



مراجعة الاستاتيكا

الصف الثالث الثانوى



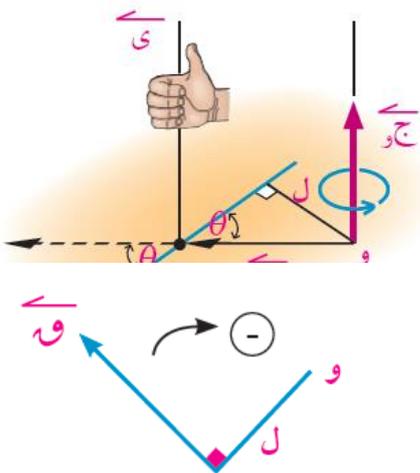
من اعداد الاستاذ/

ربيع فايد معلم خبير الرياضيات بالمرحلة الثانوية

اتزان جسم على مستوى مائل خشن

- إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى (هـ) تساوى قياس زاوية الاحتكاك (ل)
- هـ > ل فإن الجسم متزن ، هـ = ل على وشك الانزلاق ، هـ < ل ينزلق
- اتجاه الاحتكاك ضد اتجاه الحركة المتوقع فإذا اثرنا على الجسم بقوة و وكانت و
- ① تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن الاحتكاك لأسفل
- ② تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل فإن الاحتكاك يكون لأسفل
- ③ تمنع الجسم من الانزلاق فإن الاحتكاك يكون لأعلى
- أقل قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى القوة التى تمنعه من الانزلاق وفى هذه الحالة يكون اتجاه قوة الاحتكاك النهائى حـ الى اعلى المستوى
- أكبر قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى التى تجعل الجسم على وشك الحركة الى أعلى ويكون الاحتكاك النهائى الى اسفل المستوى
- إذا كانت و_١ هى أقل قوة تحفظ توازن الجسم أى عندها الجسم على وشك الانزلاق لأسفل ، وكان و_٢ أكبر قوة تحفظ توازن الجسم وعندها يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى
- فإن قيم و ∈ [و_١ ، و_٢]
- عندما يكون الجسم على وشك الحركة (الانزلاق) يكون الاحتكاك نهائى سکون
- معامل الاحتكاك السكونى < معامل الاحتكاك الحركى

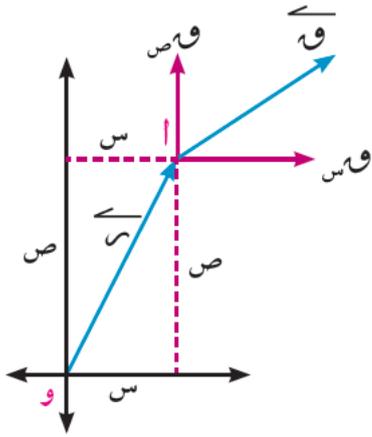
عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام اهدائى ثنائى الابعاد



- $\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin \theta$
- لا يتوقف عزم قوة بالنسبة لنقطة على النقطة على خط عمل القوة
- معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة كمية موجبة دائماً
- القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة = الاشارة فى القوة × زراع القوة
- مع اتجاه عقارب الساعة -
- عكس اتجاه عقارب الساعة +
- القياس الجبرى للعزم قد يكون موجب أو سالب بخلاف معيار العزم موجب
- عزم قوة بالنسبة لاي نقطة على خط عملها = صفر
- إذا كان خط عمل قوة بالنسبة لنقطة = صفر ∴ خط عمل القوة يمر بالنقطة
- إذا كان عزم قوة $\vec{C} = \vec{r} \times \vec{F}$ فإن خط عمل $\vec{F} \parallel \vec{C}$ ،
- إذا كان عزم قوة $\vec{C} = -\vec{r} \times \vec{F}$ فإن خط عمل \vec{F} ينصف \vec{C}
- وحدة قياس العزم = وحدة قياس القوة × وحدة قياس الطول مثلاً نيوتن.متر ، ث.كجم.متر ،

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

- يمكن ايجاد عزم قوة بالنسبة لنقطة بتحليل القوة فى اتجاهين متعامدين ثم نوجد مجموع عزمى مركبتيها حول النقطة (**مبدأ العزوم-نظرية فارينون**)



فى الشكل المقابل:

عزم \vec{Q} حول $O =$ عزم حول $O +$ عزم حول O
ايهما اسهل نوجد

- **نظرية:** مجموع عزوم عدة قوى فى الفراغ حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة وتستخدم لمعرفة نقطة تأثير المحصلة أو خط عملها

- **طول العمود من نقطة على خط عمل القوة**

= معيار العزم ÷ معيار القوة = طول ذراع القوة

- إذا كان عزم قوة بالنسبة لنقطة $= \vec{0}$ فإن القوة تنعدم أو خط عملها يمر بالنقطة

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام اهدائى ثلاثى الابعاد

- عزم $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ تؤثر فى النقطة

$P(x, y, z)$ التى متجه موضعها بالنسبة لـ O

هو $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\text{يساوى } \vec{Q} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (Q_y z - Q_z y) \vec{e}_x - (Q_x z - Q_z x) \vec{e}_y + (Q_x y - Q_y x) \vec{e}_z$$

- مركبة العزم حول محور $x = (Q_y z - Q_z y)$

- مركبة العزم حول محور $y = -(Q_x z - Q_z x)$

- مركبة العزم حول محور $z = (Q_x y - Q_y x)$

محصلة القوى المتوازية المستوية

- محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هى قوة فى اتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما

- محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معياراً ويساوى الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما

- من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
- مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة
- إذا علم المحصلة و احدى القوتين وكانت المحصلة أكبر من القوة .: يوجد احتمالان القوتين فى نفس الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه
- إذا علم المحصلة و احدى القوتين وكانت المحصلة أصغر من القوة المعلومه .: القوتين متضادين فى الاتجاه
- لايجاد محصلة عدة قوى متوازية نفرض متجه وحدة ونوجد المحصلة ولتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم القاعدة: مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

- إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:
 - مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً
 - مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً
- عندما يكون القضيب الموضوع على حاملين على وشك الدوران حول أحد الحاملين فإن رد الفعل ينعقد عند الحامل الآخر

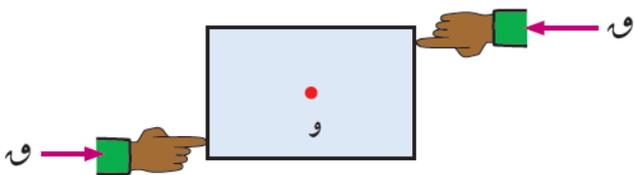
قاعدة اذا كانت القوى متوازيتاً ومعلوم نقطة تأثير كل قوة

$$S = \frac{U_1 S_1 + U_2 S_2 + U_3 S_3 + \dots}{U_1 + U_2 + U_3 + \dots} \quad , \quad V = \frac{U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 + \dots}{U_1 + U_2 + U_3 + \dots}$$

اتزان جسم جاسئ

- شرط الاتزان هو محصلة القوى = صفر ، مجموع عزوم القوى حول أى نقطة = صفر

الازدواجات



- الازدواج يتكون من قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه ولايجمعهما خط عمل واحد
- معيار عزم الازدواج دائما موجب
- ويساوى معيار احدى القوتين x البعد العمودى بينهما
- القياس الجبرى لعزم الازدواج قد يكون موجب أو سالب
- الازدواج لا يتزن الا مع ازدواج مثله
- إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة ازدواجات فان مجموع القياسات الجبرية ينعقد

من اعداد الاستاذ ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
 • شرط تكافؤ ازدواجين إذا كان لهم نفس القياس الجبرى لعزميهما

الازدواج المحصل

- شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج ① تنعدم محصلة القوى ② مجموع عزوم القوى حول نقطة لا يساوى الصفر
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج تساوى مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة (مقدار ثابت خلاف الصفر)
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج إذا أثرت القوى فى اضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وتناسبت مقادير القوى مع اطوال الاضلاع فإن المجموعة تكافؤ ازدواج معيار عزمه يساوى ضعف مساحة المضلع \times عدد الوحدات الممثلة لمقدار القوة

مركز الثقل

- مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم لا يتغير موضعها مهما تغير وضع الجسم بالنسبة للأرض و يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات المكونة للجسم
- عند تعليق الجسم تعليقاً حراً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بمركز الثقل
- مركز ثقل الجسم يغير بتغير شكله
- مركز ثقل مربع ، مستطيل ، متوازى أضلاع منتظم الكثافة هو نقطة تقاطع القطرين (دون كتل عليه)
- مركز صفيحة محدودة بمثلث منتظمة الكثافة هو نقطة تلاقى متوسطاته
- نقطة تلاقى متوسطات المثلث الذى رؤسه $M(س١، ص١)$ ، $B(س٢، ص٢)$ ، $C(س٣، ص٣)$ هى
$$\left(\frac{س١ + س٢ + س٣}{٣} ، \frac{ص١ + ص٢ + ص٣}{٣} \right)$$
- فى الاشكال منتظمة الكثافة الاطوال تتناسب مع الكتل كذلك المساحات تتناسب مع الكتل
- فى التمارين التى يذكر فيها تعليق الجسم تعليقاً حراً من احدي نقطة فيفضل ان تكون هذه النقطة هى نقطة الأصل للمحورين المتعامدين

طريقة الكتلة السالبة

- نطبق القواعد السابقة مع وضع الكتلة التى رفعت بالسالب
- مركز ثقل أى شكل له محور تماثل يقع عليه

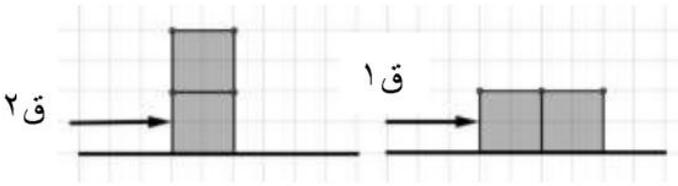
اولا: الاسئلة الموضوعية (أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة)

(بوكلت ١)

[١] ارادت سيارة صعود منحدر يميل على الافقى بزاوية قياسها ٥ ٤ فإن معامل الاحتكاك السكونى بين

عجلات السيارة والمنحدر يجب الا يقل عن ($\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٢ ، صفر)

[٢] الشكلان الاتيان يوضحان قالبان متساويان فى الكتلة والحجم موضوعان على مستوى افقى خشن فى وضعين مختلفين اثرت عليهم قوة W لتجعلهم على وشك الحركة فإن



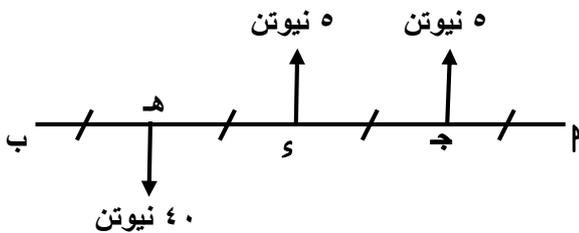
(أ) $W_2 < W_1$ (ب) $W_2 > W_1$

(ج) $W_2 = W_1$ (د) لا يمكن المقارنة

[٣] فى الشكل المقابل:

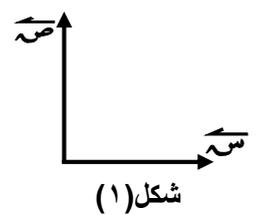
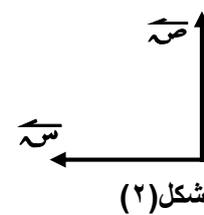
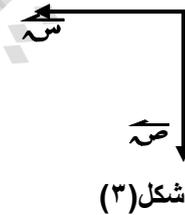
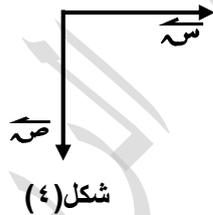
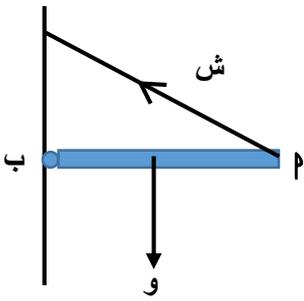
نقطة تأثير محصلة القوى تنتمى الى

(\overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{CD} ، \overline{AD})



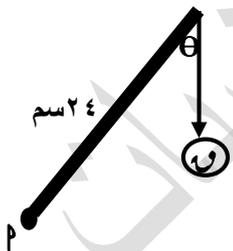
[٤] الشكل المقابل يمثل قضيب متزن

، فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون:



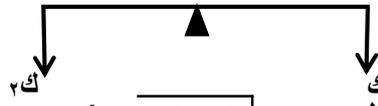
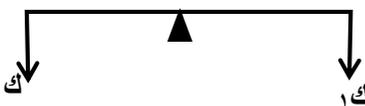
[٥] اكبر عزم للقوة W بالنسبة لنقطة P عندما θ تساوى

(صفر ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، 2π)

