{٥} - ٣٢)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \left(\frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢} - ٤}\right)^{٣} \times \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ١٦)}{(س^{٥} - ٣٢)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \left(\frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س^{٢} - ٢^{٢}}\right)^{٣} \times \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س^{٤} - ٢^{٤})}{(س^{٥} - ٢^{٥})}$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} \times ٢^{٤-٢}\right)^{٣} \times \frac{٤}{٥} \times ٢^{٤-٥} = ٥١٢ \times \frac{٢}{٥} = \frac{١٠٢٤}{٥}$$

نهاية الداله عند اللانهايه

نظريه (٤)

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \frac{١}{\text{س}} = \text{صفر}$$

نتائج هامه :

١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \frac{١}{\text{س}} = \text{صفر}$

٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \frac{\text{م}}{\text{س}} = \text{صفر}$

٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \frac{\text{م}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{صفر}$

٤) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \text{م س} = \infty$

٥) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ \text{م س}^{\text{ن}} = \infty$

مثال $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٣}{\text{س}} + ٦ \right)$ **الحـــل**

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(\frac{٣}{\text{س}} + ٦ \right) = ٠ + ٦ = ٦$$

مثال٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ ٤^{\frac{١}{\text{س}}}$ **الحـــل**

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \ ٤^{\frac{١}{\text{س}}} = ٤^{٠} = ١$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

إيجاد نهاية الداله الكسريه عند اللانهايه

فإذا كان ناتج التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ أو $(\infty - \infty)$ فإننا نقسم البسط والمقام على أكبر أس للمتغير س

مثال $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣}$ **الحـــل**

بالقسمة بسط ومقام على $\text{س}^٢$

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٧\text{س}^٢}{\text{س}^٢} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢}}{\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧ - \frac{٢}{\text{س}}}{١ - \frac{٣}{\text{س}^٢}} = \frac{٧ - \frac{٢}{\infty}}{١ - \frac{٣}{\infty}} = \frac{٧ - ٠}{١ - ٠} = ٧$$

مثال٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٤\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ٦}{٣\text{س} - ٧\text{س}^٣}$ **الحـــل**

بالقسمة بسط ومقام على $\text{س}^٣$

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٤\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ٦}{٣\text{س} - ٧\text{س}^٣} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٤\text{س}^٣}{\text{س}^٣} - \frac{٥\text{س}}{\text{س}^٣} + \frac{٦}{\text{س}^٣}}{\frac{٣\text{س}}{\text{س}^٣} - \frac{٧\text{س}^٣}{\text{س}^٣}}$$

$$= \lim \frac{٤ - \frac{٥}{\text{س}^٢} + \frac{٦}{\text{س}^٣}}{\frac{٣}{\text{س}^٢} - ٧} = \frac{٤ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = \frac{٤}{-٧} = -\frac{٤}{٧}$$

مثال٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ٦}{٢\text{س} + \text{س}^٢}$ **الحـــل**

بالقسمة بسط ومقام على $\text{س}^٢$

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ٦}{٢\text{س} + \text{س}^٢} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٧\text{س} - \frac{٥}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^٢}}{\frac{٢}{\text{س}} + ١} = \frac{٧ \times \infty - ٠ + ٠}{٠ + ١} = \frac{\infty}{١} = \infty$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٤ - ٣س + ٢}{٦س^٥ - ٣س^٤ + ٧}$ **الحل**

بالقسمة بسط ومقام على $س^٥$

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٤ - ٣س + ٢}{٦س^٥ - ٣س^٤ + ٧} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{س^٤}{س^٥} - \frac{٣س}{س^٥} + \frac{٢}{س^٥}}{\frac{٦س^٥}{س^٥} - \frac{٣س^٤}{س^٥} + \frac{٧}{س^٥}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{١}{س} - \frac{٣}{س^٤} + \frac{٢}{س^٥}}{٦ - \frac{٣}{س} + \frac{٧}{س^٥}} = \frac{٠ - ٠ + ٠}{٦ - ٠ + ٠} = ٠$$

مثال٥ $\lim\limits_{س \to \infty} (٥س^{-٢} + ٧س^{-٣} - ٣س^{-١} + ٧)$ **الحل**

$$\lim\limits_{س \to \infty} (٥س^{-٢} + ٧س^{-٣} - ٣س^{-١} + ٧) = \lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^٢} + \frac{٧}{س^٣} - \frac{٣}{س} + ٧\right)$$

$$= ٠ + ٠ - ٠ + ٧ = ٧$$

تدريب $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س^٣ - ٧س + ٢}{٧س^٣ - ٣س + ٥}$ **الحل**

مثال٦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٣س + ٢)(٧س^٢ + ٣)}{٧س^٣ - ٥س + ٣}$

بالقسمة بسط ومقام على $س^٣$

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٣س + ٢)(٧س^٢ + ٣)}{٧س^٣ - ٥س + ٣} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{٣س}{س} + \frac{٢}{س}\right)\left(\frac{٧س^٢}{س^٢} + \frac{٣}{س^٢}\right)}{\frac{٧س^٣}{س^٣} - \frac{٥س}{س^٣} + \frac{٣}{س^٣}}$$

$$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\left(٣ + \frac{٢}{س}\right)\left(٧ + \frac{٣}{س^٢}\right)}{٧ - \frac{٥}{س^٢} + \frac{٣}{س^٣}} = \frac{(٣ + ٠)(٧ + ٠)}{٧ - ٠ + ٠} = \frac{٢١}{٧} = ٣$$

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٦

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س + ٣)(٥س - ١)(س - ٢)}{س(س + ١)(٣س - ١)}$$

