الهندسة الفراغية

١) المستقيم : هو مجموعة غير منتهية من النقاط تقع جميعاً على أستقامة واحدة (المستقيم يتعين بنقطتين)

٢) المستوى : هو مجموعة غير منتهية من النقاط ينطبق عليها المستقيم فى جميع الأوضاع

٣) شروط تعيين مستوى واحد

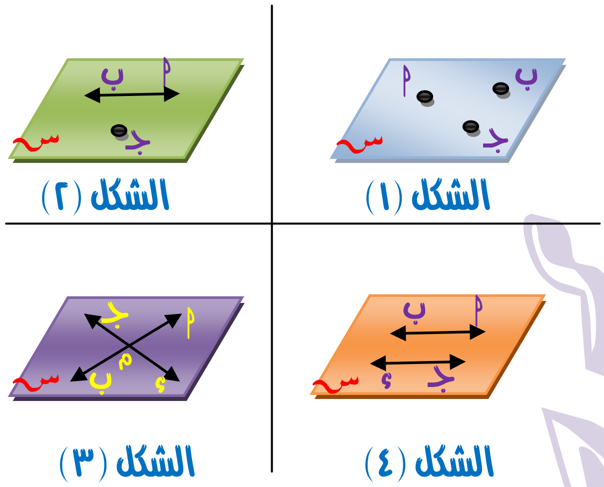
١. ثلاث نقاط ليست على أستقامة واحدة

٢. مستقيم ونقطة لاتنتمى اليه

٣. مستقيمان متقاطعان

٤. مستقيمان متوازيان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \emptyset$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يجمعهم مستوى واحد



٤) الفراغ : هو مجموعة غير منتهية من النقاط تحتوى المستويات

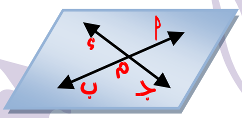
التقاطعات فى الفراغ :

١) علاقة مستقيمان　　٢) علاقة مستقيم بمستوى　　٣) علاقة مستوى بمستوى

أولاً علاقة مستقيم بمستقيم :

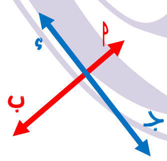
١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \{\text{م}\}$

يجمعهما مستوى واحد



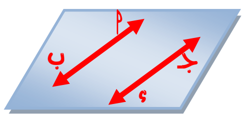
٢) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \emptyset$

لا يجمعهما مستوى واحد أى أن المستقيمان متخالفان



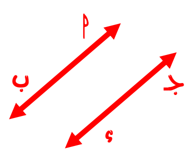
٣) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \emptyset$

يجمعهما مستوى واحد أى أن المستقيمان متوازيان



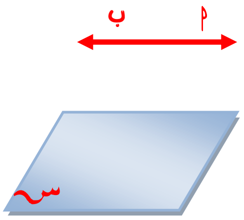
٤) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \emptyset$

لا يجمعهما مستوى واحد أى أن المستقيمان متخالفان



ثانياً العلاقة بين مستقيم ومستوى : ليكن المستوى س

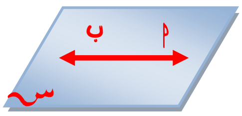
١) مستقيم لاينتمى لمستوى



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \text{س} = \emptyset$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \text{س}$

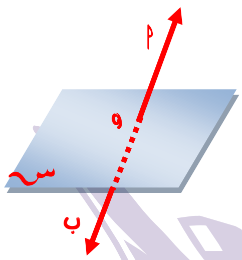
٢) المستقيم يقع داخل المستوى



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \text{س} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقع بأكمله على المستوى س

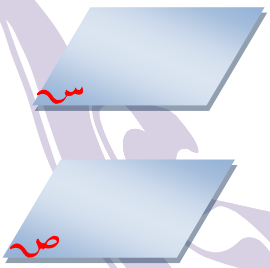
٣) المستقيم يقطع المستوى



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \text{س} = \{\text{و}\}$

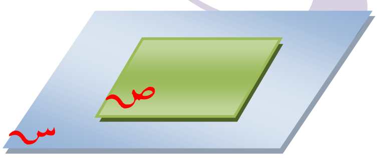
ثالثاً العلاقة بين مستوى ومستوى : ليكن المستوى س ، المستوى ص

١) مستويان متوازيان



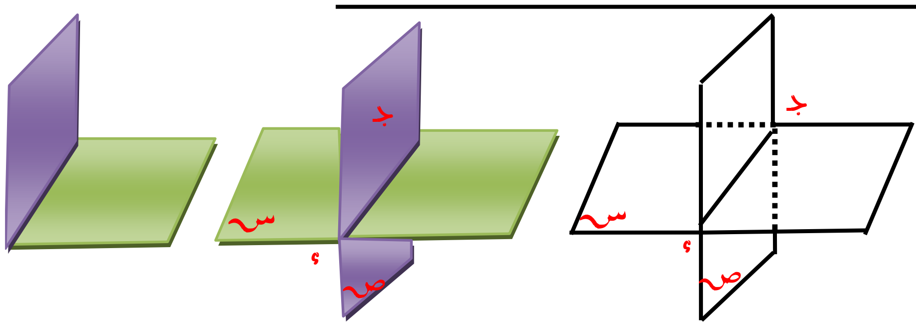
$\text{س} \cap \text{ص} = \emptyset$

٢) مستويان متقاطعان



س ∩ ص = أحدهما

٣) مستويان متقاطعان



$\text{س} \cap \text{ص} = \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

أكمل :

١) المستقيمان المتقاطعان هما مستقيمان يقعان فى نفس .... المستوى ويشتركان فى .... نقطة

٢) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان يقعان فى نفس .... المستوى ولايشتركان فى .... أى نقطة

٣) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لايمكن أن يحتويهما .... مستوى واحد

