الاحتمالات

التجربة العشوائية : هى التجربة التى نستطيع أن نعرف مقدماً جميع النواتج الممكنه دون أن نحدد أى من النواتج سوف يتحقق فعلاً .

فضاء العينة : هو مجموعة كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية (ويرمز لها بالرمز ف)

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .

أنواع الحدث

١) حدث مؤكد : وهو جميع عناصر فضاء العينة

٢) حدث مستحيل : هو الحدث ∅

٣) حدث بسيط : يحتوى على عنصر واحد فقط من عناصر فضاء العينة

أحتمال وقوع الحدث أ = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينه}}$

أحتمال وقوع الحدث المؤكد = ١ ، أحتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

الاعداد الاوليه = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ..... } هى أعداد تقبل القسمه على نفسها والواحد الصحيح

مثال١ صندوق به عشر كرات متماثله من ١ : ١٠ سحبت كرة واحدة عشوائياً أوجد

١) أ أحتمال الحصول على عدد زوجى ٤) ء أحتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣

٢) ب أحتمال الحصول على عدد فردى ٥) هـ أحتمال الحصول على عدد أكبر من ١١

٣) جـ أحتمال الحصول على عدد أولى ٦) و أحتمال الحصول على عدد أقل من ١١

الحدث أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ل (أ) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

الحدث ب = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

الحدث جـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، ل (جـ) = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

الحدث ء = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ل (ء) = $\frac{٣}{١٠}$

الحدث هـ = ∅ ، ل (هـ) = صفر

الحدث و = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ل (و) = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ فى تجربة القاء حجر نرد مره ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى أوجد احتمال

١) أ احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوى ٣ ٤) ء احتمال الحصول على عدد أكبر من ٧

٢) ب احتمال الحصول على عدد أصغر من ٤ ٥) هـ احتمال الحصول على عدد أصغر من ٧

٣) جـ احتمال الحصول على عدد فردى غير أولى ٦) و احتمال الحصول على عدد مربع كامل

الحدث أ = {٣، ٤، ٥، ٦} ، ل(أ) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

الحدث ب = {١، ٢، ٣} ، ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

الحدث جـ = {١} ، ل(جـ) = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

الحدث ء = ∅ ، ل(ء) = صفر

الحدث هـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ل(هـ) = $\frac{٦}{٦}$ = ١

الحدث و = {١، ٤} ، ل(و) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

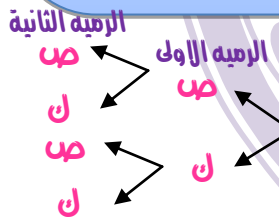
مثال٣ فى تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة ظهور الصور والكتابة أكتب فضاء العينة ثم أوجد

١) أ احتمال الحصول على صورة فى الرمية الاولى ٥) هـ احتمال الحصول على صورة فى الرميتين

٢) ب احتمال الحصول على صورة فى إحدى الرميتين ٦) و احتمال الحصول على صورة على الاكثر فى الرميتين

٣) جـ احتمال الحصول على نفس الشئ فى الرميتين ٧) ى احتمال الحصول صورة على الاقل فى الرميتين

٤) ء احتمال الحصول على صورة فى أحدى الرميتين وكتابة فى الاخرى



ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

١) الحدث أ = {(ص، ص)، (ص، ك)} ، ل(أ) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

٢) الحدث ب = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)} ، ل(ب) = $\frac{٣}{٤}$

٣) الحدث جـ = {(ص، ص)، (ك، ك)} ، ل(جـ) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

٤) الحدث ء = {(ص، ك)، (ك، ص)} ، ل(ء) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

٥) الحدث هـ = {(ص، ص)} ، ل(هـ) = $\frac{٤}{٤}$ = ١

٦) الحدث و = {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)} ، ل(و) = $\frac{٣}{٤}$

٧) الحدث ى = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)} ، ل(ى) = $\frac{٣}{٤}$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ صندوق به ٣ كرات إحداهما بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء سحبت كرتان من الصندوق