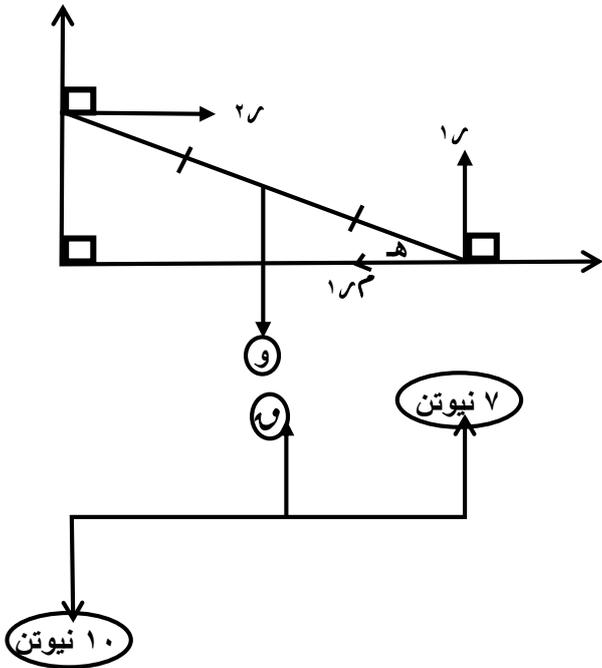


[٦] قضيب طوله L يرتكز فى وضع افقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة (ك) تتزن مع الكتلتين

K_1 ، K_2 منفردتين كما هو بالشكل فان قيمة K بدلالة K_1 ، K_2



($K_1 + K_2$ ، $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ ، K_1 ، K_2)



[7] فى الشكل المقابل:

إذا كانت θ هي زاوية الاحتكاك

بين الارض والقضيب فإن:

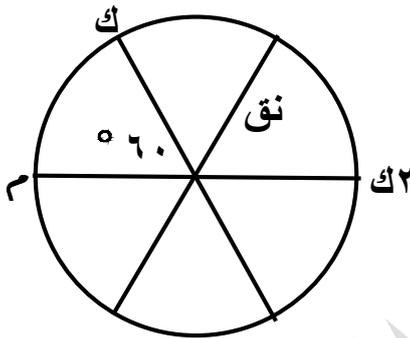
ظاهر \times ظال = ($\frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، 3)

[8] إذا كان نظام القوى المقابل يكافئ ازدواج

فإن ω = نيوتن (17 ، 10 ، 7 ، 3)

[9] إذا كانت القوتان \vec{u} و \vec{v} = $5\vec{s} + 3\vec{e}$ ، \vec{w} = $2\vec{b} - 9\vec{v} + \vec{c}$

تكونان ازدواج فإن $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ = (17 ، 1 ، صفر ، 1-)



[10] الشكل المقابل يمثل عجلة مهملة الكتلة طول نصف قطرها (نق)

يمكنها الدوران فى مستوى رأسى حول عمود افقى املس ثبت عليها

ثلاث كتل مقدارها ك ، 2ك ، م فاذا اتزنت العجلة كما بالشكل

فإن قيمة م بدلالة ك ($\frac{1}{2}ك$ ، ك ، $\frac{3}{2}ك$ ، 2ك)

[11] الشكل المقابل يبين قرص دائرى مركزه م ،

ثقب ثقبان دائريان مركزاهما م 1 ، م 2 وطولان نصفى

قطريهما م 3 ، م 2 على الترتيب فإن مركز ثقل الجزء

المتبقى يقع على ($\overline{m_1m_2}$ ، $\overline{m_2m_3}$ ، $\overline{m_1m_3}$ ، $\overline{m_2m_3}$)

(بوكلت 2)

[12] إذا كانت θ هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك

السكونى يساوى (θ ظا ، θ قا ، θ ظتا ، θ قتا)

[13] قوة $\vec{u} = \vec{s} - 2\vec{v}$ تؤثر فى م (1 ، 3) فإن القياس الجبرى لعزم القوة \vec{u} بالنسبة لنقطة

الاصل يساوى (7 ، 7- ، \vec{e} ، $-\vec{e}$)

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
[١٤] إذا كانت $\vec{v} // \vec{w}$ ، $\vec{v} = 3\vec{s} - 4\vec{v}$ ، $||\vec{v}|| = 10$ وحدة قوة فإن \vec{w} يمكن أن تكون ($3\vec{s} + 4\vec{v}$ ، $6\vec{s} + 8\vec{v}$ ، $6\vec{s} - 8\vec{v}$ ، $8\vec{v} - 6\vec{s}$)

[١٥] إذا كان ب منتصف جـ ، $\vec{c} = \vec{b}$ ، $\vec{c} = \vec{a} + 12\vec{c}$ فإن $\vec{c} =$

$$(12, 12, -12, -12)$$

[١٦] قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر فى بـ جـ حيث $\vec{b} \perp \vec{c}$ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦ سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لنقطة د يساوى نيوتن.سم ($60, 120, 2\sqrt{120}, 2\sqrt{60}$)

[١٧] قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ٢٠ نيوتن ، فإذا كان $\vec{v} : \vec{w} = 1 : 2$ حاصلتهما ١٥ نيوتن فإن $\vec{v} - \vec{w} =$ نيوتن (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، صفر)

[١٨] مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ ، ٦ نيوتن والمسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة سم (٥ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ٧)

[١٩] إذا كانت $\vec{v} = \vec{b} + 2\vec{v}$ ، $\vec{v} = 3\vec{s} + \vec{v}$ ، $\vec{v} = 3\vec{s} + \vec{v}$ قوتى ازدواج فإن ب - جـ = (١ ، ١ ، ٥ ، ٥)

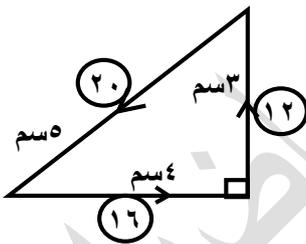
[٢٠] مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الاضلاع رؤوسه م (١ ، ٢) ،

ب (١ ، ٠) ، جـ (٣ ، ١) هو النقطة [(١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)]

[٢١] إذا كانت مجموعة من القوى حاصلتها ح وتكافئ ازدواج معيار عزمه ج فإن

$$(أ) \vec{c} = \vec{c} , \vec{c} = \vec{c} \quad (ب) \vec{c} \neq \vec{c} , \vec{c} = \vec{c}$$

$$(ج) \vec{c} = \vec{c} , \vec{c} \neq \vec{c} \quad (د) \vec{c} \neq \vec{c} , \vec{c} \neq \vec{c}$$



[٢٢] فى الشكل المقابل:

عزم الازدواج المحصل = وحدة عزم (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨)

[٢٣] إذا كانت القوة $\vec{v} = 3\vec{s} + \vec{v} + \vec{v} + 4\vec{c}$ تؤثر فى النقطة م (١ ، ٠ ، ١) وكان عزم القوة \vec{v} بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١ ، ٣) يساوى $4\vec{s} - 8\vec{v} - \vec{c}$

فإن قيمة ك = (٢ ، ٢ ، ٠ ، ٨)

(بوكلت ٣)

[٢٤] إذا كانت القوة $\vec{v} = (2, 3, 4)$ تؤثر فى النقطة (١ ، ١ ، ١) فإن مركبة عزم \vec{v} حول محور

س تساوى (٥ ، ٢ ، ٢ ، ٧)

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) **[٢٥]** مثلت ثلاث قوى تمثيلاً تاماً بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع P ب ج مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وبمقياس رسم ١ سم لكل ٢ ث جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠ سم فإن معيار عزم الازدواج يساوى ث جم سم ($\sqrt[3]{900}$ ، $\sqrt[3]{1800}$ ، $\sqrt[3]{450}$ ، 900)

[٢٦] بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى سم ($\sqrt[3]{2}$ ، $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[3]{6}$ ، 6)

[٢٧] إذا كانت النقط P ، ب ، ج فى مستوى مجموعة من القوى وكان $\vec{C} = 20\vec{A}$ ، $\vec{C} = \vec{B}$ ،

، $\vec{C} = 10\vec{A}$ فإن
 (أ) المجموعة متزنة
 (ب) المحصلة تنصف \vec{P}
 (ج) ب \Rightarrow خط عمل المحصلة
 (د) المحصلة توازى \vec{P}

[٢٨] إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه فى حائط رأسى وكانت س ، ص هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت س = ٥ نيوتن ، ص = ١٢ نيوتن فإن مقدار قوة رد فعل المفصل = نيوتن

(٧ ، ١٣ ، ١٧ ، ٦٠)

[٢٩] إذا كانت $\vec{Q} = 3\vec{S} - 4\vec{V}$ تؤثر فى النقطة $P(1, 2)$ فإن بعد نقطة الأصل و $(0, 0)$ عن خط عملها يساوى وحدة طول ($\sqrt{5}$ ، ٢ ، ٥ ، ١٠)

[٣٠] إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان $7\vec{U}$ ، $5\vec{V}$ نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد $\frac{1}{3}$ متر عن خط

عمل القوة الصغرى فإن المسافة بين خطى عمل القوتين = متر ($\frac{49}{10}$ ، $\frac{28}{5}$ ، $\frac{5}{3}$ ، ٤)

[٣١] إذا كانت M ، K هما معاملى الاحتكاك السكونى والحركى على الترتيب لجسمين متلامسين

فإن ($M > K$ ، $M < K$ ، $M = K$ ، لا توجد علاقة بينهما)

[٣٢] إذا كانت \vec{S} ، \vec{V} ، \vec{C} مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة

$\vec{Q} = 2\vec{S} + 3\vec{V} - \vec{C}$ تؤثر فى النقطة $P(1, -1, 4)$ فإن عزم القوة \vec{Q} حول

نقطة ب $(2, -3, 1)$ تساوى

(أ) $11\vec{S} - 5\vec{V} - 7\vec{C}$
 (ب) $11\vec{S} - 5\vec{V} + 7\vec{C}$

(ج) $11\vec{S} - 5\vec{V} - 7\vec{C}$
 (د) $11\vec{S} + 5\vec{V} - 7\vec{C}$

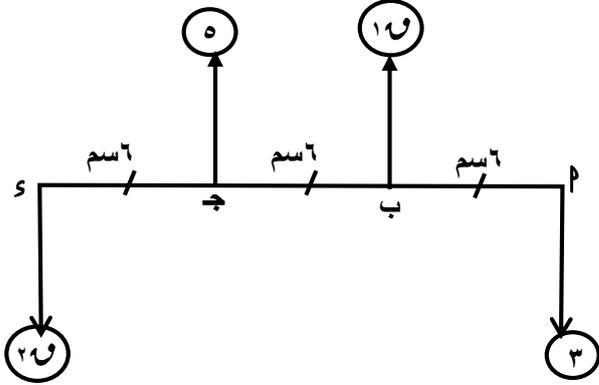
[٣٣] إذا كان خط عمل القوة $\vec{Q} = \vec{S} + \vec{V}$ ينصف \vec{P} حيث $P(3, 2)$ وكانت $S(1, 3)$ منتصف

\vec{P} فإن $\vec{C} = \dots\dots\dots \vec{C}$ ($-3, -3$ ، $6, 6$)

(بوكلت ٤)

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [٣٤] جسم وزنه $3\sqrt{2}$ ث كجم موضع على مستوى أفقى خشن أثرت عليه قوة أفقيه مقدارها ٢ ث كجم فجعلته على وشك الحركة فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل = ث كجم (٢ ، ٨ ، ٤ ، $3\sqrt{8}$)

[٣٥] قوتان متوازيتان تؤثران فى جسم متماسك كبراهما ٨ ث كجم تؤثر فى نقطة م والصغرى تؤثر فى نقطة ب ومحصلتها ١٢ ث كجم تؤثر فى نقطة ج حيث ج \Rightarrow \vec{M}_B فإذا كان ب ج = ٦ سم فإن طول \vec{M}_B = سم (٣ ، ٩ ، ١٨ ، $3\sqrt{18}$)



[٣٦] الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى تؤثر

فى النقط م ، ب ، ج ، و تقع على مستقيم أفقى

فإذا كانت هذه المجموعة تؤول الى ازدواج

قياسه الجبرى = ٣٦ نيوتن.سم

فإن $١٧ + ٢٧ = \dots\dots\dots$

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(ج) ١٨ (د) ٢٤

[٣٧] إذا كانت $\vec{O} = ٣ \vec{S} - ٤ \vec{V}$ تؤثر فى نقطة م (٢ ، ٠) وكانت ج (٢ ، ٣) ، هـ (٥ ، -١)

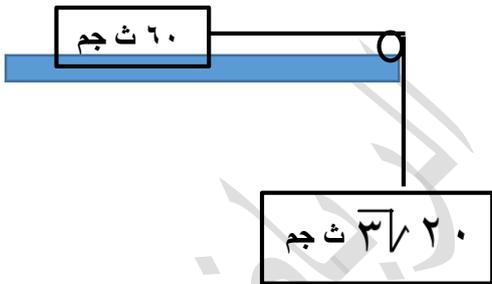
فإن خط عمل \vec{O} \vec{JH} (عمودى على ، يقطع ، يوازي ، يخالف)

[٣٨] فى الشكل المقابل:

إذا كان الجسم الذى وزنه ٦٠ ث جم على وشك الحركة

على مستوى افقى خشن فإن قياس زاوية الاحتكاك = °

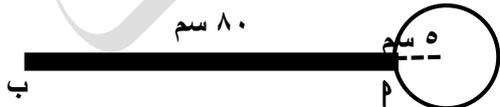
(٦٠ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٤٥)



[٣٩] فى الشكل المقابل عصا مكونه من قضيب منتظم م ب طوله ٨٠ سم ووزنه $\frac{1}{3}$ ث كجم ، كرة

حديديه منتظمة وزنها ١ ث كجم مثبتة عند الطرف م طول نصف قطرها ٥ سم فإن بعد مركز ثقل العصا

