ادارة الخليفة والمقطم التعليمية

منتدى توجيه الرياضيات

# الرياضيات

# التفاضل

## الصف الثانى الثانوى

## القسم العلمى

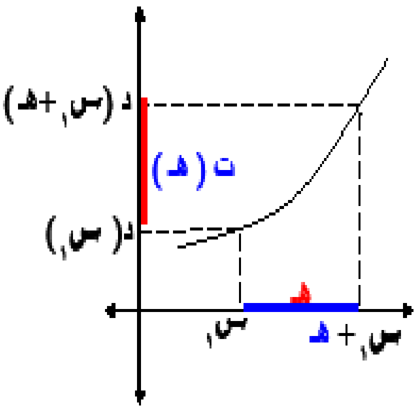
## الفصل الدراسى الثانى

تقديم

م/عادل إدوار

# دالة التغير – دالة متوسط التغير – معدل التغير

## دالة التغير:




نفرض أن: ص = د ( س ) حيث د : [ ٵ ، ب ] ⟵ ح

ونفرض أن ص قد تغيرت من ص١ إلى ص٢ حينما

تغيرت س من س١ إلى س٢ حيث س١ ، س٢ ∋ [ ٵ ، ب ]

فإذا كان هـ هو مقدار التغير فى الإحداثى السينى

فإن : هـ = Δ س = س٢ ـ س١ ⟸ س٢ = س١ + هـ

ولكن ص١ = د (س١) ، ص٢ = د (س٢) = د ( س١ + هـ )

∵ مقدار التعير فى الإحداثى الصادى = Δ ص = ص٢ ـ ص١

∴ التعير فى الإحداثى الصادى = د ( س١ + هـ ) ــ د ( س١ ) يتغير المقدار بتغير هـ

تسمى الدالة " دالة التعير " ت ( هـ ) = د (س١ + هـ ) – د (س١ )

***********************************************************

**مثــ١ــال :** إذا كانت د ( س ) = ٣ س ـ ٢ فأوجد : دالة التغير فى د عند س = ١ ثم أوجد كلا من : ت ( ٠,٢ ) ، ت ( ـ ٠,٥ )

**الحــــــــــــل**

∵ د ( س ) = ٣ س ـ ٢

∴ د ( ٣ ) = ٣ × ١ ـ ٢ = ١

، د ( ١ + هـ ) = ٣ × ( ١ + هـ ) ـ ٢ = ٣ + ٣ هـ ـ ٢ = ١ + ٣ هـ

∴ ت ( هـ ) = د ( ١ + هـ ) – د ( ١ ) = ١ + ٣ هـ – ١ = ٣ هـ

∴ ت ( ٠,٢ ) = ٣ × ( ٠,٢ ) = ٠,٦

، ت (ـ ٠,٥) = ٣ × ( ـ ٠,٥ ) = ـ ١,٥

**دالة متوسط التغير:** بقسمة دالة التغير ت ( هـ ) على التغير فى س وهو هـ حيث هـ ≠ صفر نحصل على دالة تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = س$_1$ " م (هـ )

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

*************************************************************

**مثـــ٢ـــال : إذا كانت د ( س ) = س$^2$ ــ ٨ س + ١٥ فأوجد : متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٢**

**الحــــــــــــــــــل**

∵ د ( س ) = س$^2$ ــ ٨ س + ١٥ ، عندما تتغير س من ٢ إلى ٢.٢ ∴ هـ = ٠.٢

∴ د ( س$_1$ ) = د ( ٢ ) = ٤ ــ ١٦ + ١٥ = ٣

∴ د ( س$_1$ + هـ ) = د ( ٢ + هـ ) = ( ٢ + هـ )$^2$ ــ ٨ × ( ٢ + هـ ) + ١٥

∴ د ( ٢ + هـ ) = ٤ + ٤ هـ + هـ$^2$ ــ ١٦ ــ ٨ هـ + ١٥ = هـ$^2$ ــ ٤ هـ + ٣

∴ ت ( هـ ) = د (س$_1$ + هـ ) ــ د (س$_1$ ) = هـ$^2$ ــ ٤ هـ + ٣ ــ ٣ = هـ$^2$ ــ ٤هـ

$$∵ م(هـ) = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{هـ^2 - ٤ هـ}{هـ} = هـ - ٤$$

∴ متوسط التغير م ( هـ ) = ٠,٢ ــ ٤ = ــ ٣,٨

*************************************************************

**معدل التغير :** عندما تقترب ( هـ ) من الصفر قد يكون بها نهاية محددة ، كما أنه من المحتمل ألا توجد لها نهاية . إذا كانت م ( هـ ) إلى نهاية محددة عندما هـ ← ٠

فإن : هذه النهاية تسمى "معدل تغير الدالة د عند النقطة س$_1$"

$$∴ \text{معدل التغير للدالة عند } س_1 = \lim_{س \to ٠} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

*************************************************************

**مثـ٣ـــال : إذا كانت د ( س ) = س$^{٢}$ ــ ٣ س + ٤ فأوجد : دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم أحسب ت ( ٠,٥ )**

## الحــــــــــل

∵ د ( س ) = س$^{٢}$ ــ ٣ س + ٤

∴ د ( ٣ ) = ٣ $^{٢}$ ــ ٣ × ٣ + ٤ = ٤

، د ( ٣ + هـ ) = ( ٣ + هـ )$^{٢}$ ــ ٣ × ( ٣ + هـ ) + ٤

= ٩ + ٦ هـ + هـ$^{٢}$ ــ ٦ ــ ٣ هـ + ٤ = هـ$^{٢}$ + ٣ هـ + ٤

∴ ت ( هـ ) = د ( ٣ + هـ ) ــ د ( ٣ ) = هـ$^{٢}$ + ٣ هـ + ٤ ــ ٤ = هـ$^{٢}$ +٣ هـ

∴ ت ( ٠,٥ ) = ( ٠,٥ )$^{٢}$ + ٣ × ( ٠,٥ ) = ١,٧٥

*******************************************************

**مثـــ٤ـــال : إذا كانت د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ + ٥ س ــ ١ فأوجد : متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٤ إلى ٥,٥**

## الحــــــــــل

∵ د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ + ٥ س ــ ١ ، عندما تتغير س من ٤ إلى ٥.٥

فإن : س$_{١}$ = ٤ ، هـ = ٥.٥ ــ ٤ = ١.٥

∴ د ( ٤ ) = ٢ × ٤ $^{٢}$ + ٥ × ٤ ــ ١ = ٥١

، د ( ٤ + هـ ) = ٢ ( ٤ + هـ )$^{٢}$ + ٥ × ( ٤ + هـ ) ــ ١

= ٣٢ + ١٦ هـ + ٢هـ$^{٢}$ + ٢٠ + ٥ هـ ــ ١ = ٢هـ$^{٢}$ + ٢١ هـ + ٥١

∴ ت ( هـ ) = د (س$_{١}$ + هـ ) ــ د (س$_{١}$ ) = ٢ هـ$^{٢}$ + ٢١ هـ + ٥١ ــ ٥١

∴ ت ( هـ ) = ٢ هـ$^{٢}$ + ٢١ هـ

∵ م ( هـ ) = $\frac{\text{د (س}_{١}\text{+هـ) ــ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢هـ}^{٢}\text{ + ٢١ هـ}}{\text{هـ}}$ = ٢هـ + ٢١

∴ متوسط التغير م ( هـ ) = ٢ × ١,٥ + ٢١ = ٢٤

مثـــ٦ـــال : إذا كانت د (س) = س$^{٢}$ ـ ٣ س فأوجد : معدل التغير للدالة د عند س = ٢

الحـــــــــــــل

عند س = ٢ $\therefore$ م ( هـ ) = $\frac{\text{د ( ٢ + هـ ) ـ د (٢)}}{\text{هـ}}$

$\therefore$ م ( هـ ) = $\frac{\text{[ ( ٢+هـ)}^{٢}\text{ ـ ٣(٢+هـ)] ـ [(٢)}^{٢}\text{ـ ٣×٢]}}{\text{هـ}}$

= $\frac{\cancel{\text{٤}}\text{ + ٤ هـ + هـ}^{٢}\text{ ـ }\cancel{\text{٦}}\text{ ـ ٣هـ ـ }\cancel{\text{٤}}\text{ + }\cancel{\text{٦}}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ ( ١ + هـ )}}{\text{هـ}}$ = ١ + هـ

$\therefore$ معدل التغير للدالة عند س = ٢ هو

نهـــــا$_{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}$ م ( هـ ) = نهـــــا$_{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}$ (١+ هـ ) = ١

*************************************************************

مثـــ٧ـــال: صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد :

١) متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,٣ سم

٢) معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ١٥ سم

الحـــــــــــــل

بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = س سم ، مساحتها = ص = س$^{٢}$ سم$^{٢}$

، عندما يتغير طول ضلع الصفيحة س من ١٠ إلى ١٠,٣

ت(هـ) = د ( ١٠+ هـ ) ـ د(١٠) = (١٠+ هـ )$^{٢}$ = ١٠٠+ ٢٠ هـ + هـ$^{٢}$ ـ ١٠٠

$\therefore$ م ( هـ ) = $\frac{\text{د (١٠+ هـ) ـ د (١٠)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ}^{٢}\text{ + ٢٠هـ}}{\text{هـ}}$ = هـ + ٢٠

$\therefore$ متوسط التغير = ٠,٣ + ٢٠ = ٢٠,٣

عند س = ١٥ يكون :

$\therefore$ م ( هـ ) = $\frac{\text{د (١٥+ هـ ) ـ د (١٥)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢٢٥+٣٠ هـ +هـ}^{٢}\text{ـ ٢٢٥}}{\text{هـ}}$ = ٣٠ + هـ

$\therefore$ معدل التغير فى المساحة نهـــــا$_{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}$ م ( هـ ) = نهـــــا$_{\text{هـ} \leftarrow \text{٠}}$ (٣٠+هـ ) = ٣٠

# تمـــــارين

١ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ + ١ فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلي ٢,١

٢ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$+ س فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٣ إلي ٣,١