ولوحظ لونهما أكتب فضاء العينة ثم أوجد

١) إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الاخرى مع الاحلال ٢) إذا سحبت الكرتان الواحدة بعد الاخرى بدون الاحلال

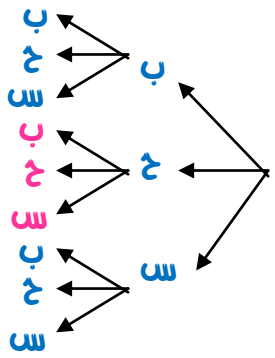
أولاً مع الاحلال :

ف = { (ب ، ب) ، (ب ، خ) ، (ب ، س)

، (خ ، ب) ، (خ ، خ) ، (خ ، س)

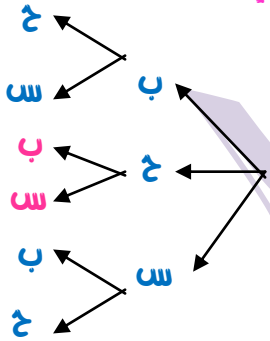
، (س ، ب) ، (س ، س) ، (س ، س) }

ن(ف) = ٣^{٢} = ٩



الشجره البيانية

ثانياً بدون أحلال :



ف = { (ب ، خ) ، (ب ، س) ، (خ ، ب) ، (خ ، س) ، (س ، ب) ، (س ، خ) }

ن(ف) = ٦

مثال٥ أكتب فضاء العينة لتجربة القاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى

فى الرميتين مبيناً عدد عناصرة الحـــــــــــل

يمكن الحل باستخدام الشجره البيانية أو الشبكة البانية أو حاصل الضرب الديكارتى

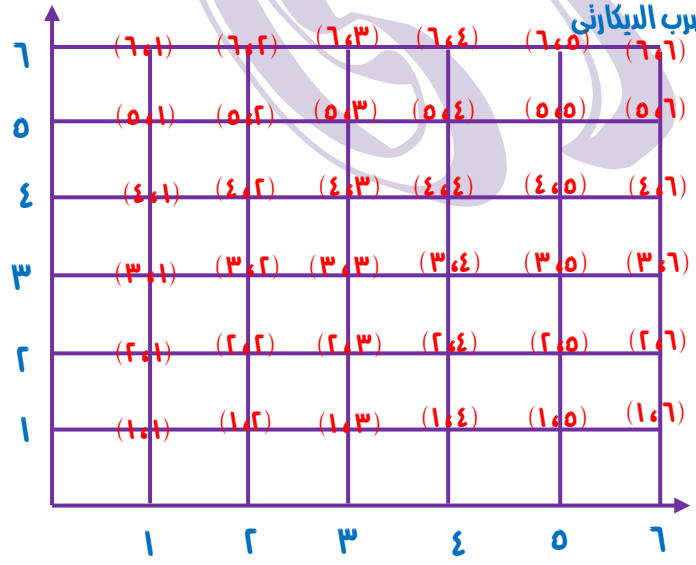
أولاً باستخدام حاصل الضرب الديكارتى

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } × { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

= { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٦)

(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦)

..... ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }



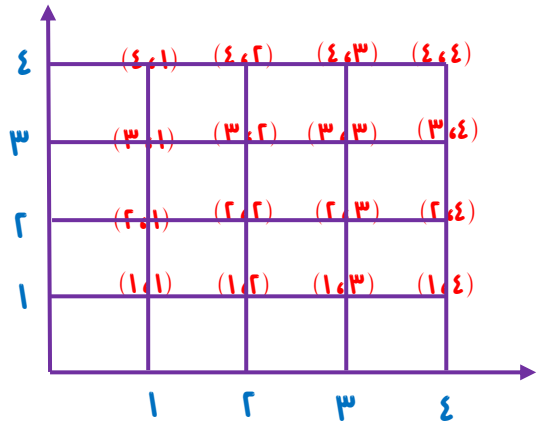
أو باستخدام الشبكة البيانية الموضحة بالشكل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٧ صندوق به ٤ كرات متماثله ومرقمة من ١ : ٤ سحبت كرتان واحدة بعد الأخرى مع الأحلال

أكتب فضاء العينة ثم أوجد أحتمال أن مجموع العددين المرقمة على الكرتين يساوى ٣ .