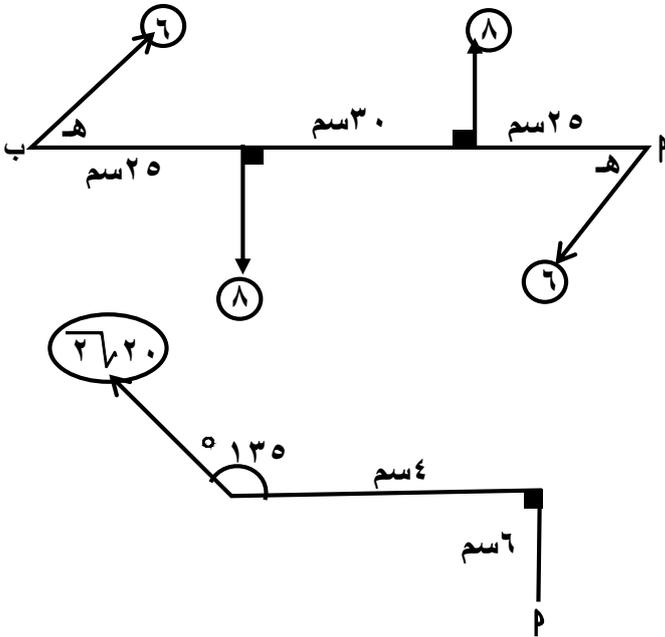
عن ب يساوى سم (٦٠ ، ٥٠ ، ٧٠ ، ٨٠)



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

[٤٠] مركز ثقل النظام التالى : ك_١ = ١ عند النقطة (٢ ، ٣) ، ك_٢ = ٤ عند (١ ، ٢) ، ك_٣ = ٥ عند (١ ، ٠) هو

..... [(٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٠)] هو



[٤١] فى الشكل المقابل:

أربعة قوى تمثل ازدواجين متزنين

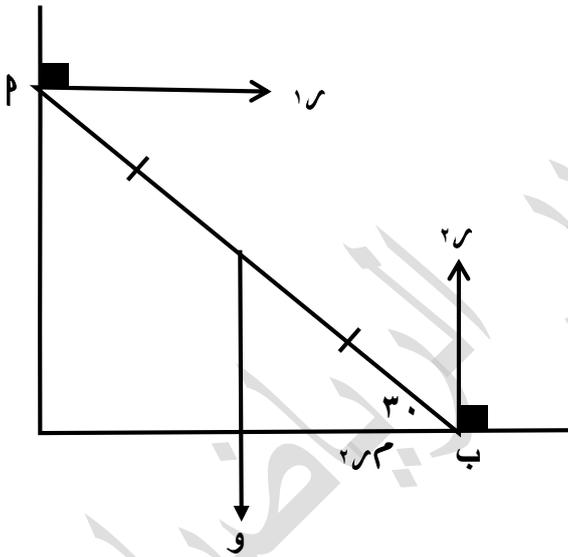
فإن $\theta = (١٥ ، ٦٠ ، ٤٥ ، ٣٠)^\circ$

[٤٢] فى الشكل المقابل:

القوة $2\sqrt{2}٠$ نيوتن تؤثر فى النقطة ج فإن عزم القوة

حول النقطة م يساوى نيوتن.سم

(٤٥ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٦٠)



[٤٣] فى الشكل المقابل: م ب قضيب على وشك الحركة

، $18 = 3\sqrt{٨}$ نيوتن فإن مقدار $r = ٢ = \dots$ نيوتن

(أ) ٨

(ب) ١٦

(ج) ١٨

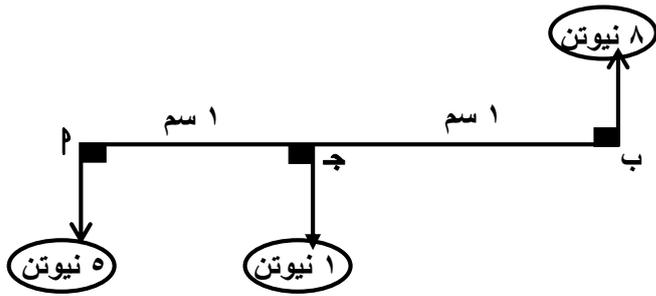
(د) $3\sqrt{٨}$

اجابات الاسئلة الموضوعية

(١) ١	(٢) $٢٧=١٧$	(٣) هـ ب
(٤) شكل (١)	(٥) $\frac{\pi}{2}$	(٦) $\sqrt{k}, \sqrt{k}, \sqrt{k}$
(٧) ٥, ٠	(٨) ٣	(٩) ١
(١٠) $\frac{3}{2} ك$	(١١) ٢٢٢	(١٢) ظنا θ
(١٣) $\sqrt[3]{٧-ع}$	(١٤) $\sqrt[3]{٦-س} + \sqrt[3]{٨-ص}$	(١٥) $\sqrt[3]{١٢-ع}$
(١٦) ١٢٠	(١٧) ٥	(١٨) ١٠
(١٩) ٥	(٢٠) (١, ١)	(٢١) (ج)
(٢٢) ٤٨	(٢٣) ٢-	(٢٤) ٧
(٢٥) $\sqrt[3]{٩٠٠}$	(٢٦) $\sqrt[3]{٤}$	(٢٧) (د)
(٢٨) ١٣	(٢٩) ٢	(٣٠) $\frac{٥}{٣}$
(٣١) $ك < س$	(٣٢) (د)	(٣٣) ٦
(٣٤) ٤	(٣٥) ٩	(٣٦) ١٢
(٣٧) توازى	(٣٨) ٥٣٠	(٣٩) ٧٠
(٤٠) $\frac{3}{5} (٢, ١-)$	(٤١) ٥٣٠	(٤٢) ٤٠
(٤٣) ١٦	(٤٤) (٤٤)	(٤٥) (٤٥)
(٤٦) (٤٦)	(٤٧) (٤٧)	(٤٨) (٤٨)
(٤٩) (٤٩)	(٥٠) (٥٠)	(٥١) (٥١)
(٥٢) (٥٢)	(٥٣) (٥٣)	(٥٤) (٥٤)
(٥٥) (٥٥)	(٥٦) (٥٦)	(٥٧) (٥٧)
(٥٨) (٥٨)	(٥٩) (٥٩)	(٦٠) (٦٠)

ثانياً: الاسئلة المقالية

(بوكلت ١)



[١] فى الشكل المقابل:

أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة

الاجابة

بفرض المحصلة تبعد س سم عن م \therefore ح = ٨ - ١ - ٥ = ٢ نيوتن

\therefore مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول م

$$\therefore ٨ \times ١ - ٢ \times ١ = ١ \times ٢ \quad \therefore س = ٧,٥ \text{ سم}$$

\therefore المحصلة تبعد عن م مسافة ٧,٥ سم ومقدارها ٢ نيوتن لاعلى

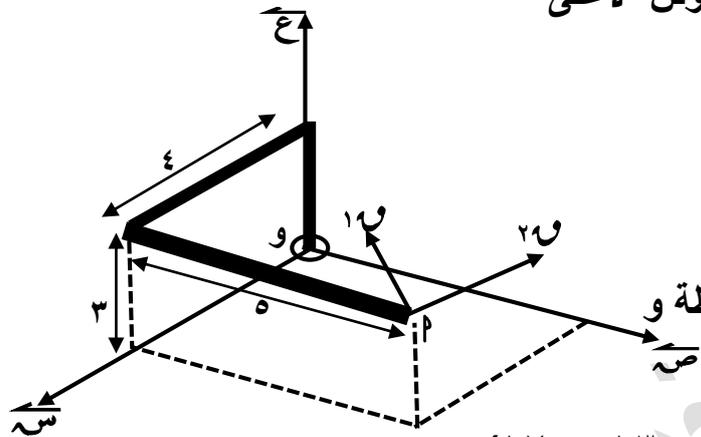
[٢] فى الشكل المقابل:

$$\vec{r}_1 = ١٠٠ \vec{s} - ١٢٠ \vec{v} + ٧٥ \vec{e}$$

$$\vec{r}_2 = ٢٠٠ \vec{s} + ٢٥٠ \vec{v} + ١٠٠ \vec{e}$$

تؤثران فى نقطة م أوجد مجموع عزوم القوى حول النقطة و

الاجابة



$$م(٣, ٥, ٤) \therefore \vec{r}_1 = (٣, ٥, ٤), \vec{r}_2 = (-١٠٠, ١٣٠, ١٧٥)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ١٧٥ & ١٣٠ & -١٠٠ \end{vmatrix} = ٤٨٥ \vec{s} - ١٠٠٠ \vec{v} + ١٠٢٠ \vec{e}$$

[٣] م ب قضيب غير منتظم وزنه (و) نيوتن وطوله ١٥٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدين ج ، و

بحيث كان م ج = ٢٠ سم ، ب و = ٣٠ سم لوحظ أن القضيب يكون على وشك الدوران حول و إذا علق

من ب ثقل قدره ٢٠ نيوتن ويكون على وشك الدوران حول ج إذا علق من م ثقل قدره ٧٠ نيوتن

أوجد وزن القضيب وعين نقطة تأثير الوزن

الاجابة

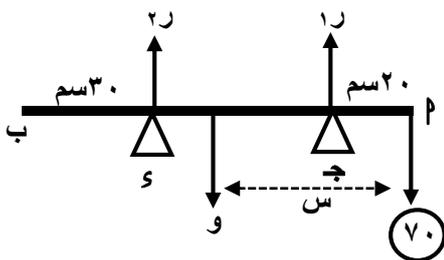
عندما يكون على وشك الدوران حول ج

$$٠ = ٢٠ \times ١٠ + ٧٠ \times ٥$$

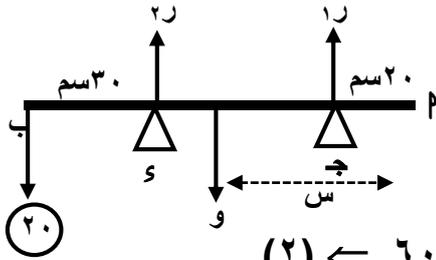
$$٠ = ٢٠ \times ١٠ - ١٤٠٠ = ٥ \times س \therefore س = ١٤٠٠ / ٥ = ٢٨٠$$

(١٣)

الاستاتيكا ٣ ٢٠١٧



عندما يكون على وشك الدوران حول S



$$0 = 10, \quad 0 = 20 + 20 = 20, \quad 0 = 20 + 20 = 20$$

$$0 = 120 \times 20 - 150 \times 20 + 30 \times 20$$

$$\therefore 3000 - 1200 = 2400 = 30 \times 20 \quad \therefore 600 - 120 = 480 = 20 \times 20$$

$$\text{من (1)، (2) } \therefore 600 - 120 = 480 = 20 \times 20 \quad \therefore 20 = 20 \text{ نيوتن}$$

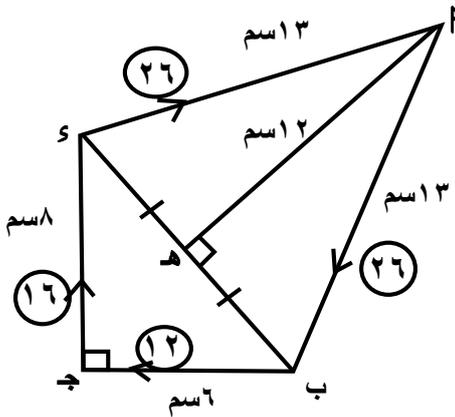
$$\text{بالتعويض في (1) } \therefore 20 \times 20 + 1400 = 20 \times 20 \quad \therefore 20 \times 20 = 90 \text{ سم}$$

\therefore وزن القضيب 20 نيوتن ويبعد عن P مسافة 90 سم

[4] M ب ج S شكل رباعي فيه P = B = M = 3 سم، B ج = 6 سم، ج S = 8 سم، S (ج) = 90°

اثرت قوى مقاديرها 26، 16، 12، 26 فى اتجاهات \vec{P} ، \vec{B} ، \vec{J} ، \vec{S} على الترتيب

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه



من هندسة الشكل ب S = 10 سم، M ه = 12 سم

\therefore القوى تؤثر فى اضلاع الشكل الرباعي فى اتجاه دورى واحد

$$2 = \frac{26}{13} = \frac{16}{8} = \frac{12}{6} = \frac{26}{13}$$

\therefore المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة الشكل \times م

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 10 + \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \right) = 336 \text{ وحدة عزم}$$

[5] قضيب منتظم وزنه 4 ث كجم يرتكز بطرفه P على مستوى رأسى أملس وبطرفه B على مستوى

أفقى أملس، حفظ القضيب من الانزلاق بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنقطة على خط تقاطع المستويين

رأسياً أسفل P وبطرفه الآخر فى نقطة ج على القضيب حيث ج B = $\frac{1}{6}$ P فإذا كان القضيب يصنع

فى وضع التوازن مع الأفقى زاوية قياسها 54° فثبت أن الخيط يصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{1}{4}$

أوجد قيمة الشد فى الخيط وقيمة رد فعل كل من المستويين على القضيب

$$\text{بفرض طول القضيب } P = 10 \text{ ل } \therefore \text{ج ب} = 2 \text{ ل } \text{ب س} = 5 \text{ ل} = 5\sqrt{2} \text{ ل}$$

$$\therefore \text{ج س} = \text{ب س} = 5\sqrt{2} \text{ ل } \therefore \text{س س} = 4\sqrt{2} \text{ ل}$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\therefore \theta = \frac{\text{جس}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \quad \therefore \text{في حالة الاتزان القضيب يصنع مع الافقى زاوية ظلها } \frac{1}{4}$$

