



# مراجعة الاستاتيكا

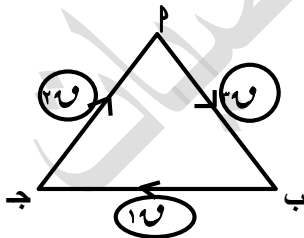
الصف الثالث الثانوى



من اعداد الاستاذ/  
ربيع فايد معلم خبير الرياضيات بالمرحلة الثانوية

## اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

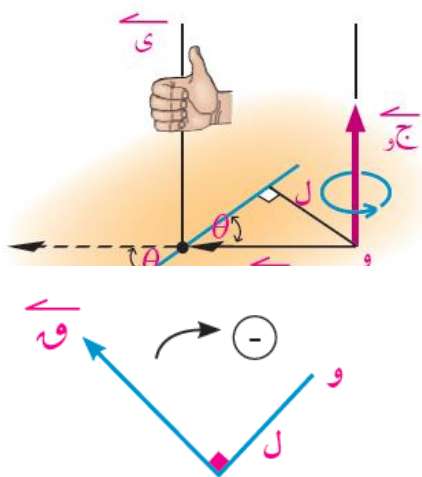
- رد فعل المستوى الاملس عمودى على السطح وإذا كان كروى يمر بالمركز
- قوة الاحتكاك هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على مستو خشن ويكون اتجاهها فى عكس اتجاه الحركة وتزداد قيمتها حتى تصل الى قيمتها العظمى عندما يكون الجسم على وشك الحركة وتسمى بقوة الاحتكاك السكونى النهائى وعندما يتحرك الجسم تقل قوة الاحتكاك وتثبت اثناء الحركة وتسمى بقوة الاحتكاك الحركى
- رد الفعل للمستوى الخشن غير معلوم اتجاهه ويحلل الى مركبتين احدهما عمودى على اتجاه الحركة والاخرى مع اتجاه الحركة
- زاوية الاحتكاك زاوية محصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل
- معامل الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى السكونى ورد الفعل العمودى
- معامل الاحتكاك السكونى < معامل الاحتكاك الحركى
- معامل الاحتكاك السكونى يعتمد على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس شكليهما ولاكتلتيهما
- رد الفعل المحصل عندما يكون الاحتكاك نهائى  $\vec{r} = \sqrt{r_s^2 + r_c^2}$
- أقصى قيمة ممكنة لقوة الاحتكاك السكونى هى  $r_s = \mu_s r$  ،  $r_s = \mu_s r$  ظل
- قوة الاحتكاك السكونى  $r_s \geq r$  فى حالة اقل الجسم ساكن وفى حالة التساوى يكون على وشك الحركة
- زاوية الاحتكاك السكونى < زاوية الاحتكاك الحركى
- قوة الاحتكاك فى حالة السطوح الملساء صفر وقد تكون صفر فى السطوح الخشنة فى حالة وضع جسم على سطح خشن ولا تؤثر عليه قوة تحاول تحريكه
- جتا(س+ص) = جتا(س) جتا(ص) - جاس جاص
- محصلة القوتين  $r_1$  ،  $r_2$  هى  $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  ،  $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  ،  $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
- قاعدة لامى  $\frac{r_1}{\sin \alpha} = \frac{r_2}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \gamma}$  حيث  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  الزاوية المحصورة بين القوتين  $r_1$  ،  $r_2$  خارجين من نفس النقطة ، بالمثل باقى الزاويا
- قاعدة مثلث القوى  $\frac{r_1}{\sin \alpha} = \frac{r_2}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \gamma}$
- لاحظ الترتيب الدورى للقوى
- مدى جاه ، جتا(س) هو  $[-1, 1]$  . أكبر قيمة لـ جتا(س) = 1
- قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودى
- من شروط الاتزان هو انعدام محصلة القوى فى أى اتجاه



## اتزان جسم على مستوى مائل خشن

- إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى (هـ) تساوى قياس زاوية الاحتكاك (ل)
- هـ > ل فإن الجسم متزن ، هـ = ل على وشك الانزلاق ، هـ < ل ينزلق
- اتجاه الاحتكاك ضد اتجاه الحركة المتوقع فإذا أثرتنا على الجسم بقوة و وكانت و تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن الاحتكاك لأسفل
- ① تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل فإن الاحتكاك يكون لأسفل
- ② تمنع الجسم من الانزلاق فإن الاحتكاك يكون لأعلى
- أقل قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى القوة التى تمنعه من الانزلاق وفى هذه الحالة يكون اتجاه قوة الاحتكاك النهائى حـ الى اعلى المستوى
- أكبر قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى التى تجعل الجسم على وشك الحركة الى أعلى ويكون الاحتكاك النهائى الى اسفل المستوى
- إذا كانت و<sub>١</sub> هى أقل قوة تحفظ توازن الجسم أى عندها الجسم على وشك الانزلاق لأسفل ، وكان و<sub>٢</sub> أكبر قوة تحفظ توازن الجسم وعندها يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن قيم و  $\Rightarrow [و_١ ، و_٢]$
- عندما يكون الجسم على وشك الحركة (الانزلاق) يكون الاحتكاك نهائى سكون
- معامل الاحتكاك السكونى < معامل الاحتكاك الحركى

## عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى الأبعاد

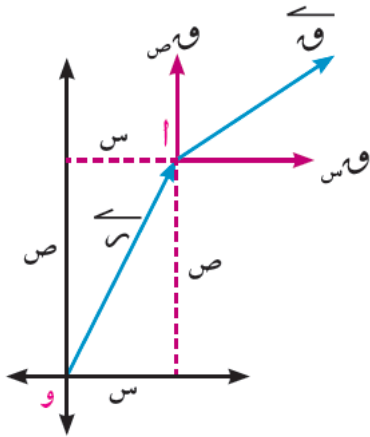


- $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{F} = ||\vec{r}|| ||\vec{F}|| \sin \theta$
- لا يتوقف عزم قوة بالنسبة لنقطة على النقطة على خط عمل القوة
- معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة كمية موجبة دائماً
- القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة = الإشارة فى القوة × زراع القوة
- مع اتجاه عقارب الساعة -
- عكس اتجاه عقارب الساعة +
- القياس الجبرى للعزم قد يكون موجب أو سالب بخلاف معيار العزم موجب
- عزم قوة بالنسبة لاي نقطة على خط عملها = صفر
- إذا كان خط عمل قوة بالنسبة لنقطة = صفر. ∴ خط عمل القوة يمر بالنقطة
- إذا كان عزم قوة  $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{F}$  فإن خط عمل  $\vec{F} // \vec{r}$  ،
- إذا كان عزم قوة  $\vec{J} = -\vec{r} \times \vec{F}$  فإن خط عمل  $\vec{F}$  ينصف  $\vec{r}$
- وحدة قياس العزم = وحدة قياس القوة × وحدة قياس الطول مثلاً نيوتن.متر ، ث.كجم.متر ، ....

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

- يمكن ايجاد عزم قوة بالنسبة لنقطة بتحليل القوة فى اتجاهين متعامدين ثم نوجد مجموع عزمى مركبتها حول النقطة (**مبدأ العزوم-نظرية فارينون**)

ففى الشكل المقابل:



عزم  $\vec{F}$  حول  $O =$  عزم حول  $O$  + عزم حول  $O$   
ايهما اسهل نوجد

- **نظرية:** مجموع عزوم عدة قوى فى الفراغ حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة وتستخدم لمعرفة نقطة تأثير المحصلة أو خط عملها

- **طول العمود من نقطة على خط عمل القوة**

= معيار العزم ÷ معيار القوة = طول ذراع القوة

- إذا كان عزم قوة بالنسبة لنقطة  $= 0$  فإن القوة تنعدم أو خط عملها يمر بالنقطة

### عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الابعاد

- عزم  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  تؤثر فى النقطة

$M = (M_x, M_y, M_z)$  التى متجه موضعها بالنسبة لـ  $O$

هو  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$

$$\text{يساوى } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (r_y F_z - r_z F_y) \vec{e}_x + (r_z F_x - r_x F_z) \vec{e}_y + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{e}_z$$

- مركبة العزم حول محور  $x = (r_y F_z - r_z F_y)$

- مركبة العزم حول محور  $y = (r_z F_x - r_x F_z)$

- مركبة العزم حول محور  $z = (r_x F_y - r_y F_x)$

•

### محصلة القوى المتوازية المستوية

- محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه هى قوة فى اتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى

القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما

- محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة

الأكبر معياراً ويساوى الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من

الخارج من ناحية القوة الاكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما

- من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)
- مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة
- إذا علم المحصلة و احدى القوتين وكانت المحصلة أكبر من القوة .: يوجد احتمالان القوتين فى نفس الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه
- إذا علم المحصلة و احدى القوتين وكانت المحصلة أصغر من القوة المعلومه .: القوتين متضادين فى الاتجاه
- لايجاد محصلة عدة قوى متوازية نفرض متجه وحدة ونوجد المحصلة ولتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم القاعدة: مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

### اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

- إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:
  - مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً
  - مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً
- عندما يكون القضيب الموضوع على حاملين على وشك الدوران حول أحد الحاملين فإن رد الفعل ينعدم عند الحامل الآخر

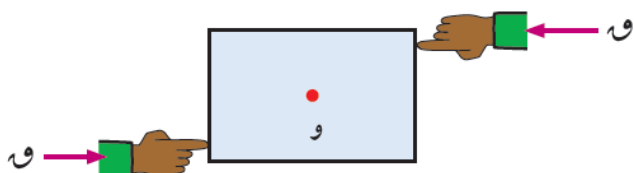
### قاعدة اذا كانت القوى متوازية ومعلوم نقطة تأثير كل قوة

$$S = \frac{F_1 \cdot S_1 + F_2 \cdot S_2 + F_3 \cdot S_3 + \dots}{L_1 + L_2 + L_3 + \dots} = ص , \quad \frac{F_1 \cdot S_1 + F_2 \cdot S_2 + F_3 \cdot S_3 + \dots}{L_1 + L_2 + L_3 + \dots} = ص$$

### اتزان جسم جاسئ

- شرط الاتزان هو محصلة القوى = صفر ، مجموع عزوم القوى حول أى نقطة = صفر

### الازدواجات



- الازدواج يتكون من قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه ولايجمعهما خط عمل واحد
- معيار عزم الازدواج دائما موجب ويساوى معيار احدى القوتين x البعد العمودى بينهما
- القياس الجبرى لعزم الازدواج قد يكون موجب أو سالب
- الازدواج لا يتزن الا مع ازدواج مثله
- إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة ازدواجات فان مجموع القياسات الجبرية ينعدم

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)  
 • شرط تكافؤ ازدواجين إذا كان لهم نفس القياس الجبرى لعزميهما

## الازدواج المحصل

- شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج ① تنعدم محصلة القوى ② مجموع عزوم القوى حول نقطة لا يساوى الصفر
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج تساوى مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة (مقدار ثابت خلاف الصفر)
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج إذا أثرت القوى فى اضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وتناسبت مقادير القوى مع اطوال الاضلاع فإن المجموعة تكافؤ ازدواج معيار عزمه يساوى ضعف مساحة المضلع  $\times$  عدد الوحدات الممثلة لمقدار القوة

## مركز الثقل

- مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم لا يتغير موضعها مهما تغير وضع الجسم بالنسبة للأرض و يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات المكونة للجسم
- عند تعليق الجسم تعليقاً حراً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بمركز الثقل
- مركز ثقل الجسم يغير بتغير شكله
- مركز ثقل مربع ، مستطيل ، متوازى أضلاع منتظم الكثافة هو نقطة تقاطع القطرين (دون كتل عليه)
- مركز صفيحة محدودة بمثلث منتظمة الكثافة هو نقطة تلاقى متوسطاته
- نقطة تلاقى متوسطات المثلث الذى رؤسه ① (س١، ص١) ، ② (س٢، ص٢) ، ③ (س٣، ص٣) هى 
$$\left( \frac{س١ + س٢ + س٣}{٣} ، \frac{ص١ + ص٢ + ص٣}{٣} \right)$$
- فى الاشكال منتظمة الكثافة الاطوال تتناسب مع الكتل كذلك المساحات تتناسب مع الكتل
- فى التمارين التى يذكر فيها تعليق الجسم تعليقاً حراً من احدي نقطة فيفضل ان تكون هذه النقطة هي نقطة الأصل للمحورين المتعامدين

## طريقة الكتلة السالبة

- نطبق القواعد السابقة مع وضع الكتلة التى رفعت بالسالب
- مركز ثقل أى شكل له محور تماثل يقع عليه

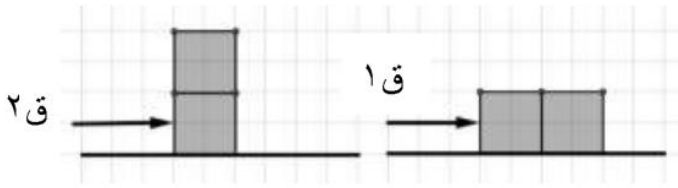
## اولا: الاسئلة الموضوعية (أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة)

(بوكلت ١)

[١] ارادت سيارة صعود منحدر يميل على الافقى بزاوية قياسها ٥ ٤ فإن معامل الاحتكاك السكونى بين

عجلات السيارة والمنحدر يجب الا يقل عن ..... (  $\frac{1}{4}$  ، ١ ، ٢ ، صفر )

[٢] الشكلان الاتيان يوضحان قالبان متساويان فى الكتلة والحجم موضوعان على مستوى افقى خشن فى وضعين مختلفين اثرت عليهم قوة  $W$  لتجعلهم على وشك الحركة فإن .....