أولاً باستخدام حاصل الضرب الديكارتى



ف = { ١، ٢، ٣، ٤ } × { ١، ٢، ٣، ٤ }

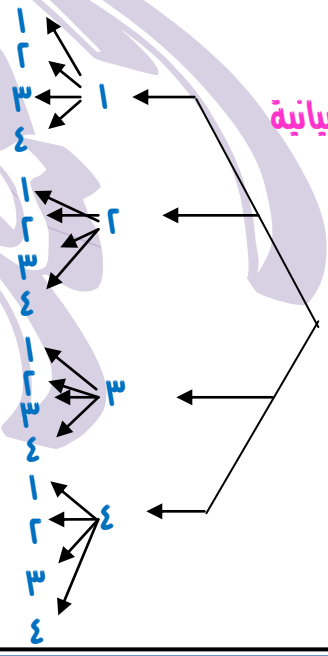
= { (١،١)،(١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ،

..... ، (٤،٣) ، (٤،٤) }

ملحوظه : لوقال بدون أحلال نحذف العناصر (١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣)

ثانياً باستخدام الشبكة البيانية الموضحة بالشكل

ثالثاً باستخدام الشجرة البيانية

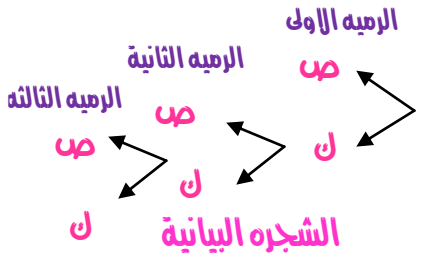


تفضل الشجرة البيانية إذا كان السحب بدون أحلال

مثال٧ عند القاء قطعة نقود تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ثلاث كتابات أكتب فضاء العينة ثم أوجد أحتمال

١) الحصول على كتابتين على الاقل ٢) الحصول على صورة على الأكثر ٣) الحصول على صورة على الاقل

ف = { (ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }



أ الحصول على كتابتين على الاقل = { (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ل (أ) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

ب الحصول على صورة على الأكثر = { (ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

، ل (ب) = $\frac{٤}{٤}$ = ١

جـ الحصول على صورة على الاقل = { (ص ، (ك ، ص) ، (ك ، ك ، ص) } ، ل (جـ) = $\frac{٣}{٤}$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ملخص قوانين الاحتمالات : أذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة

١) ل (أ /) = ١ - ل (أ) (أحتمال عدم وقوع أ) أ، (وقوع أ فقط)

ل (أ ∪ ب)/ = ١ - ل (أ ∪ ب) (أحتمال عدم وقوع أ أو ب) ، (أحتمال عدم وقوع أى من الحدثين)

ل (أ ∩ ب)/ = ١ - ل (أ ∩ ب) (أحتمال عدم وقوع أ و ب معاً) ، (أحتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر)

---

٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) (أحتمال وقوع أ أو ب) أ، (أحتمال وقوع أحدهما على الأقل)

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب) (أحتمال وقوع أ و ب معاً) ، (أحتمال وقوعهما معاً)

---

٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) أحتمال وقوع أ وعدم ب

ل (أ ∩ ب/) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) أحتمال وقوع أ وعدم ب

ل (أ/ ∩ ب) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب) أحتمال وقوع ب وعدم أ

ل (ب/ - أ/) = ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

ل (أ/ - ب/) = ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

---

٤) ل (أ/ ∩ ب/) = ل (أ ∪ ب)/ = ١ - ل (أ ∪ ب) عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

ل (أ/ ∪ ب/) = ل (أ ∩ ب)/ = ١ - ل (أ ∩ ب) أحتمال وقوع أحدهما على الأقل

قانونا دى مرجان

---

٥) ل (أ/ - ب) = ل (أ/ ∩ ب/) = ل (أ ∪ ب)/ = ١ - ل (أ ∪ ب)

ل (أ - ب/) = ل (أ ∩ ب)

---

٦) ل (أ/ ∪ ب) = ١ - ل (أ - ب) = ١ - (ل (أ) - ل (أ ∩ ب))

ل (أ ∪ ب/) = ١ - ل (ب - أ) = ١ - (ل (أ) - ل (أ ∩ ب))

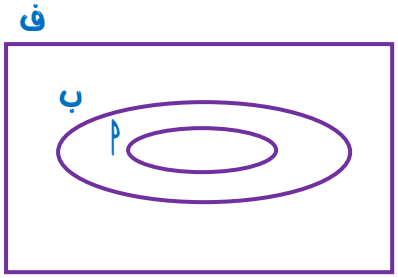
---

٧) ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب) أحتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الاخر

لاحظ الالفاظ الاتية : و ⟵ تقاطع - أو ⟵ إتحاد - عدم ⟵ /

حالات خاصة :

١) إذا كان م ⊂ ب فإن



١- ل (م ∩ ب) = ل (م)

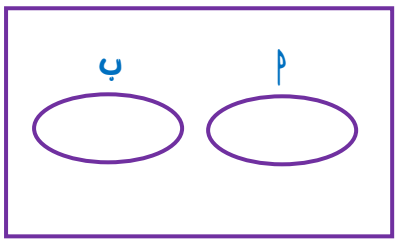
٢- ل (م ∪ ب) = ل (ب)

٣- ل (م - ب) = ل (∅) = صفر

٤- ل (ب - م) = ل (ب) - ل (م)

---

٢) إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن



١- ل (م ∩ ب) = صفر

٢- ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب)

٣- ل (م - ب) = ل (م)

٤- ل (ب - م) = ل (ب)

مثال١ إذا كان م ، ب حدثان من فضاء العينة ف وكان ل (م) = ٠.٣٥ ، ل (ب) = ٠.٤٨

، ل (م ∪ ب) = ٠.٦ أوجد

١) ل (م/) ، ل (ب/)

٢) ل (م ∩ ب)

٣) ل (م ∩ ب/)

٤) ل (م/ ∩ ب)

٥) ل (م/ ∪ ب/)

١) ل (م/) = ١ - ل (م) = ١ - ٠.٣٥ = ٠.٦٥

، ل (م/) = ١ - ل (ب) = ١ - ٠.٤٨ = ٠.٥٢

٢) ل (م ∩ ب) = ل (م) + ل (ب) - ل (م ∪ ب) = ٠.٣٥ + ٠.٤٨ - ٠.٦ = ٠.٢٣

٣) ل (م ∩ ب/) = ل (م) - ل (م ∩ ب) = ٠.٣٥ - ٠.٢٣ = ٠.١٢

٤) ل (م/ ∩ ب/) = ل (م ∪ ب)/ = ١ - ل (م ∪ ب) = ١ - ٠.٦ = ٠.٤

٥) ل (م/ ∪ ب/) = ل (م ∩ ب)/ = ١ - ل (م ∩ ب) = ١ - ٠.٢٣ = ٠.٧٧

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ إذا كان م ، ب حدثان من فضاء العينة ف وكان ل (م /) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب /) = $\frac{١}{٢}$

، ل (م / ∪ ب /) = $\frac{٣}{٤}$ أوجد ١) ل (م ∪ ب) ٣) ل (م / ـ ب)

٢) ل (م / ∩ ب /) ٤) ل (م / ـ ب /)

ل (م) = ١ ـ ل (م /) = ١ ـ $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$ ، ل (ب) = ١ ـ ل (ب /) = ١ ـ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ل (م / ∪ ب /) = ل (م ∩ ب)/ = ١ ـ ل (م ∩ ب)

$\frac{٣}{٤}$ = ١ ـ ل (م ∩ ب)

ل (م ∩ ب) = ١ ـ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

١) ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) ـ ل (م ∩ ب) = $\frac{٥}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

٢) ل (م / ∩ ب /) = ل (م ∪ ب)/ = ١ ـ ل (م ∪ ب) = ١ ـ $\frac{٧}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

٣) ل (م / ـ ب) = ل (م / ∩ ب /) = ل (م ∪ ب)/ = ١ ـ ل (م ∪ ب) = ١ ـ $\frac{٧}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

٤) ل (م / ـ ب /) = ل (ب ـ م) = ل (ب) ـ ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

مثال٣ إذا كان م ، ب حدثان من فضاء العينة ف ل (م) = ل (م /) ، ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$

، ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل (م) أوجد ١) ل (ب) ٢) ل (م ∪ ب)

٣) ل (م ـ ب) ٤) ل (ب / ـ م /) ٥) ل (م / ∪ ب /)/

∵ ل (م) = ل (م /) ∴ ل (م) = ل (م /) = $\frac{١}{٢}$

١) ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل (م) = $\frac{٥}{٨}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$

٢) ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) ـ ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{١٦}$ ـ $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

٣) ل (م ـ ب) = ل (م) ـ ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{٧}{١٦}$

٤) ل (ب ∪ م /) = ١ ـ ل (م ـ ب) = ١ ـ $\frac{٧}{١٦}$ = $\frac{٩}{١٦}$

٥) ل (م / ∪ ب /)/ = ١ ـ ل (م / ∪ ب /) = ١ ـ (١ ـ ل (م ∪ ب)) = ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ إذا كان م ، ب حدثان من فضاء العينة ف ل (م) = ٠.٥ ، ل (ب) = ٠.٦ ، ل (م ∩ ب) = ٠.٤ أوجد

١) أحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
٢) أحتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر
٣) أحتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث م
٤) أحتمال عدم وقوع الحدث م
٥) أحتمال عدم وقوع أى من الحدثين
٦) أحتمال وقوع أى من الحدثين دون وقوع الاخر

١) أحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) − ل (م ∩ ب)

= ٠.٥ + ٠.٦ − ٠.٤ = ٠.٧

٢) أحتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر

ل (م ∩ ب)′ = ١ − ل (م ∩ ب) = ١ − ٠.٤ = ٠.٦

٣) أحتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث م

ل (ب − م) = ل (ب) − ل (م ∩ ب) = ٠.٦ − ٠.٤ = ٠.٢

٤) أحتمال عدم وقوع الحدث م

ل (م′) = ١ − ل (م) = ١ − ٠.٥ = ٠.٥

٥) أحتمال عدم وقوع أى من الحدثين

ل (م ∪ ب)′ = ١ − ل (م ∪ ب) = ١ − ٠.٧ = ٠.٣

٦) أحتمال وقوع أى من الحدثين دون وقوع الاخر

ل (م ∪ ب) − ل (م ∩ ب) = ٠.٧ − ٠.٤ = ٠.٣

مثال٥ إذا كان م ، ب حدثان من فضاء العينة وكان ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (م ∩ ب′) = $\frac{١}{٤}$ أوجد قيمة ل (م)

إذا كان ١) م ، ب حدثان متنافيان ٢) ب ⊂ م ٣) ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

١) إذا كان م ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (م ∩ ب) = صفر

بالتعويض فى (١) ل (م) − ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م ∩ ب′) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م − ب) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) − ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ (١)

٢) إذا كان ب ⊂ م ∴ ل (م ∩ ب) = ل (ب)

بالتعويض فى (١) ل (م) − ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٧}{١٢}$

٣) ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

بالتعويض فى (١) ل (م) − ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ ل (م) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