∴ القضيب متزن ∴ محصلة القوى تنعدم ، مجموع عزوم القوى حول اى نقطة = صفر

وبتحليل قوة الشد كما بالشكل ∴ ر = ٢ + ٤ + ش جا θ (١)

$$١ = ش جتا \theta \quad (٢) \quad \therefore ج = ٠$$

$$\therefore - \frac{\sqrt{2}}{2} \times ٤ = \sqrt{2} \times ١ + \sqrt{2} \times ٢ - \sqrt{2} \times ٠$$

$$\therefore - ٢ = ش جتا \theta + ٤ + ش جا \theta$$

$$\therefore ٢ = ش (جتا \theta - جا \theta) \quad (٣)$$

$$\therefore ٢ = ش \left(\frac{٤}{\sqrt{2}} - \frac{١}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\therefore ش = \frac{\sqrt{2} \cdot ٢}{٣} \quad \text{ت كجم بالتعويض فى (١) ، (٢)}$$

$$\therefore ١ = \frac{٤}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \cdot ٢}{٣} = \frac{٨}{٣} \quad \text{ت كجم ، } ٢ = \frac{١}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \cdot ٢}{٣} + ٤ = \frac{١٤}{٣} \quad \text{ت كجم}$$

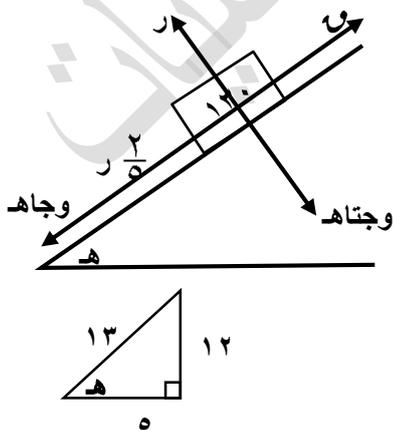
(بوكلت ٢)

[٦] وضع جسم وزنه ١٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الافقى بزاوية جيبها $\frac{١٢}{١٣}$ واثرت

عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{٢}{٥}$

فأوجد النهائيتين العظمى والصغرى لمقدار القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى

الوجه

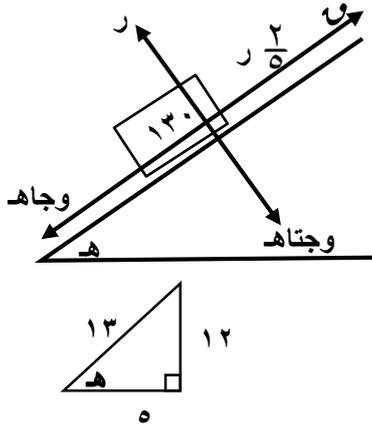


اولا: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى

$$\therefore ر = و جتاه = ١٣٠ \times \frac{٥}{١٣} = ٥٠ \text{ نيوتن}$$

$$\therefore و = ر + وجاه = \frac{٢}{٥} + \frac{١٢}{١٣} \times ١٣٠ = ١٤٠ \text{ نيوتن}$$

ثانياً: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاسفل



$$R = \text{وجتاه} = 130 \times \frac{5}{13} = 50 \text{ نيوتن}$$

$$f + R = \text{وجاه}$$

$$f = 100 = 50 \times \frac{2}{5} - \frac{12}{13} \times 130 = \text{نيوتن}$$

$$f \in [100, 140]$$

[7] تؤثر القوتان المتوازيتان $\vec{v}_1 = 2\vec{s} - 3\vec{v}$ ، \vec{v}_2 فى النقطتين $M(1, 3)$ ، $B(4, 9)$ على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى نقطة $J(3, 7)$ فأوجد \vec{v}_2

الوجه

∴ القوتان متوازيتان ∴ نفرض $\vec{v}_2 = (2k, -k)$ ∴ مجموع عزوم القوتين حول J ينعدم

$$\vec{0} = (2, 1) \times (-k, k) + (-2, 3) \times (4, -9) = \vec{0}$$

$$6 + 8 - k = 0 \quad \therefore k = 14 \quad \therefore \vec{v}_2 = (28, -14) = 14(2, -1) = 14\vec{v}$$

[8] الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى المؤثرة بالنيوتن

على قضيب PM و S أوجد u ، k

فى الحالات التالية:

1 المجموعة متزنة

2 محصلة هذه القوى 300 نيوتن وتبعد عن M مسافة 40 سم وتؤثر لأعلى وتقع بين M ، S

الوجه

1 ∴ المجموعة متزنة ∴ $u = k - 100 \Rightarrow (1)$ ،

$$0 = 300 = 30 \times u - 20 \times 200 + 50 \times 100 \quad \therefore u = 300 = 300 \text{ نيوتن} ، k = 400 \text{ نيوتن}$$

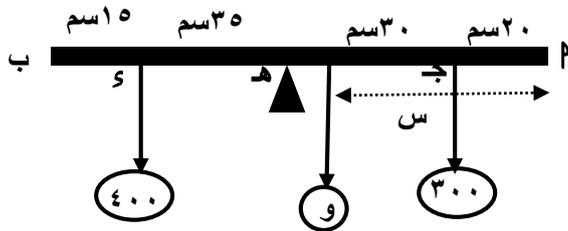
2 $300 = 200 + u - k - 100 \quad \therefore u - k = 200 \Rightarrow (1)$

∴ مجموع عزوم القوى حول M = عزم المحصلة حول نفس النقطة

$$20 \times k + 70 \times 100 - 50 \times 300 = 40 \times 300 \quad \therefore k = 250 ، u = 950 \Rightarrow (2)$$

من (1) ، (2) ∴ $u = 500$ نيوتن ، $k = 300$ نيوتن

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [٩] م ب قضيب غير منتظم طوله متر يتزن من منتصفه إذا علق ثقل قدره ٣٠٠ ث جم من نقطة ج التى تبعد عن م مسافة ٢٠ سم ، وثقل قدره ٤٠٠ ث جم من نقطة و التى تبعد عن ب مسافة ١٥ سم وإذا زاد الثقل عند و حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن ب مسافة ٤٠ سم أوجد موضع تأثير ثقل القضيب ومقدار وزنه



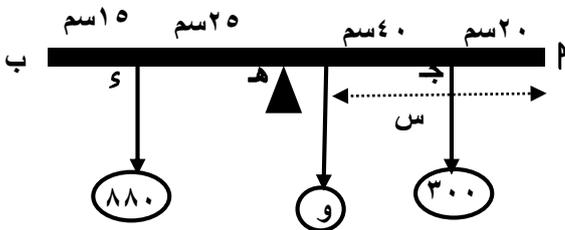
بفرض أن وزن القضيب (و) يؤثر فى نقطة

تبعد (س) سم عن م

فى الحالة الاولى :

$$ج = ٠ = ٣٠ \times ٣٠٠ - ٤٠ \times (س - ٥٠) \quad \therefore ٠ = ٣٥ \times ٤٠٠ + (س - ٥٠) \times ٥٠ = ٥٠٠٠ \Rightarrow (١)$$

فى الحالة الثانية :



$$ج = ٠ = ٤٠ \times ٣٠٠ - ٦٠ \times (س - ٦٠)$$

$$\therefore ٠ = ٢٥ \times ٨٨٠ + (س - ٦٠) \times ٦٠$$

$$\therefore ٦٠ \times ٦٠ - ٥٠ \times ٥٠ = ١٠٠٠٠ \Rightarrow (٢) \text{ بالطرح}$$

$$١٠ \times ٥٠ = ٥٠٠٠ \quad \therefore ٥٠٠ = ٥٠٠ \text{ ث جم بالتعويض فى (١)}$$

$$\therefore ٥٠٠ \times ٥٠ - ٥٠٠ = ٥٠٠٠ \quad \therefore ٥٠٠ = ٤٠ \text{ سم}$$

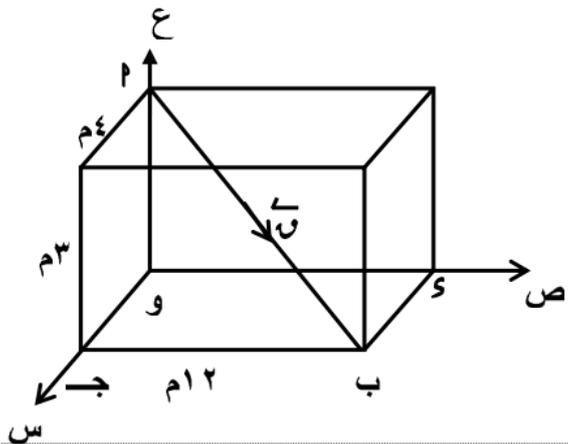
$$\therefore \text{وزن القضيب } ٥٠٠ \text{ ث جم ويبعد عن م مسافة } ٤٠ \text{ سم}$$

[١٠] فى الشكل المقابل:

قوة \vec{Q} مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر

\overline{PB} فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣ م ، ٤ م ، ١٢ م

كما بالشكل أوجد عزم القوة \vec{Q} حول النقطة و



$$\vec{PB} = (٣ - ٠, ١٢ - ٠, ٤ - ٠) = (٣, ١٢, ٤) \quad \therefore \vec{PB} = (٣, ١٢, ٤)$$

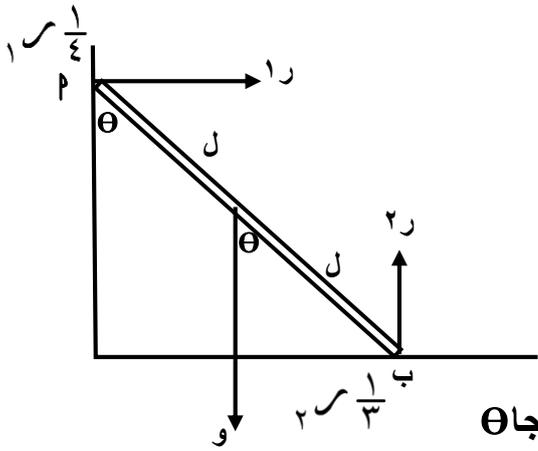
$$\vec{P} = (٣, ١٢, ٠) = \frac{(٣, ١٢, ٤)}{\sqrt{١٤٤ + ١٦ + ٩}} \times ١٣٠ = \vec{Q} \quad \therefore \vec{P} = (٣, ١٢, ٠)$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 3 & 12 & 0 \\ 30 & 120 & 40 \end{vmatrix} = (30, 120, 40) \times (3, 12, 0) = \vec{u} \times \vec{s} = \vec{c} \therefore$$

$$\vec{c} = 120\vec{v} + 480\vec{e} =$$

[١١] قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط $\frac{1}{4}$ ومعامل الاحتكاك بين القضيب والارض $\frac{1}{3}$ فإذا اتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق



∴ القضيب على وشك الانزلاق ، بفرض طول القضيب = ٢

$$\therefore R_1 = R_2 \sin \frac{1}{3} + R_2 \cos \frac{1}{4} = W \quad (1)$$

ج ب = ٠

$$\therefore W \times l \sin \theta - R_1 \times 2 \cos \theta - R_2 \times 2 \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\therefore W - R_2 \cos \theta = R_1 \sin \theta \quad (2)$$

من (١) ∴ $R_2 = W \cos \frac{1}{3} + R_1 \sin \frac{1}{4}$ ∴ $R_2 = \frac{12}{13}W$ و $R_1 = \frac{4}{13}W$ وبالتعويض فى (٢)

$$\therefore W - \frac{12}{13}W \cos \theta = \frac{4}{13}W \sin \theta \quad \therefore 1 - \frac{12}{13} \cos \theta = \frac{4}{13} \sin \theta$$

$$\therefore \frac{11}{13} = \frac{4}{13} \sin \theta \quad \therefore \frac{11}{4} = \sin \theta$$

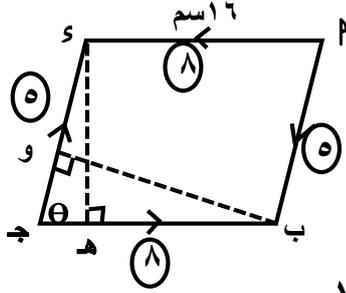
[١٢] م ب ج د متوازي أضلاع فيه $PD = 16$ سم ، مساحته 160 سم^٢ وأثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٨ ، ٥ نيوتن فى م ب ، ج ب ، ج د ، د م على الترتيب فإذا كان W (ج) $\theta =$ أوجد:

١ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما $\theta = 60^\circ$

٢ قيمة θ إذا كان معيار عزم الازدواج المحصل يساوى ٤٠ نيوتن.سم ويعمل فى اتجاه م د ج

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

∴ مساحة متوازى الاضلاع = ١٦٠ ∴ و هـ = ١٠ سم



∴ القوتان (٨ ، ٨) يكونان ازدواج معيار عزمه $80 = 10 \times 8$

١ عند $\theta = 60^\circ$ ∴ ب و = ١٦ جا $3\sqrt{8} = 60$ سم

∴ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن $3\sqrt{40}$

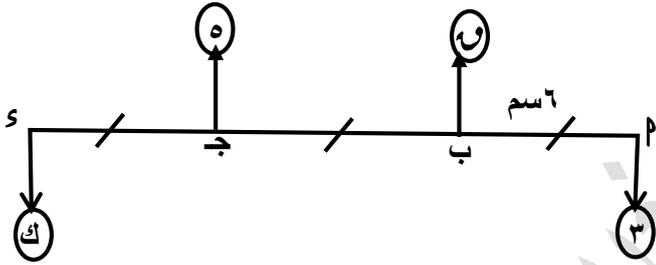
٢ ∴ $40 = 80 - 5 \times 5$ ∴ ب و = ٨ سم ∴ جا $\theta = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = 30^\circ$ ، $\theta = 150^\circ$