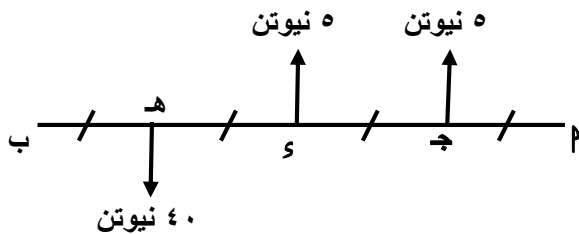
(أ)  $W_1 < W_2$  (ب)  $W_1 > W_2$

(ج)  $W_1 = W_2$  (د) لا يمكن المقارنة

[٣] فى الشكل المقابل:

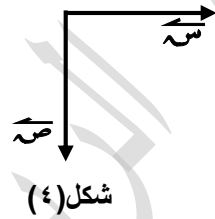
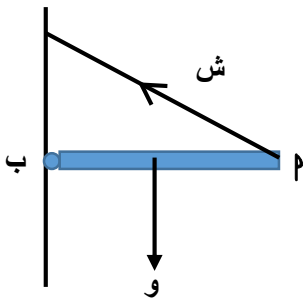
نقطة تأثير محصلة القوى تنتمى الى

(  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  ،  $\overline{CD}$  ،  $\overline{DB}$  )



[٤] الشكل المقابل يمثل قضيب متزن

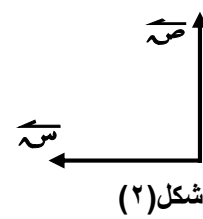
، فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون:



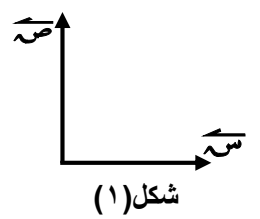
شكل (٤)



شكل (٣)



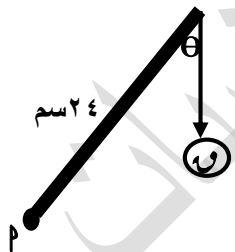
شكل (٢)



شكل (١)

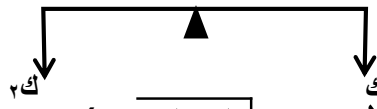
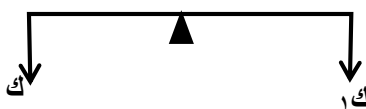
[٥] اكبر عزم للقوة  $W$  بالنسبة لنقطة  $P$  عندما  $\theta$  تساوى .....

( صفر ،  $\frac{\pi}{4}$  ،  $\pi$  ،  $2\pi$  )



[٦] قضيب طوله  $L$  يرتكز فى وضع افقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة (ك) تتزن مع الكتلتين

$K_1$  ،  $K_2$  منفردتين كما هو بالشكل فان قيمة  $K$  بدلالة  $K_1$  ،  $K_2$



(  $K_1 + K_2$  ،  $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$  ،  $K_1 K_2$  ،  $\sqrt{K_1 K_2}$  )



**[٧] فى الشكل المقابل:**

إذا كانت  $L$  هي زاوية الاحتكاك

## بين الارض والقضيب فإن:

ظاهر × ظال ..... = ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ )

**[۸] اذا كان نظام القوى المقابل يكافئ ازدواج**

فان و = ..... نیوتن (۳ ، ۷ ، ۱۰ ، ۱۷)

**[٩]** اذا كانت القوتان  $\vec{F}_1 = 5\hat{s} + 3\hat{e}$  ،  $\vec{F}_2 = -9\hat{s} + \hat{e}$  ،

تكونان ازدواج فإن  $p + b + j = \dots\dots\dots (-1, \text{صفر}, 1, 17)$

**[١٠] الشكل المقابل يمثل عجلة مهمة الكتلة طول نصف قطرها (نق)**

يمكنها الدوران في مستوى رأسي حول عمود أفقي املس ثبت عليها

ثلاث كتل مقدارها ك ، ٢ك ، م فاذا اترنت العجلة كما بالشكل

فإن قيمة م بدلالة ك  $(\frac{1}{2} ك، ك، \frac{3}{2} ك، 2 ك)$

**[۱۱] الشكل المقابل يبين قرص دائري مركزه م ،**

**ثقب ثقبان دارئريان مرکزاهما م ۱ ، م ۲ وطولا نصفی**

قطريهما ٣سم ، ٢سم على الترتيب فإن مركز ثقل الجزء

المتبقى يقع على ..... (  $\overline{22_1}$  ,  $\overline{22_2}$  ,  $\overline{22_3}$  ,  $\overline{22_4}$  )

(بوکلت ۲)

**[١٢] إذا كانت  $\theta$  هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك**

السكونی یساوی ..... ( ظا ، θ ، قا ، θ ، ظنا ، θ ، قتا ، θ )

**[١٣] قوة  $\overline{u} = \overline{s} - \overline{v}$  تؤثر في  $m(3, 1)$  فإن القياس الجبرى لعزم القوة  $\overline{u}$  بالنسبة لنقطة**

الاصل يساوى .....  $(\overleftarrow{v}, \overleftarrow{v}, v, v)$



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)  
**[١٤]** إذا كانت  $\vec{Q} // \vec{P}$  ،  $\vec{Q} = 3\vec{S} - 4\vec{V}$  ،  $||\vec{P}|| = 10$  وحدة قوة فإن ،  $\vec{P}$  يمكن أن تكون ..... (  $3\vec{S} + 4\vec{V}$  ،  $6\vec{S} + 8\vec{V}$  ،  $6\vec{S} - 8\vec{V}$  ،  $8\vec{S} - 6\vec{V}$  )

**[١٥]** إذا كان ب منتصف جـ ،  $\vec{P} = \vec{C}$  ،  $\vec{P} = 12\vec{C}$  فإن  $\vec{C} = \dots\dots\dots$

$$(12, 12, -12, -12)$$

**[١٦]** قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر فى بـ جـ حيث  $\vec{P}$  بـ جـ مربع طول ضلعه ٦ سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لنقطة د يساوى ..... نيوتن.سم ( ٦٠ ، ١٢٠ ،  $60\sqrt{2}$  ،  $120\sqrt{2}$  )

**[١٧]** قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ٢٠ نيوتن ، فإذا كان  $\vec{P} : \vec{Q} = 1 : 2$  حاصلتهما ١٥ نيوتن فإن  $\vec{P} - \vec{Q} = \dots\dots\dots$  نيوتن ( ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، صفر )

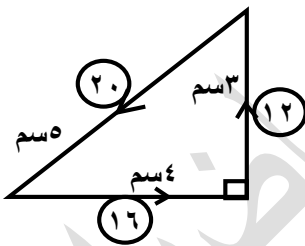
**[١٨]** مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ ، ٦ نيوتن والمسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة ..... سم ( ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ٧,٥ )

**[١٩]** إذا كانت  $\vec{Q} = \vec{S} + 2\vec{V}$  ،  $\vec{P} = 3\vec{S} - \vec{V}$  + جـ  $\vec{V}$  قوتى ازدواج فإن بـ جـ = .....  
 ( ١ ، ١ ، ٥ ، ٥ )

**[٢٠]** مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الاضلاع رؤوسه م ( ١ ، ٢ ) ،

ب ( ١ ، ٠ ) ، جـ ( ٣ ، ١ ) هو النقطة ..... [ ( ١ ، ١ ) ، ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٢ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٣ ) ]

**[٢١]** إذا كانت مجموعة من القوى حاصلتها جـ وتكافئ ازدواج معيار عزمه جـ فإن .....  
 (أ)  $\vec{C} = \vec{P}$  ،  $\vec{C} = \vec{J}$  (ب)  $\vec{C} \neq \vec{P}$  ،  $\vec{C} = \vec{J}$   
 (ج)  $\vec{C} = \vec{P}$  ،  $\vec{C} \neq \vec{J}$  (د)  $\vec{C} \neq \vec{P}$  ،  $\vec{C} \neq \vec{J}$



**[٢٢]** فى الشكل المقابل:

عزم الازدواج المحصل = ..... وحدة عزم ( ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ )

**[٢٣]** إذا كانت القوة  $\vec{Q} = 3\vec{S} + \vec{K} - 4\vec{C}$  تؤثر فى النقطة م ( ١ ، ٠ ، ١ ) وكان عزم القوة  $\vec{Q}$  بالنسبة للنقطة ب ( ٢ ، ١ ، ٣ ) يساوى  $8\vec{S} - \vec{C}$

فإن قيمة ك = ..... ( ٢ ، ٢ ، ٠ ، ٨ )

(بوكلت ٣)

**[٢٤]** إذا كانت القوة  $\vec{Q} = (2, -3, 4)$  تؤثر فى النقطة ( ١ ، ١ ، ١ ) فإن مركبة عزم  $\vec{Q}$  حول محور

س تساوى ..... ( ٥- ، ٢ ، ٧ )

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) **[٢٥]** مثلث ثلاث قوى تمثيلاً تاماً بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع  $\triangle ABC$  بـ ج مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وبمقياس رسم ١ سم لكل ٢ ث جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠ سم فإن معيار عزم الازدواج يساوى ..... ث.جم.سم (  $\sqrt{3} \cdot 900$  ،  $\sqrt{3} \cdot 1800$  ،  $\sqrt{3} \cdot 450$  ،  $900$  )

**[٢٦]** بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى ..... سم (  $\sqrt{3} \cdot 2$  ،  $\sqrt{3} \cdot 4$  ،  $6$  ،  $\sqrt{3} \cdot 6$  )

**[٢٧]** إذا كانت النقط  $P$  ،  $B$  ،  $J$  فى مستوى مجموعة من القوى وكان  $\vec{J} = 20\vec{E}$  ،  $\vec{J} = \vec{C}$  ،

،  $\vec{J} = 10\vec{E}$  فإن .....

(أ) المجموعة متزنة (ب) المحصلة تنصف  $\vec{P}$

(ج)  $B \Rightarrow$  خط عمل المحصلة (د) المحصلة توازى  $\vec{P}$

**[٢٨]** إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه فى حائط رأسى وكانت  $S$  ،  $V$  هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت  $S=5$  نيوتن ،  $V=12$  نيوتن فإن مقدار قوة رد فعل المفصل = ..... نيوتن

( ٧ ، ١٣ ، ١٧ ، ٦٠ )

**[٢٩]** إذا كانت  $\vec{Q} = 3\vec{S} - 4\vec{V}$  تؤثر فى النقطة  $P(1, 2)$  فإن بعد نقطة الأصل و  $(0, 0)$  عن خط عملها يساوى ..... وحدة طول (  $\sqrt{5}$  ، ٢ ، ٥ ، ١٠ )

**[٣٠]** إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان  $7\vec{U}$  ،  $5\vec{U}$  نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد  $\frac{1}{3}$  متر عن خط

عمل القوة الصغرى فإن المسافة بين خطى عمل القوتين = ..... متر (  $\frac{49}{5}$  ،  $\frac{28}{5}$  ،  $\frac{5}{3}$  ، ٤ )

**[٣١]** إذا كانت  $M$  ،  $K$  هما معاملى الاحتكاك السكونى والحركى على الترتيب لجسمين متلامسين

فإن ..... (  $K_s > K_k$  ،  $K_s < K_k$  ،  $K_s = K_k$  ، لاتوجد علاقة بينهما )

**[٣٢]** إذا كانت  $\vec{S}$  ،  $\vec{V}$  ،  $\vec{E}$  مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة

$\vec{Q} = 2\vec{S} + 3\vec{V} - \vec{E}$  تؤثر فى النقطة  $P(1, -1, 4)$  فإن عزم القوة  $\vec{Q}$  حول

نقطة  $B(2, -3, 1)$  تساوى .....