٣ )إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ + ٣س فأوجد دالة التغير عندما س = ٢ ثم إحسب ت(٠,٣)

٤ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ – ٣س + ١ فأوجد دالة التغير عندما س = ١ ثم إحسب م(٠,٥)

٥ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ + ٢ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلي ٣

٦ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$ – ٣س +١ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم إحسب مقدارالتغيرعندما تتغير من ٣ إلي ٣,٥

٧ ) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ عندما تتغير س من ١ إلي ٤ ثم إحسب معـــدل التغير عندما س = ٩

٨ ) إذا كانت د(س) = س$^{٢}$+٣ س فأوجد :م( هـ ) عندما س = ١ ثم إحسب م( ٠,٣ )

٩) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س$^{٢}$ + ١ : إحسب معدل التغيرعندما س = ١

١٠ ) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س$^{٢}$ – ٢ س ثم إحسب معدل التغير عندما س = ٢

١١) إذا كانت د(س) = ب س$^{٢}$ + حـ + ٤ حيث ب ، حـ ثابتان فاوجد قيمة كلا من ب ، حـ إذا كان د(٣) = ٤ ؛ عندما س = ٣ فإن ت ( ٠.٥) = ١.٧٥

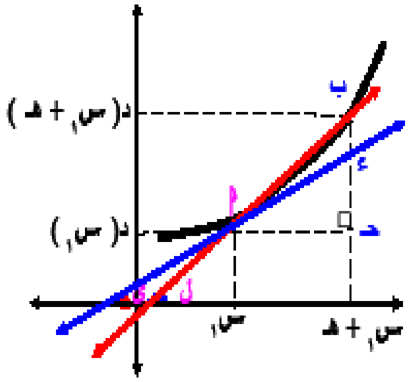
١٢) إذا كانت د(س) = $\frac{٢}{\text{س} - ١}$ فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من ١إلي١,١

١٣) إذا كانت د(س) = ب س + حـ حيث ب ، حـ ثابتان فاوجد قيمة كلا من ب ، حـ

١٤) قرص دائري يتمدد بإنتظام محتفظا بشكله أوجد متوسط التغير في مساحة سطحه عندما يزداد طول نصف قطره من ٣ إلي ٣.١ ثم إحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون طول نصف قطره مساويا ٥ سم

# التفسير الهندسى لمعدل التغير – المشتقة الأولى

## التفسير الهندسى لمعدل التغير :




نفرض أن: ص = د(س) ، أن أ ، ب نقطتان على منحنى هذه الدالة حيث: أ هى ( س$_1$ ، د ( س$_1$ ))

، ب ( س$_1$ + هـ ، د ( س$_1$ + هـ ) )

ميل $\overline{\text{أ ب}} = \dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

$\therefore \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{حـ أ}} = \dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}} = $ طا ى

فإذا كانت نقطة أ ثابتة وتحركت نقطة ب على منحنى الدالة مقتربة من أ

فإن نقطة حـ تقترب أيضا من أ

أى أن : أ حـ = هـ ← ٠ وفى الوضع النهائى يقترب المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ من الإنطباق علــى المماس $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ الذى يمس المنحنى عند نقطة أ ( س$_1$ ، د ( س$_1$ ) )

وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن : ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د ( س ) عند النقطة ( س$_1$ ، د ( س$_1$ ) )

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ = طا ل = معدل تغير الدالة عند س$_1$

## المشتقة الأولى للدالة :

المقدار $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

" أو الدالة المشتقة أو المعامل التفاضلى الأول للدالة " ويرمز بأحد الرموز

$\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{د}(\text{س})]$ أ؛ ص$'$ ؛ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أ؛ د$'$ ( س )

## قواعد الإشتقاق :

( ١ ) إذا كانت : د ( س ) = ك حيث ك ثابت فإن : د/ ( س ) = صفر

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = ٤ فإن : د/ ( س ) = صفر

، إذا كانت : د ( س ) = ــ ٧ ∴ ص/ = صفر

**********************************************************

( ٢ ) إذا كانت : د ( س ) = س$^{ن}$ حيث ن ∈ ح فإن : د/ ( س ) = ن س$^{ن - ١}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = س$^{٤}$ فإن : د/ ( س ) = ٤ س$^{٤ - ١}$ = ٤ س$^{٣}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = س$^{٧}$ فإن : د = ٧ س$^{٧ - ١}$ = ٧ س$^{٦}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = س$^{-٣}$ فإن : د/ ( س ) = ــ٣ س$^{-٣ - ١}$ = ــ٣ س$^{-٤}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = س$^{٢.٥}$ ∴ ص/ = ٢.٥ س$^{٢.٥ - ١}$ = ٤ س$^{١.٥}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = س فإن : د/ ( س ) = س$^{١ - ١}$ = ١

**********************************************************

( ٣ ) إذا كانت : د ( س ) = حـ س$^{ن}$ حيث حـ ثابت ، ن ∈ ح

فإن : د/ ( س ) = حـ ن س$^{ن - ١}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = ٩ س فإن : د/ ( س ) = ٩ × ١ = ٩

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = ٥ س$^{٤}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ × ٤ س$^{٣}$ = ٢٠ س$^{٣}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = $\frac{١}{٢}$ س$^{٦}$ فإن : د/ ( س ) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ س$^{٥}$ = ٣ س$^{٥}$

مثـال : إذا كانت : د ( س ) = ٨ س$^{-٢}$ ∴ ص/ = ٨ × (ــ٢) س$^{-٣}$ = ــ١٦ س$^{-٣}$

مثـــال : إذا كانت : د ( س ) = ٦ س$^{\frac{١}{٢}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ × $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ = ٣ س$^{-\frac{١}{٢}}$

**********************************************************

( ٤ ) إذا كانت : د ( س ) = ر ( س ) ± ق ( س ) ± ....... ± ك ( س )

فإن : د$^{/}$ ( س ) = ر$^{/}$ ( س ) ± ق$^{/}$ ( س ) ± ....... ± ك$^{/}$ ( س )

**مثـــ١ـــال :** إذا كانت : د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ + ٧ س − ٥

فإن : د$^{/}$ ( س ) = ٤ س + ٧

*******************************************************

**مثـــ٢ـــال :** إذا كانت : د ( س ) = ٤ س$^{٣}$ + س$^{٢}$ + س − ٢ ثم أحسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ـ ١

د$^{/}$ (س) = ١٢ س$^{٢}$ + ٢ س + ١

∴ د$^{/}$ (س) $_{\text{س = ٢}}$ = ١٢ × ١ + ٢ × ـ ١ + ١ = ١٢ ـ ٢ + ١ = ١١

*******************************************************

**مثـــ٣ـــال :** د ( س ) = ( ٢ س + ٣ ) ( س ـ ٥ ) أوجد د$^{/}$ ( س ) عندما: س = ٢

نفك الأقواس ∴ د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ ـ ٧ س ـ ١٥

∴ د$^{/}$ ( س ) = ٤ س ـ ٧

عندما س = ٢ ∴ د$^{/}$ ( س ) = ٤ × ٢ ـ ٧ = ١

*******************************************************

**مثـــ٤ـــال :** إذا كانت : د ( س ) = $\frac{١}{٢}$ س$^{٤}$ − $\frac{٢}{٣}$ س$^{٣}$ + $\frac{٥}{٢}$ س$^{٢}$ ـ س − ١

فإن : د$^{/}$ ( س ) = ٢ س$^{٣}$ − ٢ س$^{٢}$ + ٥ س ـ ١

*******************************************************

**مثـــ٥ـــال :** إذا كانت : د ( س ) = $\frac{١٥}{\text{س}^{٣}}$ + $\frac{٦}{\text{س}^{٢}}$ ـ $\frac{٢}{\text{س}}$

تكتب على الشكل د ( س ) = ١٥ س$^{-٣}$ + ٦ س$^{-٢}$ ـ ٢ س$^{-١}$

فإن : ص$^{/}$ = ـ ١٥ س$^{-٤}$ ـ ١٢ س$^{-٣}$ + ٢ س$^{-٢}$

∴ ص$^{/}$ = $\frac{-١٥}{\text{س}^{٤}}$ - $\frac{١٢}{\text{س}^{٣}}$ + $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

*******************************************************

مثــ٦ــال : إذا كانت : د ( س ) = $\sqrt{س}$ أوجد : د$'$ ( س )

الحـــــــل

د ( س ) = س$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ د$'$ ( س ) = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

************************************************************

مثــ٧ــال : إذا كانت : د ( س ) = $\sqrt[٣]{س^٤}$ أوجد : د$'$ ( س )

الحـــــــل

د ( س ) = س$^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ د$'$ ( س ) = $\frac{٤}{٣}$ س$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt[٣]{س}$

************************************************************

مثــ٨ــال : إذا كانت : د ( س ) = $\sqrt[٣]{س}$ أوجد : د$'$ ( س )

الحـــــــل

د ( س ) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ∴ د$'$ ( س ) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

************************************************************

مثــ٩ــال : إذا كانت : د ( س ) = $\frac{(٢س + ١)^٢}{٢س^٣}$ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــــل

∵ د ( س ) = $\frac{(٢س + ١)^٢}{٢س^٣}$ = $\frac{(٤س^٢ + ٦س + ١)}{٢س^٣}$

د (س) = ٢ س$^{-١}$ + ٣ س$^{-٢}$ + $\frac{١}{٢}$ س$^{-٣}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ ٢ س$^{-٢}$ ـ ٦ س$^{-٣}$ ـ $\frac{٣}{٢}$ س$^{-٤}$ = $\frac{ـ ٤س^٢ ـ ١٢ س + ٣}{٢س^٤}$

************************************************************

مثــ١٠ــال : إذا كانت : د ( س ) = س$^٣$ + ٦ س$^٢$ ـ ٣٦ س + ٤

فأوجد : د$'$ ( ١ ) ثم اوجد قيم س التى تجعل د$'$ ( س ) = صفر

الحـــــــل

∵ د/ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ + ١٢ س – ٣٦

∴ د/ ( ١ ) = ٣ × ( ١ )$^{٢}$ + ١٢ × ١ – ٣٦ = – ٢١

بوضع د/ ( س ) = صفر ∴ ٣ س$^{٢}$ + ١٢ س – ٣٦ = ٠ بالقسمة على ٣

∴ س$^{٢}$ + ٤ س – ١٢ = ٠ ∴ ( س + ٦ )( س – ٢ ) = ٠

∴ س = ـ ٦ أ، س = ٢

*********************************************

**مثـال ١١ : إذا كانت : د ( س ) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ ـ ٢ س$^{٢}$ ـ ٥ س +٤**

**اوجد قيم س التى تجعل (١) د/ ( س ) = صفر (٢) د/ ( س ) = ٧**

**الحـــــــل**

∵ د ( س ) = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ـ ٢ س$^{٢}$ – ٥ س + ٤

∴ د/ ( س ) = س$^{٢}$ ـ ٤ س ـ ٥

**أولاً :** د/ ( س ) = س$^{٢}$ ـ ٤ س ـ ٥ = ٠ ⟸ ( س + ١) ( س ـ ٥ ) = ٠

∴ س = ـ ١ أ، س = ٥

**ثانياً :** د/ ( س ) = س$^{٢}$ ـ ٤ س ـ ٥ = ٧

س$^{٢}$ ـ ٤ س ـ ١٢ = ٠ ⟸ ( س + ٢) ( س ـ ٦ ) = ٠

∴ س = ـ ٢ أ، س = ٦

*********************************************

**تذكر ما يلى :**

*** ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة ( س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ) الواقعة عليه هو :**

( د/ )$_{س = س_{١}}$ = طا هـ حيث ( هـ ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

*** إذا كان : المماس يوازى محور السينات فإن : ميل المماس = صفر**

*** إذا كان : المماس يوازى محور الصادات فإن : ميل المماس غير معرف**

- ميل المستقيم : ٩ س + ب ص + حـ = ٠

• هو $\dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \dfrac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

* ميل أى مستقيم يوازيه = $\dfrac{-\text{أ}}{\text{ب}}$        * ميل أى مستقيم عمودى عليه = $\dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

أى أن : المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان

أما المستقيمان المتعامدان فحاصل ضرب ميلاهما = ــ ١

* ميل المستقيم المار بالنقطتين ( $\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$ ) ، ( $\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$ )

يساوى $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه ( $\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$ ) هى :

ميل المستقيم = $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = م

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د ( س ) مع محور السينات نضع : ص = ٠

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د ( س ) مع محور الصادات نضع : س = ٠

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى $\text{ص}_١$ = د ( س ) مع المستقيم $\text{ص}_٢$ = م س + حـ

نضع : $\text{ص}_١ = \text{ص}_٢$

********************************************************

مثـــ١ـــال: أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس المنحنى الدالة : ص= $\text{س}^٢$ ـ ٣ س

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة ( ٢ ، ـ ٢ ) الواقعة عليه

الحـــــــــل

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ظا هـ = ٢ س ـ ٣        ∴ $(\text{ظا هـ})_{\text{س}=٢}$ = ٢ × ٢ ـ ٣ = ١

∴ ظا هـ = ١        ∴ هـ = ٤٥°

********************************************************

مثـ٢ـال : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الماس للمنحنى: ص = $\text{س}^٣$ ـ ٥ س ـ ٥

عند النقطة ( ١ ، ١ ) مع الاتجاه المجب لمحور السينات

الحـــــــــل

∵ ص = س$^{٣}$ ــ ٥ س ـ ٥

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ظا هـ = ٣ س$^{٢}$ ــ ٥ ∴ ميل المماس عند ( ١ ، ١ )

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ظا هـ = ٣ × ١ ـ ٥ = ـ ٢

∴ ظا هـ = ـ ٢ ومنها : هـ = ١١٦° ٣٣َ

**********************************************************

**مثـ٣ـال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س$^{٢}$ ـ ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات**

**الحـــــــــــل**

ص/ = ٢ س ـ ٤ ∴ ميل المماس = ٢ س ـ ٤

، ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ ميله = صفر

∴ ص/ = ٠ ∴ ٢ س ـ ٤ = ٠ ومنها : س = ٢

∴ ص = ( ٢ )$^{٢}$ ـ ٤ × ٢ + ٣ = ـ ١

∴ المماس للمنحنى يوازى محور السينات عند ( ٢ ، ـ ١ )

**********************************************************

**مثـ٤ـال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ ـ س ـ ٢ والتى ميل المماس عندها = ١**

**الحـــــــــــل**

∵ المماس يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس عند أى نقطة م = $\frac{دص}{دس}$ = س$^{٢}$ + س ـ ١ = ١

∴ س$^{٢}$ + س ـ ١ = ١ ⟸ ( س ـ ١ ) ( س + ٢ ) = ٠

∴ س = ١ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ـ ١ ـ ٢ = $\frac{-١٣}{٦}$ النقطة (١ ، $\frac{-١٣}{٦}$ )

أ، س = ـ ٢ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ـ ٨ + $\frac{١}{٢}$ × ٤ + ١ ـ ٢ = $\frac{-٥}{٣}$ النقطة(ـ ٢ ، $\frac{-٥}{٣}$ )

**********************************************************

مثـ٥ـال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^٣ ـ ٣ س^٢ + ١ والتى يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم : ٣ ص = ٦ + س

الحـــــــــل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = م = ٣ س^٢ ـ ٦ ، ∵ ميل المستقيم = $\frac{١}{٣}$

، ∵ المماس والمستقيم متعامدان ∴ ميل المماس = ـ ٣

∴ ٣ س^٢ ـ ٦ = ـ ٣ ومنها : س^٢ ـ ١ = ( س + ١)(س ـ١) = ٠

∴ س = ١ فإن : ص = (١)^٣ ـ٣(١)^٢ +١ = ـ ١ ∴ النقط هى : ( ١ ، ـ ١ )

،: س = ـ ١ فإن : ص = (ـ١)^٣ ـ٣(ـ١)^٢ +١ = ـ٣ ∴ النقط هى (ـ ١ ، ـ٣)

*************************************************************

مثـ٦ـال : أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢ س^٣ + ٦ س^٢ + ٥ س و الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحـــــــــل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ س^٢ + ١٢ س + ٥ ∵ ميل المماس = طا هـ = طا ١٣٥° = ـ ١

∴ ٦ س^٢ + ١٢ س + ٥ = ـ ١

∴ س^٢ + ٢ س + ١ = ٠ ∴ ( س + ١ )^٢ = ٠

∴ س = ـ ١ ∴ ص = ـ ١

∴ المماس للمنحنى عند (ـ ١ ، ـ ١ ) يصنع زاوية قياسها ١٣٥ ° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

وتكون معادلته هى : $\frac{\text{ص} + ١}{\text{س} + ١}$ = ـ ١ أى : ص + س + ٢ = ٠

*************************************************************

# تمـــــــــــارين

**١ ـ أوجد المشتقـة الأولي للدوال الآتية : ـ**

١ ) د ( س ) = ٣ س$^{٣}$ ـ ٢ س$^{٢}$ + ٥ س + ٢ ثم أوجد د$^{/}$( ١ )

٢ ) د ( س ) = ( س$^{٥}$ + ٣ س$^{٤}$ + ٢ س ) ÷ ( س ) ثم أوجد د$^{/}$(ـ ١ )

٣ ) د ( س ) = ( س$^{٣}$ ـ ٢٧ ) ÷ ( س ـ ٣ ) ثم أوجد د$^{/}$(ـ ٢ )

٤ ) ص = س ـ س$^{-١}$ + ٣ س$^{-٢}$ عند س = ١

٥ ) ص = $\frac{٢}{س}$ + $\frac{٣}{س^{٢}}$ ـ $\frac{١}{س^{٣}}$ عند س = ١

٦ ) د ( س ) = س + $^{٣}$س$^{٢}$ ثم أوجد د$^{/}$( ١ )

٧ ) د ( س ) = ٣ س$^{٤}$ + س$^{٣}$ ثم أوجد د$^{/}$( ١ )

**٢ ـ أوجـد معدل تغير كلا من الـــدوال الآتيـــة عند قيم س المبينة أمام كلا منها :**

١ ) د ( س ) = س$^{٢}$ + ٢ س - ١ عند س = ١

٢ ) د ( س ) = س$^{٣}$ + ٢ س عند س = ـ١

**٣ ـ أوجد ميل المماس لمنحنيـات الـدوال الآتيـة عند النقط المبينة أمام كلا منهــا :**

١ ) ص = س$^{٢}$ + س ـ ٥ عند النقطة ( ٢ ، ١ )

٢ ) ص = س$^{٢}$ـ ٤ س + ٣ عند نقط تقاطعه مع محور السينات

٣ ) ص = س$^{٣}$ ـ ٢ س$^{٢}$ + ٣ س ـ ١ عند نقط تقاطعه مع محور الصادات

**٤ ـ اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :**

١ ) ص = ٣ س$^{٢}$ ـ ٥ س + ١ عند النقطة ( ١ ، ـ ١ )

٢ ) ص = س$^{٣}$ ـ ٥ س + ١ عند النقطة ( ٢ ، ـ ١ )

**٥ ـ اوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية وتحقق الشروط المبينة أمام كلا منها**

١ ) ص = س$^{٢}$ ـ ٤ س + ١ ، المماس // محور السينات

٢ ) ص = س$^{٣}$ ــ ٣ س$^{٢}$ ــ ٩ س + ١٥ ، المماس // محور السينات

٣ ) ص = ٥ س$^{٢}$ + ٢ س ــ ١٨ ، المماس // المستقيم ٢٢ س ــ ص + ١٢=٠

٤ ) ص = س$^{٣}$ ــ ٤ س + ٢ ، المماس ⊥ المستقيم س = ص ــ ٤

٥ ) ص = ٩ س ــ س$^{٣}$ ، ميل المماس = - ٣

٦ ــ أوجد قيم الثوابت ب ؛ حـ ؛ ء والتي تحقق الشروط المعطاه فيما يلي :

١ ) د ( س ) = س$^{٣}$ + ب س + حـ ، المماس عند النقطة ( ١ ، ٦ ) أفقي

٢ ) د ( س ) = حـ س$^{٢}$ + ء س ، د ( ٢ ) = ٢ ؛ د$^{/}$ ( ٠ ) = ٣

٣) د ( س ) = ب س$^{٢}$ + حـ س

والمنحني يمس المستقيم ص = ٣ س + ٢ عند النقطة ( ١ ، -١ )

٤) د ( س ) = حـ س$^{٢}$ + ء س

والمنحني يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (-١، -١٥)

٥) د ( س ) = حـ س$^{٢}$ + ء س والمماس عند النقطة ( ١ ، ٠ ) يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥ °

(٧) أوجد معادلة المماس فيما يلى :

١ ) ص = ٢ س$^{٢}$ ــ ٣ س + ١ عند النقطة ( ٠ ، ١ )

٢ ) ص = س$^{٣}$ ــ ٣ س$^{٢}$ + ٢ عند النقطة ( ١ ، ٠ )

٣ ) ص = ( س + ١ )( س$^{٣}$ ــ ٢ ) عند النقطة : س = ١

(٨) إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص= س$^{٣}$ ــ ٣ س عند النقطتين ( ٠ ، ٣ ) ؛ (ــ ١ ، ٤ ) متوازيان

(٩) إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص = س$^{٢}$ ــ س + ٣ عند النقطتين ( ٠ ، ٣) ؛ ( ١، ٣ ) متعامدين

(١٠) إذا كانت : د ( س ) = س × ق ( س ) ، وكانت : ق ( ١ ) = ٣ ، ق$^{/}$ ( ١ ) = ٢ فأوجد : د$^{/}$ ( ١ )

# مشتقة حاصل ضرب دالتين

( ٥ ) المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للإشتقاق =

**مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى**

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = د ( س ) × ر ( س )

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = د/ ( س ) × ر ( س ) + ر/ ( س ) × د ( س )

*****************************************************

**مثـــ١ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = (٢س - ١)( ٣س +٥)        (!!) ص = (س$^{٢}$ +٧)( س$^{٣}$ – ١)

**الحـــــــــل**

(!) ص/ = ٢(٣س+٥) + ٣ (٢س - ١ ) = ٦س + ١٠ + ٦س ـ ٣ = ١٢س + ٧

(!!) ص/ = ٢س(س$^{٣}$-١)+٣س$^{٢}$(س$^{٢}$+٧) = ٢س$^{٤}$ ـ ٢س + ٣س$^{٤}$ + ٢١س$^{٢}$

= ٥ س$^{٤}$ + ٢١ س$^{٢}$ ـ ٢ س

*****************************************************

**مثـــ٢ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = (٢س$^{٣}$+٥)(س$^{٤}$+١)        (!!) ص = س$^{٥}$ ( ٣س$^{٢}$+٨)

**الحـــــــــل**

(!) ص/ =٦س$^{٢}$(س$^{٤}$+١)+٤س$^{٣}$(٢س$^{٣}$+٥)

= ٦س$^{٦}$ + ٦س$^{٢}$ + ٨س$^{٦}$ + ٢٠س$^{٣}$ = ١٤ س$^{٦}$ + ٢٠ س$^{٣}$ + ٦ س$^{٢}$

(!!) ص/ =٥س$^{٤}$(٣س$^{٢}$+٨)+٦س×س$^{٥}$ = ١٥ س$^{٥}$ + ٤٠ س$^{٤}$ + ٦ س$^{٦}$

*****************************************************

**مثـــ٣ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!!) ص = (س$^{٢}$+١)(س$^{٢}$-٣س+٥)        (!!) ص = س$^{٥}$ ( س + $\frac{١}{\text{س}}$ )

**الحـــــــــل**

(!) ص/ = ٢س ( س$^{٢}$ – ٣ س +٥ ) + (٢س-٣)( س$^{٢}$+١)

$= ٢س^٣ - ٦س^٢ + ١٠ س + ٢س^٣ - ٢ س - ٣س^٢ - ٣$

$= ٤س^٣ - ٩س^٢ + ١٠ س - ٣$

(!!) $ص = س^٥ ( س + س^{-١} )$

$\therefore ص' = ٥س^٤ (س + س^{-١}) + ( ١ - س^{-٢}) \times س^٥$

$= ٥س^٥ + ٥ س^٣ + س^٥ - س^٣ = ٦ س^٥ + ٤ س^٣$

*******************************************************

مثـــ٤ــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) $ص = س^٦ ( س^٢ + \frac{١}{س^٢} )$ (!!) $ص = س^٣ ( س - \sqrt{س} )$

الحــــــل

(!) $ص = س^٦ ( س^٢ + س^{-٢}) = س^٨ + س^٤$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٨ س^٧ + ٤ س^٣$

(!!) $ص= س^٣ ( س - س^{\frac{١}{٢}} ) = س^٤ - س^{\frac{٧}{٢}}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٤ س^٣ - \frac{٧}{٢} س^{\frac{٥}{٢}}$

*******************************************************

نتيجة :- مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الاولى × الثانية × الثالثة + مشتقة الثانية × الاولى × الثالثة

+ مشتقة الثالثة × الاولى × الثانية

إذا كانت ص = د × ر × ى فان

$\therefore \frac{دص}{دس} = د' \times ر \times ى + ر' \times د \times ى + ى' \times د \times ر$

*******************************************************

مثـــ٥ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : $د (س) =(٢س+٥) (س^٢+١) (س^٣ - ٢ )$

الحــــــل

$د' (س) = ٢ (س^٢ +١ ) ( س^٣ - ٢ ) + ٢ س ( ٢س +٥ ) ( س^٣-٢)$

$+٣س^٢(٢س+٥) (س^٢+١)$

*******************************************************

# مشتقة قسمة دالتين

( ٦ ) المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين :

$$\text{المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين} = \frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : $\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث ر ( س ) ≠ صفر

$$\text{فإن :} \quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{د}'(\text{س}) \times \text{ر}(\text{س}) - \text{ر}'(\text{س}) \times \text{د}(\text{س})}{(\text{ر}(\text{س}))^{٢}}$$

*************************************************

مثـــ٦ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{ص} = \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} + ٢}$

الحـــــــــل

$$\text{ص}' = \frac{٢(٣\text{س}+٢) - ٣(٢\text{س} - ٥)}{(٣\text{س}+٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٦\text{س} + ٤ - ٦\text{س} + ١٥}{(٣\text{س}+٢)^{٢}} = \frac{١٩}{(٣\text{س}+٢)^{٢}}$$

*************************************************

مثـــ٧ــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٢}$

الحـــــــــل

$$\text{ص}' = \frac{٢\text{س}(\text{س}^{٢} - ٢) - ٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٣)}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س} - ٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}} = \frac{-١٠\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}}$$

*************************************************

**مثـــ٨ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة** $\text{د}(\text{س}) = \frac{1 + \text{س}}{1 - \text{س}}$

**الحـــــــــل**

$$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = \frac{(1 - \text{س})(1) - (-1)(1 + \text{س})}{(1 - \text{س})^2} = \frac{1 - \text{س} + 1 + \text{س}}{(1 - \text{س})^2} = \frac{2}{(1 - \text{س})^2}$$

************************************************************

**مثـــ٩ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة** $\text{ص} = \frac{2\text{س}}{5\text{س} + 3}$

**الحـــــــــل**

$$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = \frac{2(5\text{س} + 3) - 5 \times 2\text{س}}{(5\text{س} + 3)^2} = \frac{10\text{س} + 6 - 10\text{س}}{(5\text{س}+3)^2} = \frac{6}{(5\text{س}+3)^2}$$

************************************************************

**مثـــ١٠ـــال : إذا كانت :** $\text{ص} = \frac{3\text{س} - 4}{2\text{س} + 5}$ **أوجد :** $\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}$

**الحـــــــــل**

$$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = \frac{3(2\text{س} + 5) - 2(3\text{س} - 4)}{(2\text{س} + 5)^2} = \frac{23}{(2\text{س} + 5)^2}$$

************************************************************

**تذكر ما يلى :**

* ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة ( $\text{س}_1$ ، $\text{ص}_1$ ) الواقعة عليه هو :

$\left(\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}\right)_{\text{س} = \text{س}_1}$ = طا هـ حيث ( هـ ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ميل المستقيم : م س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{م}}{\text{ب}}$

* ميل أى مستقيم يوازيه = $\frac{-\text{م}}{\text{ب}}$ * ميل أى مستقيم عمودى عليه = $\frac{\text{ب}}{\text{م}}$

* ميل المستقيم المار بالنقطتين ( $\text{س}_1$ ، $\text{ص}_1$ ) ، ( $\text{س}_2$ ، $\text{ص}_2$ ) يساوى $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه ( س١ ، ص١ ) هى :

$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ميل المستقيم أ، (ص٢ – ص١ ) = م (س٢ – س١)

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د ( س ) مع محور السينات نضع : ص = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د ( س ) مع محور الصادات نضع : س = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص١ = د ( س ) مع المستقيم ص٢ = م س + حـ

نضع : ص١ = ص٢

**********************************************************

مثــال ١١ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (س – ٢) (س -٣)

عند النقطة (٣ ، ٦)

الحـــــــــــل

ميل المماس م = ص/ =١ (س -٣) + ١ ( س – ٢)

= س ـ ٣ + س – ٢ = ٢س ـ ٥

عند النقطة (٣ ، ٦) ∴ م = ٢× ٣ ـ ٥ = ١

**********************************************************

مثــال ١٢ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٣}{س + ١}$ عند النقطة ( ١ ، ١,٥)

الحـــــــــــل

ميل المماس م = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س+١)×صفر ـ ٣×١}{(س + ١)^٢}$ = $\frac{ـ ٣}{(س+١)^٢}$

عند النقطة ( ١ ، ١,٥) م = $\frac{ـ ٣}{(١+١)^٢}$ = $\frac{ـ٣}{٤}$

**********************************************************

مثــال ١٣ : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة

ص = $\frac{٤}{س+ ١}$ عند النقطة (-٣، -٢ ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحـــــــــــل

ظاهـ = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س+١)×صفر ـ ٤×١}{(س + ١)^٢}$ = $\frac{ـ٤}{(س+١)^٢}$

عند النقطة (-٣، -٢) ظاهـ = $\frac{-٤}{(-٣+١)^٢}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ق ( ∠ هـ ) = ١٣٥° = $\frac{٣\pi}{٤}$

**************************************************************

**مثـــال ١٤ : أوجد قيم س التى عندها المماس التى عندها المماس لمنحنى الدالة ص = ٢س٣ـ ١٥س٢+٣٥س+٥ يصنع زاوية ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .**

الحــــــــــل

∵ المماس يصنع زاوية١٣٥° ∴ ص/ = ظا١٣٥° = -١

∴ ص/ = ٦ س٢ ـ ٣٠س +٣٥ = ـ ١ ∴ ٦س٢ ـ ٣٠س +٣٦ = ٠ ÷ ٦

∴ س٢ ـ ٥ س +٦ = ٠ نحلل ∴ (س -٢)( س ـ ٣ ) = ٠

ومنها ∴ س = ٢ أ، س = ٣

**************************************************************

## تمـــــارين

**١ ـ أوجد المشتقـة الأولـي للدوال الآتيـة : ـ**

١ ) ص = ( س٢ ـ ٥ س )( س٣ + ١ ) عند س = ٠

٢ ) ص = (س٢ + ١ )( س٢ + ٣س ـ ٣ ) عند س = ٢

٣ ) ص = س (س ـ ٢ )( س + ٣ ) عند س = ـ ٣

٤ ) ص = $\frac{س ـ ١}{٣}$ عند س = ٢

٥ ) ص = $\frac{س ـ ١}{س + ٢}$ عند س = ـ ١

**٢ ـ أوجد معدل تغير كلا من الدوال الآتية عند قيم س المبينة أمام كلا منها :**

١ ) د ( س ) = ( س٢ ـ ٣ )( س + ٤ ) عند س = ٢

٢ ) د ( س ) = $\frac{س^٢ ـ ٣}{س +١}$ عند س = ٢

**٣ – أوجد ميل المماس لمنحنيات الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كلا منها :**

١ ) ص = ( س$^٢$ + س )( س$^٢$ – ٣ ) عند النقطة ( –١ ، ٠ )

٢ ) ص = ( س$^٢$ – ٦ س + ٣ )( ٢ س – ٣ ) عند النقطة ( ١ ، ٢ )

٣ ) ص = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$ عند النقطة ( ١ ، ١ )

**٤ – اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :**

١ ) ص = $\frac{١}{٢}$ س ( س$^٢$ – ٥ س + ١ )( ٢ س – ٣ ) عند نقطة الأصل

٢ ) ص = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$ عند النقطة ( ٠ ، –١ )

**٥ – اوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية والتي تحقق الشروط :**

١) ص = ( ٢ س + ١ )( س – ١ )

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

٢) ص = س$^٣$ – ٢ س + ١

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

**٦ – أوجد معادلة المماس فيما يلي :**

١ ) ص = ( س + ١ )( س$^٣$ – ٢ ) عند النقطة : س = ١

٢ ) ص = $\frac{١٦}{\text{س} + ١}$ عند النقطة : س = ٣

(٧) إثبت أن المماسين لمنحنى الدالة ص= س$^٣$ – ٣ س عند النقطتين ( ٠ ، ٣ ) ؛ ( –١ ، ٤ ) متوازيان

(٨) إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص = س$^٢$ – س + ٣ عند النقطتين ( ٠، ٣) ؛ ( ١، ٣ ) متعامدين

(٩) إذا كانت : د ( س ) = س × ى ( س ) ،وكانت : ى ( ١ ) = ٣، ى$'$( ١ ) = ٢ فأوجد : د$'$( ١ )

*******************************************************

# مشتقة دالة الدالة

**إذا كانت : $ص = [\,د(س)\,]^{ن}$ فإن : $د = ن\,[\,د(س)\,]^{ن-١} \times د^{/}(س)$**

**مشتقة $(\text{قوس})^{ن}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس**

**فمثلاً :**

إذا كانت : $ص = (٥س + ١)^{٤}$

فإن : $د = ٤\,(٥س + ١)^{٣} \times ٥ = ٢٠\,(٥س + ١)^{٣}$

************************************************************

**مثــ١ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = (٢س - ٣)^{٥}$**

**الحــــل**

$ص^{/} = ٥\,(٢س - ٣)^{٤} \times ٢ = ١٠\,(٢س - ٣)^{٤}$

************************************************************

**مثــ٢ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = (س^{٣} + ٥)^{٦}$**

**الحــــل**

$\frac{ءس}{ءص} = = ٦\,(س^{٢} + ٥)^{٥} \times ٣س^{٢} = ١٨س^{٢}\,(س^{٢} + ٥)^{٥}$

************************************************************

**ملحوظة :**

إذا كانت : $ص = \sqrt{د(س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{د(س)}} \times د^{/}(س)$

**فمثلاً :**

إذا كانت : $ص = \sqrt{٣س + ١}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{٣س + ١}} \times ٣ = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س + ١}}$

************************************************************

**مثــ٣ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة: $ص = \sqrt[٣]{٥س^{٢} - ٣س + ٢}$**

**الحــــل**

$\therefore ص = (٥س^{٢} - ٣س + ٢)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}\,(٥س^{٢} - ٣س + ٢)^{\frac{-٢}{٣}} \times (١٠س - ٣) = \frac{١٠س - ٣}{٣\sqrt[٣]{(٥س^{٢} - ٣س + ٢)^{٢}}}$

**مثـــ٤ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص =** $\frac{-٥}{(٣س^{٢} - س)^{٤}}$

**الحـــــــل**

∵ $ص = -٥ \,(٣س^{٢} - س)^{-٤}$

∴ $ص' = -٥ \times -٤ \,(٣س^{٢} - س)^{-٥} \,(٦س - ١)$

∴ $ص' = \frac{٢٠\,(٦س - ١)}{(٣س^{٢} - س)^{٥}}$

*********************************************************

**مثـــ٥ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص =** $\sqrt{(٢س+٣)^{٣}}$ **عندما س = ٣**

**الحـــــــل**

∵ $ص = (٢س + ٣)^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $ص' = \frac{٣}{٢}(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = ٣(٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}} = ٣\sqrt{(٢س+٣)}$

عندما س = ٣ ∴ $ص' = ٣ \times \sqrt{٦+٣} = ٣\sqrt{٩} = ٣ \times ٣ = ٩$

*********************************************************

**مثـــ٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص =** $\sqrt[٤]{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٥}}$

**الحـــــــل**

∵ $ص = (س^{٢} - ٣س + ١)^{\frac{٥}{٤}}$

∴ $\frac{ءس}{ءص} = \frac{٥}{٤}(س^{٢} - ٣س + ١)^{\frac{١}{٤}}(٢س - ٣) = \frac{٥}{٤}(٢س - ٣)\sqrt[٤]{(س^{٢} - ٣س + ١)}$

*********************************************************

## نظرية :

إذا كانت : ص = د ( ع ) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر ( س ) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = د [ ر ( س ) ] تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

**فمثلاً :**

إذا كانت : ص = $ع^{٨} + ١$ ، ع = ٣ س − ٤

فإن : د = $\frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ( ٨ ع^{٧} ) \times ( ٣ ) = ٢٤ ( ٣ س - ٤ )^{٧}$

**نتيجة :**

إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء}{ءس} ( ص^{ن} ) = ن ص^{ن-١} \times ص^{/}$

**فمثلاً :**

$\frac{ء}{ءس} ( ص^{٤} ) = ٤ ص^{٣} \times \frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ء}{ءس} ( ص^{٤} + س^{٥} ) = ٤ ص^{٣} \times \frac{ءص}{ءس} + ٥ س^{٤}$

*****************************************************

**مثـــال ٧ :** إذا كانت ص = $ع^{٥}$ ، ع = ٢س + ١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــل

∵ $\frac{ءص}{ءع} = ٥ ع^{٤}$ ،، $\frac{ءع}{ءس} = ٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = ٥ ع^{٤} \times ٢ = ١٠ ع^{٤} = ١٠ ( ٢س + ١ )^{٤}$

**حل أخـــر**

∵ ص = $ع^{٥} = ( ٢س + ١ )^{٥}$ ∴ $ص^{/} = = ٥ ( ٢س + ١ )^{٤} = ١٠ ( ٢س + ١ )^{٤}$

*****************************************************

**مثـــال ٨ :** إذا كانت ص = $ع^{٦} + ٣$ ، ع = $س^{٢} + ٥$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــل

∵ ص = $ع^{٦} + ٣ = ( س^{٢} + ٥ )^{٦} + ٣$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٦ ( س^{٢} + ٥ )^{٥} \times ٢س = ١٢ س ( س^{٢} + ٥ )^{٥}$

**مثـــ9ـــال :** إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^{5} + \text{ع}^{3}$ ، $\text{ع} = 2\text{س} - 7$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

**الحـــــــل**

$\because \text{ص} = (2\text{س} - 7)^{5} + (2\text{س} - 7)^{3}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5(2\text{س}-7)^{4} \times 2 + 3(2\text{س}-7)^{2} \times 2$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10(2\text{س} - 7)^{4} + 6(2\text{س} - 7)^{2}$

*******************************************************

**مثـــ10ـــال :** إذا كانت $\text{ص} = 2\text{ع}^{5} + \frac{1}{\text{ع}^{5}}$ ، $\text{ع} = 3\text{س} + 1$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

**الحـــــــل**

$\because \text{ص} = \text{ع}^{5} + \text{ع}^{-5} = 2(3\text{س}+1)^{5} + (3\text{س}+1)^{-5}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10(3\text{س}+1)^{4} \times 3 - 5(3\text{س}+1)^{-6} \times 3$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 30(3\text{س}+1)^{4} - \frac{15}{(3\text{س}+1)^{6}}$

*******************************************************

**مثـــ11ـــال :** إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = (\text{ع} - 5)^{5}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{2} + 7$ أوجد : $\text{د}'(1)$

**الحـــــــل**

$\because \text{د}(\text{س}) = (\text{س}^{2} + 7 - 5)^{5} = (\text{س}^{2} + 2)^{5}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = 5(\text{س}^{2} + 2)^{4} \times 2\text{س}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = 10\text{س}(\text{س}^{2} + 2)^{4}$ $\therefore \text{د}'(1) = 10 \times 1(1 + 2)^{4} = 810$

*******************************************************

**مثـــ12ـــال :** إذا كانت $\text{ص} = \frac{1}{\text{ع}^{4}}$ ، $\text{ع} = (\text{س}^{3}+1)$ أوجد : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

**الحـــــــل**

$\because \text{ص} = \text{ع}^{-4} = (\text{س}^{3} + 1)^{-4}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -4(\text{س}^{3}+1)^{-5} \times 3\text{س}^{2}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -12\text{س}^{2}(\text{س}^{3}+1)^{-5} = \frac{-12\text{س}^{2}}{(\text{س}^{3}+1)^{5}}$

*********************************************************

**مثـــ١٣ـــال : إذا كانت** $ص = \sqrt[٣]{ع^{٧}}$ ، $ع = س^{٢} + ٢س + ١$ **أوجد:** $\frac{ءص}{ءس}$

**الحـــــــــل**

∵ $ص = ع^{\frac{٧}{٣}} = (س^{٢} + ٢س + ١)^{\frac{٧}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٧}{٣}(س^{٢} + ٢س + ١)^{\frac{٤}{٣}} \times (٢س + ٢)$

$= \frac{٧(٢س + ٢)}{٣ \times \sqrt[٣]{(س^{٢}+٢س+١)^{٤}}}$

*********************************************************

**مثـــ١٤ـــال : إذا كانت** $ص = \frac{ع}{ع - ١}$ ، $ع = س^{٢} + ٥$ **إوجد :** $\frac{ءص}{ءس}$

**الحـــــــــل**

∵ $ص = \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢}+٥ - ١} = \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س(س^{٢}+٤) - ٢س(س^{٢}+٥)}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س^{٣} + ٨س - ٢س^{٣} - ١٠س}{(س^{٢}+٤)^{٢}} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

*********************************************************

**مثـــ١٥ـــال : إذا كانت** $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = ٢س^{٢}$

**إثبت أن** $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ١٦س^{٣}$

**الحـــــــــل**

∵ $\frac{ءع}{ءس} = ٤س$

∵ $ص = (٢س^{٢})^{٢} + ٢س^{٢} = ٤س^{٤} + ٢س^{٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١٦س^{٣} + ٤س$

∴ الطرف الايمن $= ١٦س^{٣} + ٤س - ٤س = ١٦س^{٣}$ = الطرف الايسر

*********************************************************

# تمـــــــــارين

١ ـ أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي : ـ

١ ) $ص = ع^{٨}$ ؛ $ع = س^{٣} + ٢\,س$

٢ ) $ص = ع^{٦}$ ؛ $ع = ٢\,س^{٢} - س + ١$

٣ ) $ص = ع^{٥} + ع^{٣}$ ؛ $ع = ٣س^{٢} - ١$

٤ ) $ص = ع^{٢} + ١$ ؛ $ع = س - \frac{١}{س}$ عند $س = ٢$

٥ ) $ص = (س^{٢} - ٣\,س + ٤)^{٦}$

٦) $ص^{٣} = (س^{٢} - س)^{٥}$

٧) $ص^{٤} = (س^{٢} - ١)^{٧}$

٨) $٣\,ص^{٤} = س^{٥} - ٢\,س^{٣} + س$

٩ ) $ص = \frac{٣}{(س^{٣} + ٤\,س)^{٨}}$

١٠) $ص = \sqrt{(س^{٢} - ٢\,س)^{٥}}$

١١ ) $ص^{٤} = (س^{٢} - ١)^{٧}$

١٢ ) $ص = \sqrt[٣]{(٣\,س - ١)^{٤}}$

١٣ ) $ص = \frac{(س^{٢} - ١)^{٤}}{(س + ٣)^{٢}}$

١٤) $ص = \frac{(س + ٢)^{٣}}{(س - ١)^{٥}}$

١٥) $ص = \left(\frac{س - ٤}{س + ١}\right)^{٦}$

١٦) $ص = \left(\frac{س^{٢} - ٣}{س + ١}\right)^{٤}$

٢ ـ أوجد كلاً من :

١) $\frac{د}{دس}(س^{٦})$ ٢) $\frac{د}{دس}(ص^{٦})$ ٣) $\frac{د}{دس}(س^{٣} + ٣\,ص^{٣})$

٣ ـ أجـب عما يـأتــي : ـ

١ ) إذا كانت $ص = \sqrt{ع + ٩}$ ؛ $ع = س^{٢} + ٦\,س$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

٢ ) إذا كانت $ص = \sqrt{٢\,ع^{٣} + ٧}$ ؛ $ع = (س + ١)^{٢}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٠$

٣ ) إذا كانت $ص = س^{٢} + س$ ؛ $س = ع^{٢} - ٤ ع + ٧$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما ع=٣

٤ ) إذا كانت $ص = ع ( \sqrt{ع} - ١ )$ ؛ $ع^{٢} = س^{٢} - ٢ س + ١$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س=٤

٥ ) إذا كانت $ص = \sqrt{٧ + ٣س}$ ؛ $س = ٢ ع^{٢} - ٥$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما ع = ٢

٦ ) إذا كانت $ص = س^{٢} + س$ ؛ $س = \sqrt{ع^{٢} - ٤ ع + ٧}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما ع = ٣

٧) إذا كانت $ص = ع ( \sqrt{ع} - ١ )$ ؛ $ع^{٢} = س^{٢} - ٢ س + ١$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٤

٨) إذا كانت $ص = ع - \frac{١}{ع}$ ؛ $ع = ( ٣س + ٢ )^{٢}$ اوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ـ ١

٩) إذا كانت $ص = \frac{ع}{ع + ١}$ ؛ $ع = س^{٢} - ٤$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٣

١٠) إذا كانت $ص^{٣} = ع$ ؛ $ع = س^{٢} + ٦ س$ أوجد $\frac{ءص}{ءع}$ عندما س = ٣

---

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = ( ١ + س )^{٤} ( ١ - س )^{٤}$ والتى يكون عندها المماس موازياً محور السينات

(٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ عند النقطة ( ٣ ، ٤ )

(٦) إذا كانت : $ص = ع^{٢}$ ، $ع = ٣ س^{٣} - س^{٢}$ فأوجد قيم س التى تجعل : $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

(٧) أوجد ميل المماس لمنحني الدالة $ص = ( س - ١ )^{٣} ( س^{٣} + ٢ )^{٢}$ عند النقطة (١، ٠)

(٨) إذا كانت $ص = س^{٢} - ١$ ؛ $س = ع^{٣} - ٢$

إثبت أن : $( \frac{ءص}{ءع} ) + ٤ ( \frac{ءع}{ءس} ) = ٦ ع^{٥}$

************************************************************

# مشتقة الدوال المثلثية

( ١ ) إذا كانت : ص = حا س فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حتا س

( ٢ ) إذا كانت : ص = حتا س فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ حا س

( ٣ ) إذا كانت : ص = طا س فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا$^{2}$ س

**نتائـــــج :**

( ١ ) إذا كانت : ص = حا ( ﺃ س + ب ) فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ﺃ حتا ( ﺃ س + ب )

( ٢ ) إذا كانت : ص = حتا ( ﺃ س + ب ) فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ ﺃ حا ( ﺃ س + ب )

( ٣ ) إذا كانت : ص = طا ( ﺃ س + ب ) فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ﺃ قا$^{2}$ ( ﺃ س + ب )

**مثـــ١ــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

* إذا كانت : ص = حا ٣ س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ حتا ٣ س

* إذا كانت : ص = ٢ حتا ( ٤ ـ س )

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ × ـ ١ × ـ حا ( ٤ ـ س ) = ٢ حا ( ٤ ـ س )

* إذا كانت : ص = طا ( ٥ س ـ ١ ) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ قا$^{2}$ ( ٥ س ـ ١ )

* إذا كانت : ص = حا ٣ س حتا ٤ س

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ حتا س حتا ٤ س ـ ٤ حا ٤ س حا ٣ س

*******************************************************

**مثـــ٢ــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = جا ٢ س (!!) ص = جتا ٣س

**الحـــــــــل**

(!) ∴ ص/ = جتا ٢س × ٢ = ٢ جتا ٢ س

(!!) ∴ ص/ = ـ جا ٣س × ٣ = ـ٣ جا ٣س

*******************************************************

**مثـــ٣ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = جا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ (!!) ص = جتا $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}}$

**الحـــــــــل**

(!) ∴ ص/ = جتا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ × $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$

(!!) ∴ ص/ = ـ جا $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}}$ × $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ = ـ $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ جا $\frac{\text{٢س}}{\text{٣}}$

***************************************************

**مثـــ٤ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) د (س) = جا٣س + جتا٢س (!!) د (س) = س$^{\text{٣}}$ + جا س

**الحـــــــــل**

(!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا٣س × ٣ ـ جا٢س × ٢ = ٣ جتا٣س ـ ٢ جا٢س

(!!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س$^{\text{٢}}$ + جتا س

***************************************************

**مثـــ٥ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = س$^{\text{٤}}$ ـ جتاس ( !! ) ص = س جا س

**الحـــــــــل**

(!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س$^{\text{٣}}$ ـ × ـ جا س = ٤س$^{\text{٣}}$ + جتا س

(!!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ × جاس + جتا س × س = جاس + س جتا س

***************************************************

**مثـــ٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = س جتا س (!!) ص = س$^{\text{٣}}$ جا ٢ س

**الحـــــــــل**

(!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ × جتا س + ( ـ جا س) × س = جتا س ـ س جا س

(!!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س$^{\text{٢}}$ × جا٢س + (جتا٢س×٢) × س$^{\text{٣}}$

= ٣ س$^{٢}$ جا٢س + ٢س$^{٣}$ جا٢س

****************************************************************

**مثـــ٧ــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = جا س جتا س        (!!) ص = جا٢س جتا ٣ س

**الحــــــل**

(!) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتاس × جتاس + ( ـ جاس) ×جاس

= جتا$^{٢}$ س ـ جا$^{٢}$ س = جتا٢س

(!!) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (جتا٢س×٢)×جتا٣س+ (ـ جا ٣س×٣) × جا٢س

= ٢ جتا٢س جتا٣س ـ ٣ جا٣س جا٢س

****************************************************************

**مثـــ٨ــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية**

(!) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$        (!!) ص = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$

**الحــــــل**

(!) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{جتا س × س – ١ × جا س}}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{\text{س جتا س ـ جا س}}{\text{س}^{٢}}$

(!!) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{ـ جا س × س ـ ١ × جتا س}}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ـ س جا س ـ جتا س}}{\text{س}^{٢}}$

****************************************************************

**نتيجة ١ :** إذا كانت: ص = ظا س    فان $\frac{ءص}{ءس}$ = قا$^{٢}$س

**الاثبات : -**

∵ ص = ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$    ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{\text{جتاس×جتاس ـ (ـ جاس) × جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

= $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س+جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = قا$^{٢}$س

**نتيجة ٢ :** إذا كانت: ص = ظتا س فان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ قتا$^{٢}$س

الاثبات :-

∵ ص = ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـ جاس × جاس ـ جتاس × جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

= $\frac{\text{ـ جا}^{٢}\text{س ـ جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{\text{ـ [ جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س]}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{\text{ـ ١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ = ـ قتا$^{٢}$ س

*****************************************************

مثـــ٩ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = س ظا س (!!) ص = س ظا ٣س

الحـــــــــــل

(!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ × ظاس + قا$^{٢}$س × س = ظا س + س قا$^{٢}$س

(!!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ × ظا ٣ س + قا$^{٢}$ ٣ س × ٣ × س = ظا ٣س + ٣س قا$^{٢}$ ٣ س

*****************************************************

مثـــ١٠ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = ظا ( ٥س – ٣ ) (!!) ص = س$^{٣}$ ظتا٢س

الحـــــــــــل

(!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا$^{٢}$ (٥ س – ٣) × ٥ = ٥ قا$^{٢}$(٥ س ـ٣ )

(!!) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س$^{٢}$ × ظتا ٢س + (ـ قتا$^{٢}$ ٢س×٢) × س$^{٣}$

= ٣س$^{٢}$ ظتا٢س ـ ٢ س$^{٣}$ قتا٢س

*****************************************************

مثـــ١١ـــال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) إذا كانت ص = قتا س إثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ قتا س ظتا س

(!!) إذا كانت ص = قاس إثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س ظا س

## الحـــــــل

(!) ∵ ص = $\frac{\text{١}}{\text{جا س}}$ = ( جا س )$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ ( جا س )$^{-٢}$ × جتا س = $\frac{\text{ـ جتا س}}{\text{جا س × جا س}}$ = ـ قتا س ظتا س

(!!) ∵ ص = $\frac{\text{١}}{\text{جتا س}}$ = ( جتا س )$^{-١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ ( جتا س )$^{-٢}$ × ـ جا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س × جتا س}}$ = قا س ظا س

************************************************************

**مثـــال ١٢ : أوجد المشتقة الاولى للدالة :**

(!) ص = ( جا س + جتا س )$^{٥}$ (!!) ص = ( ١ + جاس)$^{٦}$

## الحـــــــل

(!) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥(جا س + جتا س)$^{٤}$ (جتا س ـ جا س )

(!!) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ ( ١ + جاس )$^{٥}$ × جتاس = ٦ جتاس ( ١ + جاس )$^{٥}$

************************************************************

**مثـــال ١٤ : أوجد المشتقة الاولى للدالة : ص = $\sqrt{(\text{٥ ـ جتاس})^{٣}}$**

## الحـــــــل

∵ ص = ( ٥ ـ جتا س )$^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٣}{٢}$ ( ٥ ـ جتا س )$^{\frac{١}{٢}}$ × جا س = $\frac{٣}{٢}$ جا س $\sqrt{(\text{٥ ـ جتا س})}$

************************************************************

**مثـــال ١٥ : أوجد المشتقة الاولى للدالة : ص = (جاس + جتاس)$^{٢}$**

## الحـــــــل

∴ ص/ = ٢ (جا س + جتا س)(جتا س ـ جا س)

= ٢ ( جتا$^{٢}$ س ـ جا$^{٢}$س) = ٢ جتا٢س

مثـــ١٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : ص = ٦س جاس جتاس

الحـــــــل

∵ ص = ٣س × ٢ جاس جتاس = ٣س جا٢س

∴ ص/ = ٣ جا٢س + جتا٢س × ٢ × ٣س = ٣جا٢س + ٦س جتا٢س

*************************************************************

مثـــ١٧ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : $\text{ص} = \dfrac{\text{جتاس}}{\text{١ ـ جاس}}$

الحـــــــل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ـ جاس(١ ـ جا س)} - \text{(ـ جتا س)×جتا س}}{\text{( ١ – جا س)}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{ـ جا س + جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{( ١ ـ جاس )}^{٢}} = \frac{\text{١ ـ جاس}}{\text{(١ ـ جاس)}^{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{(١ ـ جاس)}^{٢}}$$

*************************************************************

مثـــ١٨ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : ص = $\text{س}^{٥}$ + ظتا ٣ س

الحـــــــل

∴ $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥$\text{س}^{٤}$ ـ $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س × ٣ = ٥ $\text{س}^{٤}$ ـ ٣ $\text{قتا}^{٢}$ ٣س

*************************************************************

مثـــ١٩ـــال : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة : ص = جا٢س عند النقطة ( $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ )

الحـــــــل

∵ ميل المماس = م = $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ جتا ٢س

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ ∴ م = ٢ جتا ٢ × $\frac{\pi}{٦}$ = ٢جتا ٦٠ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

*************************************************************

مثـــ٢٠ـــال : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا (٣س – ٢ط ) عندما س = π

الحـــــــل

∵ ميل المماس = ص/ = جتا (٣س ـ٢π) ×٣= ٣ جتا (٣س ـ ٢ π )

عندما س = π ∴ م = ٣ جتا (٣π – ٢π ) = ٣ جتا π = ٣ × ـ ١ = ـ ٣

**مثـــال ٢١ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا ( س ـ $\frac{\pi}{٣}$ ) عندما س = $\frac{\pi}{٢}$**

**الحــــــــــل**

∵ ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتا( س - $\frac{\pi}{٣}$ ) × ١ = جتا ( $\frac{\pi}{٢}$ ـ $\frac{\pi}{٣}$ ) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

**************************************************************

**مثـــال ٢٢ : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ص = جتا ٢ س عند النقطة ( $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

**الحــــــــــل**

∵ ظا هـ = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ ٢ جا٢س = ـ٢جا٢ × $\frac{\pi}{١٢}$

∴ ظا هـ = ـ ٢جا٣٠ = ـ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ـ ١ ∴ هـ = ١٣٥° = $\frac{٣\pi}{٤}$

**************************************************************

**مثـــال ٢٣ : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة ص = س جا س عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

**الحــــــــــل**

ظا هـ = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١ × جا س + جتا س × س = جا س + س جتا س

بالتعويض ∴ ظا هـ = جا $\frac{\pi}{٢}$ + $\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ + $\frac{\pi}{٢}$ × صفر = ١

∴ هـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

**************************************************************

**مثـــال ٢٤ : أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = جا٢س حيث س ∈ [ ٠ ، π ] وعندها يكون المماس موازيا المستقيم ص = س**

**الحــــــــــل**

∵ المماس // المستقيم ص = س ∴ ميل المماس = ميل المستقيم

∵ ميل المستقيم $\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{\text{المستقيم}}$ = ١

، ميل المماس $[\frac{دص}{دس}]_{المماس}$ = ٢ جتا٢س = ١

∴ جتا٢س = $\frac{١}{٢}$ موجبة فى الربع الأول أ، الثانى

∴ ٢س = ٣٠ ⟸ س = ١٥° أ، ٢س = ٣٠٠ ⟸ س = ١٥٠°

∴ ص= جا٢×١٥ = جا٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ، ص= جا٢×١٥٠ = جا٣٠٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ النقط هى : (١٥ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) أ، (١٥٠ ، ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

*******************************************************

## تمــــــــارين

### [١] اوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

١ ) إذا كانت ص = ٣حا٤س + ٢ حتا٣س

٢ ) إذا كانت ص = ٢ حا٤س ـ ٣حتا س

٣ ) إذا كانت ص = $س^{٣}$ + حا٥س

٤ ) إذا كانت ص = $س^{٢}$ ـ حتا٢ س

٥ ) إذا كانت ص = حا(٢ س + ٣)

٦ ) إذا كانت ص = حتا(٣ ـ ٢ س)

٧ ) إذا كانت ص = س حا س

٨ ) إذا كانت ص = $س^{٢}$ حتا٢س

٩ ) إذا كانت ص = (٢ س+١)حا٣س

١٠ ) إذا كانت ص = س حا $\frac{س}{٣}$

١١ ) إذا كانت ص = $\frac{س}{جتا س}$

١٢ ) إذا كانت ص = $\frac{\text{حا س}}{\text{١ + جا س}}$

١٣ ) إذا كانت ص = ( ٣ – حتاس )$^{٤}$

١٤ ) إذا كانت ص = ٦ س حاس حتاس

(٢) أوجد ميل المماس لمنحني الدالة ص = س حاس عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(٣) أوجد ميل المماس لمنحني الدالة ص = س حا٢س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٤) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحني الدالة :

ص = حاس + جا٢ س عند س = $\pi$

(٥) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحني الدالة :

ص = حا( ٢ س – $\frac{\pi}{٣}$ ) عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٦) إذا كانت ص = ل حاس + م حتاس ، عند س = $\frac{\pi}{٣}$

فإن ص = $\frac{٥}{٢}$ ؛ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = – $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ أوجد قيمة كلا من ل ؛ م

(٧) إذا كانت ص = حا٣س أوجد متوسط التغير عندما تتغير س من $\frac{\pi}{٦}$ إلى $\frac{٥\pi}{١٨}$

ثم أوجد معدل التغير عندما س = $\frac{\pi}{٦}$

(٨) أوجد النقط الواقعة علي منحني الدالة ص = حا٢ س والتي عندها ميل المماس = ١

(٩) إثبت أن المماس لمنحني الدالة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٤س – ١٤ = ٠ عند النقطة

(١، ٣ – ) يوازي المماس لمنحني الدالة ص = $\frac{١}{٢}$ حا٢ س – ٢حتا٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

(١٠) إذا كانت د ( س ) = ( ٢ – حتا٣س )$^{٥}$ فاوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

(١١) إذا كانت د ( س ) = ( س$^{٢}$ – ٢ ) حاس + ٢ س حتاس

فاثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{٢}$ حتاس

# التكامــــــــل

**تعريف :**

إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت/ (س) = د (س) فإن :

ت (س) تسمى المشتقة العكسية للدالة د (س) أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د (س) و يرمز للدالة ت (س) بالرمز $\int$ د (س) ء س

أى أن : ت (س) = $\int$ د (س) ء س إذا و فقط إذا كان : ت/ (س) = د (س)

**فمثلاً: إذا كانت : د (س) = س$^{٢}$** فإن : د/ (س) = ٢ س

و بالتالى تكون الدالة س$^{٢}$ هى مشتقة عكسية " دالة أصلية مقابلة " للدالة٢ س

**مثــ١ــال :** أى أن : $\int$ ٢ س ء س = س$^{٢}$ + ث حيث : ث ثابت التكامل

**نظرية :**

$$\int س^{ن} \, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$
حيث : ن ≠ − ١ ، ث ثابت

**مثــ٢ــال :** أى أن : $\int$ س$^{٥}$ ءس = $\frac{س^{٦}}{٦}$ + ث

**مثــ٣ــال :** أى أن : $\int$ س$^{٣}$ ء س = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + ث

**مثــ٤ــال :** أى أن : $\int$ س$^{٢}$ ء س = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ث

**مثــ٥ــال :** أى أن : $\int$ س ء س = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ث

*****************************************************************************

**نتيجة.**

$$\int أ س^{ن} \, ء س = \frac{أ س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$
حيث : ن ≠ − ١ ، أ ، ث ثوابت

**ملاحظة.**

$\int$ ء س = س + ث ، $\int$ أ ء س = أ س + ث

**قاعدة:**

$$\int [د_1(س) \pm د_2(س) \pm \text{............} \pm د_ن(س)] \; ء س$$

$$= \int د_1(س) \; ء س \pm \int د_2(س) \; ءس \pm \text{.....} \pm \int د_ن(س) \; ءس$$

**مثـــال١:** $\int (٣س^٢ + ٤س - ٥) \; ء س = \frac{٣س^٣}{٣} + \frac{٤س^٢}{٢} - ٥س + ث$

$= س^٣ + ٢س^٢ - ٥س + ث$

**مثـــال٢:** $\int (\sqrt{س} + \frac{١}{س^٣}) \; ء س = \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-٣}) \; ء س$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} - \frac{١}{٢س^٢} + ث$

**مثـــال٣:** $\int (س - ٥)(س + ١) \; ء س = \int (س^٢ - ٤س - ٥) \; ء س$

$= \frac{١}{٣} س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ث$

**مثـــال٤:** $\int \frac{س^٣ - ٤س^٢ - ٥}{س} \; ء س = \int (س^٢ - ٤س - ٥) \; ء س$

$= \frac{١}{٣} س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ث$

**مثـــال٥:** $\int \frac{س^٣ - ١}{س - ١} \; ء س = \int \frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{س - ١} \; ء س$

$= \int (س^٢ + س + ١) \; ء س = \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{٢} س^٢ + س + ث$

*****************************************************************************

**نظرية :** إذا كان : أ ، ب ثابتين ، $ن \neq -١$ فإن :

$$\int (أس + ب)^ن \; ء س = \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن + ١)} + ث$$ حيث ث ثابت

**مثـــال١:** $\int (٢س + ٣)^٥ \; ء س = \frac{(٢س + ٣)^٥}{٢ \times ٦} + ث$

**مثـــال٢:** $\int \sqrt{\text{٢س} - ٥}\ \text{ء س} = \int (\text{٢س} - ٥)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ء س}$

$= \dfrac{(\text{٢س} - ٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٢ \times \frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١}{٣} \left(\sqrt{\text{٢س} - ٥}\right)^{٣} + \text{ث}$

**مثـــال٣:** $\int \text{س}^{١٠} \left(\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٥} \text{ء س} = \int \left[\text{س}^{٢} \left(\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\right]^{٥} \text{ء س}$

$= \int (\text{٧س} + ١)^{٥}\ \text{ء س} = \frac{١}{٤٢} (\text{٧س} + ١)^{٦} + \text{ث}$

**مثـــال٤:** $\int (\text{س} + ١) \sqrt{\text{٣س} + ٥}\ \text{ء س}$ بالضرب فى $٣ \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{٣س} + ٣)(\text{٣س} + ٥)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{٣س} + ٥ - ٢)(\text{٣س} + ٥)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ء س}$ بإضافة $\pm ٥$

$= \frac{١}{٣} \int (\text{٣س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}}\ \text{ء س} - \frac{٢}{٣} \int (\text{٣س} + ٥)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ء س}$

$= \frac{٢}{٤٥} (\text{٣س} + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٢٧} (\text{٣س} + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

***************************************************************

## تمـــــارين

١ – أوجد :

(١) $\int ٥\ \text{س}^{٢} (\text{٢س} - ١)^{٢}\ \text{ء س}$

(٢) $\int (\text{س}^{٢} - ١)^{٢} (\text{س}^{٢} + ١)^{٢}\ \text{ء س}$

(٣) $\int \dfrac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١}\ \text{ء س}$  (٤) $\int (٥ - \text{٣س})^{٨}\ \text{ء س}$

(٥) $\int \sqrt{\text{٣س} - ١}\ \text{ء س}$  (٦) $\int \dfrac{٣}{(\text{٥س} + ١)^{٤}}\ \text{ء س}$

(٧) $\int \text{س} (\text{س} + ١)^{٥}\ \text{ء س}$  (٨) $\int (\text{٢س} + ١) \sqrt{\text{س} - ١}\ \text{ء س}$

## تكامل بعض الدوال المثلثية

* ∫ حا س ء س = − حتا س + ث : ث ثابت
* ∫ حتا س ء س = حا س + ث : ث ثابت
* ∫ قا٢ س ء س = طا س + ث : ث ثابت
* ∫ حا (ﻡ س + ب) ء س = − $\frac{١}{ﻡ}$ حتا (ﻡ س + ب) + ث : ث ثابت
* ∫ حتا (ﻡ س + ب) ء س = $\frac{١}{ﻡ}$ حا (ﻡ س + ب) + ث : ث ثابت
* ∫ قا٢ (ﻡ س + ب) ء س = $\frac{١}{ﻡ}$ طا (ﻡ س + ب) + ث : ث ثابت

**تذكر ما يأتى :**

* حتا٢ س + حا٢ س = ١
* ١ + طا٢ س = قا٢ س
* حا ٢ س = ٢ حا س حتا س
* حتا ٢ س = حتا٢ س − حا٢ س = ٢ حتا٢ س − ١ = ١ − ٢ حا٢ س
* طا ٢ س = $\frac{٢ \text{ طا س}}{\text{١ − طا}^٢ \text{ س}}$

*************************************************************************

**مثـــال١** ∫ ( ٢ حا س + ٣ قا٢ س ) ء س = − ٢ حتا س + ٣ طا س + ث

**مثـــال٢** ∫ ( ٥ حتا $\frac{س}{٣}$ − ٢ حا $\frac{٣س}{٤}$ ) ء س = ١٥ حتا $\frac{س}{٣}$ + $\frac{٨}{٣}$ حتا $\frac{٣س}{٤}$ + ث

**مثـــال٣** ∫ [ قا٢ ( $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ) + حتا ( ٣ س − ١ ) ] ء س

**الحـــــل**

= ٢ قا٢ ( $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ) + $\frac{١}{٣}$ حتا ( ٣ س − ١ ) + ث

**مثـــ٤ـــال** ∫ حا س حتا س ء س

**الحـــــــل**

∫ حا س حتا س ء س = $\frac{1}{2}$ ∫ ٢ حا س حتا س ء س

= $\frac{1}{2}$ ∫ حا ٢ س ء س = $-\frac{1}{4}$ حتا ٢ س + ث

*****************************************************************************

**مثـــ٥ـــال** ∫ [ حتا$^{2}$ س + حا س ] ء س

**الحـــــــل**

∫ [ حتا$^{2}$ س + حا س ] ء س = ∫ [ $\frac{1}{2}$ حتا ٢ س + $\frac{1}{2}$ + حا س ] ء س

= $\frac{1}{4}$ حا ٢ س + $\frac{1}{2}$ س − حتا س + ث

*****************************************************************************

## تمــــــــــارين

١ ـ أوجد :

(١) ∫ ( حا س + حتا س )$^{2}$ ء س

(٢) ∫ ( قا س − حتا س )$^{2}$ ء س

(٣) ∫ [ ( ١ − طا س )$^{2}$ + ٢ طا س ] ء س

(٤) ∫ ( ١ + حا س )$^{2}$ ء س

(٥) ∫ ( قا$^{2}$ س + طا$^{2}$ ٢ س ) ء س

(٦) ∫ $\frac{١ + حا^{2} س}{١ − حا^{2} س}$ ء س

(٧) ∫ ٨ حا $\frac{س}{٢}$ حتا $\frac{س}{٢}$ ء س