[١٣] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين p ب ج فيه $p = ب = ج$ ، s هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم رسم مستقيم مواز للقاعدة $بج$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع p ب ، p ج في النقطتين هـ ، و على الترتيب أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعي هـ ب ج و يقع على s ويبعد ٧ سم عن نقطة و

الحل

حاول بنفسك تم حل رقم (٣) فى دليل التقويم

(بوكلت ٣)



[١٤] فى الشكل المقابل:

s قضيب مهمل الوزن تؤثر القوى التى مقاديرها

٣ ، و ، ٥ ، ك نيوتن فى النقط p ، ب ، ج ، و

على التريب فى الاتجاهات المبينة فإذا كانت مجموعة القوى تؤول إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى ٣٦ نيوتن. سم فأوجد قيمة كل من و ، ك

الحل

∴ المجموعة تؤول الى ازدواج ∴ $0 = ح$ ∴ $0 = و + ٥ + ٣ = ك + ٢$ ∴ $و + ٢ = ك$ (١)

، ج = ٣٦ ∴ $36 = 6 \times ٥ + ١٢ \times و + ١٨ \times ٣$ ∴ $٥ = و$ ∴ $٥ = و$ نيوتن ، $ك = ٧$ نيوتن

[١٥] وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٣٠ نيوتن ويكون على وشك الحركة لأسفل عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٢٠ نيوتن

أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل

حاول بنفسك

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [١٦] م ب ج د و مستطيل فيه م ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم ، هـ \supset ب ج حيث ب هـ = ٣ سم أثرت قوى مقاديرها ٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٥ نيوتن فى الاتجاهات م ب ، ج ب ، م ج ، هـ م على الترتيب

١ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة م حيث م نقطة تقاطع قطرى المستطيل

٢ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة و

الخط

حاول بنفسك

[١٧] تؤثر القوة و فى النقطة م (-٣ ، ٢) فإذا كان عزم و حول كل من النقطتين ب (٣ ، ١) ،

ج (-١ ، ٤) يساوى ٢٨ ع أوجد و

الخط

∴ ج ب = ج د = ٢٨ ع ∴ و // ب ج ∴ ب ج = (-٤ ، ٣) ∴ فرض و = (-٤ ك ، ٣ ك)

∴ ج ب = ٢٨ ع ∴ ب م × و = (-٦ ، ١) × (-٤ ك ، ٣ ك) ∴ -١٨ ك + ٢٨ ك = ٢٨

∴ ك = ٢ ∴ و = (-٨ ، ٦)

[١٨] م ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم يرتكز بطرفه م على مستوى أفقى خشن ، ويرتكز عند إحدى نقطه ج على وتد أملس يعلوه ٢٥ سم عن المستوى الأفقى ، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠ ° أوجد رد فعل الوتد وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى علماً بأن القضيب يقع فى مستوى رأسى

الخط

حاول بنفسك

[١٩] م ب ج د و مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠ ، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات ب م ، و ج أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى م ، ج وخط عملها يوازيان القطر ب و وتكونان ازدواجاً متكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين

الخط

حاول بنفسك

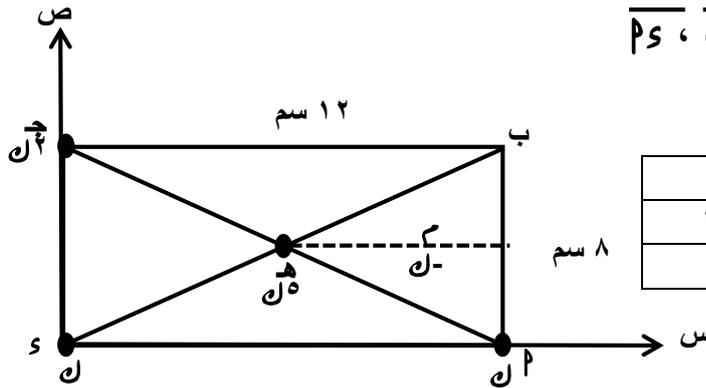
[٢٠] م ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ١٥ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند م والآخر عند نقطة ج على بعد ٣٠ سم من ب

أوجد الثقل الذى يمكن تعليقه من الطرف ب من القضيب

١ ليكون قيمة رد فعل الحامل عند ج مساوية خمسة أمثال قيمة رد فعل الحامل عند م

حاول بنفسك

[٢١] صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة كتلتها ٤ ك على هيئة المستطيل م ب ج د الذى فيه م ب=٨ سم ، ب ج = ١٢ سم ، وصل قطراه فتقاطعا فى ه ثم فصل المثلث م ب ه وثبتت الكتل ن ، ٢ ن ، ن عند الرؤوس م ، ج ، د ، ه على الترتيب عين بعد مركز ثقل المجموعة عن كل من ج د ، م س



الكتلة	ك	ك	ك٢	ك٥	ك-
س	٠	١٢	٠	٦	١٠
ص	٠	٠	٨	٤	٤

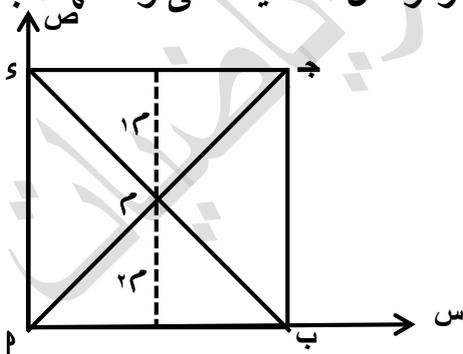
$$س_م = \frac{١٠ \times ل - ٦ \times ل٥ + ٠ \times ل٢ + ١٢ \times ل + ٠ \times ل٤}{٨ ك} = ٤$$

$$ص_م = \frac{٤ \times ل - ٤ \times ل٥ + ٨ \times ل٢ + ٠ \times ل + ٠ \times ل٤}{٨ ك} = ٤$$

∴ مركز الثقل يبعد ٤ سم عن كل من ج د ، م س

(بوكلت ٤)

[٢٢] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل المربع م ب ج د الذى طول ضلعه ٣٠ سم ، م نقطة تقاطع قطريه وقطع Δ م ج د و لصق مرة ثانية فوق Δ م ب م أوجد مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد



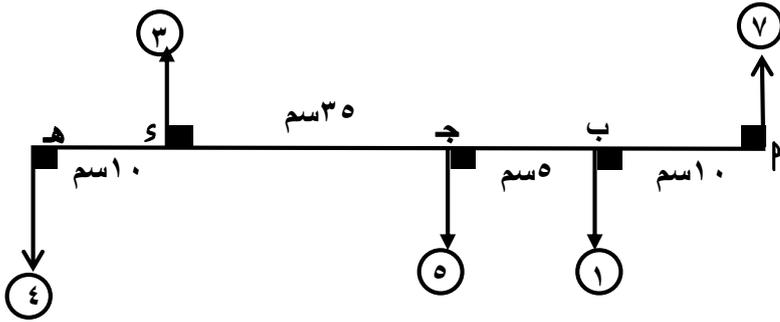
$$س(١٥، ١٥)، س(٢٥، ١٥)، س(٥، ١٥)$$

$$\text{مساحة } \Delta م ب م = \frac{1}{4} \text{ مساحة المربع م ب ج د}$$

الكتلة	ك٤	ك	ك-
النقطة	٣	٢٣	١٣
س	١٥	١٥	١٥
ص	١٥	٥	٢٥

$$س_م = \frac{١٥ \times ل - ١٥ \times ل٥ + ١٥ \times ل٤}{٤ ك} = ١٥ ، ص_م = \frac{٢٥ \times ل - ٥ \times ل٥ + ١٥ \times ل٤}{٤ ك} = ١٠$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [٢٣] فى الشكل المقابل:



م ساق خفيفه مهملة الوزن تؤثر فيها

مجموعة القوى التى امامك

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج

واوجد معيار عزمه

الخط

$$\circ: ح = 7 + 3 - 1 - 5 - 4 = 0, \text{ ج م} = 10 \times 1 + 35 \times 3 - 5 \times 5 + 10 \times 4 = 175 \neq 0$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = 175 وحدة عزم

[٢٤] م ب ج سلك منتظم السمك والكثافة طوله ٢٥ سم حيث و (م ب ج) = ٩٠° ، م ب = ٥ سم

، ب ج = ١٠ سم أوجد بعد مركز ثقل السلك عن الضلعين ج ب ، م ب ،

الخط

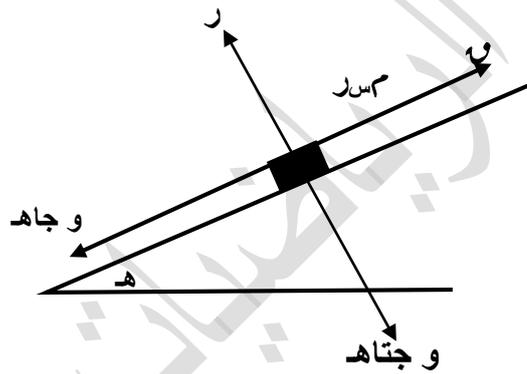
حاول بنفسك

[٢٥] جسم وزنه ٣١٠ ث جم موضوع على مستوى مائل خشن ولوخط أن الجسم على وشك الانزلاق اذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا زيد ميل المستوى الى ٦٠° واثرت على الجسم قوة مقدارها و ث جم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى تجعل الجسم فى حالة اتزان نهائى

أثبت أن $10 \geq و \geq 20$ ث جم

الخط

عندما يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط



$$\therefore \text{مس} = \text{ظا} 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

اقل قوة تمنع الجسم من الانزلاق:

$$\therefore و = \frac{1}{\sqrt{3}} ر + \text{وجاه}$$

$$\therefore و = 310 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 60 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 10 = 310 - 60$$

أكبر قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى:

$$و = ١٠ \times \sqrt[3]{١٠} + \frac{١}{\sqrt[3]{١٠}} \times ٦٠ \times \text{جتا } ٦٠ = ١٥ + ٥ = ٢٠$$

∴ $١٠ \geq و \geq ٢٠$ ث جم

[٢٦] ج ، s حاملان أملسان البعد بينهما ٤ أمتار ارتكز عليهما قضيب م ب أفقياً بحيث م ج = ١ متر وكان الضغط على الحامل ج = ١٦٠ ث كجم وعندما ارتكز القضيب على نفس الحاملين بحيث

م ج = $\frac{٧}{٤}$ متر وكان الضغط على الحامل ج = ٢٥٠ ث كجم أوجد وزن القضيب

الوجه

حاول بنفسك

[٢٧] م ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب فيه م ب = ٢٠ سم ، و (ل ج) = ٣٠ ° أخذت النقط s و م ب ،

هـ م ج بحيث كان s م = م هـ = ١٠ سم أثرت القوى و ١ ، و ٢ ، و ٣ ، ٥ ث كجم فى م ب ،

ب ج ، ج م ، و هـ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى

١٢٥ $\sqrt[3]{١٢٥}$ ث كجم. سم ويعمل على الدوران فى الاتجاه م ب ج

١ أوجد قيمة و ٢ أوجد قيمة و

الوجه

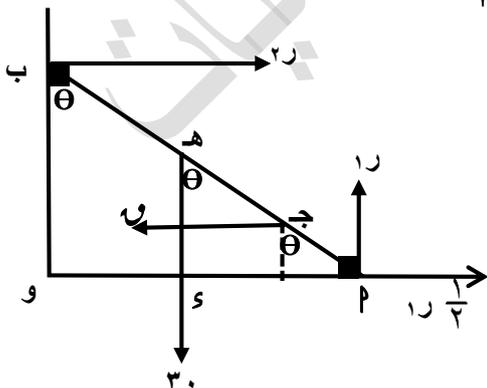
حاول بنفسك

[٢٨] م ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن يرتكز بطرفه م على مستوى أفقى خشن ويرتكز

بطرفه ب على حائط رأسى أملس وكان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ أثرت قوة أفقيه

مقدارها و نيوتن على القضيب عند نقطة ج بحيث م ج = ٥ سم فكان الطرف م على وشك الحركة نحو

الحائط اثبت أنه إذا كان معامل الاحتكاك بين السلم والأرض الأفقيه = $\frac{١}{٢}$ فإن و = $٢٠(١ + \text{ظا } \theta)$



الوجه

م ج = ٥ سم ، م هـ = ١٠ سم

∴ القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

$$\therefore ٣٠ = ١٠ ، و = ١٠ \frac{١}{٢} + ٢٠ = ٢٠ \therefore ٢٠ + ٢٠ = ١٥ + ٢٠ \Leftarrow (١)$$

$$٠ = م ج ، \therefore ٠ = ٥ \times \text{جتا } \theta + ٣٠ \times ١٠ \times \text{جا } \theta - ٢٠ \times ٢٠ \times \text{جتا } \theta = ٠ \div ٥ \text{جتا } \theta$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\therefore \sin \theta + 60 = 2r \Rightarrow (2) \text{ من } (1) \therefore 2r = 15 - \sin \theta \text{ بالتعويض فى } (2)$$

$$\sin \theta + 60 = 2r \Rightarrow 2r = 15 - \sin \theta \text{ بالتعويض فى } (2)$$

$$\therefore \sin \theta + 60 = 2r \Rightarrow 2r = 15 - \sin \theta$$

$$\text{حل آخر : ج ب} = 0 \therefore 0 = 15 \times \cos \theta - 30 \times \sin \theta + 20 \times \cos \theta + \frac{1}{4} \times 20 \times \sin \theta = 0$$