بالقسمة بسط ومقام على $س^٣$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س + ٣)(٥س - ١)(س - ٢)}{س(س + ١)(٣س - ١)} = \lim_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{٢س}{س} + \frac{٣}{س}\right)\left(\frac{٥س}{س} - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{س}{س} - \frac{٢}{س}\right)}{\frac{س}{س}\left(\frac{س}{س} + \frac{١}{س}\right)\left(\frac{٣س}{س} - \frac{١}{س}\right)}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\left(٢ + \frac{٣}{س}\right)\left(٥ - \frac{١}{س}\right)\left(١ - \frac{٢}{س}\right)}{\left(١ + \frac{١}{س}\right)\left(٣ - \frac{١}{س}\right)}$$

$$= \frac{\left(٢ + \frac{٣}{\infty}\right)\left(٥ - \frac{١}{\infty}\right)\left(١ - \frac{٢}{\infty}\right)}{\left(١ + \frac{١}{\infty}\right)\left(٣ - \frac{١}{\infty}\right)} = \frac{(٢) \times (٥) \times (١)}{(١) \times (٣)} = \frac{١٠}{٣}$$

مثال٧

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س^٢ + ١)(٢س^٣ - ٣)(٣س + ١)}{٢س^٧ - ٥س^٢ + ٣}$$

بالقسمة بسط ومقام على $س^٧$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٣س^٢ + ١)(٢س^٣ - ٣)(٣س + ١)}{٢س^٧ - ٥س^٢ + ٣} = \lim_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{٣س^٢}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}\right)\left(\frac{٢س^٣}{س^٣} - \frac{٣}{س^٣}\right)\left(\frac{٣}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}\right)}{\frac{٢س^٧}{س^٧} - \frac{٥س^٢}{س^٧} + \frac{٣}{س^٧}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\left(٣ + \frac{١}{س^٢}\right)\left(٢ - \frac{٣}{س^٣}\right)\left(\frac{٣}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}\right)}{٢ - \frac{٥}{س^٥} + \frac{٣}{س^٧}} = \frac{\left(٣ + \frac{١}{\infty}\right)\left(٢ - \frac{٣}{\infty}\right)\left(\frac{٣}{\infty} + \frac{١}{\infty}\right)}{٢ - \frac{٥}{\infty} + \frac{٣}{\infty}}$$

$$= \frac{(٣ + ٠)(٢ - ٠)(٠ + ٠)}{٢ - ٠ + ٠}$$

$$= \frac{(٣) \times (٢) \times (\text{صفر})}{٢} = \frac{٠}{٢} = ٠$$

مثال ٧ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٣س^٢ - ٤س + ٥}{(س + ٢)^٢}$ **الحل**

بالقسمة بسط ومقام على س²

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^٢ - ٤س + ٥}{(س + ٢)^٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س^٢}{س^٢} - \frac{٤س}{س^٢} + \frac{٥}{س^٢}}{\left(\frac{س}{س} + \frac{٢}{س}\right)^٢}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٣ - \frac{٤}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{\left(١ + \frac{٢}{س}\right)^٢} = \lim \frac{٣ - \frac{٤}{\infty} + \frac{٥}{\infty}}{\left(١ + \frac{٢}{\infty}\right)^٢}$$

$$= \lim \frac{٣ - ٠ + ٠}{(١ + ٠)^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$$

مثال ٨ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{(س + ٢)^٣ (٣ - ٢س^٢)}{٣س (س^٢ + ٧)^٢}$

بالقسمة بسط ومقام على س⁵

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(س + ٢)^٣ (٣ - ٢س^٢)}{٣س (س^٢ + ٧)^٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{\left(\frac{س}{س} + \frac{٢}{س}\right)^٣ \left(\frac{٣}{س^٢} - \frac{٢س^٢}{س^٢}\right)}{\frac{٣س}{س} \left(\frac{س^٢}{س^٢} + \frac{٧}{س^٢}\right)^٢}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\left(١ + \frac{٢}{س}\right)^٣ \left(\frac{٣}{س^٢} - ٢\right)}{٣ \left(١ + \frac{٧}{س^٢}\right)^٢}$$

$$= \lim \frac{\left(١ + \frac{٢}{\infty}\right)^٣ \left(\frac{٣}{\infty} - ٢\right)}{٣ \left(١ + \frac{٧}{\infty}\right)^٢} = \frac{(١)(-٢)}{٣(١)} = \frac{-٢}{٣}$$

مثال ٨ $\lim\limits_{س \to \infty} (٣س - س^٢ + ٤)$ **الحل**

بأخذ أكبر أس عامل مشترك س²

$$\lim_{س \to \infty} (٣س - س^٢ + ٤) = \lim_{س \to \infty} س^٢ \left(\frac{٢}{س} - ١ + \frac{٤}{س^٢}\right) = \infty (٠ - ١ + ٠) = -\infty$$

أ/أحمد فكري ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٨ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٢}{\sqrt{٤س^٢ + ٢}}$ الحـــل

بالقسمة بسط ومقام على $\sqrt{س^٢} = س$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٢}{\sqrt{٤س^٢ + ٢}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س}{س} + \frac{٢}{س}}{\sqrt{\frac{٤س^٢}{س^٢} + \frac{٢}{س^٢}}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{٣ + \frac{٢}{س}}{\sqrt{٤ + \frac{٢}{س^٢}}} = \frac{٣ + ٠}{\sqrt{٤ + ٠}} = \frac{٣}{\sqrt{٤}} = \frac{٣}{٢}$$

ملحوظة هامه : $\sqrt[ن]{س^م} = س^{\frac{م}{ن}}$

مثال٩ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢}$ الحـــل

بالقسمة بسط ومقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{\frac{٨س^٣}{س^٣} - \frac{٥س}{س^٣} + \frac{١}{س^٣}}}{\frac{٣س}{س} - \frac{٢}{س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}}{٣ - \frac{٢}{س}} = \frac{\sqrt[٣]{٨ - ٠ + ٠}}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$$

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٩ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{\sqrt{١٦\text{س}^٢ + ٦}}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ١}}$ **الحـــــل**