٤) إذا أشترك مستويان مختلفان فى نقطه فإنهما يشتركان فى .... خط مستقيم

٥) إذا أشترك مستقيم ومستوى فى نقطتين مختلفتين فإن المستقيم .... يقع على المستوى

٦) المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان ليسا .... متوازيان أو .... متقاطعان

٧) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة واحدة .... عدد لانهائى

٨) عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين معلومتين .... مستقيم واحد

٩) عدد المستويات التى تمر بنقطة معلومة .... عدد لانهائى

١٠) عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين .... عدد لانهائى

١١) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقاط ليست على أستقامة واحدة .... واحد

١٢) إذا أشترك مستويان فى نقطتين فإنهم يكونان .... متقاطعان

١٣) إذا أشترك مستويان فى ثلاث نقاط على أستقامة واحدة فإنهم يكونان .... متقاطعان

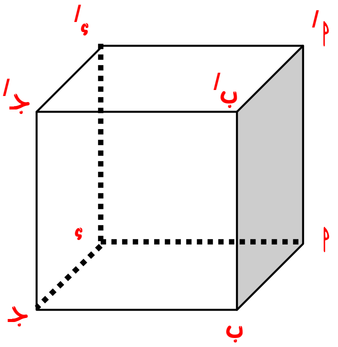
١٤) إذا أشترك مستويان فى ثلاث نقاط ليست على أستقامة واحدة فإنهم يكونان .... منطبقان

١٥) إذا أشترك مستويان فى مستقيمان فى مستقيم ونقطة لاتنتمى اليه فإنهما يكونان .... منطبقان

١٦) إذا أشترك مستويان فى مستقيمان متقاطعان فإنهما يكونان .... منطبقان

١٧) إذا أشترك مستويان فى مستقيمان متوازيان فإنهما يكونان .... منطبقان

أكمل فى الشكل المقابل :



١) النقطة أ يمر بها المستقيمات ↔أأ' ، ↔أب ، ↔أء

٢) النقطة جـ يمر بها المستقيمات ↔جـب ، ↔جـء ، ↔جـجـ'

٣) المستويان أ ب جـ ء ، أ ب ب' أ' متقاطعان فى ↔أب

٤) المستويان أ ب جـ' ، أ ء ء' أ' متقاطعان فى ↔أء'

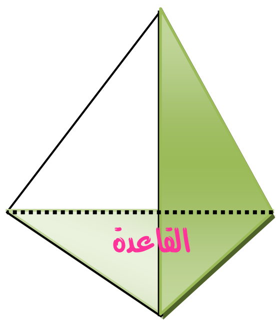
٥) المستويات التى تمر بالنقطة أ هى أ أ' ب' ب ، أ ب جـ ء ، أ أ' ء' ء

الهرم

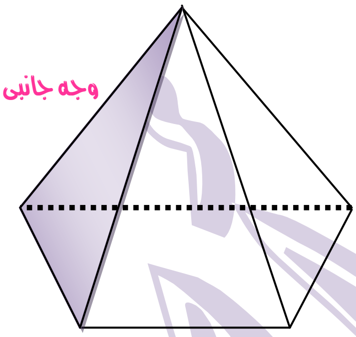
الهرم : هو مجسم له قاعدة واحدة (مثلث – مربع – مضلع خماسى – ....)

وجميع أوجهه الأخرى مثلثات ويسمى هرم ثلاثى أو رباعى أو خماسى حسب القاعدة

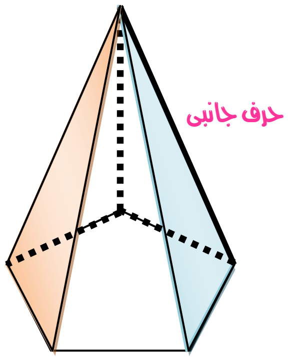
بعض أشكال الهرم :



الهرم الثلاثى



الهرم الرباعى



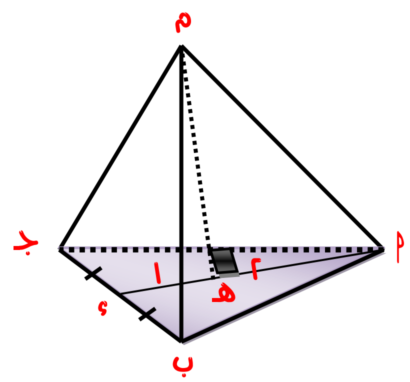
الهرم الخماسى

حالات خاصة للهرم :

١) **الهرم القائم :** هو الهرم الذى مسقط رأسه نفس مركز قاعدته

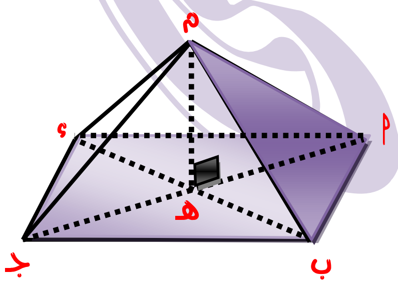
فإذا كان الهرم ثلاثى يكون أرتفاع الهرم من المركز إلى نقطة تقاطع متوسطاته

، وإذا الهرم رباعى يكون الأرتفاع من رأس الهرم لنقطة تقاطع أقطار القاعدة



أذا كان المثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع

، هـ نقطة تقاطع متوسطاته ∴ م هـ أرتفاع الهرم



أ ب جـ ء شكل رباعى

، هـ نقطة تقاطع أقطار قاعدته ∴ م هـ أرتفاع الهرم

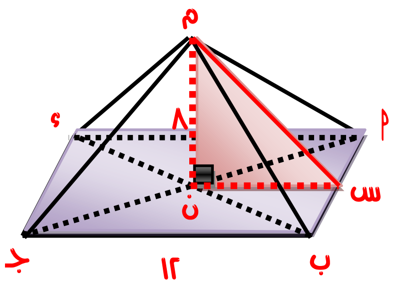
---

٢) **الهرم المنتظم :** هو الهرم القائم الذى تكون قاعدته مضلع منتظم

٣) **الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه :** هو هرم قائم جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع

مثال ١ إذا كان م أ ب جـ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨سم أوجد ارتفاعه الجانبى

الارتفاع الجانبى هو $\overline{\text{م س}}$



فى △ أ ب جـ

∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ س ن = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

فى △ م ن س القائم فى ن

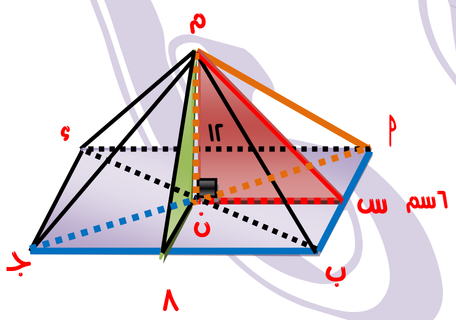
م س = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠ سم

مثال ٢ إذا كان م أ ب جـ ء هرم رباعى قاعدته أ ب جـ ء على شكل مستطيل ، ن نقطة تقاطع قطرية

فإذا كان أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، م ن = ١٢سم أوجد

١) طول حرفه الجانبي ٢) طول م س ، م ص حيث س منتصف أ ب ، ص منتصف ب جـ

∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ أ جـ = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ١٠ سم ∴ أ ن = ٥سم



فى △ م أ ن القائم فى ن

∴ أ م = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = ١٣سم

فى △ أ ب جـ ∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ س ن = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

فى △ م س ن القائم فى ن

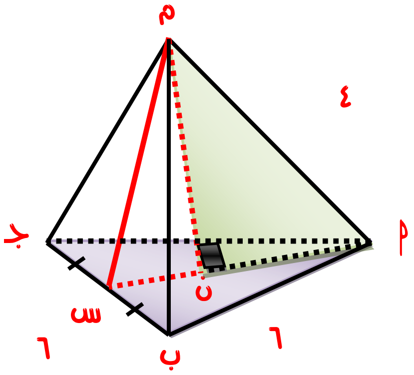
م س = $\sqrt{(١٢)^2 + (٤)^2}$ = $\sqrt{١٤٤ + ١٦}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ سم

فى △ أ ب جـ ∵ ن منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ن ص = $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

فى △ م ن ص القائم فى ن م ص = $\sqrt{(١٢)^2 + (٣)^2}$ = $\sqrt{١٤٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٥٣}$ سم

مثال ٣ إذا كان م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته Δ أ ب جـ طول ضلع قاعدته ٦ سم ، أرتفاعه ٤ سم

أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبى   الحـــــــل



بفرض أن س منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ∵ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم

∴ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، ∵ س منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أ س} \perp \overline{ب جـ}$

فى Δ أ ب س   أ س = $\sqrt{(٦)^٢ - (٣)^٢} = \sqrt{٣٦ - ٩} = ٣\sqrt{٣}$ سم

، ∵ $\overline{م ن} \perp \overline{أ س}$ ∴ ن هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

∴ أ ن : ن س = ٢ : ١

أ ن = $\frac{٢}{٣}$ أ س = $\frac{٢}{٣} \times ٣\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$ ،   ن س = $\frac{١}{٣}$ أ س = $\frac{١}{٣} \times ٣\sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

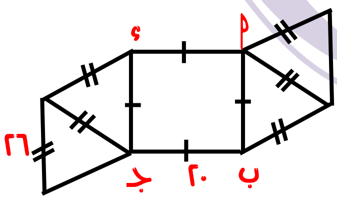
فى Δ م أ ن القائم فى ن

أ م = $\sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٢ + ١٦} = \sqrt{٢٨} = \boxed{٣\sqrt{٣}\ \text{سم}}$

فى Δ م ن س القائم فى ن   م س = $\sqrt{(٤)^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{١٦ + ٣} = \boxed{\sqrt{١٩}\ \text{سم}}$

مثال ٤ فى الشكل المقابل شبكة لهرم رباعى منتظم أوجد ١) أرتفاع الهرم ٢) الارتفاع الجانبى

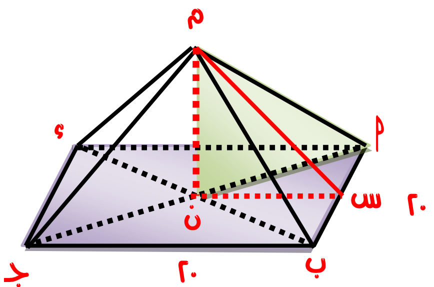
أولاً يجب تجميع الشكل فيكون ارتفاع الهرم هو $\overline{م ن}$ ، الارتفاع الجانبى هو $\overline{م س}$



فى Δ أ ب جـ القائم فى ب   أ م = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (٢٠)^٢} = ٢٠\sqrt{٢}$

أ ن = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٢} = ١٠\sqrt{٢}$

فى Δ م ن أ القائم فى ن   م ن = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (١٠\sqrt{٢})^٢} = \boxed{١٠\sqrt{٢}}$

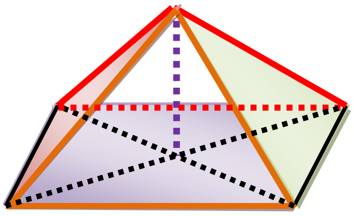


فى Δ أ ب جـ   ∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ن منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ س ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٢٠ = ١٠$ سم

فى Δ م ن س القائم فى ن   م س = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\ ٢)^٢} = \boxed{١٠\sqrt{٣}}$

المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم ، حجم الهرم



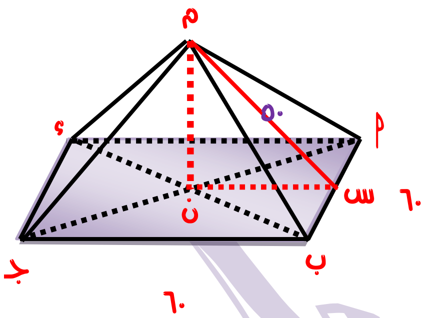
١) المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

٢) المساحة الكلية للهرم المنتظم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

٣) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال١ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦٠ سم وارتفاعه الجانبى ٥٠ سم أوجد

١) ارتفاع الهرم ٢) المساحة الجانبية والكلية للهرم ٣) حجم الهرم



يفرض أن س منتصف أ ب

فى △ أ ب جـ ∵ س منتصف أ ب ، ن منتصف أ جـ

∴ س ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ = ٣٠ سم

فى △ م س ن القائم فى ن

م ن = $\sqrt{(٥٠)^2 - (٣٠)^2}$ = ٤٠

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤×٦٠) × ٥٠ = ٦٠٠٠ سم^2

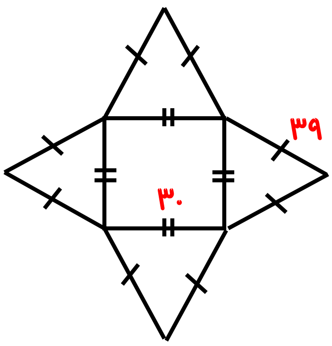
المساحة الكلية للهرم المنتظم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٠٠٠ + (٦٠ × ٦٠) = ٩٦٠٠ سم^2

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ × ٦٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ سم^3

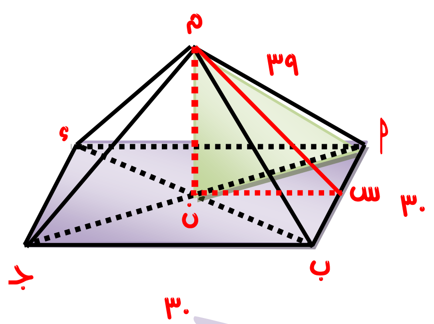
مثال٢ باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم ثم أوجد مساحته الكلية وحجمه   الحـــــل



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة (١)

لإيجاد الارتفاع الجانبى م س



فى Δ أ ب جـ

أ جـ = $\sqrt{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}$ = $\sqrt{(٣٠)^{٢} + (٣٠)^{٢}}$ = ٣٠ $\sqrt{٢}$

أ ن = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ $\sqrt{٢}$ = ١٥ $\sqrt{٢}$

فى Δ م أ ن

م ن = $\sqrt{(\text{م أ})^{٢} - (\text{أ ن})^{٢}}$ = $\sqrt{(٣٩)^{٢} - (١٥\sqrt{٢})^{٢}}$ = ٣ $\sqrt{١١٩}$ ارتفاع الهرم

فى Δ م س ن القائم فى ن

م س = $\sqrt{(\text{م ن})^{٢} + (\text{س ن})^{٢}}$ = $\sqrt{(٣\sqrt{١١٩})^{٢} - (١٥)^{٢}}$ = ٣٦

بالتعويض فى (١)

المساحة الكلية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٣٠) × ٣٦ + ٣٠ × ٣٠ = ٣٠٦٠ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣٠ × ٣٠ × ٣ $\sqrt{١١٩}$ = ٩٠٠ $\sqrt{١١٩}$ سم^{٣}

مثال٣ م ٲ ب جـ ء هرم رباعى منتظم مساحته الكلية ٣٦٠ سم^{٢} وارتفاعه الجانبى ١٣سم

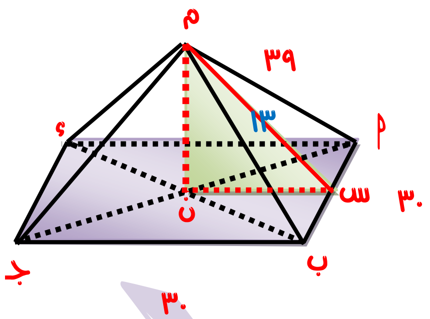
أوجد طول قاعدته وحجمه الحـــــل

∵ المساحة الكلية = ٣٦٠

∴ المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٣٦٠

∴ $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة = ٣٦٠ وبفرض ضلع القاعدة = ل

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ل × ١٣ + ل × ل = = ٣٦٠



∴ ٢٦ل + ل^{٢} = ٣٦٠

∴ل^{٢} + ٢٦ل – ٣٦٠ = ٠

∴ (ل – ١٠) (ل + ٣٦) = ٠

∴ ل = ١٠ ، ل = –٣٦ مرفوض

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع (١)

ولإيجاد ارتفاع الهرم م ن

فى △ٲ ب جـ س منتصف ٲ ب ، ن منتصف ٲ جـ

ن س = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم

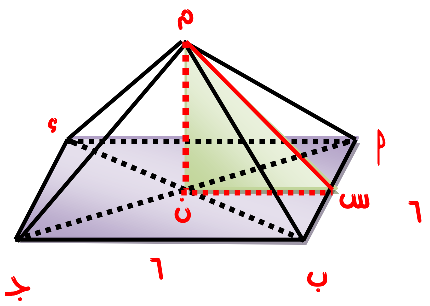
فى △ م س ن القائم فى ن

م ن = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم

بلتعويض فى (١) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٠ × ١٠ × ١٢ = ٤٠٠ سم^{٣}

مثال ٤ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨سم^{٣} وطول ضلع قاعدته ٦سم أوجد مساحته الكلية



∵ حجم الهرم = ٤٨

∴ $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨

∴ $\frac{١}{٣}$ × ٦ × ٦ × ع = ٤٨

∴ ١٢ ع = ٤٨٠ ∴ ع = $\frac{٤٨}{١٢}$ = ٤

∵ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

∴ المساحة الكلية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة

∴ المساحة الكلية = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٦ × الارتفاع الجانبى + ٦×٦