بالتعويض عن $r = 30$

$$\therefore 0 = 15 \times \cos \theta - 30 \times \sin \theta + 20 \times \cos \theta + \frac{1}{4} \times 20 \times \sin \theta$$

$$-30 \sin \theta + 120 \cos \theta + 20 \sin \theta = 3 \therefore 10 \sin \theta = 60 + 60 \cos \theta \div 3$$

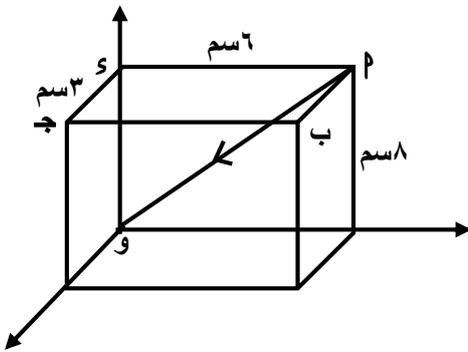
$$\therefore \sin \theta + 60 = 2r \Rightarrow 2r = 15 - \sin \theta$$

[29] فى الشكل المقابل: قوة مقدارها 20 نيوتن

تؤثر فى M و

- 1 أوجد القياس الجبرى لعزم القوة F حول النقطة ب
- 2 أوجد القياس الجبرى لعزم القوة F حول النقطة ج

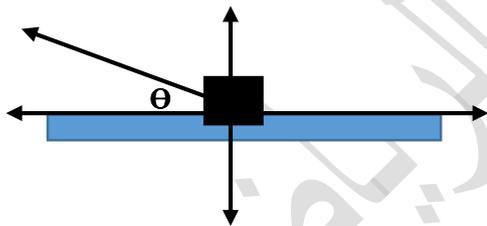
الخطوة



حاول بنفسك مثل رقم (10)

[30] إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى (θ ظا ، θ قا ، θ ظتا ، θ قتا)

الخطوة



زاوية الاحتكاك محصورة بين رد الفعل العمودى والمحصل

$$= \text{ظا} (90 - \theta) = \text{ظتا} \theta$$

[31] جسم وزنه 1 كجم ومعامل الاحتكاك السكونى له $\frac{3}{4}$

فإن رد الفعل المحصل \Rightarrow ($[1, 0]$ ، $[2, 1]$ ، $\{2\}$ ، $\{2, 1\}$)

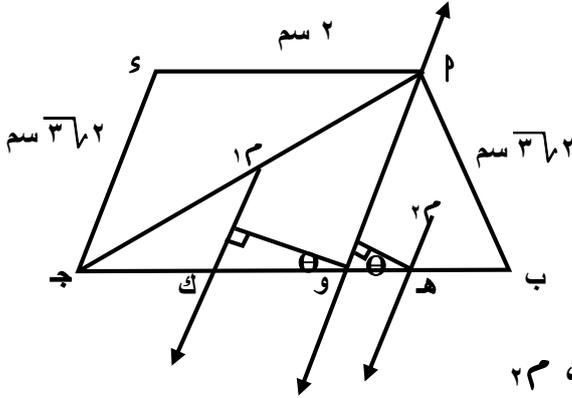
الخطوة

$$\therefore r \geq r' \geq \sqrt{r^2 + 1} \therefore 1 \geq r' \geq 2 \therefore r' \in [2, 1]$$

دليل التقويم

[1] م ب جـ صفيحة منتظمة على شكل شبه منحرف فيه $\overline{PM} \parallel \overline{BJ}$ ، $s \text{ سم} = 2 \text{ سم}$ ، $3\sqrt{2} \text{ سم} = \overline{BJ} = \overline{CD}$ ، سم علقت الصفيحة تعليقاً حراً من م فوجد أن \overline{CD} يكون رأسياً في وضع الاتزان

أثبت أن $2 = \overline{BJ} (1 + \sqrt{2})$ سم



بفرض أن \overline{PM} و الخط الراسى المار بنقطة التعليق

$\therefore \overline{PM} \parallel \overline{CD}$ لان \overline{CD} رأسياً

وبتقسيم الشكل الى متوازي أضلاع ومثلث مركزي ثقلهما ١ سم ، ٢ سم

بفرض طول ب و = س سم \therefore مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته \therefore ه منتصف \overline{B} و

، من هندسة الشكل \therefore ك منتصف \overline{CD} ، \therefore وك = كج = اسم

\therefore مساحة \square م و جـ س : مساحة \triangle م ب و (لهم نفس الارتفاع) = وجـ : ب و = ٢ : $\frac{1}{4}$ س = ٤ : س

\therefore نفرض كتلة \square م و جـ س = ٤ ك ، مساحة \triangle م ب و = س ك

\therefore الجسم متزن \therefore العزوم حول محور الدوران ينعدم

وعزم قوة حول محور = طول العمود بين خط عمل القوة و المحور \times القوة

$$\therefore ٤ ك \times ١ \times \text{جتا } \theta = \text{س ك} \times \frac{1}{4} \text{س جتا } \theta \therefore \text{س} = ٨ \therefore \text{س} = ٢\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ب جـ} = ٢ + ٢\sqrt{2} = ٢(1 + \sqrt{2})$$

[2] قضيب منتظم م ب وزنه ١٥ ث كجم وطوله ٤٥ سم يرتكز بطرفه السفلى م على حائط رأسى املس ويرتكز عند احدى نقطة جـ على وتد افقى املس مواز للحائط فإذا كان $\overline{CD} = ٢$ اسم وكان القضيب متزناً فى مستوى عمودى على الحائط

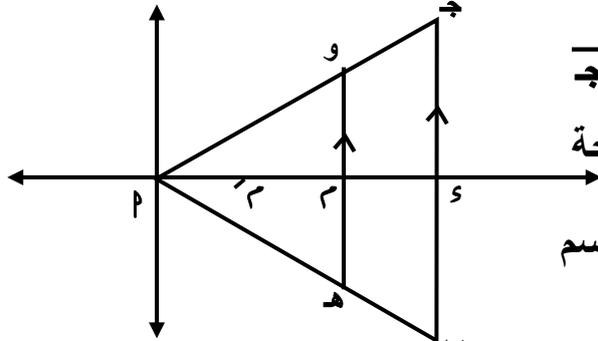
اثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو $\frac{2}{3}$ ثم احسب مقدار رد فعل التود

الخطوة

حاول بنفسك

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
[٣] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين $\triangle P$ ب ج فيه $P = ٤٥$ سم ، $س$ هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم ، رسم مستقيم مواز للقاعدة $\overline{بج}$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{بج}$ ، $\overline{بج}$ فى النقطتين ه ، و على الترتيب

أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى ه ب ج و يقع على $\overline{س}$ ويبعد ٧ سم عن نقطة و



$\triangle P$ ب ج متساوى الساقين $\therefore \overline{س} \perp \overline{بج}$ ، و منتصف $\overline{بج}$

، $\overline{س} \perp \overline{وه}$ ، م منتصف $\overline{وه}$ \therefore هو ويمر بمركز ثقل الصفيحة

\therefore م هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث $\therefore م = \frac{٢}{٣} \times ٤٥ = ٣٠$ سم

، \therefore م هي نقطة تقاطع متوسطات $\triangle ه ب ج$ $\therefore م = \frac{٢}{٣} \times ٣٠ = ٢٠$ سم

$\therefore \overline{وه} \parallel \overline{بج}$ $\therefore \triangle ه ب ج \sim \triangle م ب ج$

\therefore مساحة $\triangle م$ و ه : مساحة $\triangle م ب ج = \frac{٢}{٩} = \frac{٢(س)}{٢(م)}$

\therefore نفرض أن مساحة $\triangle م ب ج = ٩ك$ ، مساحة $\triangle م$ و ه = $٤ك$

\therefore مركز ثقل الشكل الرباعى ج ب ه و هو مركز ثقل $\triangle م ب ج$ بعد رفع $\triangle م$ و ه

الكتلة	ك٩	ك٤ -
س	٣٠	٢٠
ص	٠	٠

\therefore $س = \frac{٣٠ \times ٩ك + ٢٠ \times ٤ك}{٩ك - ٤ك} = ٣٨$ \therefore مركز ثقل الشكل الرباعى يبعد عن م مسافة ٣٨ سم

\therefore يبعد عن و مسافة $٧ = ٤٥ - ٣٨$ سم

[٤] فى الشكل المقابل :

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث $\triangle م ب ج$ وزنها ١٥ اث جرام

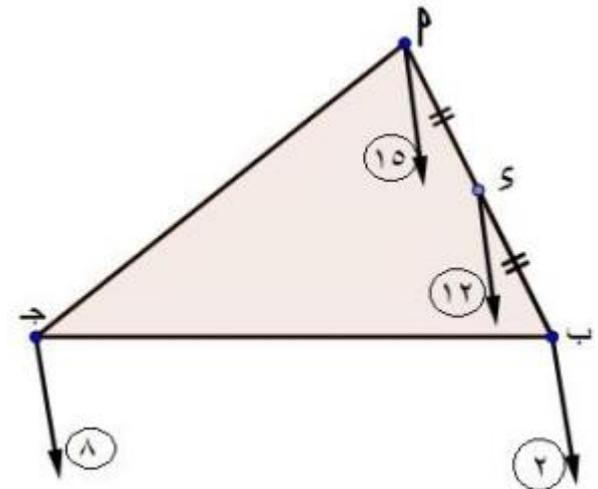
وضعت الاثقال ١٥ ، ٢ ، ٨ ، ١٢ ثقل جرام

كما هو موضح بالشكل فإذا كان م هو مركز ثقل المجموعة

فإن

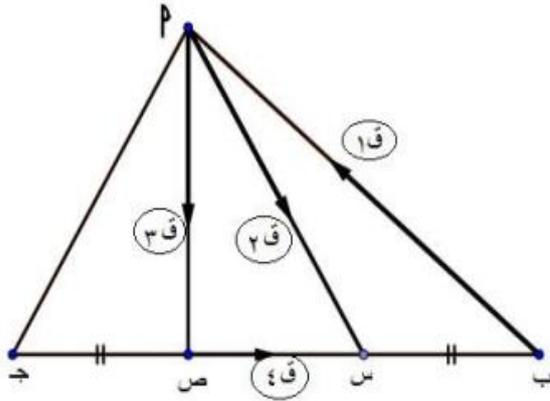
(أ) م منتصف $\overline{بج}$ (ب) م منتصف $\overline{بج}$

(ج) م نقطة تلاقى متوسطات $\triangle م ب ج$



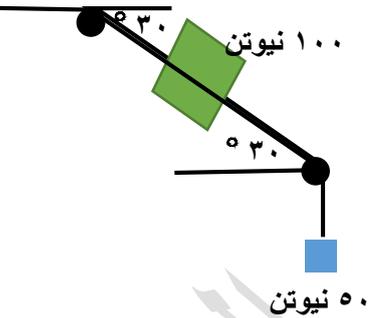
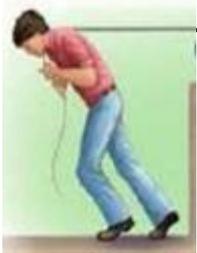
حاول بنفسك

[٥] فى الشكل المقابل



ΔPAB فيه S ، S نقطتان على \overline{AB} بحيث $AS = SB$ اشرت القوة F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_1 ، F_2 ، F_3 ما الاضلاع \overline{PA} ، \overline{PB} ، \overline{PC} ، \overline{AB} على الترتيب فإذا كانت القوة غير متزنة **أثبت أن** خط عمل المحصلة يمر بالنقطة S

[٦] فى الشكل المرسوم



إذا كان معامل الاحتكاك بين الكتلة المستوى المائل يساوى $\frac{\sqrt{3}}{10}$ فأوجد قيم الشد التي تجعل الجسمين فى حالة اتزان علما بأن البكرتان ملساوان.