بالقسمه بسط ومقام على $\text{س} = \sqrt[٣]{\text{س}^٣} = \sqrt{\text{س}^٢}$

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt{١٦\text{س}^٢ + ٦}}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ٣\text{س} + ١}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{١٦\text{س}^٢}{\text{س}^٢} + \frac{٦}{\text{س}^٢}}}{\sqrt[٣]{\frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣} + \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٣} + \frac{١}{\text{س}^٣}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt{١٦ + \frac{٦}{\text{س}^٢}}}{\sqrt[٣]{١ + \frac{٣}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}}} = \frac{\sqrt{١٦ + ٠}}{\sqrt[٣]{١ + ٠ + ٠}} = \frac{٤}{١} = ٤$$

مثال٩ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ٥} + ٢\text{س}}{\sqrt[٤]{\text{س}^٤ - ٨\text{س} + ٢}}$ **الحـــــل**

بالقسمه بسط ومقام على $\text{س} = \sqrt[٤]{\text{س}^٤} = \sqrt[٣]{\text{س}^٣}$

$$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ٥} + ٢\text{س}}{\sqrt[٤]{\text{س}^٤ - ٨\text{س} + ٢}} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt[٣]{\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٣} + \frac{٥}{\text{س}^٣}} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}}}{\sqrt[٤]{\frac{\text{س}^٤}{\text{س}^٤} - \frac{٨\text{س}}{\text{س}^٤} + \frac{٢}{\text{س}^٤}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^٣}} + ٢}{\sqrt[٤]{١ - \frac{٨}{\text{س}^٣} + \frac{٢}{\text{س}^٤}}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٠ + ٠} + ٢}{\sqrt[٤]{١ - ٠ + ٠}} = \frac{٢}{١} = ٢$$

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١٠ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٨س^٣ - ٥س^٢}}{\sqrt[٤]{س^٦ + س^٢ + ٢}}$ **الحل**

بالقسمة بسط ومقام على $س^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt[٤]{س^٦} = \sqrt{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٨س^٣ - ٥س^٢}}{\sqrt[٤]{س^٦ + س^٢ + ٢}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\dfrac{٨س^٣}{س^٣} - \dfrac{٥س^٢}{س^٣}}}{\sqrt[٤]{\dfrac{س^٦}{س^٦} + \dfrac{س^٢}{س^٦} + \dfrac{٢}{س^٦}}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٨ - \dfrac{٥}{س}}}{\sqrt[٤]{١ + \dfrac{١}{س^٤} + \dfrac{٢}{س^٦}}} = \dfrac{\sqrt{٨ - ٠}}{\sqrt[٤]{١ + ٠ + ٠}} = ٢\sqrt{٢}$$

مثال١١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س}\sqrt{٣ + ٤س^٢}$ **الحل**

$$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س}\sqrt{٣ + ٤س^٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٣}{س^٢} + \dfrac{٤س^٢}{س^٢}} = \text{نهـا} \sqrt{٠ + ٤} = ٢$$

مثال١٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٣ + ٢س}{٤س - ١}}$ **الحل**

بالقسمة بسط ومقام على $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٣ + ٢س}{٤س - ١}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\dfrac{٣}{س} + \dfrac{٢س}{س}}{\dfrac{٤س}{س} - \dfrac{١}{س}}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\dfrac{٣}{س} + ٢}{٤ - \dfrac{١}{س}}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{٠ + ٢}{٤ - ٠}} = \sqrt{\dfrac{١}{٢}}$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

نهاية الدوال المثلثيه

نظريه (٥)

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$

نتائج هامه :

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا أ س}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ب س}}{\text{جا أ س}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

٩) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا أ س}^٢}{\text{ب س}^٢} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}^٢\text{ أ س}}{\text{ب س}^٢} = \dfrac{١}{\text{ب}} \times \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\dfrac{\text{جا أ س}}{\text{س}}\right)^٢ = \dfrac{١}{\text{ب}} \times \text{أ}^٢ = \dfrac{\text{أ}^٢}{\text{ب}}$

ملحوظه هامه :

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{جتا س} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{س}} =$ غير معرفه

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{قا س}}{\text{س}} =$ غير معرفه

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{قتا س}}{\text{س}} =$ غير معرفه

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظتا س}}{\text{س}} =$ غير معرفه

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١ أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٤ س}}{\text{س}} = ٤$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٦ س}}{\text{٢ س}} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٣ س}}{\text{٥ س}} = \dfrac{٣}{٥}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{٢ س}}{\text{جا ٥ س}} = \dfrac{٢}{٥}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٦ س}}{\text{٢ س}} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٥ س}^{٢}}{\text{٣ س}^{٢}} = \dfrac{٥}{٣}$

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{ ٥ س}}{\text{٣ س}^{٢}} = \dfrac{١}{٣} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}}\right)^{٢} = \dfrac{١}{٣} \times ٥^{٢} = \dfrac{٢٥}{٣}$

٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{٥ س}} = \dfrac{\frac{١}{٢}}{٥} = \dfrac{١}{١٠}$

٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٥ س}^{٢} \text{ جتا س}^{٢}}{\text{٣ س}^{٢}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٥ س}^{٢}}{\text{٣ س}^{٢}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \text{ جتا س}^{٢} = \dfrac{٥}{٣} \times ١ = \dfrac{٥}{٣}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٣س}{\text{ظا } ٨س}$$

الحــــــل

بالقسمة بسط ومقام على س

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٣س}{\text{ظا } ٨س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{\text{جا } ٣س}{س}}{\frac{\text{ظا } ٨س}{س}} = \frac{٣}{٥}$$

مثال٣

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣س + \text{جا } ٥س}{٢س - \text{ظا } ٦س}$$

الحــــــل

بالقسمة بسط ومقام على س

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣س + \text{جا } ٥س}{٢س - \text{ظا } ٦س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٣س}{س} + \frac{\text{جا } ٥س}{س}}{\frac{٢س}{س} - \frac{\text{ظا } ٦س}{س}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣ + \frac{\text{جا } ٥س}{س}}{٢ - \frac{\text{ظا } ٦س}{س}} = \frac{٣ + ٥}{٢ - ٦} = \frac{٨}{-٤} = -٢$$