∴ المساحة الكلية = ١٢ × الارتفاع الجانبى + ٣٦ (١) لايجاد الارتفاع الجانبى م س

فى △ أ ب جـ س ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

فى △ م س ن القائم فى ن

م س = $\sqrt{(م ن)^{٢} + (س ن)^{٢}}$ = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢}}$ = ٥ سم

بالتعويض فى (١) ∴ المساحة الكلية = ١٢ × ٥ + ٣٦ = ٦٠ + ٣٦ = ٩٦ سم^{٢}

قوانين الهرم الثلاثى منتظم الأوجه (طول حرفه ل)

١) عدد أحرفه = ٦ أحرف

٢) مجموع أطوال أحرفه = ٦ل

٣) مساحة الوجه الواحد = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

٤) المساحة الجانبية = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

٥) المساحة الكلية = $\sqrt{٣}$ ل^{٢}

٦) الحجم = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^{٣}

٧) الارتفاع الجانبى = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

٨) أرتفاع الهرم = $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ ل

مثال ٥ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، طول أى حرف من أحرفه $٨\sqrt{٣}$ سم

١) الارتفاع الجانبى ٢) ارتفاع الهرم ٣) المساحة الكلية للهرم ٤) حجم الهرم

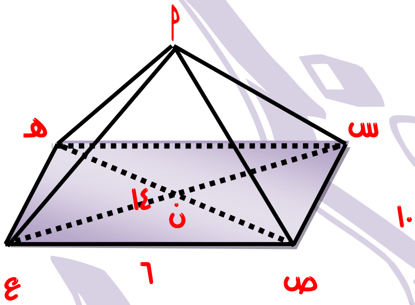
الارتفاع الجانبى = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل = $\frac{٣}{٢} \times ٨\sqrt{٣}$ = ١٢سم

ارتفاع الهرم = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ل = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\ ٨\sqrt{٣} = ٨\sqrt{٢}$

المساحة الكلية = $\sqrt{٣}$ ل^{٢} = $٣\ (٨\sqrt{٣})^{٢} = ١٩٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

الحجم = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^{٣} = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}\ (٨\sqrt{٣})^{٣} = ١٢٨\sqrt{٦}$ سم^{٣}

مثال ٦ أ س ص ع هـ هرم رباعى قائم قاعدته على شكل متوازى أضلاع فيه س ص = ١٠سم ، ص ع = ٦سم ، س ع = ١٤سم ، فإذا كان ارتفاع الهرم = $٤\sqrt{٣}$ أوجد حجم الهرم الحـــــل



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع (١)

∵ القاعدة على شكل متوازى أضلاع

، مساحة المتوازى = ضعف مساحة المثلث س ص ع

∴ مساحة المثلث = $\sqrt{ح\ (ح - س ص)\ (ح - ص ع)\ (ح - س ع)}$

حيث ح هى نصف محيط الثلث

ح = $\frac{١٠ + ٦ + ١٤}{٢}$ = ١٥سم

∴ مساحة المثلث = $\sqrt{١٥\ (١٥ - ١٠)\ (١٥ - ٦)\ (١٥ - ١٤)} = ١٥\sqrt{٣}$ سم^{٢}

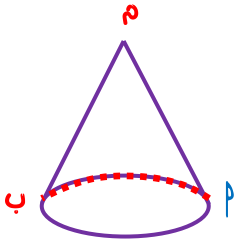
∴ مساحة المتوازى س ص ع هـ = ٢ مساحة المثلث = $٢ \times ١٥\sqrt{٣} = ٣٠\sqrt{٣}$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣} \times ٣٠\sqrt{٣} \times ٤\sqrt{٣}$ = ١٢٠سم^{٣}

تدريب م أ ب جـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد $٤\sqrt{٥}$ من قاعدته أ ب جـ ، أ ب = ٧سم

، ب جـ = ٨سم ، أ جـ = ٩سم أوجد حجم الهرم

المخروط

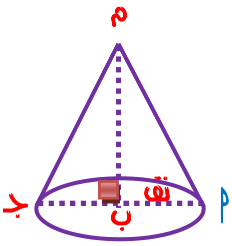


المخروط : هو مجسم له قاعدة على شكل منحنى مغلق (دائرة أو شكل بيضاوى)

ورأس واحدة وسطحه الجانبى هو القطعه المستقيمة المرسومة من رأسه الى منحنى القاعدة .

ملحوظة : القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المخروط إلى منحنى القاعدة تسمى اسم المخروط

المخروط القائم : هو الجسم الذى ينشئ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور

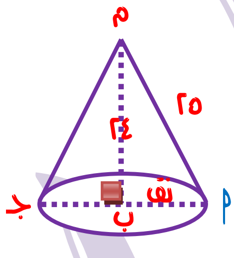


فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{م ب}}$ هو أرتفاع المخروط ، $\overline{\text{م أ}}$ هو راسم المخروط

∴ م أ = $\sqrt{(\text{م ب})^2 + (\text{أ ب})^2}$

مثال ١ : مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥سم وارتفاعه ٢٤سم أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط

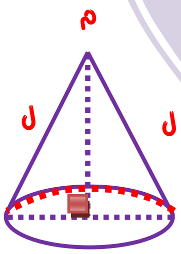


أ ب = $\sqrt{(٢٥)^2 - (٢٤)^2}$ = ٧سم

محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤سم

مساحة القاعدة = π نق^2 = $\frac{٢٢}{٧}$ × $(٧)^2$ = ١٥٤ سم^2

قوانين المخروط القائم :

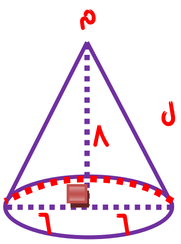


١) المساحة الجانبية = π ل نق

٢) المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^2

٣) حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع

مثال ٢ : مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه ٨سم أوجد مساحته الجانبية والكلية وحجمه

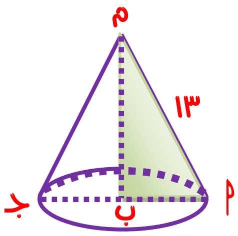


ل = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = ١٠سم

المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٠ × ٦ = ٦٠ π سم^2

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^2 = ٦٠ π + ٣٦ π = ٩٦ π سم^2

مثال ٣ مخروط دائرى قائم مساحة القاعدة ٢٥ π سم^{٢} ، طول راسمه ١٣سم أوجد مساحته الجانبية والكلية وحجمه



∵ مساحة القاعدة = ٢٥ π

∴ π نق^{٢} = ٢٥ π

نق^{٢} = ٢٥   ∴ نق = ٥

، المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٣ × ٥ = ٦٥ π سم^{٢}

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^{٢}

= π × ١٣ × ٥ + π × (٥)^{٢} = ٦٥ π + ٢٥ π = ٩٠ π سم^{٢}

حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (٥)^{٢} ، (ع) = $\frac{٢٥}{٣}$ × π ع   (١)

$\boxed{\text{لإيجاد الارتفاع (ع) = م ب}}$ فى ا ب م القائم فى ب

م ب = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢سم

بالتعويض فى (١)   حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ π × (٥)^{٢} ع = $\frac{٢٥}{٣}$ × π × ١٢ = ١٠٠ سم^{٢}

مثال ٤ دورق مخروطى الشكل سعته ٦.١٦ لتر ، أرتفاعه ٣٠سم أوجد طول نصف قطر قاعدته حيث π = $\frac{٢٢}{٧}$

حجم الدورق = ٦.١٦ × ١٠٠٠ = ٦١٦٠ سم^{٣}

، ∵ الحجم = ٦١٦٠

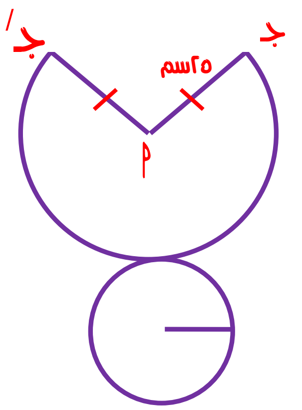
∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = ٦١٦٠

$\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} × ٣٠ = ٦١٦٠

$\frac{٢٢٠}{٧}$ π نق^{٢} = ٦١٦٠   نق^{٢} = ٦١٦٠ × $\frac{٧}{٢٢٠}$ = ١٩٦   نق = ١٤سم

مثال باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وإذا كان طول القوس جـ جـ/ = ٣٠ π سم

أوجد حجم المجسم ومساحته الكلية . الحـــــــل

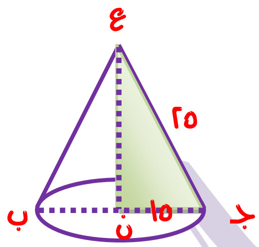


جـ جـ/ تمثل محيط القاعدة للمخروط

∴ محيط القاعدة = ٣٠ π

٢ π نق = ٣٠ π ∴ نق = $\frac{30\pi}{2\pi}$ = ١٥سم

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع (١) لإيجاد (ع)



فى Δ م ن جـ ع = $\sqrt{(25)^2 - (15)^2}$ = ٢٠ سم

من (١) ∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π × $(15)^2$ × ٢٠ = ١٥٠٠ π سم^3

المساحة الكلية للمخروط = π ل نق + π نق^2

= π × ٢٥ × ١٥ + π × $(15)^2$ = ٣٧٥ π + ٢٢٥ π = ٦٠٠ π سم^2

مثال هرم ثمانى منتظم من الفضه ، طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٣٠سم صُهر وحول

إلى مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٩سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فقدأثناء

الصهر والتحويل أوجد أرتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{4}$ × ن × س^2 × ظتا $\frac{\pi}{ن}$) × ع

= $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{4}$ × ٨ × $(6)^2$ × ظتا $\frac{180}{8}$) × ٣٠ = ١٧٣٨.٢ سم^3

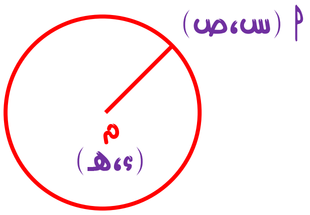
حجم المخروط = ٩٠٪ من حجم الهرم = $\frac{90}{100}$ × ١٧٣٨.٢ = ١٥٦٤.٤ سم^3

، ∵ حجم المخروط = ١٥٦٤.٤

∴ $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع = ١٥٦٤.٤

∴ $\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × $(9)^2$ × ع = ١٥٦٤.٤ ع = ١٨.٤سم

الدائرة



معادلة الدائرة التى مركزها (ء ، هـ) وتمر بالنقطة (س ، ص) هى

(س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢ وتسمى بالمعادلة الخاصة

مثال أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، ٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات الحـــــل

(س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢

(س – ٢)^٢ + (ص – ٣)^٢ = (٧)^٢

مثال ٢ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ، –٢) وطول قطرها ١٠ وحدات الحـــــل

(س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢

(س – ٤)^٢ + (ص + ٢)^٢ = (٥)^٢

مثال ٣ أوجد أحداثى مركز الدائرة وطول نصف قطرها التى معادلتها (س – ٢)^٢ + (ص + ٥)^٢ = (٥)^٢

المركز (٢ ، –٥) ، نق = $\sqrt{٩}$ = ٣

مثال ٤ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م(٣ ، –٢) وتمر بالنقطة أ (–١ ، ١) الحـــــل

نق = $\sqrt{(٣ + ١)^٢ + (–٢ – ١)^٢}$ = ٥

المعادلة هى (س – ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥

لاحظ أن :

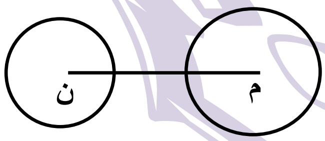
١) إذا كان الدائرة تمر بـ أ (س ، ص) ، (ء ، هـ) هى مركز الدائرة

أ) (س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ > نق^٢ فإن أ تقع خارج الدائرة

ب) (س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢ فإن أ تقع على الدائرة

جـ) (س – ء)^٢ + (ص – هـ)^٢ < نق^٢ فإن أ تقع داخل الدائرة

٢) العلاقة بين دائرتين مركزهما نق$_١$ ، نق$_٢$



أ) إذا كان م ن > نق$_١$ + نق$_٢$ فإن الدائرتان متباعدتان

ب) إذا كان م ن = نق$_١$ + نق$_٢$ فإن الدائرتان متماستان من الخارج

جـ) إذا كان نق$_١$ – نق$_٢$ < م ن < نق$_١$ + نق$_٢$ فإن الدائرتان متقاطعتان

ء) إذا كان م ن = نق$_١$ – نق$_٢$ فإن الدائرتان متماستان من الداخل

هـ) إذا كان م ن < نق$_١$ – نق$_٢$ فإن الدائرتان متداخلتان

و) إذا كان م ن = صفر فإن الدائرتان متحدتا المركز

٣) أحداثى منتصف أ ب حيث أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$)

منتصف أ ب = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

٤) طول العمود المرسوم من النقطة (س_1 ، ص_1) على المستقيم

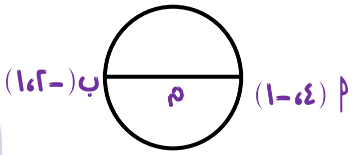
$$\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ} = ٠ \quad \therefore \text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

مثال ٥ أوجد معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٤ ، −١) ، ب (−٢ ، ١)

الحـــــل

$$\text{المركز} = \left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-١ + ١}{٢} \right)$$

المركز = (١ ، ٠)



$$\text{طول أ ب} = \sqrt{(٤ + ٢)^2 + (-١ - ١)^2} = ٢\sqrt{١٠}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٢} = \sqrt{١٠}$$

$$\because (\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$

$$\therefore \text{معادلة الدائرة } (\text{س} - ١)^2 + (\text{ص} + ٠)^2 = (\sqrt{١٠})^2$$

$$\therefore (\text{س} - ١)^2 + \text{ص}^2 = ١٠$$

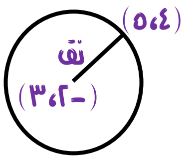
مثال ٦ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (−٢ ، ٣) وتمر بالنقطة (٤ ، ٥)

الحـــــل

$$\text{نق} = \sqrt{(٤ + ٢)^2 + (٥ - ٣)^2} = ٢\sqrt{١٠}$$

$$\because (\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$

$$\therefore \text{معادلة الدائرة } (\text{س} + ٢)^2 + (\text{ص} - ٣)^2 = (٢\sqrt{١٠})^2$$



$$\therefore (\text{س} + ٢)^2 + (\text{ص} - ٣)^2 = ٤٠$$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

$$\text{س}^2 + \text{د}^2 - ٢\text{د س} + \text{ص}^2 + \text{هـ}^2 - ٢\text{هـ ص} = \text{نق}^2$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٢\text{د س} - ٢\text{هـ ص} + \text{د}^2 + \text{هـ}^2 - \text{نق}^2 = ٠$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠$$

حيث ل = −د ، ك = −هـ ، $\text{جـ} = \text{د}^2 + \text{هـ}^2 - \text{نق}^2$

$$\text{نق} = \sqrt{\text{د}^2 + \text{هـ}^2 - \text{جـ}} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$$

حالات خاصة لمعادلة الدائرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠$

١) إذا كان مركز الدائرة يقع على محور السينات

فإن الحد المشتمل على ص = ٠

وتكون معادلة الدائرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + \text{جـ} = ٠$

٢) إذا كان مركز الدائرة يقع على محور الصادات

فإن الحد المشتمل على س = ٠

وتكون معادلة الدائرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠$

٣) إذا كانت الدائرة تمس محور السينات فإن

فإن نق = |ك| ، $\text{جـ} = \text{ل}^2$

المعادلة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{ل}^2 = ٠$

٤) إذا كانت الدائرة تمس محور الصادات فإن

فإن نق = |ل| ، $\text{جـ} = \text{ك}^2$

المعادلة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{ك}^2 = ٠$

٥) إذا كانت الدائرة تمس المحورين السينى والصادى

فإن $\text{جـ} = \text{ل}^2 = \text{ك}^2$ ، نق = |ك| = |ل|

المعادلة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ل س} + ٢\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠$

هام المعادلة الخاصه (س − ء)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

الصورة العامه لمعادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

مركز الدائرة = (ء ، هـ) = (− ل ، − ك) = (− $\frac{١}{٢}$ معامل س ، − $\frac{١}{٢}$ معامل ص)

، جـ = ء^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢}

مثال ٧ أوجد مركز الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ك ص + ٩ = ٠ ثم أوجد طول نصف قطرها

مركز الدائرة = (٣ ، −٤) ، نق = $\sqrt{\text{ء}^{٢} + \text{هـ}^{٢} - \text{جـ}}$ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢} - ٩}$ = ٤

مثال ٧ أوجد معالة الدائرة التى مركزها (٣ ، −٤) وتمس محور السينات الحـــــل

ل = −٣ ، ك = ٤

، ∵ الدائرة وتمس محور السينات

نق = | ك | = | −٤ | = ٤ ، جـ = ل^{٢} = (−٣)^{٢} = ٩

معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص + ٩ = ٠

الشروط الواجب توافرها لكى تصلح أن تكون المعادله هى معادلة دائرة

١) أن تكون معادلة من الدرجة الثانية

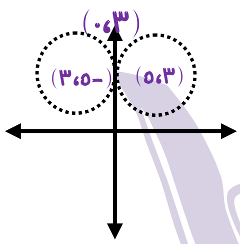
٢) يجب أن تكون المعادلة خالية من الحد س ص

٣) أن يكون معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

٤) ل^{٢} + ك^{٢} − جـ > ٠

مثال ٨ أوجد معالة الدائرة التى طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣) الحـــــل

مركز الدائرة = (س ، ٣) لانه غير معلوم التماس من اليمين او اليسار



ل = −س ، ك = −٣

∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = | ل | ، جـ = ك^{٢}

∴ نق = | − س | ، جـ = (−٣)^{٢}

٥ = | س | ، جـ = ٩

س = ± ٥

مركز الدائرة = (٥ ، ٣) ، مركز الدائرة = (−٥ ، ٣)

ل = −٥ ، ك = −٣ ، ل = ٥ ، ك = −٣

∴ معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٦ ص + ٩ = ٠

∴ معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٦ ص + ٩ = ٠

ملحوظة : لكى يتم تعيين مركز الدائرة أو طول نصف قطرها يجب أن يكون معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

مثال١ هل المعادلة س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٢س + ٤ص + ٥ = ٠ تعبر عن معادلة دائرة

الحـــل

∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢} ∴ المعادلة ليست معادلة دائرة

مثال٢ هل المعادلة ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − س ص + ٥س − ص + ٥ = ٠ تعبر عن معادلة دائرة ؟

تحتوى على س ص ∴ المعادلة ليست معادلة دائرة

مثال٣ هل المعادلة ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٦س + ٤ص + ٩ = ٠ تعبر عن معادلة دائرة ثم أوجد المركز وطول نصف قطرها

٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٦س + ٤ص + ٩ = ٠ بالقسمة على ٢

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٢ص + $\frac{٩}{٢}$ = ٠ ∴ يمكن ان تمثل معادلة دائرة

مركز الدائرة (د ، هـ) = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، −١)

ل = −$\frac{٣}{٢}$ ، ك = ١

نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$ = $\sqrt{\frac{٩}{٤} + ١ - \frac{٩}{٢}}$ = $\sqrt{\frac{-٥}{٤}}$ مرفوض

∴ ل^{٢} + ك^{٢} − جـ < ٠ ∴ المعادلة ليست معادلة دائرة

مثال٤ أوجد معالة الدائرة التى مركزها (٢ ، ٣) والمستقيم ٣س + ٤ص + ٢ = ٠ مماس لها عند أ

م أ = $\frac{|٣س + ٤ص + ٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ = $\frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{٥}$ = ٤

∴ نق = ٤ ، ل = −٢ ، ك = −٣ ، جـ = ٤+٩−١٦ = −٣

معادلة الدائرة ∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س − ٦ص − ٣ = ٠

أو (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٦

مثال٥ أوجد معالة الدائرة التى نصف قطرها ٣ وحدات ومعادلتا قطرين فيها هما س + ص = ٢ ، ٢س − ص = ٧

القطرين يتقاطعان فى مركز الدائرة

بجمع المعادلتين

س + ص = ٢ (١)

٢س − ص = ٧ (٢)

٣س = ٩ س = ٣

بالتعويض فى (١) ∴ ص = −١

مركز الدائرة = (٣ ، −١) = (د ، هـ)

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = (٣)^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٢ص + ١ = ٠

يمكن الحل باستخدام المعادلة العامة حيث ل = −٣ ، ك = ١

مثال٦ أوجد معالة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها (−٤ ، ٤)

الحـــل

ل = ٤ ، ك = −٤

∵ الدائرة التى تمس المحورين ∴ جـ = ل^{٢} = ك^{٢} = ١٦

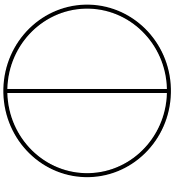
معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٨س − ٨ص + ١٦ = ٠

مثال ٧ أوجد معادلة الدائرة التى نهايتى قطر فيها

(٣ ، ٢) ، (٥ ، -٦)   الحــــــل

مركز الدائرة = ((٣ + ٥)/٢ ، (٢ - ٦)/٢)



= (٤ ، -٢)

ل = -٤ ، ك = ٢

∵ معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠ (١)

والدائرة تمر بالنقطة (٣ ، ٢) ، (٥ ، -٦) فكلاهما تحقق المعادلة

ناخذ (٣ ، ٢) و بالتعويض فى (١)

(٣)^{٢} + (٢)^{٢} + ٢ × -٤ × (٣) + ٢ × ٢ × (٢) + جـ = ٠

٩ + ٤ - ٢٤ + ٨ + جـ = ٠

-٣ + جـ = ٠   جـ = ٣

المعادلة هى ∴ س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٤ص + ٣ = ٠

مثال ٨ أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠

بالانتقال (س + ٢ ، ص - ٢)   الحــــل

علمنا من قبل أن الصورة = النقطة + الانتقال

مركز الدائرة المعطاه = (- ١/٢ معامل س ، - ١/٢ معامل ص)

مركز الدائرة المعطاه = (٦ ، -٣)

مركز الدائرة المطلوبه = (٦ ، -٣) + (٢ ، -٢) = (٨ ، -٥)

من المعادله المعطاه ل = ٦ ، ك = -٣ ، جـ = ٢٠

نق = √(ل^{٢} + ك^{٢} - جـ) = √(٣٦ + ٩ - ٢٠) = ٥

وبالتالى فإن المعادلة المطلوبه نق = ٥

ومركزها (٨ ، -٥)

(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ (س - ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

مع أطيب الامنيات بالنجاح والتفوق