الجسم على وشك الحركة لاعلى المستوى

∴ ش ٢ = ٥٠ نيوتن ، $R = 30$ و $\sqrt{3} \cdot 50 = 30$ نيوتن

ش ١ = ٣ + ٣٠ + ٢ ش

$$= \frac{\sqrt{3}}{10} \times 30 \cdot 50 + 50 + 50 = 125 \text{ نيوتن}$$

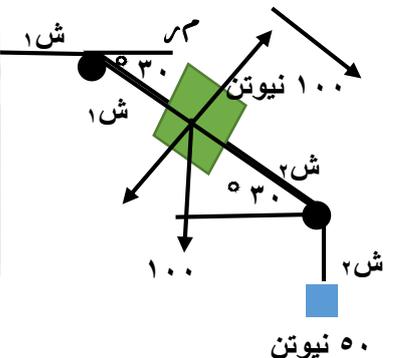
الجسم على وشك الحركة لاسفل

∴ ش ٢ = ٥٠ نيوتن ، $R = 30$ و $\sqrt{3} \cdot 50 = 30$ نيوتن

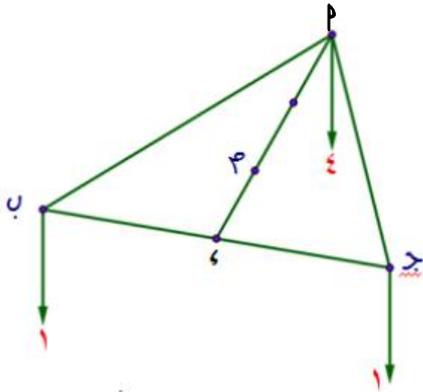
$$\text{ش ١} = ٢ \text{ ش} + ٣٠ + ٣ - ٣٠ = ٣٠ - ٣٠ + ٥٠ + ٥٠ = 100$$

(٢٧)

الاستاتيكا ٣ ث ٢٠١٧



لاتنسى تكرار (ش ٢) لان الشد على طرفى البكرة الملساء متساوى



[٧] إذا وضعت الأثقال ٤ ، ١ ، ١ ث كجم عند رؤوس المثلث AB ج فإن مركز هذه الأوزان هو

حيث \overline{PM} متوسط فى مثلث AB ج ، م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

(أ) نقطة م (ب) نقطة منتصف \overline{PM}

(ج) نقطة س ، نقطة منتصف \overline{SM}



حاول بنفسك

[٨] فى الشكل المقابل AB ج مثلث ، م نقطة تلاقى متوسطات Δ AB ج

القوة ١ ، ١ ، ٥ ، ٣ قوى متوازية وفى اتجاه واحد تقع خط عملها فى

مستوى المثلث فإذا كان طول المتوسط جـ س = ٣٠ سم فإن محصلة هذه

القوى تؤثر فى نقطة تبعد عن ج مسافة = سم

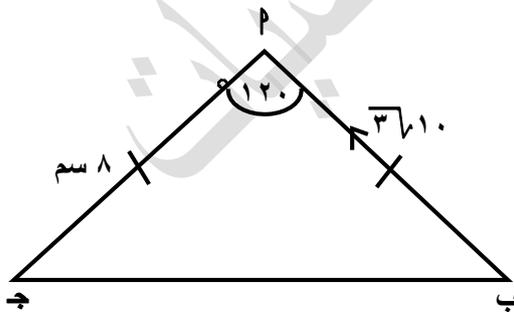
(١٦ ، ١٥ ، ١٠ ، ٥)



نلاحظ محصلة القوتين ١ ، ١ مقدارها ٢ و تؤثر فى س . محصلة القوى ١٠ و

وبفرض انها تبعد عن ج مسافة س سم ، مجموع عزوم القوى حول ج يساوى عزم المحصلة عندها

$$\therefore ١٠ \times س = ٢ \times ٣٠ - ٣٠ \times ٥ \times \frac{٢}{٣} \text{ سم} = ١٦$$



[٩] فى الشكل المقابل : AB ج مثلث فيه AB = جـ ، و (ب) = ١٢٠°

تؤثر القوة $3\sqrt{١٠}$ نيوتن فى \overline{PM} فإن القياس الجبرى لعزم القوة

$3\sqrt{١٠}$ حول النقطة ج يساوى نيوتن.سم

[- $3\sqrt{٨٠}$ ، $3\sqrt{٨٠}$ ، ١٢٠ ، - ١٢٠]



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
العمل نرسم من جـ لـ م ب يكون طوله = ٨ جا ٦٠ = $\sqrt{٣٦٠٤}$ سم

$$\therefore \overline{جـ} = \sqrt{٣٦٠٤} \times \sqrt{١٠} = ١٢٠ \text{ نيوتن.سم}$$

[١٠] م ب جـ و صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم ووزنها ٦٠٠ ث جم معلقة بمسار أفقى عند م بحيث يكون مستواها رأسيًا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٦٠٠٠ ث جم. سم. أوجد فى وضع التوازن ميل الصفيحة $\overline{م ب}$ على الرأس إذا علم أن وزن الصفيحة يؤثر فى نقطة تقاطع القطرين.

الوجه:

حاول بنفسك

[١١] تؤثر القوتان $\overline{ق} = ٢ \text{ سـ} - ٣ \text{ صـ}$ ، $\overline{و} = ٤ \text{ سـ} - ٦ \text{ صـ}$ فى النقطتين م (١، ٣) ، ب (٤، ٩) على الترتيب فإن نقطة تأثير المحصلة هي..... [(١٢، ٥) ، (١٢، ٥) ، (٥، ٢) ، (٧، ٣)]

الوجه:

$$\|\overline{ق}\| = \sqrt{١٣} ، \|\overline{و}\| = \sqrt{١٣}$$

∴ نقطة تأثير المحصلة تقسم م ب بنسبة $\sqrt{١٣} : \sqrt{١٣} = ١ : ٢$

$$\therefore \text{نقطة تأثير المحصلة} = \frac{(٩، ٤) \cdot ٢ + (٣، ١)}{٢ + ١} = (٧، ٣)$$

[١٢] إذا كانت : $\overline{ق} // \overline{م ب}$ ، جـ $\Rightarrow \overline{م ب}$ وكان $\overline{جـ} = \overline{م ب} + ١٢ \overline{ع}$ فإن $\overline{جـ} = \dots \overline{ع}$
(١٢ ، ٦ ، -٦ ، ٤)

الوجه:

$$\therefore \overline{ق} // \overline{م ب} \therefore \overline{م ب} = \overline{جـ} = \overline{م ب} + ١٢ \overline{ع} \therefore \overline{جـ} = \overline{م ب} = ١٢ \overline{ع}$$

[١٣] إذا كانت $\overline{ق} = ٦ \text{ سـ} + ٣ \text{ صـ}$ وتؤثر فى نقطة م (١، -٣) ، $\overline{و} = ٤ \text{ سـ} - ٦ \text{ صـ}$ وتؤثر فى النقطة ب (٢، ٥) ، $\overline{ز} = ٥ \text{ سـ} - ٥ \text{ صـ}$ وتؤثر فى النقطة جـ = (٤، -١)

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وعين معيار عزمه

الوجه:

$$\therefore \overline{ح} = \overline{ق} + \overline{و} + \overline{ز}$$

$$\therefore \overline{جـ} = \overline{جـ} = \overline{ق} \times \overline{م ب} + \overline{و} \times \overline{ب جـ} = (٢-، ٣-) \times (٣، ٦) + (٦، ٢-) \times (١-، ٤-)$$

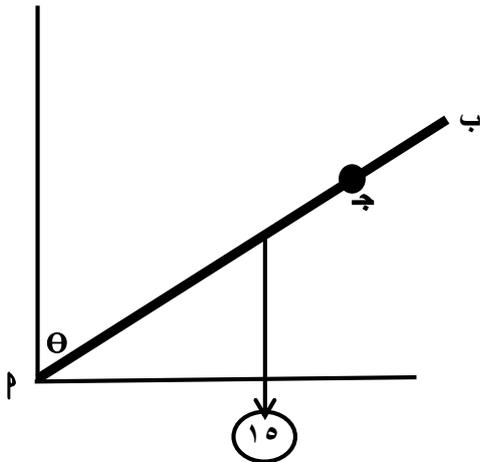
$$= (١٢+ ٩-) \overline{ع} + (٦+ ٨) \overline{ع} = ١٧ \overline{ع} \neq \overline{ح} \therefore \text{المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه} = ١٧$$

[١٤] إذا كانت القوة $\overline{ق} = ٤ \text{ سـ} + ٤ \text{ صـ}$ تؤثر فى نقطة م (١، ٢، ٣) وكان مركبة عزم القوة $\overline{و}$ حول محور الصادات يساوى ٧ وحدة عزم فإن ك = [(٢، -٢، ٣، -١)]

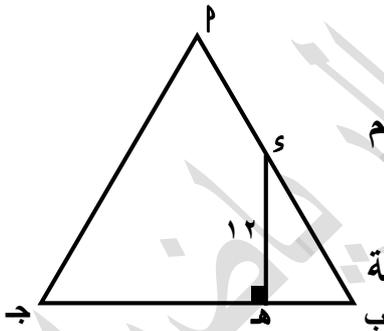
$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{v} & \vec{s} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix} \therefore \vec{c} = (2-k)\vec{c} + (3-k)\vec{v} - 14\vec{s}$$

∴ العزم حول محور ص = 7 ∴ 1 + 3ك = 7 ∴ ك = 2

[١٥] قضيب منتظم \overline{AB} وزنه 1٥ ث كجم وطولة ٥٤ سم يرتكز بطرفه السفلى P على حائط رأسى أملس ويرتكز عند احدى نقطة J على وتد أفقى أملس مواز للحائط أثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو $\frac{2}{3}$ ثم احسب مقدار رد فعل الوتد



[١٦] AB ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، S منتصف \overline{AB} رسم $\overline{SH} \perp \overline{BC}$ يقطعه فى H ، اثرت القوة ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوة تساوى $3\sqrt{12}$ نيوتن وخط عملها \overline{SH} أوجد هذه القوة مقداراً واتجاهاً



ب ه = ١٠ جتا ٦٠ = ٥ سم ، ∴ ه ج = ١٥ سم ، وه = $3\sqrt{5}$ سم

، ارتفاع المثلث = ٢٠ جا ٦٠ = $3\sqrt{10}$ سم

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

∴ باخذ العزوم حول ب ∴ $3\sqrt{10} \times 20 = 5 \times 3\sqrt{12}$

∴ ٢٠ = ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه \overline{AB}

بالمثل باخذ العزوم حول ج ∴ $3\sqrt{10} \times 10 = 15 \times 3\sqrt{12}$

∴ ١٨ = ١٨ نيوتن وتعمل فى اتجاه \overline{AB}

باخذ العزوم حول P ونرسم عمود من S على \overline{BC} فيكون طوله ١٠ جا ٦٠ = $3\sqrt{5}$ سم

∴ $3\sqrt{5} \times 18 + 3\sqrt{5} \times 30 = 0$ ∴ ٦ = ٣٠ نيوتن وتعمل فى \overline{BC}

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [١٧] إذا كانت P ، B ، J ثلاث نقاط مستوية لا تقع على استقامة واحدة، أثرت مجموعة من القوى فى مستويها بحيث كان $\vec{P} = \vec{B} = \vec{J} =$ صفر فإن.....

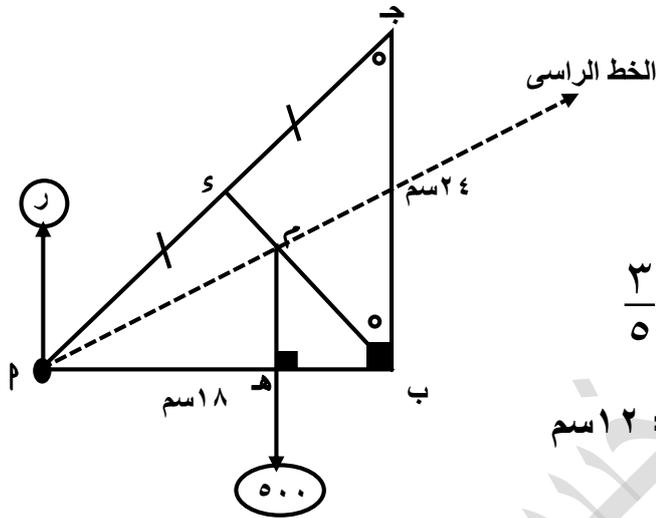
(أ) المحصلة = صفر (ب) القوى متعامدة (ج) القوى متزنة (د) القوى متوازية

الاجابة

∴ الثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، $\vec{P} = \vec{B} = \vec{J} =$ صفر ∴ القوى متزنة

[١٨] P ب ج صفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية فى B حيث $PB = ١٨$ سم، $BJ = ٢٤$ سم، وزنها ٥٠٠ ث جم يؤثر فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث. علقت الصفيحة تعليقا حرا فى مسمار أفقى من الرأس P بحيث كان مستواها رأسيا. **أوجد** معيار عزم الازدواج الذى يجعل PB أفقيا.