مثال٤

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{س^٢ + ٥ \text{ ظا}^٢ ٣س}{٤س^٢ - \text{جا}^٢ ٢س}$$

الحــــــل

بالقسمة بسط ومقام على $س^٢$

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{س^٢ + ٥ \text{ ظا}^٢ ٣س}{٤س^٢ - \text{جا}^٢ ٢س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{س^٢}{س^٢} + ٥ \frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{س^٢}}{\frac{٤س^٢}{س^٢} - \frac{\text{جا}^٢ ٢س}{س^٢}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ + ٥ \frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{س^٢}}{٤ - \frac{\text{جا}^٢ ٢س}{س^٢}} = \frac{١ + ٥ \times ٩}{٤ - ٢}$$

$$= \frac{١ + ٤٥}{٢} = \frac{٤٦}{٢} = ٢٣$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٥ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س ظا ٤س}}{\text{٥س}^2 - \text{جا}^2\,\text{٣س}}$ **الحـــل**

بالقسمة بسط ومقام على س^2

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س ظا ٤س}}{\text{٥س}^2 - \text{جا}^2\,\text{٣س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\dfrac{\text{س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{ظا ٤س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{٥س}^2}{\text{س}^2} - \dfrac{\text{جا}^2\,\text{٣س}}{\text{س}^2}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 \times \dfrac{\text{ظا ٤س}}{\text{س}}}{5 - \dfrac{\text{جا}^2\,\text{٣س}}{\text{س}^2}} = \frac{1 \times 4}{5 - 9} = \frac{4}{-4} = -1$$

مثال٦ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{٢س قتا ٥س}$ **الحـــل**

$$\lim_{\text{س} \to 0} \text{٢س قتا ٥س} = \lim_{\text{س} \to 0} \text{٢س} \times \frac{1}{\text{جا ٥س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{٢س}}{\text{جا ٥س}} = = \frac{2}{5}$$

مثال٧ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{س}^2 + \text{جا ٣س}^2}{\text{٧س}^2 - \text{ظا}^2\,\text{٣س جتا ٥س}}$ **الحـــل**

بالقسمة بسط ومقام على س^2

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 + \text{جا ٣س}^2}{\text{٧س}^2 - \text{ظا}^2\,\text{٣س جتا ٥س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\dfrac{\text{س}^2}{\text{س}^2} + \dfrac{\text{جا ٣س}^2}{\text{س}^2}}{\dfrac{\text{٧س}^2}{\text{س}^2} - \dfrac{\text{ظا}^2\,\text{٣س}}{\text{س}^2}\ \text{جتا ٥س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 + \dfrac{\text{جا ٣س}^2}{\text{س}^2}}{7 - \dfrac{\text{ظا}^2\,\text{٣س}}{\text{س}^2}\ \text{جتا ٥س}} = \frac{1 + 3}{7 - 9 \times 1} = \frac{4}{-2} = -2$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٨ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{جا\,س\ ظا^{٢}\,س}{س^{٤} + جا^{٣}\,٢س}$ **الحـــــل**

بالقسمه بسط ومقام على $س^{٣}$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا\,س\ ظا^{٢}\,س}{س^{٤} + جا^{٣}\,٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\dfrac{جا\,س}{س}\ \dfrac{ظا^{٢}\,س}{س^{٢}}}{\dfrac{س^{٤}}{س^{٣}} + \dfrac{جا^{٣}\,٢س}{س^{٣}}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\dfrac{جا\,س}{س}\ \dfrac{ظا^{٢}\,س}{س^{٢}}}{س + \dfrac{جا^{٣}\,٢س}{س^{٣}}} = \frac{١ \times ١}{١ + ٨} = \frac{١}{٩}$$

مثال٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س^{٢} + جا^{٢}\,٣س}{س^{٢}}$ **الحـــــل**

بالقسمه بسط ومقام على $س^{٢}$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + جا^{٢}\,٣س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\dfrac{س^{٢}}{س^{٢}} + \dfrac{جا^{٢}\,٣س}{س^{٢}}}{\dfrac{س^{٢}}{س^{٢}}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \dfrac{جا^{٢}\,٣س}{س^{٢}}}{١} = \frac{١ + ٩}{١} = ١٠$$

تدريبا $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س^{٢} + جا\,٣س^{٢}}{س\ ظا\,٢س}$ **الحـــــل**

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

نتيجه هامه :

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$$

مثال١٠ $\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا س}}{\text{جا س}}$ **الحـــل**

بالقسمه بسط ومقام على س

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{جا س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}} = \frac{0}{1} = \text{صفر}$$

مثال١١ $\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^2}$ **الحـــل**

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{س}^2 \left(1 + \text{جتا س}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\left(1 + \text{جتا س}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \times \frac{1}{1 + 1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال١٢ $\lim_{\text{س} \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا س} - 3\,\text{جا س}}{1 - \text{جتا س} + \text{جا }2\text{س}}$ **الحـــل**

بالقسمه بسط ومقام على س

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س} - 3\,\text{جا س}}{1 - \text{جتا س} + \text{جا }2\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}} - 3\,\frac{\text{جا س}}{\text{س}}}{\frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا }2\text{س}}{\text{س}}} = \frac{0 - 3}{0 + 2} = \frac{-3}{2}$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٢ نهـا (س ← ٠) $\dfrac{١ - \text{جتا } س - \text{جا } ٣س}{١ - \text{جتا } س + \text{ظا } ٢ س}$ **الحـــل**

مثال١٣ نهـا (س ← ٤) $\dfrac{\text{جا}\left(٣ س - ١٢\right)}{س - ٤}$ **الحـــل**

نهـا (س ← ٤) $\dfrac{\text{جا}\left(٣ س - ١٢\right)}{س - ٤}$ = نهـا (س − ٤ ← ٠) $\dfrac{\text{جا } ٣\left(س - ٤\right)}{س - ٤}$ = ٣

مثال١٣ للمتفوقين نهـا (٢س ← π) $\dfrac{\text{جتا } س}{٢س - \pi}$ **الحـــل**

نهـا (٢س ← π) $\dfrac{\text{جتا } س}{٢س - \pi}$ = نهـا (س ← $\frac{\pi}{٢}$) $\dfrac{\text{جتا } س}{٢س - \pi}$ $\qquad$ ٢س ← π

= نهـا (س − $\frac{\pi}{٢}$ ← ٠) $\dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{٢\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)}$ $\qquad$ س ← $\frac{\pi}{٢}$

= نهـا ($\frac{\pi}{٢}$ − س ← ٠) $\dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$ = $\dfrac{-١}{٢}$ $\qquad$ س − $\frac{\pi}{٢}$ ← ٠

$\frac{\pi}{٢}$ − س ← ٠

بحث وجود نهاية الداله المعرفة بأكثر من قاعدة

مثال ١ إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س + ٤ & \text{عندما } س < -٤ \\ ٤ - س & \text{عندما } س > -٤ \end{cases}$ إبحث وجود نهـــــا د(س) عندما س ← -٤

الحـــــل

١) نهـــــا د(س) (س ← -٤⁺) = نهـــــا (٤ - س) (س ← -٤⁺) = ٤ - (-٤) = ٨

٢) نهـــــا د(س) (س ← -٤⁻) = نهـــــا (س + ٤) (س ← -٤⁻) = -٤ + ٤ = ٠

٣) ∵ نهـــــا د(س) (س ← -٤⁺) ≠ نهـــــا د(س) (س ← -٤⁻) ∴ نهـــــا د(س) (س ← -٤) ليس لها وجود

مثال ٢ إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س - ١ & \text{عندما } س < ٣ \\ ٣س - ٧ & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$ إبحث وجود نهـــــا د(س) عندما س ← ٣

الحـــــل

١) نهـــــا د(س) (س ← ٣⁺) = نهـــــا (٣س - ٧) (س ← ٣⁺) = ٣×٣ - ٧ = ٩ - ٧ = ٢

٢) نهـــــا د(س) (س ← ٣⁻) = نهـــــا (س - ١) (س ← ٣⁻) = ٣ - ١ = ٢

∵ نهـــــا د(س) (س ← ٣⁺) = نهـــــا د(س) (س ← ٣⁻) ∴ نهـــــا د(س) (س ← ٣) = ٢

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٣ إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س^٢ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٨ - ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ إبحث وجود $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س)

الحـــــــــل

١) $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ (٨ - ٢س) = ٨ - ٢×٢ = ٨ - ٤ = ٤

٢) $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ س^٢ = (٢)^٢ = ٤

∵ $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ د(س) ∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

مثال ٤ إذا كان : د(س) = | س − ٥ | إبحث وجود $\lim\limits_{س \to ٥^-}$ د(س) الحـــــــــل

د (س) = $\begin{cases} س - ٥ & \text{عندما } س \geq ٥ \\ -(س - ٥) & \text{عندما } س < ٥ \end{cases}$

١) $\lim\limits_{س \to ٥^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٥^+}$ (س - ٥) = ٥ - ٥ = ٠

٢) $\lim\limits_{س \to ٥^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٥^-}$ - (س - ٥) = - (٥ - ٥) = ٠

∵ $\lim\limits_{س \to ٥^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٥^-}$ د(س) ∴ $\lim\limits_{س \to ٥}$ د(س) = ٠

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كان : $د(س) = \frac{|س-١|}{س-١}$ إبحث وجود $\lim\limits_{س \to ١} د(س)$ **الحـل**

$$د(س) = \begin{cases} \frac{(س-١)}{س-١} & \text{عندما } س > ١ \\ \frac{-(س-١)}{س-١} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

لاحظ أن الداله غير معرفه عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} ١ & \text{عندما } س > ١ \\ -١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

١) $\lim\limits_{س \to ١^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ١^{+}} ١ = ١$

٢) $\lim\limits_{س \to ١^{-}} د(س) = \lim\limits_{س \to ١^{-}} -١ = -١$

٣) $\because \lim\limits_{س \to ١^{+}} د(س) \neq \lim\limits_{س \to ١^{-}} د(س)$ $\therefore \lim\limits_{س \to ١} د(س)$ ليس لها وجود

مثال ٦ أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} د(س)$ إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣} & \text{عندما } س > ٣ \\ ٢س - ٧ & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

١) $\lim\limits_{س \to ٣^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣} = \lim \frac{(س-٣)(س-٤)}{س-٣}$

$= س - ٤ = ٣ - ٤ = -١$

٢) $\lim\limits_{س \to ٣^{-}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} ٢س - ٧ = ٢ \times ٣ - ٧ = ٦ - ٧ = -١$

٣) $\because \lim\limits_{س \to ٣^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} د(س)$ $\therefore \lim\limits_{س \to ٣} د(س) = -١$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ إذا كان د (س) = { (٥ س + ظا ٢ س) / (٦ س + جا س) عندما س > ٠ ، جتا ٣ س عندما س < ٠ }

إبحث وجود نهـا د(س) عندما س ← ٣

١) نهـا د (س) عندما س ← ٠⁺ = نهـا (٥ س + ظا ٢ س) / (٦ س + جا س) عندما س ← ٠⁺ = نهـا [(٥ س / س) + (ظا ٢ س / س)] / [(٦ س / س) + (جا س / س)] = (٥ + ٢) / (٦ + ١) = ١

٢) نهـا د (س) عندما س ← ٠⁻ = نهـا جتا ٣س عندما س ← ٠⁻ = جتا ٠ = ١

∵ نهـا د (س) عندما س ← ٠⁺ = نهـا د (س) عندما س ← ٠⁻

∴ نهـا د (س) عندما س ← ٠ = ١

تدريب ١ إذا كان : د (س) = { ٣س + ١ عندما س < ١ ، ٥ − س عندما س > ١ }

إبحث وجود نهـا د(س) عندما س ← ١

تدريب ٢ إذا كان : د (س) = { (س٢ − ٣س) / (س − ٣) عندما س > ٣ ، ٢/٣ س + ١ عندما س < ٣ }

إبحث وجود نهـا عندما س ← ٣

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٨ د (س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ & \text{عندما } س < ٥ \\ ٤س + م & \text{عندما } س \geq ٥ \end{cases}$ أوجد قيمة م التى تجعل الداله لها نهايه

∵ الداله لها نهايه ∴ $\lim_{س \to ٥^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٥^-}$ د (س)

١) $\lim_{س \to ٥^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٥^+}$ ٤س + م = ٤×٥ + م = ٢٠ + م

٢) $\lim_{س \to ٥^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٥^-}$ ٢س + ٣ = ٢×٥ + ٣ = ١٠+٣ = ١٣

من ١، ٢ ∴ ٢٠ + م = ١٣ م = ١٣ − ٢٠ = −٧

مثال ٩ إذا كان د لها نهايه عند س ←٣ بحيث د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س > -٣ \\ س + ا & \text{عندما } س < -٣ \end{cases}$ أوجد ا

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١٠: $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{عندما } \text{س} \leq -٣ \\ \text{م س} + \text{ب} & \text{عندما } -٣ < \text{س} < ٣ \\ \text{س} - ٥ & \text{عندما } \text{س} \geq ٣ \end{cases}$

أوجد قيمة م ، ب التى كل من $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \text{د}(\text{س})$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{د}(\text{س})$ لهما وجود

أولا نهاية الدالة عند س $\leftarrow -٣$

١) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣^{+}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to -٣^{+}} \text{م س} + \text{ب} = -٣\text{م} + \text{ب}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣^{-}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to -٣^{-}} \text{س}^{٢} = ٩$

النهايه اليمنى = النهايه اليسرى $\therefore -٣\text{م} + \text{ب} = ٩$ (١)

ثانياً نهاية الدالة عند س $\leftarrow ٣$

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{س} - ٥ = ٣ - ٥ = -٢$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{م س} + \text{ب} = ٣\text{م} + \text{ب}$

النهايه اليمنى = النهايه اليسرى $\therefore ٣\text{م} + \text{ب} = -٢$ (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع $-٣\text{م} + \text{ب} = ٩$

$٣\text{م} + \text{ب} = -٢$

$٢\text{ب} = ٧$ $\therefore \text{ب} = \frac{٧}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) $\text{م} = \frac{-١١}{٦}$

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١١ إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ ، د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣م & \text{عندما } س < ٢ \\ ٥س + ك & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

أوجد قيمة م ، ك

الحـــــــــل

النهاية اليمنى ٥س + ك = ٧

عندس = ٢ ٥×٢ + ك = ٧

ك = ٧ ـ ١٠

$\boxed{ك = -٣}$

س٢ + ٣م = ٧

النهاية اليسرى $س^{٢}$ + ٣م = ٧

عندس = ٢ ٤ + ٣م = ٧

٣م = ٧ ـ ٤

٣م = ٣

$\boxed{م = \frac{٣}{٣} = ١}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

الإتصال

أولاً الإتصال عند نقطه :

لكى تكون الداله متصله عند النقطه س = م يجب أن يتحقق الشروط الثلاثه الاتيه معاً

١) د(س) معرفة عند س = م أى أن الداله لها وجود

٢) د(س) لها نهاية عندما س ← م

٣) نهـــا د(س) = د (م)
س ← ٢

هام : بمعنى أنه لكى تكون الداله متصله يجب أن يكون د (م) = د (م$^{+}$) = د (م$^{-}$)

مثال ابحث إتصال الداله د (س) = { ٣س − ١ ، س < ٢ ؛ ٤ − س^{٢} ، س ≥ ٢ } عند س = ٢

الحـــــــل

١) د(٢) = ٤ ـ س^{٢} = ٤ ـ (٢)^{٢} = ٤ ـ ٤ = ٠

٢) د(٢$^{+}$) = نهـــا (س ← ٢$^{+}$) د(س) = نهـــا (س ← ٢$^{+}$) (٤ ـ س^{٢}) = ٤ ـ (٢)^{٢} = ٤ ـ ٤ = ٠

٣) د(٢$^{-}$) = نهـــا (س ← ٢$^{-}$) د(س) = نهـــا (س ← ٢$^{-}$) (٣س ـ ١) = ٣×٢ ـ ١ = ٦ ـ ١ = ٥

∵ د(٢$^{+}$) ≠ د(٢$^{-}$) الداله د غير متصله

تدريب ابحث إتصال الداله د (س) = { ٥س − ٦ ، س ≥ ٣ ؛ ٣س + ٤ ، س < ٣ } عند س = ٣

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ إبحث إتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} (\text{س} + ٢)^{٢} & ، \ \text{س} \le ٠ \\ \text{س}^{٢} + ٤ & ، \ \text{س} > ٠ \end{cases}$ **عند س = ٠**

الحـــــــل

١) $\text{د}(٠) = (\text{س}+٢)^{٢} = (٠+٢)^{٢} = ٤$

٢) $\text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـــا}} \ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـــا}} \ \text{س}^{٢} + ٤ = (٠)^{٢} + ٤ = ٤$

٣) $\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـــا}} \ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـــا}} \ (\text{س}+٢)^{٢} = (٠+٢)^{٢} = ٤$

$\because$ $\text{د}(٠) = \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-})$ $\therefore$ الدالة د متصلة عند س = ٠

مثال٣ إبحث إتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \ne ٣ \\ ٢ & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$ **عند س = ٣**

الحـــــــل

١) $\text{د}(٣) = ٢$

٢) لانوجد نهايه يمنى ويسرى

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \ \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \ \frac{(\text{س} - ١)\cancel{(\text{س} - ٣)}}{\cancel{\text{س} - ٣}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \ (\text{س} - ١) = ٣ - ١ = ٢$$

$\because$ $\text{د}(٣) = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \ \text{د}(\text{س})$ $\therefore$ الدالة د متصلة عند س = ٣

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ ابحث إتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} & ، س \ne ٢ \\ ١٤ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

١) د(٢) = ١٤

٢) لانوجد نهايه يمنى ويسرى

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٧ - (٢)^٧}{س^٤ - (٢)^٤} = \frac{٧}{٤} \times (٢)^٣ = ١٤$$

∵ د(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ د(س) ∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

مثاله ابحث إتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} |س - ٣| & ، س \ne ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

د (س) = $\begin{cases} (س - ٣) & ، س > ٣ \\ -(س - ٣) & ، س < ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

١) د(٣) = ٢

٢) د($^+٣$) = $\lim_{س \to ^+٣}$ د(س) = $\lim_{س \to ^+٣}$ (س - ٣) = ٣ - ٣ = ٠

٣) د($^-٣$) = $\lim_{س \to ^-٣}$ د(س) = $\lim_{س \to ^-٣}$ - (س - ٣) = - (٣ - ٣) = ٠

∵ د(٣) = د($^+٣$) = د($^-٣$) ∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

مثال ٦ إبحث إتصال الداله د (س) =

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ١}{|\text{س}^{٢} - ١|} & ، \ \text{س} < ١ \\[2ex] \dfrac{١}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

عند س = ١

الحـــــــــل

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ١}{-(\text{س}^{٢} - ١)} & ، \ \text{س} < ١ \\[2ex] \dfrac{١}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{\text{س} - ١}}{-(\text{س} + ١)\cancel{(\text{س} - ١)}} & ، \ \text{س} < ١ \\[2ex] \dfrac{١}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{١}{-(\text{س} + ١)} & ، \ \text{س} < ١ \\[2ex] \dfrac{١}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

١) $\text{د}(١) = \dfrac{١}{\text{س} - ٣} = \dfrac{١}{١ - ٣} = \dfrac{-١}{٢}$

٢) $\text{د}(١^{+}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \dfrac{١}{\text{س} - ٣} = \dfrac{١}{١ - ٣} = \dfrac{-١}{٢}$

٣) $\text{د}(١^{-}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \dfrac{١}{-(\text{س} + ١)} = \dfrac{١}{-(١ + ١)} = \dfrac{-١}{٢}$

$\because \text{د}(١) = \text{د}(١^{+}) = \text{د}(١^{-})$ $\quad \therefore$ الداله د متصله عند س = ١

أ/احمد فكري ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ ابحث إتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{٣ جا س جا ٢ س}}{\text{س}^{٢}} & \text{، س} < ٠ \\ \text{٦ جتا س} & \text{، س} \geq ٠ \end{cases}$ **عند س = ٠**

١) د(٠) = ٦ جتا س = ٦ جتا ٠ = ٦ × ١ = ٦

٢) $\text{د}(٠^{+}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{د(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{٦ جتا س} = \text{٦ جتا ٠} = ٦ \times ١ = ٦$

٣) $\text{د}(٠^{-}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \text{د(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \dfrac{\text{٣ جا س جا ٢ س}}{\text{س}^{٢}}$

$= ٣ \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}} = ٣ \times ١ \times ٢ = ٦$

∵ $\text{د}(٠) = \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-})$ ∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

مثال ٨ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س} + ٣} & \text{، س} \neq -٣ \\ \text{أ} & \text{، س} = -٣ \end{cases}$ **عند س = - ٣**

∵ الدالة متصلة ∴ $\text{د}(-٣) = \lim\limits_{\text{س} \to -٣} \text{د}(-٣)$

∴ د(-٣) = أ (١)

، $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \text{د}(-٣) = \lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س} + ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{\cancel{\text{س} + ٣}} =$

$= \lim\limits_{\text{س} \to -٣} (\text{س} - ٢) = -٣ - ٢ = -٥$ (٢)

من (١) ، (٢) أ = -٥

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٩ أوجد قيمة م التى تجعل الدالة د متصلة د (س) = $\begin{cases} \text{م س + ٥} & \text{، س > ٢} \\ \text{١ − م س} & \text{، س ≤ ٢} \end{cases}$ عند س = ٢

∵ الدالة متصلة ∴ د(٢) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}}{\text{نهـــا}}$ د(٢)

، د(٢) = ١ − م س = ١ − ٢ م (١)

د(٢⁻) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}^-}{\text{نهـــا}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}^-}{\text{نهـــا}}$ م س + ٥ = ٢ م + ٥ (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ١ − ٢ م = ٢ م + ٥

١ − ٥ = ٢ م + ٢ م

٤ م = −٤ ∴ م = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

تدريب أوجد قيمة م التى تجعل الدالة د متصلة د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤} & \text{، س} \neq ٤ \\ \text{م} & \text{، س} = ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١٠ أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة د (س) = $\begin{cases} ١ - ٣ س ، & س > ٣ \\ س^٢ + ك ، & س \leq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

∵ الدالة متصلة ∴ د(٣) = $\lim\limits_{س \to ٣}$ د(٣)

، د(٣) = س^٢ + ك = (٣)^٢ + ك = ٩ + ك (١)

د(٣$^+$) = $\lim\limits_{س \to ٣^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٣^+}$ (١ - ٣س) = ١ - ٣ × ٣ = ١ - ٩ = -٨ (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ٩ + ك = -٨ ك = -٨ - ٩ = -١٧

تدريب أوجد قيمة ك بحيث تكون د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س+٣)^٥ - ٢٤٣}{س} ، & س \neq ٠ \\ ك ، & س = ٠ \end{cases}$ متصلة عندس = ٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ثانياً الاتصال على فترة :

1) جميع الدوال كثيرات الحدود متصله على ح

2) الدوال كثيراتَ الحدود متصله على ح – { أصفار المقَام }

مثال ١ أبحث أتصال الداله د (س) = ٣س^٣ – ٥س^٢ + ٤س – ٣ الحـــــــــل

الداله كثيرةَ الحدود متصله على ح

مثال ٢ أبحث أتصال الداله د (س) = ٣ الحـــــــــل الداله كثيرةَ الحدود متصله على ح

مثال ٣ أبحث أتصال الداله د (س) = $\frac{١}{س + ٥}$ الحـــــــــل

الداله كسريه متصله على ح – { – ٥ }

مثال ٤ أبحث أتصال د (س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ – ٤}$ الحـــــــــل

س^٢ – ٤ = ٠ س = ± ٢

الداله كسريه متصله على ح – { ٢ ، – ٢ }

أ/احمدفكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ابحث إتصال الداله د (س) = { ٣س + ٢ ، −٣ ≤ س < ٢ ؛ س^{٢} + ٤ ، ٢ ≤ س ≤ ٥ }

د(س) معرفه على الفترة [−٣ ، ٥]

١) بحث الاتصال على الفترة [−٣ ، ٢ [

الداله د (س) = ٣س + ٢ كثيرة حدود متصله على الفترة [−٣ ، ٢ [

٢) بحث الاتصال على الفترة] ٢ ، ٥]

الداله د (س) = س^{٢} + ٤ كثيرة حدود متصله على الفترة [−٣ ، ٢ [

٣) بحث الاتصال عند النقاط −٣ ، ٢ ، ٥

د(−٣) = ٣س + ٢ = ٣(−٣) + ٢ = −٩ + ٢ = −٧ ∴ الداله متصله عند س = −٣

د(−٣$^{+}$) = نهـــا$_{س \leftarrow −٣^{+}}$ د(س) = نهـــا$_{س \leftarrow −٣^{+}}$ (٣س+٢) = ٣×−٣ + ٢ = −٩ + ٢ = −٧

د(٢) = س^{٢} + ٤ = (٢)^{٢} + ٤ = ٤+٤ = ٨

د(٢$^{+}$) = نهـــا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د(س) = نهـــا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ (س^{٢} + ٤) = (٢)^{٢} + ٤ = ٤+٤ = ٨

د(٢$^{-}$) = نهـــا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ د(س) = نهـــا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ (٣س + ٢) = ٣×٢ + ٢ = ٦ + ٢ = ٨

∴ الداله متصله عند س = ٢

د(٥) = س^{٢} + ٤ = (٥)^{٢} + ٤ = ٢٥+٤ = ٢٩ د(٥$^{-}$) = نهـــا$_{س \leftarrow ٥}$ س^{٢} + ٤ = ٢٥+٤ = ٢٩

∴ د(٥) = د(٥$^{-}$) ∴ الداله متصله عند س = ٥

∴ الداله متصله على الفترة [−٣ ، ٥]

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٦ إبحث إتصال الدالة د (س) = { ١ + س ، −٤ ≤ س < −٢ ؛ ٢ − س ، −٢ ≤ س ≤ ١ }

د(س) معرفه على الفترة [−٤ ، ١]

١) بحث الاتصال على الفترة] −٤ ، −٢ [

الدالة د (س) = س + ١ كثيرة حدود متصله على الفترة] −٤ ، −٢ [

٢) بحث الاتصال على الفترة] −٢ ، ١ [

الدالة د (س) = ٢ − س كثيرة حدود متصله على الفترة] −٢ ، ١ [

٣) بحث الاتصال عند النقاط −٤ ، −٢ ، ١

د(−٤) = س + ١ = ١ − ٤ = −٣ ∴ الدالة متصله عند س = −٣

د(−٤⁺) = نهـــا د (س) (س ← −٤⁺) = نهـــا (س + ١) (س ← −٤⁺) = ١ − ٤ = −٣

د(−٢) = ٢ − س = ٢ − (−٢) = ٢ + ٢ = ٤

د(−٢⁺) = نهـــا د (س) (س ← −٢⁺) = نهـــا (٢ − س) (س ← −٢⁺) = ٢ − (−٢) = ٢ + ٢ = ٤

د(−٢⁻) = نهـــا د (س) (س ← −٢⁻) = نهـــا (١ + س) (س ← −٢⁻) = ١ − ٢ = −١

د(−٢⁺) ≠ د(−٢⁻) ∴ الدالة غير متصلة عند س = −٢

د(١) = ٢ − س = ٢ − ١ = ١   د(١⁻) = نهـــا (٢ − س) (س ← ١) = ٢ − ١ = ١

∴ د(١) = د(١⁻)   ∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ الدالة متصلة على الفترة [−٤ ، ١] − { −٢ }

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ أوجد قيمة ا التى تجعل الدالة د : د(س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ + ا س + ٩}$ متصلة على ح

∵ الدالة متصلة على ح أى لا يوجد أصفار للمقام

أى أن المقدار $س^٢ + ا س + ٩$ ليس له جذور

∴ $ب^٢ - ٤ ا جـ < ٠$

∴ $(ا)^٢ - ٤ × ١ × ٩ < ٠$

∴ $(ا)^٢ - ٣٦ < ٠$

∴ $(ا)^٢ < ٣٦$ لا يصلح أخذ الجذر

∴ $\sqrt{(ا)^٢} < \sqrt{٣٦}$

∴ $|ا| < ٦$

∴ $-٦ < ا < ٦$ ∴ ا =]−٦ ، ٦[

تدريب أوجد قيمة ا التى تجعل الدالة د : د(س) = $\frac{٣س + ١}{س^٢ + ٦س + ا}$ متصلة على ح

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