(أ)  $11\vec{S} - 5\vec{V} - 7\vec{E}$  (ب)  $11\vec{S} - 5\vec{V} + 7\vec{E}$

(ج)  $11\vec{S} - 5\vec{V} - 7\vec{E}$  (د)  $11\vec{S} + 5\vec{V} - 7\vec{E}$

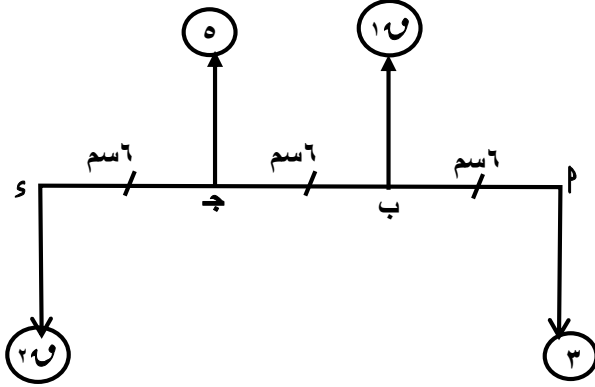
**[٣٣]** إذا كان خط عمل القوة  $\vec{Q} = \vec{S} + \vec{V}$  ينصف  $\vec{P}$  حيث  $P(3, 2)$  وكانت  $S(1, 3)$  منتصف

$\vec{P}$  فإن  $\vec{J} = \vec{C}$  .....  $\vec{E}$  (  $-3, -3$  ،  $3, -3$  ،  $3, 3$  ،  $-3, 3$  )

(بوكلت ٤)

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) **[٣٤]** جسم وزنه  $3\sqrt{2}$  ث كجم موضع على مستوى أفقى خشن أثرت عليه قوة أفقيه مقدارها ٢ ث كجم فجعلته على وشك الحركة فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل = ..... ث كجم (  $3\sqrt{8}$  ، ٤ ، ٨ ، ٢ )

**[٣٥]** قوتان متوازيتان تؤثران فى جسم متماسك كبراهما ٨ ث كجم تؤثر فى نقطة م والصغرى تؤثر فى نقطة ب ومحصلتها ١٢ ث كجم تؤثر فى نقطة ج حيث ج  $\Rightarrow$   $\vec{P} \leftarrow \vec{B}$  فإذا كان ب ج = ٦ سم فإن طول  $\vec{P} \leftarrow \vec{B}$  = ..... سم (  $3\sqrt{18}$  ، ١٨ ، ٩ ، ٣ )



**[٣٦]** الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى تؤثر

فى النقط م ، ب ، ج ، د تقع على مستقيم أفقى

فإذا كانت هذه المجموعة تؤول الى ازدواج

قياسه الجبرى = ٣٦ نيوتن.سم

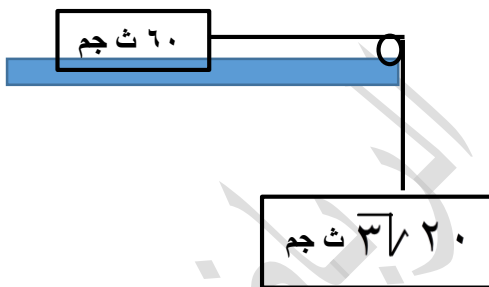
فإن  $10 + 20 = \dots\dots\dots$

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(ج) ١٨ (د) ٢٤

**[٣٧]** إذا كانت  $\vec{P} = 3\vec{S} - 4\vec{S}$  تؤثر فى نقطة م (٢ ، ٠) وكانت ج (٢ ، ٣) ، هـ (٠ ، ١) فإن خط عمل  $\vec{P}$  .....  $\vec{JH}$  ( عمودى على ، يقطع ، يوازي ، يخالف )

**[٣٨]** فى الشكل المقابل:



إذا كان الجسم الذى وزنه ٦٠ ث جم على وشك الحركة

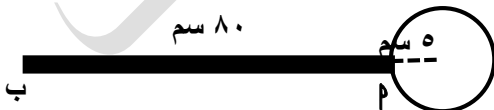
على مستوى افقى خشن فإن قياس زاوية الاحتكاك = ..... °

( ٤٥ ، ١٥ ، ٣٠ ، ٦٠ )

**[٣٩]** فى الشكل المقابل عصا مكونه من قضيب منتظم م ب طوله ٨٠ سم ووزنه  $\frac{1}{3}$  ث كجم ، كرة

حديدية منتظمة وزنها ١ ث كجم مثبتة عند الطرف م طول نصف قطرها ٥ سم فإن بعد مركز ثقل العصا

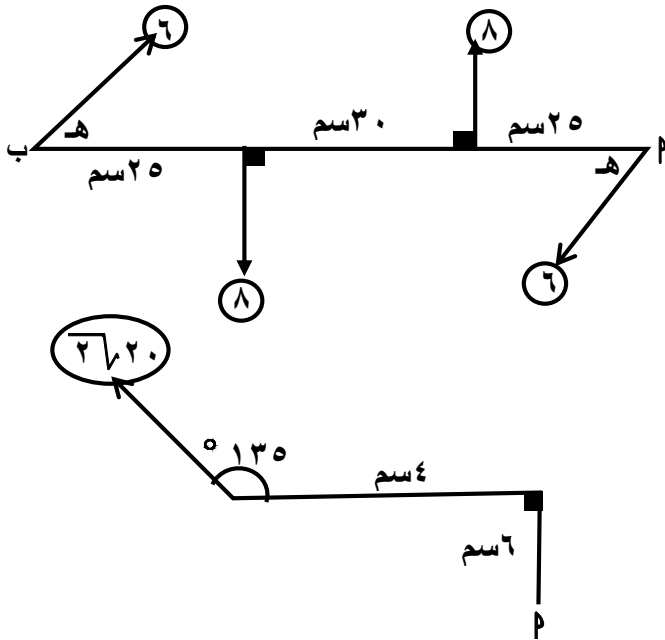
عن ب يساوى ..... سم ( ٨٠ ، ٧٠ ، ٥٠ ، ٦٠ )



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

**[٤٠]** مركز ثقل النظام التالى : ك<sub>١</sub> = ١ عند النقطة (٢ ، ٣) ، ك<sub>٢</sub> = ٤ عند (١ ، ٢) ،

، ك<sub>٣</sub> = ٥ عند (١ ، ٠) هو .....  $\left[ \frac{3}{5} (٢ ، ١) ، \frac{3}{5} (١ ، ٢) ، \frac{3}{5} (٢ ، ١) \right]$



**[٤١]** فى الشكل المقابل:

أربعة قوى تمثل ازدواجين متزنين

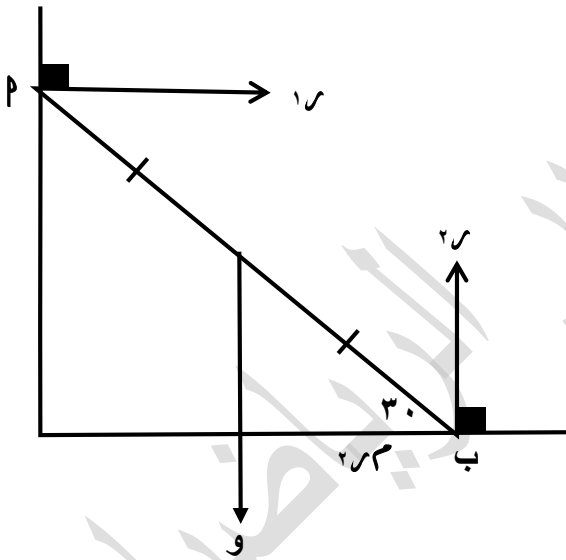
فإن  $\vec{r} = (١٥ ، ٦٠ ، ٤٥ ، ٣٠)^\circ$  = (ـهـ)

**[٤٢]** فى الشكل المقابل:

القوة  $2\sqrt{20}$  نيوتن تؤثر فى النقطة جـ فإن عزم القوة

حول النقطة م يساوى ..... نيوتن.سم

( ٤٥ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٦٠ )



**[٤٣]** فى الشكل المقابل:  $\vec{r}$  بـ قضيب على وشك الحركة

،  $r_1 = 8\sqrt{3}$  نيوتن فإن مقدار  $r_2$  = ..... نيوتن

(أ) ٨

(ب) ١٦

(ج) ١٨

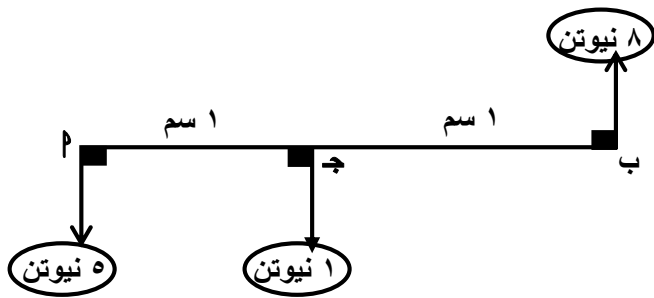
(د)  $8\sqrt{3}$

**اجابات الاسئلة الموضوعية**

(١) ١	(٢) $٢٧=١٧$	(٣) هـ ب
(٤) شكل (١)	(٥) $\frac{\pi}{2}$	(٦) $\sqrt{ك}, \sqrt{ل}$
(٧) ٥, ٠	(٨) ٣	(٩) ١
(١٠) $\frac{٣}{٢} ك$	(١١) ٢٢٢	(١٢) ظنا $\theta$
(١٣) $\sqrt{٧-ع}$	(١٤) $\sqrt{٦-س} + \sqrt{٨-ص}$	(١٥) $\sqrt{١٢-ع}$
(١٦) ١٢٠	(١٧) ٥	(١٨) ١٠
(١٩) ٥	(٢٠) (١, ١)	(٢١) (ج)
(٢٢) ٤٨	(٢٣) ٢-	(٢٤) ٧
(٢٥) $\sqrt{٩٠٠}$	(٢٦) $\sqrt{٤٠٠}$	(٢٧) (ج)
(٢٨) ١٣	(٢٩) ٢	(٣٠) $\frac{٥}{٣}$
(٣١) $ك < ل$	(٣٢) (د)	(٣٣) ٦
(٣٤) ٤	(٣٥) ٩	(٣٦) ١٢
(٣٧) توازى	(٣٨) ٣٠	(٣٩) ٧٠
(٤٠) $\frac{٣}{٥} (٢, ١-)$	(٤١) ٣٠	(٤٢) ٤٠
(٤٣) ١٦	(٤٤) (٤٤)	(٤٥) (٤٥)
(٤٦) (٤٦)	(٤٧) (٤٧)	(٤٨) (٤٨)
(٤٩) (٤٩)	(٥٠) (٥٠)	(٥١) (٥١)
(٥٢) (٥٢)	(٥٣) (٥٣)	(٥٤) (٥٤)
(٥٥) (٥٥)	(٥٦) (٥٦)	(٥٧) (٥٧)
(٥٨) (٥٨)	(٥٩) (٥٩)	(٦٠) (٦٠)

## ثانياً: الاسئلة المقالية

(بوكلت ١)



[١] فى الشكل المقابل:

أوجد مقدار واتجاه نقطة تأثير المحصلة

الحل:

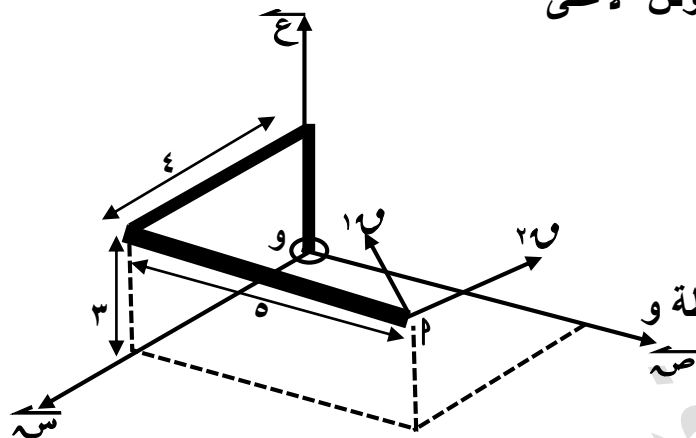
بفرض المحصلة تبعد س سم عن م  $\therefore$  ح  $= 8 - 1 - 5 = 2$  نيوتن

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول م

$$\therefore 2 \times 8 - 1 \times 1 - 5 \times 7 = 0 \quad \therefore 2 \times 8 - 1 \times 1 - 5 \times 7 = 0$$

$\therefore$  المحصلة تبعد عن م مسافة ٧,٥ سم ومقدارها ٢ نيوتن لافى

[٢] فى الشكل المقابل:



$$\vec{F}_1 = 100\hat{s} - 120\hat{v} + 75\hat{e} \text{ نيوتن}$$

$$\vec{F}_2 = 200\hat{s} + 250\hat{v} + 100\hat{e} \text{ نيوتن}$$

تؤثران فى نقطة م أوجد مجموع عزوم القوى حول النقطة و

الحل:

$$M(3, 5, 4) \therefore \vec{OM} = (4, 5, 3), \vec{OC} = (-100, 130, 175)$$

$$J = \vec{OM} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} \hat{s} & \hat{v} & \hat{e} \\ 4 & 5 & 3 \\ -100 & 130 & 175 \end{vmatrix} = 485\hat{s} - 1000\hat{v} + 1020\hat{e}$$

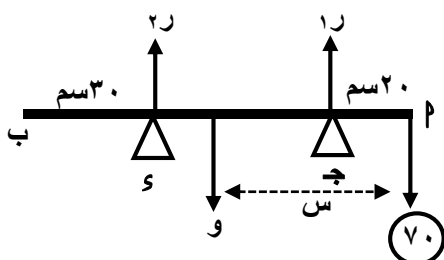
[٣] م ب قضيب غير منتظم وزنه (و) نيوتن وطوله ١٥٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدتين ج ، د

بحيث كان م ج = ٢٠ سم ، ب د = ٣٠ سم لوحظ أن القضيب يكون على وشك الدوران حول د إذا علق

من ب ثقل قدره ٢٠ نيوتن ويكون على وشك الدوران حول ج إذا علق من م ثقل قدره ٧٠ نيوتن

أوجد وزن القضيب وعين نقطة تأثير الوزن

الحل:



عندما يكون على وشك الدوران حول ج

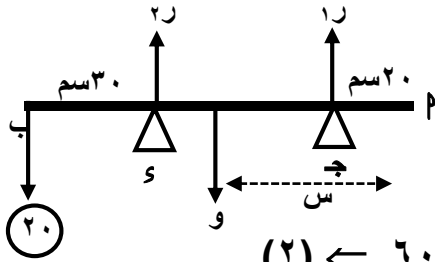
$$20 = 0, 70 + 0 = 10, 0 = 20$$

$$0 = 20 \times 10 - 70 \times 100 \therefore 0 = 20 \times 10 - 70 \times 100$$

(١٣)

الاستاتيكا ٣ ث ٢٠١٧

### عندما يكون على وشك الدوران حول



$$R_1 = 0, R_2 = 20 + 20 = 40, \text{ (3) } \leftarrow \text{ج م} = 0$$

$$0 = 120 \times R_2 - 150 \times 20 + 30 \times 0$$

$$\therefore 3000 - 120 = 0 \times S \therefore 3000 - 120 = 0 \times S \text{ (2) } \leftarrow$$

$$\text{من (1)، (2) } \therefore 20 + 1400 = 0 \times S \therefore 1420 = 0 \times S \therefore 20 = 0 \text{ نيوتن}$$

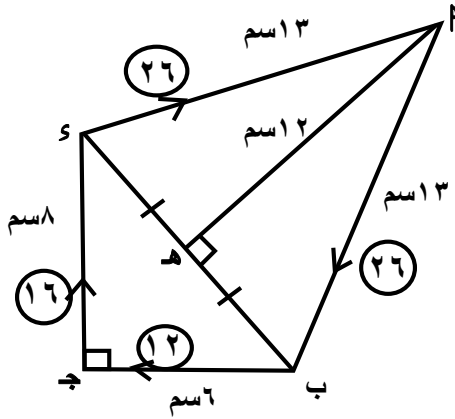
$$\text{بالتعويض فى (1) } \therefore 20 \times 20 + 1400 = 0 \times S \therefore 20 = 0 \text{ سم}$$

$\therefore$  وزن القضيب 20 نيوتن ويبعد عن م مسافة 90 سم

[4] م ب ج د شكل رباعى فيه م ب = 13 سم ، ب ج = 6 سم ، ج د = 8 سم ، د ب = 9 سم

اثر ت قوى مقاديرها 26 ، 16 ، 12 ، 26 فى اتجاهات م ب ، ب ج ، ج د ، د ب على الترتيب

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه



من هندسة الشكل ب د = 10 سم ، م ه = 12 سم

$\therefore$  القوى تؤثر فى اضلاع الشكل الرباعى فى اتجاه دورى واحد

$$2 = \frac{26}{13} = \frac{16}{8} = \frac{12}{6} = \frac{26}{13}$$

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة الشكل  $\times$  م

$$= 2 \left( \frac{1}{2} \times 12 \times 10 + \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \right) = 336 \text{ وحدة عزم}$$

[5] قضيب منتظم وزنه 4 ث كجم يرتكز بطرفه م على مستوى رأسى أملس وبطرفه ب على مستوى

أفقى أملس ، حفظ القضيب من الانزلاق بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنقطة على خط تقاطع المستويين

رأسياً أسفل م وبطرفه الآخر فى نقطة ج على القضيب حيث ج ب =  $\frac{1}{6}$  م فإذا كان القضيب يصنع

فى وضع التوازن مع الأفقى زاوية قياسها 54  $^\circ$  فثبت أن الخيط يصنع مع الأفقى زاوية ظلها  $\frac{1}{4}$

أوجد قيمة الشد فى الخيط وقيمة رد فعل كل من المستويين على القضيب

بفرض طول القضيب م ب = 10 ل  $\therefore$  ج ب = 2 ل ، ب د = 5 م = 5 ل

$\therefore$  ج د = 8 ل = 8 م  $\therefore$  س د = 4 ل



∴ ظا θ =  $\frac{جس}{سء} = \frac{ل٢ل}{ل٢ل٤} = \frac{١}{٤}$  ∴ فى حالة الاتزان القضيب يصنع مع الافقى زاوية ظلها  $\frac{١}{٤}$

وبتحليل قوة الشد كما بالشكل .:  $r = 2 = \epsilon + \text{ش جا } \theta \Leftarrow (1)$

$$\sqrt{2} \div 1 = \sqrt{2} \times \frac{1}{1} = \sqrt{2} \times \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{1} \therefore$$

∴ ۲ + ش (جا θ - جتا θ) = ۰ ⇐ (۳)

$$\therefore ۲ + \text{ش} = \left( \frac{۴}{۱۷۷} - \frac{۱}{۱۷۷} \right)$$

∴ ش =  $\frac{17\sqrt{2}}{3}$  ث حجم بالتعويض في (١) ، (٢)

$$\therefore \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{17} \times 2}{3} = 12, \quad \frac{14}{3} = \frac{1}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17} \times 2}{3} + 4 = 12$$

(یو کلت ۲)

**[٦] وضع جسم وزنه ١٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها  $\frac{12}{13}$  واثرت**

عليه قوة في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني يساوى  $\frac{2}{5}$

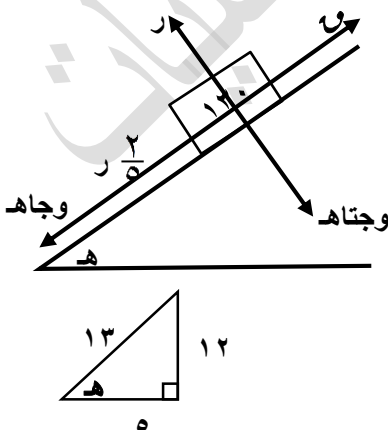
**فأوجد النهايتين العظمى والصغرى لمقدار القوة التي تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى**



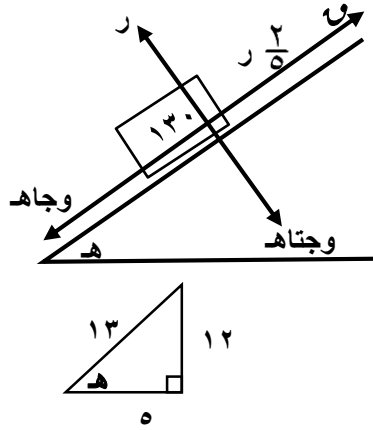
**اولا: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى**

$$\therefore R = \text{و جتاه} = \frac{5}{13} \times 130 = 50 \text{ نیوتن}$$

$$۱۴۰ \text{ نیوتن} = \frac{۱۲}{۱۳} \times ۱۳۰ + ۵۰ \times \frac{۲}{۵} = \text{وِجَاف} + \frac{۲}{۵} = ۷،$$



## ثانياً: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل



$$\therefore R = \text{وجتاه} = 130 \times \frac{5}{13} = 50 \text{ نيوتن}$$

$$f + R = \text{وجاه}$$

$$\therefore f = 130 \times \frac{12}{13} - 50 = 100 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore f \in [100, 140]$$

[٧] تؤثر القوتان المتوازيتان  $\vec{v}_1 = \vec{s}_2 - \vec{s}_3$  ،  $\vec{v}_2$  فى النقطتين  $M(1, 3)$  ،  $B(4, 9)$  على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى نقطة ج  $(3, 7)$  فأوجد  $\vec{v}_1$

الحل:

∴ القوتان متوازيتان ∴ نفرض  $\vec{v}_1 = (2, -3)$  ∴ مجموع عزوم القوتين حول ج ينعدم

$$\therefore \vec{v}_1 = (2, -3) \times (1, 3) + (3, -2) \times (4, -9)$$

$$\therefore \vec{v}_1 = (2, -3) \times (1, 3) + (3, -2) \times (4, -9) \quad \therefore 2 = 8 - 3 \times 4 = -4 \quad \therefore \vec{v}_1 = (2, -3) \times (1, 3) + (3, -2) \times (4, -9)$$

[٨] الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى المؤثرة بالنيوتن

على قضيب  $PM$  و أوجد  $u$  ،  $k$

فى الحالات التالية:

١ المجموعة متزنة

٢ محصلة هذه القوى ٣٠٠ نيوتن وتبعد عن  $M$  مسافة ٤٠ سم وتؤثر لأعلى وتقع بين  $M$  ،  $S$

الحل:

$$\text{١} \quad \therefore \text{المجموعة متزنة} \therefore u = k - 100 \leq (1)$$

$$\text{ج} \quad \therefore 0 = 100 \times 50 - 200 \times 20 + 300 \times u \therefore u = 300 \text{ نيوتن} \therefore k = 400 \text{ نيوتن}$$

$$\text{٢} \quad 300 = 200 + u - k \therefore u - k = 100 \leq (1)$$

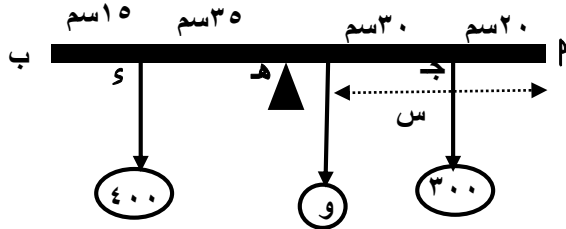
∴ مجموع عزوم القوى حول  $M$  = عزم المحصلة حول نفس النقطة

$$\therefore k - 100 = 200 - 300 \times 40 \therefore k = 950 \leq (2)$$

من (١) ، (٢) ∴  $u = 500$  نيوتن ،  $k = 300$  نيوتن

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [٩] م ب قضيب غير منتظم طوله متر يتزن من منتصفه إذا علق ثقل قدره ٣٠٠ ث جم من نقطة ج التى تبعد عن م مسافة ٢٠ سم ، وثقل قدره ٤٠٠ ث جم من نقطة س التى تبعد عن ب مسافة ١٥ سم وإذا زاد الثقل عند س حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن ب مسافة ٤٠ سم أوجد موضع تأثير ثقل القضيب ومقدار وزنه

الوجه



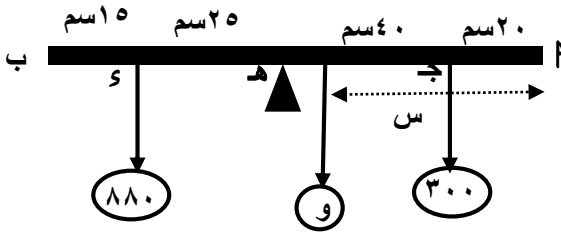
بفرض أن وزن القضيب (و) يؤثر فى نقطة

تبعد (س) سم عن م

فى الحالة الاولى :

$$ج = ٠ = ٣٠ \times ٣٠٠ - ٤٠ \times ٤٠٠ + (س - ٥٠) \times ٥٠ \therefore ٠ = ٣٥ \times ٤٠٠ + (س - ٥٠) \times ٥٠ \Rightarrow (١)$$

فى الحالة الثانية :



$$ج = ٠$$

$$٠ = ٢٥ \times ٨٨٠ + (س - ٦٠) \times ٤٠ \therefore ٠ = ٢٥ \times ٨٨٠ + (س - ٦٠) \times ٤٠$$

$$٦٠ - و - و = ١٠٠٠٠ \Rightarrow (٢) \text{ بالطرح}$$

$$١٠ و = ٥٠٠٠ \therefore ٥٠٠ = و \text{ ث جم بالتعويض فى (١)}$$

$$٥٠٠ \times ٥٠ - ٥٠٠ = ٥٠٠ \therefore س = ٤٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ وزن القضيب } ٥٠٠ \text{ ث جم ويبعد عن م مسافة } ٤٠ \text{ سم}$$

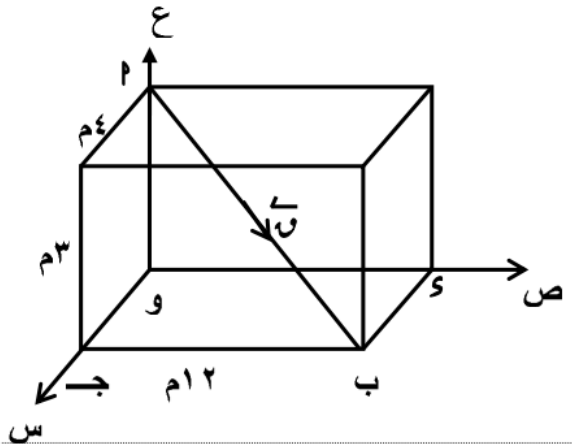
[١٠] فى الشكل المقابل:

قوة  $\vec{Q}$  مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر

م ب فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣ م ، ٤ م ، ١٢ م

كما بالشكل أوجد عزم القوة  $\vec{Q}$  حول النقطة س

الوجه



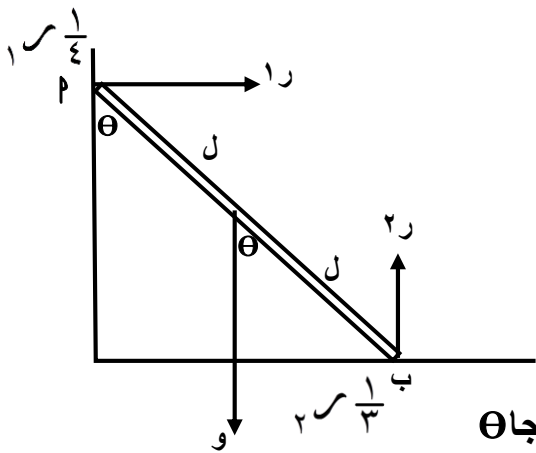
$$م (٣، ٠، ٠)، ب (٠، ١٢، ٤)، س (٠، ١٢، ٠) \therefore \vec{MB} = (٣ - ٠، ١٢ - ٠، ٤ - ٠)$$

$$\vec{r}_{SB} = (٣، ١٢ - ٠، ٠) = \vec{r}_{SB} \therefore \vec{r}_{SB} = \frac{(٣ - ٠، ١٢ - ٠، ٤ - ٠)}{\sqrt{١٤٤ + ١٦ + ٩}} \times ١٣٠ = \vec{Q}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{v} & \vec{e} \\ 3 & 12 & 0 \\ 30 & 120 & 40 \end{vmatrix} = (30, 120, 40) \times (3, 12, 0) = \vec{u} \times \vec{s} = \vec{e} \therefore$$

$$120\vec{v} + 480\vec{e} =$$

[١١] قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط  $\frac{1}{4}$  ومعامل الاحتكاك بين القضيب والأرض  $\frac{1}{3}$  فإذا اتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق



∴ القضيب على وشك الانزلاق ، بفرض طول القضيب =  $l$

$$\therefore R_1 = \frac{1}{3}R_2, \quad R_2 = \frac{1}{4}R_1 + W \quad (1)$$

ج ب = ٠

$$\therefore W \times l \sin \theta - R_1 \times l \cos \theta - R_2 \times l \sin \theta = 0 \quad \text{ج ا} \div$$

$$\therefore W - R_2 \cos \theta - R_1 \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\text{من (1) } \therefore R_2 = \frac{1}{3}R_1 + W \quad \therefore R_1 = \frac{1}{4}R_2 \quad \therefore \frac{1}{4}R_2 = \frac{1}{3}R_2 + W \quad \text{بالتعويض فى (2)}$$

$$\therefore W - R_2 \cos \theta - \left( \frac{1}{4}R_2 \right) \sin \theta = 0 \quad \therefore W = R_2 \left( \cos \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \right)$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sin \theta = \cos \theta \quad \therefore \tan \theta = \frac{1}{4}$$

[١٢] م ب ج د متوازي أضلاع فيه  $m = 16$  سم ، مساحته  $160$  سم<sup>٢</sup> وأثرت قوى مقاديرها  $8$  ،  $5$  ،  $8$  نيوتن فى م ب ، ج ب ، ج د ، د م على الترتيب فإذا كان  $u$  (د ج)  $\theta$  أوجد:

١ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين  $5$  ،  $8$  نيوتن عندما  $\theta = 60^\circ$

٢ قيمة  $\theta$  إذا كان معيار عزم الازدواج المحصل يساوى  $40$  نيوتن.سم ويعمل فى اتجاه م د ج

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

∴ مساحة متوازى الاضلاع = ١٦٠ ∴ هـ = ١٠ سم

∴ القوتان (٨ ، ٨) يكونان ازدواج معيار عزمه = ٨ × ١٠ = ٨٠

١ عند  $\theta = 60^\circ$  ∴ ب و = ١٦ جا  $\sqrt{3} \times ٨ = ٦٠$  سم

∴ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن =  $\sqrt{3} \times ٤٠$

٢ ∴  $٨٠ = ٤٠ - ٥ \times ب و$  ∴ ب و = ٨ سم ∴ جا  $\theta = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$  ∴  $\theta = 30^\circ$  ،  $\theta = 150^\circ$

**[١٣]** صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين  $٢$  ب ج فيه  $٢$  ب =  $٢$  ج ،  $٢$  س هو ارتفاع المثلث وطوله ٤ سم رسم مستقيم مواز للقاعدة  $ب ج$  ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع  $٢$  ب ،  $٢$  ج فى النقطتين هـ ، و على الترتيب أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب ج و يقع على  $٢$  س ويبعد ٧ سم عن نقطة س

الحل:

**حاول بنفسك** تم حل رقم (٣) فى دليل التقويم

(بوكلت ٣)

**[١٤]** فى الشكل المقابل:

$٢$  قضيب مهمل الوزن تؤثر القوى التى مقاديرها

٣ ، ٥ ، ٥ ، ٥ نيوتن فى النقط  $٢$  ب ، ج ، س

على الترتيب فى الاتجاهات المبينة فإذا كانت مجموعة القوى تؤول إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى ٣٦ نيوتن. سم فأوجد قيمة كل من ٥ ، ٣

الحل:

∴ المجموعة تؤول الى ازدواج ∴  $٠ = ح$  ∴  $٥ + ٣ = ٥ + ٣$  ∴  $٢ + ٣ = ٥ + ٣$  ∴  $٢ = ٥$  (١)

ج،  $٣٦ = ٣ \times ١٨ + ٥ \times ١٢ + ٥ \times ٦$  ∴  $٣٦ = ٥٠ + ٦٠ + ٣٠$  ∴  $٣٦ = ١٤٠$  نيوتن

**[١٥]** وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٣٠ نيوتن ويكون على وشك الحركة لأسفل عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٢٠ نيوتن

أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل:

**حاول بنفسك**

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) [١٦] م ب ج د مستطيل فيه م ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم ، هـ  $\supset$  ب ج حيث ب هـ = ٣ سم أثرت قوى مقاديرها ٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٥ نيوتن فى الاتجاهات م ب ، ج ب ، م ج ، هـ م على الترتيب

١ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة م حيث م نقطة تقاطع قطرى المستطيل

٢ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة د

الحل:

حاول بنفسك

[١٧] تؤثر القوة م فى النقطة م (-٣ ، ٢) فإذا كان عزم م حول كل من النقطتين ب (٣ ، ١) ،

ج (-١ ، ٤) يساوى ٢٨ ع أوجد م

الحل:

$$\therefore \text{ج ب} = \text{ج د} = ٢٨ \text{ ع} \therefore \overrightarrow{\text{م}} // \overrightarrow{\text{ب ج}} \therefore \overrightarrow{\text{ب ج}} = (-٤ ، ٣) \therefore \text{نفرض } \overrightarrow{\text{م}} = (-٤ \text{ ك} ، ٣ \text{ ك})$$

$$\therefore \text{ج ب} = ٢٨ \text{ ع} \therefore \overrightarrow{\text{ب م}} \times \overrightarrow{\text{م}} = (-٦ ، ١) \times (-٤ \text{ ك} ، ٣ \text{ ك}) \therefore -١٨ \text{ ك} + ٤ \text{ ك} = ٢٨$$

$$\therefore \text{ك} = -٢ \therefore \overrightarrow{\text{م}} = (-٨ ، -٦)$$

[١٨] م ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠ سم يرتكز بطرفه م على مستوى أفقى خشن ، ويرتكز عند إحدى نقطة ج على وتد أملس يعلوه ٢٥ سم عن المستوى الأفقى ، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠ ° أوجد رد فعل الوتد وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى علماً بأن القضيب يقع فى مستوى رأسى

الحل:

حاول بنفسك

[١٩] م ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠ ، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات م ب ، د ج أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى م ، ج وخط عملها يوازيان القطر ب د وتكونان ازدواجاً متكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين

الحل:

حاول بنفسك

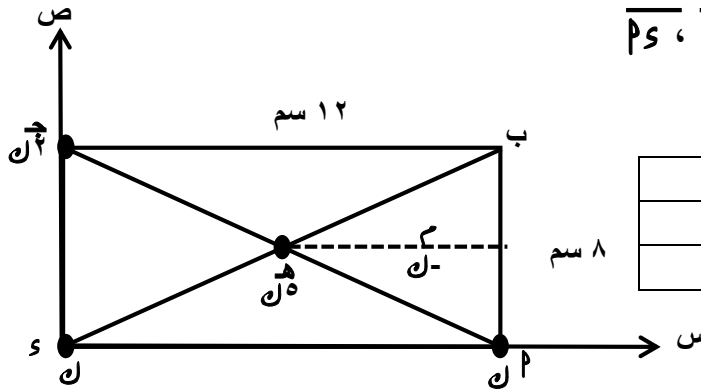
[٢٠] م ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ١٥ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند م والآخر عند نقطة ج على بعد ٣٠ سم من ب

أوجد الثقل الذى يمكن تعليقه من الطرف ب من القضيب

١ ليكون قيمة رد فعل الحامل عند ج مساويا خمسة أمثال قيمة رد فعل الحامل عند م

## حاول بنفسك

[٢١] صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة كتلتها ٤ ك على هيئة المستطيل م ب ج د الذى فيه م ب = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم ، وصل قطراه فتقاطعا فى ه ثم فصل المثلث م ب ه وثبتت الكتل ل ، ٢ ل ، ل عند الرؤوس م ، ج ، د ، ه على الترتيب عين بعد مركز ثقل المجموعة عن كل من د ج ، د س



الكتلة	ك	ك	ك	ك	ك
س	٠	١٢	٠	٦	١٠
ص	٠	٠	٨	٤	٤

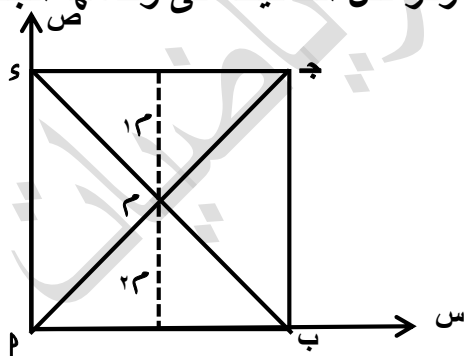
$$س = \frac{١٠ \times ل - ٦ \times ل٥ + ٠ \times ل٢ + ١٢ \times ل + ٠ \times ل٤}{٨ ل} = ٤$$

$$ص = \frac{٤ \times ل - ٤ \times ل٥ + ٨ \times ل٢ + ٠ \times ل + ٠ \times ل٤}{٨ ل} = ٤$$

∴ مركز الثقل يبعد ٤ سم عن كل من د ج ، د س

(بوكلت ٤)

[٢٢] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل المربع م ب ج د الذى طول ضلعه ٣٠ سم ، م نقطة تقاطع قطريه وقطع م ج د ولصق مرة ثانية فوق م ب م أوجد مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد



$$م(١٥، ١٥)، م(٢٥، ١٥)، م(٥، ١٥)$$

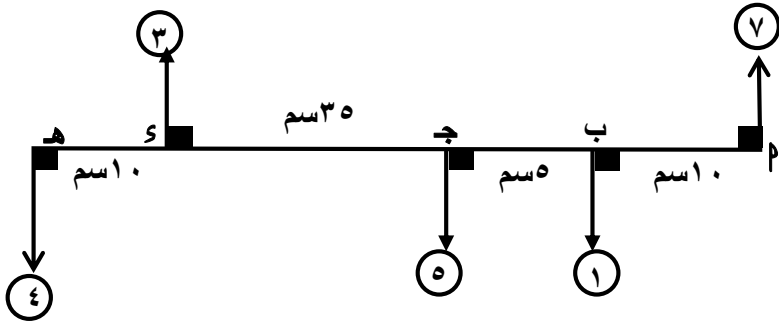
$$\text{مساحة } \Delta م ب م = \frac{١}{٤} \text{ مساحة المربع م ب ج د}$$

الكتلة	ك	ك	ك	ك
النقطة	٢	٢	٢	٢
س	١٥	١٥	١٥	١٥
ص	١٥	٥	٥	٢٥

$$س = \frac{١٥ \times ل - ١٥ \times ل٥ + ١٥ \times ل٤}{٤ ل} = ١٥، ص = \frac{٢٥ \times ل - ٥ \times ل٥ + ١٥ \times ل٤}{٤ ل} = ١٠$$



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) **[٢٣] فى الشكل المقابل:**



م ساق خفيفه مهملة الوزن تؤثر فيها

مجموعة القوى التى امامك

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج

واوجد معيار عزمه

الخطوة

$$\therefore \text{ح} = 7 - 3 - 1 - 5 = 4, \text{ج} = 10 \times 1 + 50 \times 5 - 10 \times 5 + 40 \times 4 = 170 \neq 0$$

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه  $= 170$  وحدة عزم

**[٢٤] م ب ج سلك منتظم السمك والكثافة طوله ٢٥ سم حيث و (م ب ج)  $= 90^\circ$  ، م ب  $= 15$  سم**

، ب ج  $= 10$  سم أوجد بعد مركز ثقل السلك عن الضلعين ج ب ، م ب

الخطوة

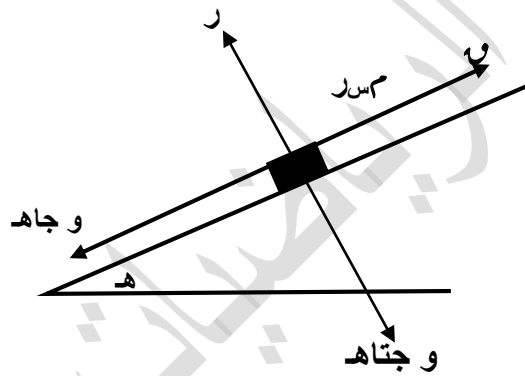
**حاول بنفسك**

**[٢٥] جسم وزنه  $10\sqrt{3}$  ث جم موضوع على مستوى مائل خشن ولو حظ أن الجسم على وشك الانزلاق اذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $30^\circ$  فإذا زيد ميل المستوى الى  $60^\circ$  واثرت على الجسم قوة مقدارها و ث جم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى تجعل الجسم فى حالة اتزان نهائى**

**أثبت أن  $10 \geq \text{و} \geq 20$  ث جم**

الخطوة

عندما يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط



$$\therefore \text{مس} = \text{ظا} 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**اقل قوة تمنع الجسم من الانزلاق:**

$$\therefore \text{و} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ر} = \text{جاه}$$

$$\therefore \text{و} = 10\sqrt{3} \times \text{جا} 60 - 10\sqrt{3} \times \text{جتا} 60$$

$$= 10 - 15 =$$

الاستاتيكا ٣ ث ٢٠١٧

## أكبر قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى:

$$9 = 10 \times \sqrt{3} + 60 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 10 \times \sqrt{3} \times 60 = 20 = 5 + 15$$

∴  $10 \geq 9 \geq 20$  ث جم

[٢٦] ج ، س حاملان ألسان البعد بينهما ٤ أمتار ارتكز عليهما قضيب م ب أفقيا بحيث م ج = ١ متر وكان الضغط على الحامل ج = ١٦٠ ث كجم وعندما ارتكز القضيب على نفس الحاملين بحيث

م ج =  $\frac{7}{4}$  متر وكان الضغط على الحامل ج = ٢٥٠ ث كجم أوجد وزن القضيب

الحل:

## حاول بنفسك

[٢٧] م ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب فيه م ب = ٢٠ سم ، و (د ج) = ٣٠ ° أخذت النقط س ⊂ م ب ،

هـ ⊂ م ج بحيث كان س م = م هـ = ١٠ سم أثرت القوى و١ ، و٢ ، و٣ ، ٥ ث كجم فى م ب ،

ب ج ، ج م ، هـ هـ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى

١٢٥  $\sqrt{3}$  ث كجم. سم ويعمل على الدوران فى الاتجاه م ب ج

٢ أوجد قيمة و٢

١ أوجد قيمة و١

الحل:

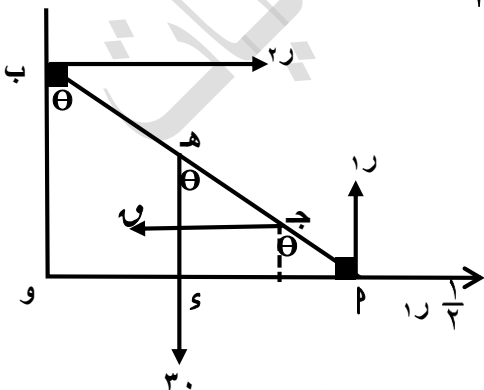
## حاول بنفسك

[٢٨] م ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن يرتكز بطرفه م على مستوى أفقى خشن ويرتكز

بطرفه ب على حائط رأسى أملس وكان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها  $\theta$  أثرت قوة أفقيه

مقدارها و١ نيوتن على القضيب عند نقطة ج بحيث م ج = ٥ سم فكان الطرف م على وشك الحركة نحو

الحائط اثبت أنه إذا كان معامل الاحتكاك بين السلم والأرض الأفقيه =  $\frac{1}{4}$  فإن و١ =  $20(1 + \theta)$



ج = ٥ سم ، م هـ = ١٠ سم

∴ القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

$$\therefore 30 = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} \Rightarrow 10 \leq 15 + 20 = 30$$

$$0 = 5 \times 10 + \theta \times 30 - 20 \times 5 \Rightarrow 0 = 50 + 30\theta - 100 \Rightarrow 30\theta = 50 \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$\therefore ١٥ + ٢٠ = ٣٥ \Leftarrow (٢) \text{ من } (١) \therefore ٣٥ = ٢٠ - ١٥ \text{ بالتعويض في } (٢)$

$$3 \div \theta \text{ ظا } 6. + 6. = 9^3 \therefore . = 6. + 9^4 - \theta \text{ ظا } 6. + 9$$

$$\therefore u = (1 + \theta \phi)^2$$

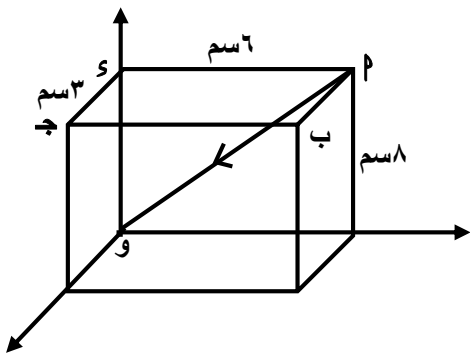
حل آخر : جب  $\theta = 0$   $\therefore 0 = 10 \times \theta - 20 \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times \theta$  جا

بالتعويض عن  $r = 1$  = ٣٠

$$\therefore 15 \times \theta - 10 \times \theta + 30 \times \theta + 20 \times \theta = 5 \times \theta$$

$$3 \div \theta \text{ ظا } 6. + 6. = 9 \text{ ظا } 3 \therefore . = 6. + \theta \text{ ظا } 12. + \theta \text{ ظا } 6. - 9.$$

$$\therefore u = (1 + \theta \phi)^2$$



**[٢٩] فى الشكل المقابل: قوة مقدارها ٢٠ نيوتن**

## تَوَثَّرَ فِي مَوْ

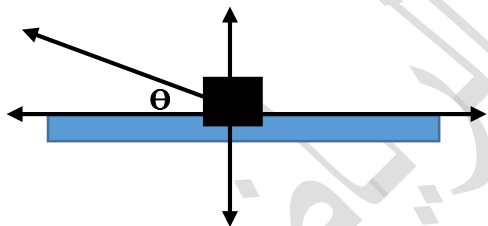
## ١ أوجد القياس الجبري لعزم القوة $\mathbf{F}$ حول النقطة $B$

٣ أوجد القياس الجبري لعزم القوة  $\vec{F}$  حول النقطة جـ

## حاول بنفسك مثل رقم (۱۰)

**[٣٠]** إذا كانت  $\theta$  هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك

السكونى يساوى ..... ( ظا ، قا ، ظتا ، قتا )



## زاوية الاحتكاك محصورة بين رد الفعل العمودي والمحصل

$$\theta_{\text{ظنا}} = (\theta - 90)_{\text{ظنا}} =$$

**[٣١] جسم وزنه ١ كجم ومعامل الاحتكاك السكوني له ٣/٤**

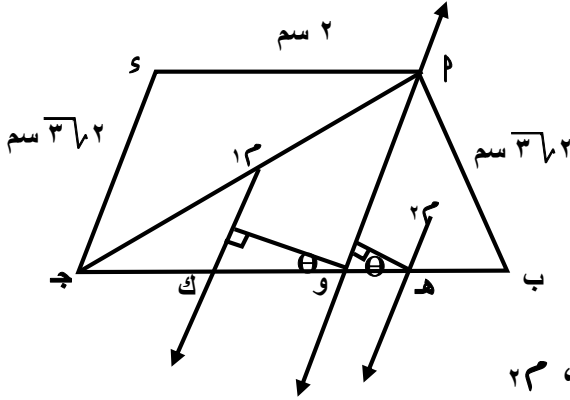
فإن رد الفعل المحصل  $\supset (\{2, 1\}, \{2\}, [2, 1], [1, 0]) \dots\dots\dots$

$$[2, 1] \ni r \therefore 2 \geq r \geq 1 \therefore \sqrt{2s+1}r \geq r \geq s \therefore$$

## دليل التقويم

[١] م ب جـ صفيحة منتظمة على شكل شبه منحرف فيه  $\overline{PM} \parallel \overline{BJ}$  ،  $s_1 = 2$  سم ،  $s_2 = 3\sqrt{2}$  سم ،  $s_3 = 2$  سم علقت الصفيحة تعليقاً حراً من م فوجد أن جـ  $\overline{J}$  يكون رأسياً فى وضع الاتزان

أثبت أن جـ ب =  $2(1 + \sqrt{2})$  سم



بفرض أن  $\overrightarrow{PM}$  و  $\overrightarrow{BJ}$  الخط الراسى المار بنقطة التعليق

$\therefore \overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{BJ}$  لان  $\overline{J}$  رأسياً

وبتقسيم الشكل الى متوازى أضلاع ومثلث مركزي ثقلهما ١ م ، ٢ م

بفرض طول ب و = س سم  $\therefore$  مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته  $\therefore$  ه منتصف  $\overline{B}$  و

، من هندسة الشكل  $\therefore$  ك منتصف و  $\overline{J}$  ،  $\therefore$  وك = كـ جـ = ١ سم

$\therefore$  مساحة  $\square$  م و جـ س : مساحة  $\triangle$  م ب و (لهم نفس الارتفاع) = وجـ : ب و = ٢ :  $\frac{1}{2}$  س = ٤ : س

$\therefore$  نفرض كتلة  $\square$  م و جـ س = ٤ ك ، مساحة  $\triangle$  م ب و = س ك

$\therefore$  الجسم متزن  $\therefore$  العزوم حول محور الدوران ينعدم

وعزم قوة حول محور = طول العمود بين خط عمل القوة و المحور  $\times$  القوة

$$\therefore ٤ ك \times ١ \times \text{جتا } \theta = س ك \times \frac{1}{2} س \text{ جتا } \theta \therefore س^2 = ٨ \therefore س = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore ب جـ = 2 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2})$$

[٢] قضيب منتظم م ب وزنه ١٥ ث كجم وطوله ٤ هـ سم يرتكز بطرفه السفلى م على حائط رأسى املس ويرتكز عند احدى نقطة جـ على وتد افقى املس مواز للحائط فإذا كان  $s_1 = 2$  سم وكان القضيب متزناً فى مستوى عمودى على الحائط

اثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو  $\frac{2}{3}$  ثم احسب مقدار رد فعل الوتد

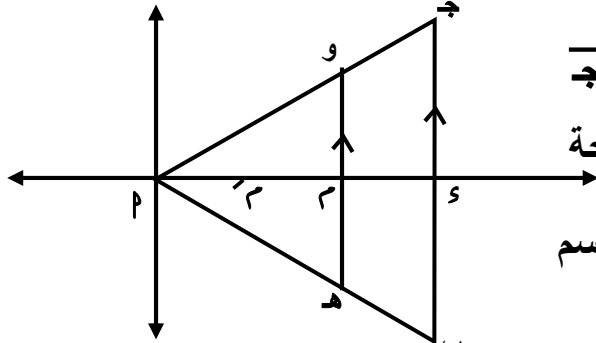
الرجوع

حاول بنفسك

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمي رياضيات)  
**[٣]** صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الساقين  $\triangle P$  ب ج فيه  $P = ٥٠$  سم ،  $SP$  هو ارتفاع المثلث وطوله  $٤٥$  سم ، رسم مستقيم مواز للقاعدة  $\overline{BC}$  ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع  $\overline{BC}$  ،  $\overline{BC}$  في النقطتين ه ، و على الترتيب

أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعي ه ب ج و يقع على  $\overline{SP}$  ويبعد  $٧$  سم عن نقطة و

الحل:



$\therefore \triangle PBC$  متساوي الساقين  $\therefore SP \perp BC$  ، و منتصف  $\overline{BC}$  ،

$SP \perp SH$  ، م منتصف  $\overline{SH}$   $\therefore$  هو ويمر بمركز ثقل الصفيحة

$\therefore$  م هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث  $\therefore MP = \frac{2}{3} \times ٤٥ = ٣٠$  سم

، م' هي نقطة تقاطع متوسطات  $\triangle PSH$   $\therefore M'P = \frac{2}{3} \times ٣٠ = ٢٠$  سم

$\therefore SH \parallel BC$   $\therefore \triangle PSH \sim \triangle PBC$  و ه ب ج

$\therefore$  مساحة  $\triangle PSH$  و ه : مساحة  $\triangle PBC = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} (SP)^2 : (MP)^2$

$\therefore$  نفرض أن مساحة  $\triangle PBC = ٩$  ك ، مساحة  $\triangle PSH = ٤$  ك

$\therefore$  مركز ثقل الشكل الرباعي ب ه و هو مركز ثقل  $\triangle PBC$  ب ج بعد رفع  $\triangle PSH$  و ه

الكتلة	٩ ك	٤ ك
س	٣٠	٢٠
ص	٠	٠

$\therefore \overline{SS'} = \frac{٣٠ \times ٩ - ٢٠ \times ٤}{٩ - ٤} = ٣٨$   $\therefore$  مركز ثقل الشكل الرباعي يبعد عن م مسافة  $٣٨$  سم

$\therefore$  يبعد عن و مسافة  $٤٥ - ٣٨ = ٧$  سم

**[٤] في الشكل المقابل :**

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث  $\triangle P$  ب ج وزنها  $١٥$  اث جرام

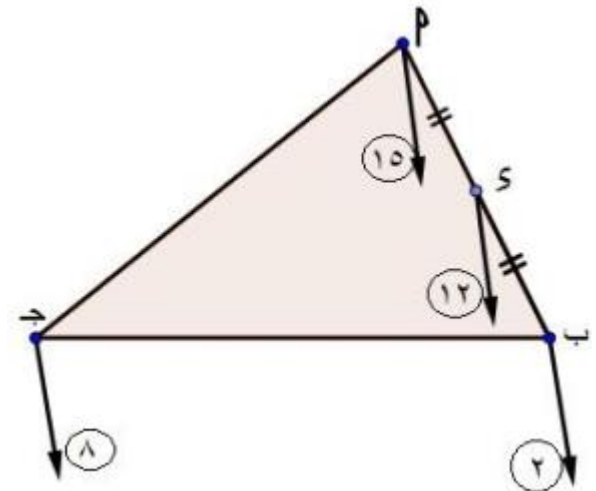
وضعت الاثقال  $١٥$  ،  $٢$  ،  $٨$  ،  $١٢$  ثقل جرام

كما هو موضح بالشكل فإذا كان م' هو مركز ثقل المجموعة

فإن .....

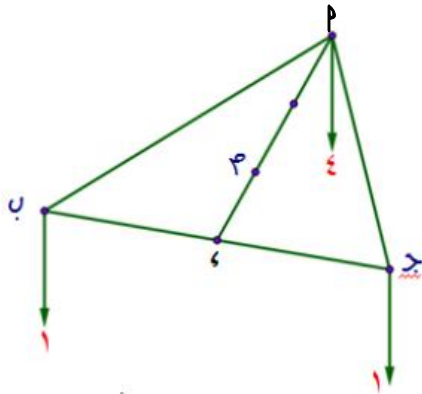
(أ) م' منتصف  $\overline{PB}$  (ب) م' منتصف  $\overline{BC}$

(ج) م' نقطة تلاقي متوسطات  $\triangle PBC$





## لاتنسى تكرار (ش ٢) لان الشد على طرفى البكرة الملساء متساوى



[٧] إذا وضعت الأثقال ٤ ، ١ ، ١ ث كجم عند رؤوس المثلث AB ج فإن مركز هذه الأوزان هو .....

حيث  $\overline{PM}$  متوسط في مثلث AB ج ، م هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث

(أ) نقطة م (ب) نقطة منتصف  $\overline{PM}$

(ج) نقطة س ، نقطة منتصف  $\overline{SM}$

الحل:

## حاول بنفسك

[٨] فى الشكل المقابل AB ج مثلث ، م نقطة تلاقى متوسطات  $\triangle AB ج$

القوة ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ قوى متوازية وفى اتجاه واحد تقع خط عملها فى

مستوى المثلث فإذا كان طول المتوسط  $\overline{JM} = ٣٠$  سم فإن محصلة هذه

القوى تؤثر فى نقطة تبعد عن ج مسافة = ..... سم

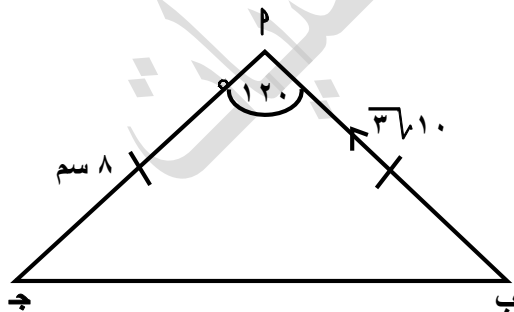
(١٦ ، ١٥ ، ١٠ ، ٥)

الحل:

نلاحظ محصلة القوتين ١ ، ٢ مقدارها ٢ و وتؤثر فى س . محصلة القوى ١ ، ٢

وبفرض انها تبعد عن ج مسافة س سم ، مجموع عزوم القوى حول ج يساوى عزم المحصلة عندها

$$\therefore ١٠ - ١ \times س = ٢ \times ٣٠ - ٣ \times ٥ \times \frac{٢}{٣} \times س \therefore ١٦ = س$$



[٩] فى الشكل المقابل : AB ج مثلث فيه AB = ج ،  $\angle B = ١٢٠^\circ$

تؤثر القوة  $٣\sqrt{١٠}$  نيوتن فى  $\overline{PM}$  فإن القياس الجبرى لعزم القوة

$٣\sqrt{١٠}$  حول النقطة ج يساوى ..... نيوتن.سم

[  $٣\sqrt{٨٠}$  ،  $٣\sqrt{٨٠}$  ،  $١٢٠$  ،  $-١٢٠$  ]

الحل:



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\therefore J = \sqrt{10} \times \sqrt{4} = 20 \text{ نیوٹن.سم}$$

**[١٠] ب ج د** صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ سم ووزنها ٦٠٠ ث جم معلقة بمسار أفقى عند م بحيث يكون مستواها رأسيًا. فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٦٠٠٠ ث جم. سم. أوجد فى وضع التوازن ميل الصفيحة ب ج على الرأس إذا علم أن وزن الصفيحة يؤثر فى نقطة تقاطع القطرين.



## حاول بنفسک

**[١١]** تؤثر القوات  $ق_1 = ٢ س_٢ - ٣ ص_٢$  ،  $ق_٢ = ٤ س_٢ - ٦ ص_٢$  في النقطتين  $م(١، ٣)$  ،  $ب(٤، ٩)$  على الترتيب فإن نقطة تأثير المحصلة هي.....  $[ (٥، ١٢) ، (٥، ١٢) ، (٢، ٥) ، (٣، ٧) ]$



$$\| \mathbf{v}_2 \| = \sqrt{2} \quad , \quad \| \mathbf{v}_1 \| = 1$$

∴ نقطة تاثير المحصلة تقسم  $\overline{AB}$  بنسبة  $1\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 1 : 2$

$$(7, 3) = \frac{(9, 4)2 + (3, 1)}{2+1} = \text{نقطة تاثير المحصلة}$$

**[١٢]** إذا كانت:  $\overline{ج} // \overline{ب} \Rightarrow \overline{أب} \perp \overline{جأ}$  وكان  $\overline{جأ} = \overline{جب} + ١٢$   $\overline{ع} \text{ فإن } \overline{جأ} = \overline{ع} \dots\dots$   
 ( ١٢ ، ٦ ، ٦ - ، ٤ )



$\overline{E} = \overline{f} = \overline{g} \therefore \overline{f} // \overline{g} \therefore \overleftrightarrow{AB} \supset \overline{g} \therefore, \overline{E} = \overline{f} = \overline{g} \therefore \overline{f} // \overline{g} \therefore$

**[١٣]** إذا كانت  $\overline{1} = \overline{6} + \overline{3}$  وتؤثر في نقطة  $p = (1, -3)$  ،  $\overline{2} = \overline{4} - \overline{5}$  وتؤثر في النقطة  $ب = (2, 5)$  ،  $\overline{3} = \overline{5} - \overline{5}$  وتؤثر في النقطة  $ج = (4, -1)$

**أثبت أن** المجموعة تكافئ ازدواج وعين معيار عزمه



$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{h} \therefore$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) + (x_3, y_3) \times (x_4, y_4) = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{r_5} ::$$

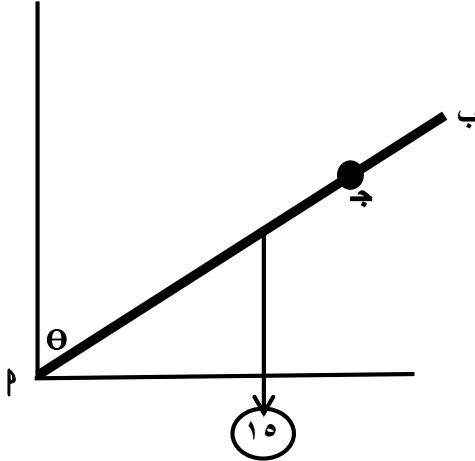
$\therefore \text{المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه } 17 = \overline{e}(12+9) + \overline{e}(6+8) = 17$

**[١٤]** إذا كانت القوة  $\vec{F} = k\vec{s} + \epsilon\vec{v} - \gamma\vec{v}$  تؤثر في نقطة  $m(1, 2, 3)$  وكان مركبة عزم القوة  $\vec{L}$  حول محور الصادات يساوي  $7$  وحدة عزم فإن  $k = \dots$  (٢، ٢-، ٣، ١-)

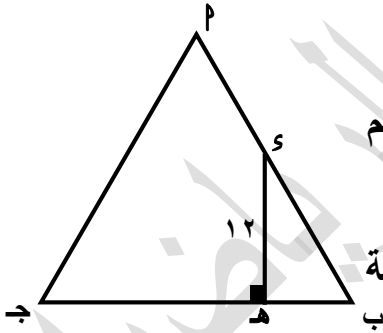
$$\therefore \begin{vmatrix} \vec{SE} & \vec{SV} & \vec{SE} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -14\vec{SE} - (3 - 1)\vec{SV} + (2 - 4)\vec{SE}$$

$$\therefore \text{العزم حول محور ص} = 7 \therefore 1 + 3 = 7 \therefore 2 = 7$$

**[١٥]** قضيب منتظم  $\overline{AB}$  وزنه ١٥ ث كجم وطولة ٥٤ سم يرتكز بطرفه السفلى  $P$  على حائط رأسى أملس ويرتكز عند احدى نقطة  $J$  على وتد أفقى أملس مواز للحائط أثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو  $\frac{2}{3}$  ثم احسب مقدار رد فعل الوتد



**[١٦]**  $P$  ب ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ،  $S$  منتصف  $\overline{AB}$  رسم  $\overline{SH} \perp \overline{BC}$  يقطعه فى  $H$  ، اثرت القوة  $10$  ،  $20$  ،  $30$  فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوة تساوى  $3\sqrt{12}$  نيوتن وخط عملها  $\overline{SH}$  أوجد هذه القوة مقداراً واتجاهها



$$P \text{ ب } H = 10 \text{ جتا } 60 = 5 \text{ سم} \therefore H \text{ ج } = 15 \text{ سم} \therefore SH = 3\sqrt{5} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ارتفاع المثلث} = 20 \text{ جا } 60 = 10\sqrt{3} \text{ سم}$$

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

$$\therefore \text{باخذ العزوم حول ب} \therefore 3\sqrt{12} \times 10 = 5 \times 3\sqrt{12}$$

$$\therefore 20 = 6 \text{ نيوتن وتعمل فى اتجاه } \overrightarrow{AB}$$

$$\text{بالمثل باخذ العزوم حول ج} \therefore 15 \times 3\sqrt{12} = 10 \times 3\sqrt{12}$$

$$\therefore 18 = 10 \text{ نيوتن وتعمل فى اتجاه } \overrightarrow{AB}$$

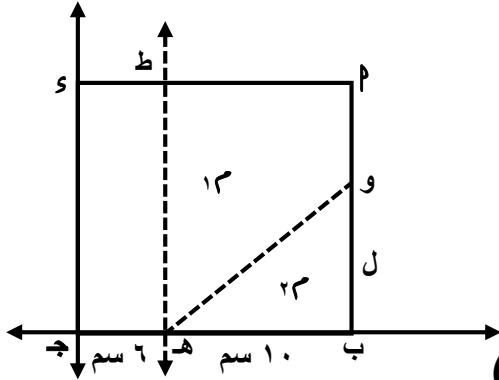
$$\text{باخذ العزوم حول P ونرسم عمود من S على } \overline{AB} \text{ فيكون طوله } 10 \text{ جا } 60 = 3\sqrt{5} \text{ سم}$$

$$\therefore 0 = 3\sqrt{5} \times 18 + 3\sqrt{5} \times 30 \therefore 6 = 30 \text{ نيوتن وتعمل فى اتجاه } \overrightarrow{AB}$$



## كتاب المدرسة

[١] صفحية رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل  $PM$  ب ج د و فيه  $PM = 25$  سم ، ب ج د =  $16$  سم فرضت نقطة ه  $\in$  ب ج ، و  $\in$  ب م بحيث ب ه =  $10$  سم ، ثم فصل  $\Delta$  ب ه و و وضعت الصفيحة فى مستوى رأسى بحيث انطبق حرفها ج ه على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول ه ، أوجد طول ب و



$$\frac{80}{L} = \frac{16 \times 25}{L \times 10 \times \frac{1}{2}} = \frac{\text{مساحة المستطيل } PM \text{ ب ج د}}{\text{مساحة } \Delta \text{ ب ه و}}$$

نفرض كتلة المستطيل =  $80$  ل ، كتلة  $\Delta$  =  $L$  ل

∴ الجسم على وشك الدوران حول ه (كأن ه هى نقطة التعليق)

∴ الاحداثى السينى لمركز الثقل =  $6$  ∴  $13 = \left( \frac{25}{2}, 8 \right)$  ، ب  $(0, 16)$  ، ه  $(0, 6)$  ، و  $(16, L)$

$$\therefore 13 = \left( \frac{L + 0 + 0}{3}, \frac{16 + 16 + 6}{3} \right) = \left( \frac{L}{3}, \frac{38}{3} \right)$$

$$13 = \frac{\frac{38}{3} \times L - 8 \times 80}{L - 80} \quad \therefore L = 24 \quad \therefore \text{ب و} = 24 \text{ سم}$$

## حل آخر:

∴ الجسم على وشك الدوران حول ه ∴ مركز ثقل المجموعة يقع على الخط المستقيم المار ب ه ∴ العزوم حول ه =  $0$  وملاحظة الصفيحة رأسية وكان ج ه أفقى ∴ الاوزان رأسية عمودية على ج ه

$$0 = (6 - 8) \times 80 + L \times \left( 6 - \frac{38}{3} \right) \quad \therefore L = 24 \quad \therefore \text{ب و} = 24 \text{ سم}$$



[٢] (اختبار ١) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة

اتزان فإن و = ..... نيوتن (٤ ، ٢ ، ١٦ ، ٢٨)

باخذ العزوم حول نقطة الارتكاز (لوجود رد الفعل)

$$16 = 0 \quad \therefore 0 = 2 \times 12 - 4 \times 20$$

من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانو  
[٣] فى الشكل المقابل:

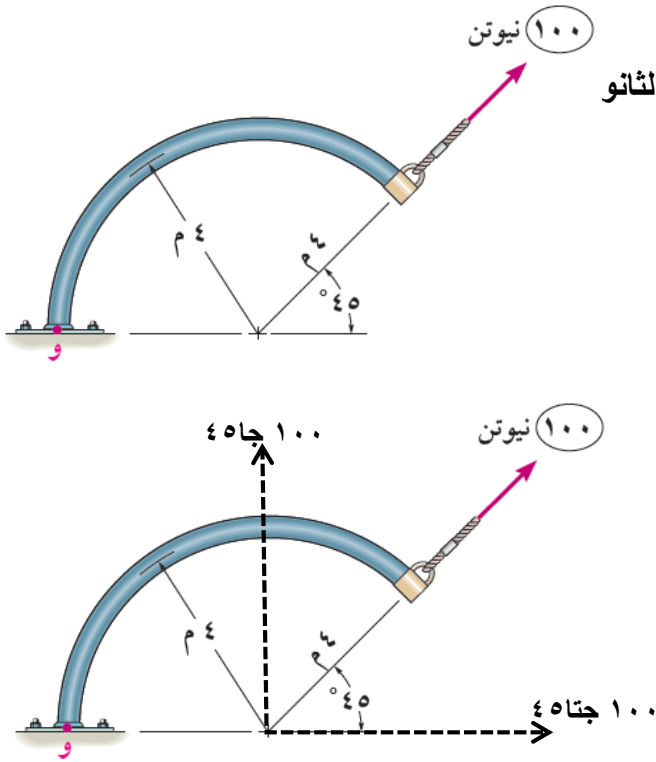
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول و

الحل:

بتحليل القوة الى مركبتين

$$\therefore ج و = ١٠٠ جتا ٤٥ + ١٠٠ جا ٤٥ \times ٤$$

$$= ٢٠٠\sqrt{٢} \text{ نيوتن.متر}$$



[٤] فى الشكل المقابل

أوجد عزم القوة و = ١١٧,١٥ نيوتن حول نقطة و

الحل:

من هندسة الشكل احداثيات النقط

$$أ(١٥, ٠, ٠), ب(١٥, ٥, ٥-), و(٠, ٥, ٥-)$$

$$\therefore \vec{أب} = (١٥-٠, ٥-٠, ٥-٠) = (١٥, ٥, ٥-)$$

$$\vec{و} = \frac{\vec{أب}}{\|\vec{أب}\|} \times ١١٧,١٥ = \frac{(١٥-٠, ٥-٠, ٥-٠)}{\sqrt{٢٢٥+٢٥+٢٥}} \times ١١٧,١٥ = (٤٥-, ١٥, ١٥-)$$

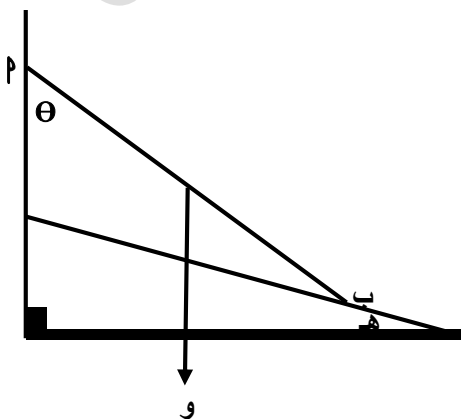
$$\vec{ج} = \vec{و} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١٥ & ٠ & ٠ \\ ٤٥- & ١٥ & ١٥- \end{vmatrix} = (١٥-١٥, ١٥+١٥, ٠) = (٠, ٣٠, ٣٠)$$

[٥] فى الشكل المقابل تركز احدى نهايتى سلم منتظم

وزنه (و) على حائط رأسى أملس وتركز النهاية الاخرى على ارض

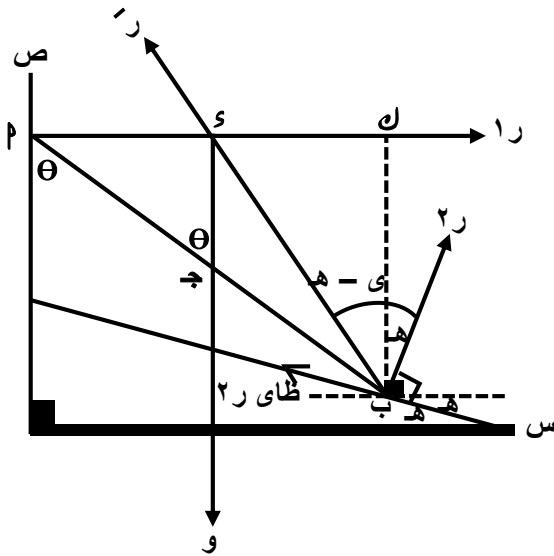
خشنة تميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم

على وشك الانزلاق وهو فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع



من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات) الحائط مع الارض

أثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها  $\theta$  حيث  $\theta = 2\alpha$  (ى - هـ) حيث  $\alpha$  زاوية الاحتكاك



### ∴ الجسم متزن تحت تاثير ثلاث قوى

**تقاطع خط عمل قوة الوزن ورد الفعل العمودي على الحائط**

**∴ رد فعل المستوى الخشن يمر بنقطة التقاطع**

### (٥) محصورة بين رد الفعل العمودي على المستوى

**ورد الفعل المحصل** ∴  $u(لَب س) = س - ي$

$$\therefore \text{ظا (ی - ه)} = \frac{\text{لج}}{\text{لج}} \leftarrow (1)$$

$$\therefore s = s_1, \quad \frac{1}{2} \text{ ب } = \frac{s_1}{s} = \theta, \quad \frac{s}{\frac{1}{2} \text{ ب}} = \frac{s_1}{s} = \theta \quad (2) \text{ من } (1), (2)$$

**∴ ظا = θ = ظا<sup>۲</sup> (ی - ه)**

## حل اخر:

## بتحليل مرکبتي رد فعل المستوی الخشن عند ب

**وبفرض طول السلم = ٢ل**

، ∴ السلم متزن ∴ ۲ جتاه + ظای ۲ جاه = و

$$(۱) \Leftarrow \frac{۹}{\text{جناح} + \text{جاه‌زای}} = ۲۷ \therefore$$

۱، ۲ + ۲ جای = ۲ جای ۲ جتاھ .∴ ۱ = ۲ ( ۲ جای جتاھ - ۲ جای ) ≤ ( ۲ )

$$\text{جے} = ۰ \therefore ۰ \times \text{ل جتا} - \text{ر} \times \text{ل جتا} = ۰ \div \text{ل جتا} \theta$$

∴ و ظا  $\theta = r_2 - r_1$  ∴  $\frac{1}{p} = r_1$  و ظا  $\theta \leftarrow (3)$  من (1) ، (3) بالتعويض في (2)

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ و ظا } \theta = \frac{\text{و}}{\text{جهاه} + \text{جهاضای}} (\text{ظای جتا ه - جا ه}) \div \text{و}$$

∴ ظا θ (جتاه + جاه ظای) = ۲ (ظای جتاه - جاه)





من اعداد الاستاذ/ربيع فايد عبدالعليم معلم خبير (مدرسة كحك الثانوية) الصف الثالث الثانوى (علمى رياضيات)

$$\therefore \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SO} - \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SO} \leftarrow (1)$$

$$\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OJ} \times \overrightarrow{OQ},$$

$$= (1, 2) \times (5, -3) + (3, -2) \times (3, -5) + (-4, 6) \times (2, -3) =$$

$$= (-10 - 4) + (9 - 10) + (-8 - 12) = -24 \neq \overrightarrow{SO} \leftarrow (2)$$

من (1)، (2)  $\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه  $= 15$  وحدة عزم

**[3]** صفيحة رقيقة منتظمة على شكل شبه منحرف  $PM$  ب ج د و متساوى الساقين فيه:

$\overline{PM} \parallel \overline{JD}$ ،  $PM = 2$  ب ج د  $= 20$  سم، ج د  $= 8$  سم عين مركز ثقل الصفيحة،

إذا وضعت الصفيحة رأسياً بحيث انطبق حرفها ج د على نضد أفقى فأثبت أن أكبر ثقل يمكن تعليقه من

الرأس  $M$  يجعل الصفيحة على وشك الدوران يساوى  $\frac{2}{3}$  وزن الصفيحة