الاجابة



$PJ = ٣٠$ سم ∴ $BM = ١٥$ سم،

$$BM = ١٥ \times \frac{٢}{٣} = ١٠ \text{ سم}$$

فى ΔMBH ، جتا $(\angle MBH) = \frac{BM}{BJ} = \frac{١٠}{٣٠} = \frac{٣}{٥}$ جا $J =$

$$\therefore BH = \frac{٣}{٥} \times ١٥ = ٩ \text{ سم} \therefore h = ١٨ - ٩ = ٩ \text{ سم}$$

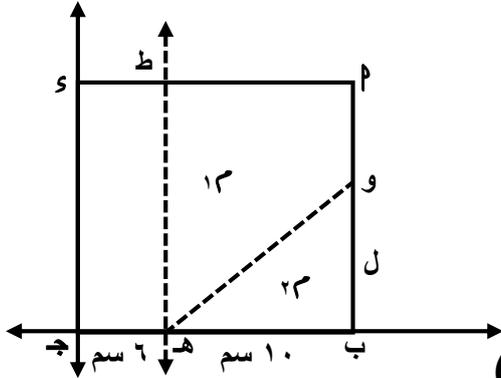
∴ الازدواج لا يتزن الا مع ازدواج آخر

∴ $(٥٠٠، R)$ يكونان ازواج معيار عزمه يساوى معيار عزم الازدواج المطلوب

$$= ٥٠٠ \times ١٢ = ٦٠٠٠ \text{ ث جم. سم}$$

كتاب المدرسة

[١] صفحية رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل ٢٥ سم ١٠ سم ، ب ج ١٦ سم فرضت نقطة ه ١٠ سم ، و ١٠ سم ، ثم فصل ١٠ سم ١٠ سم ، ووضعنا الصفحية فى مستوى رأسى بحيث انطبق حرفها ج ه على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول ه ، أوجد طول ب و



$$\frac{٨٠}{ل} = \frac{١٦ \times ٢٥}{ل \times ١٠ \times \frac{١}{٢}} = \frac{\text{مساحة المستطيل } ٢٥ \text{ ب ج ه}}{\text{مساحة } \Delta \text{ ب ه و}}$$

نفرض كتلة المستطيل = ٨٠ ل ، كتلة Δ = $ل$

∴ الجسم على وشك الدوران حول ه (كأن ه هى نقطة التعليق)

∴ الاحداثى السينى لمركز الثقل = ٦ ∴ $(٨, \frac{٢٥}{٢})$ ، ب $(١٦, ٠)$ ، ه $(٠, ٦)$ ، و $(١٦, ٠)$ ، ل

$$\therefore ٢٣ = \left(\frac{١٦ + ١٦ + ٦}{٣}, \frac{٣٨}{٣} \right) = \left(\frac{ل}{٣}, \frac{٣٨}{٣} \right)$$

$$\text{سم} = \frac{\frac{٣٨}{٣} \times ل - ٨ \times ٨٠}{ل - ٨} = ٦ \quad \therefore ل = ٢٤ \quad \therefore \text{ب و} = ٢٤ \text{ سم}$$

حل آخر:

∴ الجسم على وشك الدوران حول ه ∴ مركز ثقل المجموعة يقع على الخط المستقيم المار ب ه ∴ العزوم حول ه = ٠ وملاحظة الصفيحة رأسية وكان ج ه أفقى ∴ الاوزان راسية عمودية على ج ه ∴ $٨٠ \times ك = (٦ - ٨) \times ل + (٦ - \frac{٣٨}{٣}) \times ل$ ∴ $٠ = ٢ \times ل + (٦ - \frac{٣٨}{٣}) \times ل$ ∴ $٠ = \frac{٢}{٣} \times ل + ٢ \times ٨٠$ ∴ $ل = ٢٤$



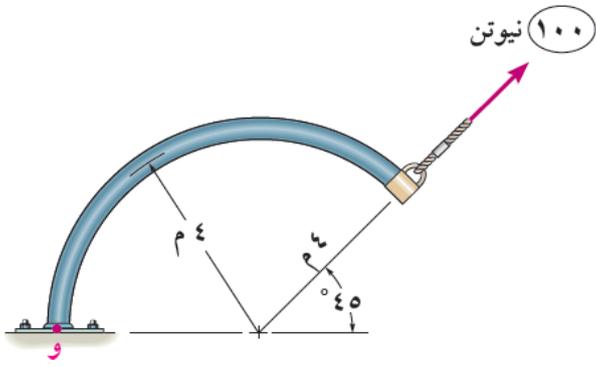
[٢] (اختبار ١) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة

اتزان فإن و = نيوتن (٤ ، ٢ ، ١٦ ، ٢٨)

باخذ العزوم حول نقطة الارتكاز (لوجود رد الفعل)

$$\therefore ١٦ = و \quad \therefore ٠ = ٢ \times و - ٤ \times ١٢ - ٤ \times ٢٠$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانو
[٣] فى الشكل المقابل:



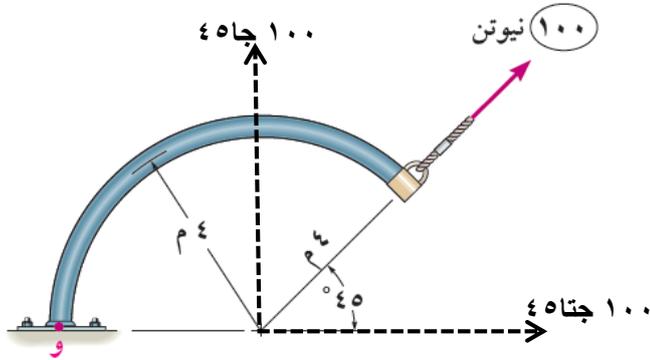
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول و

الاجابة

بتحليل القوة الى مركبتين

$$\therefore ج و = ١٠٠ جتا ٤٥ + ١٠٠ جا ٤٥ \times ٤$$

$$= ٢١٢,٢٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$



[٤] فى الشكل المقابل

أوجد عزم القوة و = ١١٧,١٥ نيوتن حول نقطة و

الاجابة

من هندسة الشكل احداثيات النقط

$$P(١٥, ٠, ٠), B(٠, ٥, ٥), و(٠, ٠, ٠)$$

$$\therefore \vec{PB} = (١٥, ٠, ٠), \vec{PB} = (١٥, ٥, ٥)$$

$$\vec{w} = \frac{(١٥, ٥, ٥) \times (١٥, ٠, ٠)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}} = \frac{(٤٥, ١٥, ١٥)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}}$$

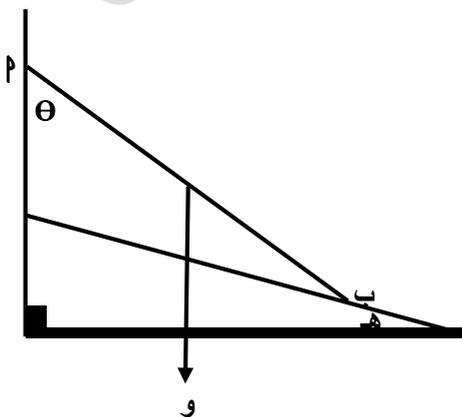
$$\vec{w} = \frac{(٤٥, ١٥, ١٥)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}} \times \vec{PB} = \frac{(٤٥, ١٥, ١٥)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}} \times (١٥, ٠, ٠) = \frac{(٦٧٥, ٠, ٠)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}}$$

[٥] فى الشكل المقابل ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم

وزنه (و) على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الاخرى على ارض

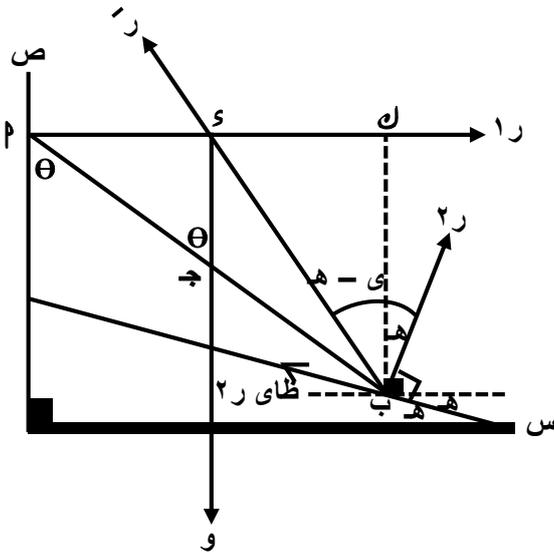
خشنة تميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم

على وشك الانزلاق وهو فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) الحائط مع الارض

أثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث
ظا $\theta = 2$ (ى - هـ) حيث θ زاوية الاحتكاك



∴ الجسم متزن تحت تاثير ثلاث قوى

تقاطع خط عمل قوة الوزن ورد الفعل العمودى على الحائط

∴ رد فعل المستوى الخشن يمر بنقطة التقاطع

(ى) محصورة بين رد الفعل العمودى على المستوى

ورد الفعل المحصل ∴ و (لان ب س) = س - ى

$$\therefore \text{ظا } \theta = (ى - هـ) = \frac{س}{ل ب} \leftarrow (1)$$

$$\therefore \text{ظا } \theta = \frac{س}{ل ب} = \frac{س}{س} = 1 \leftarrow (2) \text{ من } (1), (2)$$

$$\therefore \text{ظا } \theta = 2 \text{ (ى - هـ)}$$

حل اخر:

بتحليل مركبتى رد فعل المستوى الخشن عند ب

وبفرض طول السلم = 2

∴ السلم متزن ∴ $R_2 \text{ جتا } \theta + R_2 \text{ ظاى } \theta = و$

$$\therefore R_2 = \frac{و}{\text{جتا } \theta + \text{ظاى } \theta} \leftarrow (1)$$

$$R_1 + R_2 \text{ جتا } \theta = R_2 \text{ ظاى } \theta \leftarrow (2)$$

$$0 = و - R_2 \text{ ظاى } \theta + R_2 \text{ جتا } \theta$$

$$\therefore و - R_2 \text{ ظاى } \theta = 0 \therefore R_2 = \frac{و}{\text{ظاى } \theta} \leftarrow (3) \text{ من } (1), (3) \text{ بالتعويض فى } (2)$$

$$\therefore \frac{و}{\text{ظاى } \theta} = و \leftarrow (4)$$

$$\therefore \text{ظا } \theta = \frac{و}{و} = 1 \leftarrow (5)$$

$$\frac{2 \text{ جاي} (\text{هـ} - \text{هـ})}{\text{جنا} (\text{هـ} - \text{هـ})} = \frac{2 (\text{جنا} \times \text{جنا} - \text{جنا} \times \text{جنا})}{\text{جنا} \times \text{جنا} + \text{جنا} \times \text{جنا}} = \frac{2 (\text{جنا} \times \text{جنا} - \text{جنا} \times \text{جنا})}{2 \text{جنا} \times \text{جنا}} = \frac{0}{2 \text{جنا} \times \text{جنا}} = 0 \text{ ظا} \therefore$$

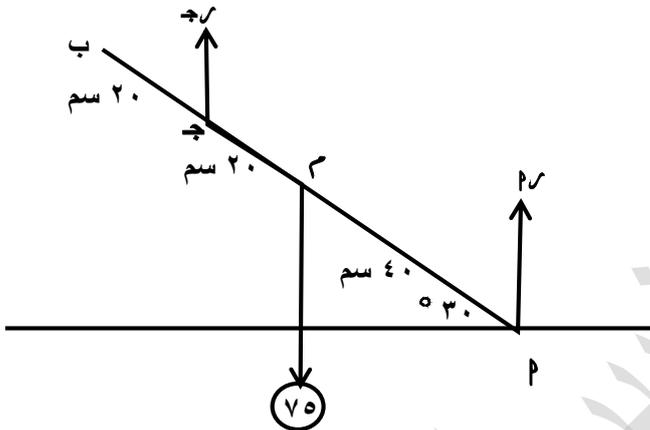
$$2 \text{ ظا} (\text{ى} - \text{هـ}) =$$

مصادر أخرى

[1] م ب قضيب منتظم وزنه ٧٥ ث جم وطوله ٨٠ سم يدور بسهولة حول مسمار ثابت أفقى يمر بثقب صغير عند ج حيث ب ج = ٢٠ سم فإذا استند القضيب على سطح أفقى أملس بطرفة م

أوجد مقدار رد فعل كلا من السطح الأفقى والمسمار

وإذا شد الطرف ب بقوة أفقية و ث جم حتى أصبح رد فعل المستوى الأفقى مساويا وزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى بزاوية ٣٠ ° أوجد مقدار و ورد فعل المسمار حينئذ



قبل شد القضيب بالقوة الأفقية:

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى اثنين منهم

متوازيين فإن الثالثة لابد أن توازيهم

$$\therefore P + R = 75$$

$$0 = 75 \times 40 \times \cos 30 - R \times 60 \times \cos 30$$

$$R = 50 \text{ ث جم}, P = 75 - 50 = 25 \text{ ث جم}$$

بعد شد القضيب بقوة أفقية:

∴ القضيب متزن ، القوتان (٧٥ ، ٧٥) يكونان

$$\sqrt{3} \times 150 = 40 \times 75 \times \cos 30$$

$$\therefore R = 75 \text{ يكونان ازدواج معيار عزمه} = \sqrt{3} \times 150$$

$$\therefore \sqrt{3} \times 150 = 20 \times R \times \cos 30 \therefore R = 150 \text{ ث جم}$$

[2] و ١ = ٤ - ٥ - ٦ ، و ٢ = ٣ - ٤ - ٥ ، و ٣ = ٦ - ٨ - ٩ ، و ٤ = ٦ - ٨ - ٩ تؤثر فى النقط

م (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، ج (٤ ، ٦) أثبت أن القوى تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\therefore \vec{c} = 4\vec{s} - 5\vec{v} + 2\vec{s} - 3\vec{v} + 8\vec{v} - 6\vec{s} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{c} = \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} + \vec{0} \times \vec{b} + \vec{0} \times \vec{c},$$

$$(1, 2) \times (1, 4) + (3, 5) \times (3, 2) + (-2, 4) \times (8, -6) =$$

$$= (-10, 4) + (6-15) + (12-32) = -10, 4 - 9 = -19, 4 \neq \vec{0} \quad (2)$$

من (1)، (2) \therefore المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = 15 وحدة عزم

[3] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل شبه منحرف $ABCD$ متساوى الساقين فيه:

$$AB \parallel CD, \quad \angle B = \angle C = 20^\circ, \quad \angle A = \angle D = 80^\circ \text{ عين مركز ثقل الصفيحة،}$$

إذا وضعت الصفيحة رأسياً بحيث انطبق حرفها CD على نضد أفقى فأثبت أن أكبر ثقل يمكن تعليقه من

الرأس A يجعل الصفيحة على وشك الدوران يساوى $\frac{2}{3}$ وزن الصفيحة

الوجه: