المتميز

للمعلم

فى الرياضيات البحتة

∞ | ⊥ | Ʃ | ∋

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثانى الثانوى
الفصل الدراسى الثانى

٢٠١٥

المتتابعات و المتسلسلات

المتتابعات

تمهيد (١) :

نعلم أن :
النمط العددى هو تتابع من الأعداد الحقيقية وفقاً لقاعدة معينة

تمهيد (٢) :

الجدول التالى يبين عدد الصفحات التى قرأها محمد من كتاب خلال ٤ أيام

اليوم						
	لفظياً	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	....
	عددياً	١	٢	٣	٤	....
عدد الصفحات		٣	٦	٩	١٢	....

نلاحظ من الجدول ما يلى :

(١) إذا رمزنا للأيام بالرمز : $ن$ ، و لعدد الصفحات المقروءة بالرمز $ع_ن$

فإن : $ن$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ..... } ،

$ع_ن$ = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ..... }

(٢) عدد الصفحات عبارة عن نمط عددى حيث :

كل عدد يزيد عن سابقه مباشرة بمقدار ٣ " يسمى وصف النمط "

(٣) العلاقة بين الأيام و عدد الصفحات هى : $ع_ن$ = ٣ $ن$

تسمى " قاعدة النمط "

(٤) يمكن ايجاد عدد الصفحات المقروءة خلال أى يوم تالى

فمثلاً : عدد الصفحات المقروءة خلال اليوم السابع

= ٣ × ٧ = ٢١

تمهيد (٣) :

بعض الأنماط الأخرى :

سنرمز : لقيمة الحد بالرمز $ع_ن$ ، لرتبة الحد بالرمز $ن$

[١] (١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)

وصف النمط : كل عدد = العدد السابق له مباشرة + ٣

قاعدة النمط : $ع_ن$ = ٣ $ن$ + ١

[٢] (−١ ، −٤ ، −٧ ، −١٠ ، −١٣ ، ...)

وصف النمط : كل عدد = العدد السابق له مباشرة − ٣

قاعدة النمط : $ع_ن$ = ٢ − ٣ $ن$

[٣] (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...)

وصف النمط : كل عدد = العدد السابق له مباشرة × ٢

قاعدة النمط : $ع_ن = ن^{٢}$ أو $ع_ن = (٢)^{ن-١}$

[٤] (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ...)

وصف النمط : كل عدد = العدد السابق له مباشرة ÷ ٢

قاعدة النمط : $ع_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$

[٥] (١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ...)

وصف النمط : كل عدد = العدد السابق له مباشرة = ١

قاعدة النمط : $ع_ن$ = ١

أكتوبر ٢٠١٥

المتتابعة :

هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص_{+}$ أى :
{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن } أو مجموعة جزئية منها
، و مداها مجموعة الأعداد الحقيقية ح حيث :
يرمز للحد الأول بالرمز $ح_{١}$ ، و للحد الثانى بالرمز $ح_{٢}$
، و للحد الثالث بالرمز $ح_{٣}$ ، ... و هكذا
، و للحد النونى بالرمز $ح_{ن}$
و يمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كما يلى :
($ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، ..... ، $ح_{ن}$) و يرمز لها الرمز ($ح_{ن}$)

ملاحظات :

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة
(٢) الرمز ($ح_{ن}$) يعبر عن المتتابعة
بينما الرمز $ح_{ن}$ يعبر عن حدها النونى
(٣) المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) و قد تتكرر هذه العناصر
(٤) قيمة الحد : $ح_{ن} \in ح$ بينما رتبة الحد : $ن \in ص_{+}$

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير المنتهية :

* تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً
(أى يمكن حصره أو عده)
* تكون المتتابعة غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته
(عدد لا نهائى من العناصر)

إجابة حاول أن (١) تحل صفحة (٥) :

(أ) ($ح_{ن}$) = (٣ ، $١ + \sqrt{٢}$ ، $١ + \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}$ ، .....)

(ب) ($ح_{ن}$) = (حا π ، حا $\frac{١}{٢}\pi$ ، حا $\frac{١}{٣}\pi$ ، .....)
= (٠ ، ١ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، .....)

الحد العام للمتتابعة :

الحد العام للمتتابعة (و يسمى أحياناً بالحد النونى) و يكتب : $ح_{ن}$
حيث : $ح_{ن}$ صورة العنصر الذى ترتيبه ن ، و يمكن استنتاجه من خلال حدود معطاة للمتتابعة و ذلك بادراك العلاقة بين قيمة الحد و رتبته
فمثلاً : المتتابعة (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، .....)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	.....	ن
قيمة الحد	٥	١٠	١٥	٢٠	.....	٥ ن

الحد العام لها هو : $ح_{ن} = ٥ ن$

إجابة مسألة رقم (١٥) تمارين (١ – ١) صفحة (٧)

(أ)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	.....	ن
قيمة الحد	٢	٥	٨	١١	.....	٣ ن – ١

$ح_{ن} = ٣ ن - ١$

(ب)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	.....	ن
قيمة الحد	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{٤}{٥}$	.....	$\frac{ن}{ن + ١}$

$ح_{ن} = \frac{ن}{ن + ١}$

(حـ)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	....	ن
قيمة الحد	١	٨	٢٧	٦٤	....	$\text{ن}^{٣}$

$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ن}^{٣}$

(ء)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	....	ن
قيمة الحد	١	$\frac{١}{١٠}$	$\frac{١}{١٠٠}$	$\frac{١}{١٠٠٠}$	....	$\left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{ن} - ١}$

$\text{ع}_{\text{ن}} = \left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{ن} - ١}$

(هـ)

رتبة الحد	١	٢	٣	٤	...	ن
قيمة الحد	$\text{حتا } \frac{١}{٣}\pi$	$\text{حتا } \frac{٢}{٣}\pi$	$\text{حتا } \pi$	$\text{حتا } \frac{٤}{٣}\pi$	...	$\text{حتا ن } \frac{١}{٣}\pi$

$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{حتا ن } \frac{١}{٣}\pi$ ، $\text{ن} \in \text{ص}_{+}$

ملاحظات :

يمكن كتابة حدود المتتابعة بإحدى طريقتين :

(١) التعويض عن قيم ن فى قاعدة المتتابعة كما يلى :

إذا كان : $\text{ع}_{\text{ن}} = ٢\text{ن} + ١$ فإن : حدود المتتابعة تكون :

بوضع : ن = ١ فإن : $\text{ع}_{١} = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

بوضع : ن = ٢ فإن : $\text{ع}_{٢} = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

بوضع : ن = ٣ فإن : $\text{ع}_{٣} = ٢ \times ٣ + ١ = ٧$

و هكذا و تكون المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

(٢) معرفة العلاقة بين حدودها كما يلى :

إجابة حاول أن (٢) تحل صفحة (٦) :

$\text{ع}_{١} = ٢$ ، $\text{ع}_{٢} = ٣$ ، $\text{ع}_{\text{ن}+٢} = \text{ع}_{\text{ن}+١} + \text{ع}_{\text{ن}}$

بوضع : ن = ١ فإن : $\text{ع}_{٣} = \text{ع}_{٢} + \text{ع}_{١} = ٢ + ٣ = ٥$

بوضع : ن = ٢ فإن : $\text{ع}_{٤} = \text{ع}_{٣} + \text{ع}_{٢} = ٥ + ٢ = ٧$

بوضع : ن = ٣ فإن : $\text{ع}_{٥} = \text{ع}_{٤} + \text{ع}_{٣} = ٧ + ٥ = ١٢$

بوضع : ن = ٤ فإن : $\text{ع}_{٦} = \text{ع}_{٥} + \text{ع}_{٤} = ١٢ + ٧ = ١٩$

$\therefore (\text{ع}_{\text{ن}}) = ($ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، .... $)$

(٣) بعض المتتابعات ليس لها قاعدة معروفة حتى الآن مثل متتابعة الأعداد الأولية : (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ...)

العدد الأولى و العدد المؤلف :

يقال أن : العدد الصحيح الموجب أولياً إذا كانت مجموعة عوامله عاملين فقط أو إذا كان أكبر من الواحد و لا يقبل القسمة إلا على نفسه و على العدد ١

و يسمى العدد الصحيح الموجب غير الأولى عدداً مؤلفاً إذا كتب على الصورة :

ن = أ ب　حيث : ١ < أ < ن ، ١ < ب < ن

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٠

المتتابعة التزايدية و المتتابعة غير التناقصية :

* تسمى المتتابعة ($ح_ن$) تزايدية إذا كان : $ح_{ن+١} > ح_ن$

أو إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$

* تسمى المتتابعة ($ح_ن$) تناقصية إذا كان : $ح_{ن+١} < ح_ن$

أو إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_ن < ٠$

ملاحظات :

(أ) المتتابعة الثابتة : جميع حدودها متساوية أى : $ح_ن = أ$

حيث : $أ \in ح$ و قد تكون منتهية أو تكون غير منهية

(٢) إذا كان المقدار : $ح_{ن+١} - ح_ن$ موجباً لبعض قيم $ن$

و سالباً لبعض قيم $ن$ الأخرى فإن : المتتابعة تكون :

ليست تزايدية و ليست تناقصية

إجابة حاول أن (٣) تحل صفحة (٧) :

(أ) $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ٣$

$$ح_{ن+١} - ح_ن = \left(\frac{٢}{ن+١} - ٣ \right) - \left(\frac{٢}{ن} - ٣ \right)$$

$$= \frac{-٢}{ن(ن+١)} < ٠$$ ∴ المتتابعة تناقصية

(ب) $ح_ن = \left(\frac{١}{٢} \right)^{ن}$

$$ح_{ن+١} - ح_ن = \left(\frac{١}{٢} \right)^{ن+١} - \left(\frac{١}{٢} \right)^{ن}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{٢} \right)^{ن} - \left(\frac{١}{٢} \right)^{ن}$$

$$= \left(-\frac{١}{٢} \right)\left(\frac{١}{٢} \right)^{ن} < ٠$$ ∴ المتتابعة تناقصية

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

(ج) $ح_ن = (-٢)^{ن}$

$$ح_{ن+١} - ح_ن = (-٢)^{ن+١} - (-٢)^{ن}$$

$$= (-٢) \times (-٢)^{ن} - (-٢)^{ن}$$

$$= (-٣)(-٢)^{ن}$$

و هو مقدار يعتمد على $ن$

و تكون : ($ح_ن$) = (−٢ ، ٤ ، −٨ ، ١٦ ، ....)

و يلاحظ أن الحدود الفردية تناقصية بينما الحدود الزوجية تزايدية

∴ المتتابعة ليست تزايدية و ليست تناقصية

إجابة مسألة رقم (١٩) تمارين (١ − ١) صفحة (٧)

في المتتابعة ($ح_ن$) إذا كان : $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$

و كان : $ح_{ن+١} + ح_ن = ن س$ أوجد قيمة $س$

∵ $ح_{ن+١} + ح_ن = ن س$

∴ بوضع : $ن = ١$ فإن : $ح_٢ = ح_١ + س$ (١)

، بوضع : $ن = ٢$ فإن : $ح_٣ = ح_٢ + ٢س$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج : $ح_٣ = ح_١ + ٣س$

∴ $٣٦ = ٩ + ٣س$ و منها : $س = ٩$

المتسلسلات و رمز التجميع

المتتابعة هى عبارة مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية وفق قاعدة معينة و تفصل بين حدودها العلامة (،)
أما المتسلسلة فهى عملية جمع حدود المتتابعة
فمثلاً : ($ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، ..... ، $ح_{ن}$) هى متتابعة بينما :
$ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \cdots + ح_{ن}$ هى المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة ، و يمكن استخدام رمز التجميع " Σ " و يقرأ " سيجما " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة

المتسلسلة المنتهية :

تكتب بالصورة : $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \cdots + ح_{ن}$ حيث :
ن عدد صحيح موجب ، $ح_{ن}$ هو الحد الذى ترتيبه ن فى المتسلسلة
و تسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المتناظرة
ففى المتسلسلة المنتهية : $أ_{١} + أ_{٢} + أ_{٣} + \cdots + أ_{ر} + \cdots + أ_{ن}$

يمكن كتابتها بالصورة : $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_{ر})$ و تقرأ :

مجموع $أ_{ر}$ من ر = ١ إلى ر = ن

أى أن : $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_{ر}) = أ_{١} + أ_{٢} + أ_{٣} + \cdots + أ_{ر} + \cdots + أ_{ن}$

و يسمى : $أ_{١} + أ_{٢} + أ_{٣} + \cdots + أ_{ر} + \cdots + أ_{ن}$ مفكوك المتسلسلة

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

إجابة حاول أن (١) تحل صفحة (١١) :

(أ) $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر^{٢}) = (١ + ١) + (١ + ٤) + (١ + ٩) + (١ + ١٦) + (١ + ٢٥)$
$= ١ \times ٥ + (١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥)$
$= ٥ + ٥٥ = ٦٠$

(ب) $\sum_{ر=١}^{٩} (٣ر + ٢) = (٣ + ٢) + (٦ + ٢) + (٩ + ٢) + (١٢ + ٢) + (١٥ + ٢) + (١٨ + ٢) + (٢١ + ٢) + (٢٤ + ٢) + (٢٧ + ٢)$
$= (٣ + ٦ + ١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١ + ٢٤ + ٢٧) + ٢ \times ٩$
$= ١٣٥ + ١٨ = ١٥٣$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} \left(\frac{١}{ر+٢} - \frac{١}{ر+١} \right) = (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٥} - \frac{١}{٤}) + \cdots + \left(\frac{١}{ن+٢} - \frac{١}{ن+١} \right)$
$= \frac{١}{ن+٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٢ - ن - ٢}{ن+٢} = \frac{-ن}{٢(ن+٢)}$

ملاحظة :

ايجاد : $\sum_{ر=٤}^{١٠} (١ + ر^{٢})$ يعنى جمع ١٠ حدود بدءً من الحد $ح_{٤}$

و يكون : عدد الحدود المراد جمعها = $١٠ - ٤ + ١ = ٧$

المتسلسلة غير المنتهية :

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها و تكتب بالصورة :

$\sum_{\text{ر}=1}^{\infty} (\text{أ}_{\text{ر}})$ و يستخدم الرمز ∞ للدلالة على ذلك

أى أن : المتسلسلة غير المنتهية ليس لها ناتج عددى و يستخدم الرمز ∞ للدلالة على ذلك

إجابة حاول أن (٢) تحل صفحة (١١) :

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة المتسلسلة :

$١ \times ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ \times ٥ + ٥ \times ٦ \times ٧ + \cdots$

$\because$ $\text{ع}_١ = ١ \times ٢ \times ٣$ ، $\text{ع}_٢ = ٣ \times ٤ \times ٥$ ، $\text{ع}_٣ = ٥ \times ٦ \times ٧$

$\therefore$ $\text{ع}_{\text{ر}} = (٢\text{ر} - ١)(٢\text{ر})(٢\text{ر} + ١)$ حيث : $\text{ر} \in \text{ص}^+$

$\therefore$ $١ \times ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ \times ٥ + ٥ \times ٦ \times ٧ + \cdots = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} (٢\text{ر} - ١)(٢\text{ر})(٢\text{ر} + ١)$

الخواص الجبرية للتجميع :

[١] إذا كان : $(\text{ع}_{\text{ر}})$ ، $(\text{هـ}_{\text{ر}})$ متتابعتين ، $\text{ن} \in \text{ص}^+$ ، $\text{حـ} \in \text{ح}$

فإن : (أ) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{حـ}) = \text{حـ ن}$

(ب) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{أ ع}_{\text{ر}}) = \text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$

(حـ) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}} \pm \text{هـ}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{هـ}_{\text{ر}}$

[٢] (١) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{١}{٢} \text{ن} (\text{ن} + ١)$ ،

(٢) $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^٢ = \frac{١}{٦} \text{ن} (\text{ن} + ١)(٢\text{ن} + ١)$

ملاحظة :

لإيجاد $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$ تستخدم احدى الطريقتين :

(١) التعويض المباشر و تستخدم لعدد قليل جداً من الحدود

(٢) الخواص الجبرية للتجميع و هى تصلح لجميع الحالات كطريقة عامة

إجابة حاول أن (٣) تحل صفحة (١٢) :

أوجد : $\sum_{\text{ر}=1}^{٥} (٢\text{ر}^٢ - ٣\text{ر} + ٥)$ بطريقتين مختلفتين

(١) $\sum_{\text{ر}=1}^{٥} (٢\text{ر}^٢ - ٣\text{ر} + ٥) = (٢ - ٣ + ٥) + (٨ - ٦ + ٥) +$

$(١٨ - ٩ + ٥) + (٣٢ - ١٢ + ٥) + (٥٠ - ١٥ + ٥)$

$= ٤ + ٧ + ١٤ + ٢٥ + ٤٠ = ٩٠$

احمد الشنتورى ٩ أكتوبر ٢٠١٥

(٣) $\sum_{r=1}^{5} (2r^2 - 3r + 5) = 2\sum_{r=1}^{5} r^2 - 3\sum_{r=1}^{5} r$

$+ \sum_{r=1}^{5} 5 = 2 \times \frac{1}{6} \times 5 \times (5+1)(2\times 5+1)$

$- 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times (5+1) + 5 \times 5$

$= 2 \times 55 - 3 \times 15 + 25 = 90$

برهان :

[٢] (١) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2} n (n+1)$ ،

(٢) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$

أولاً : باستخدام طريقة النمط :

(١) $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2} n (n+1)$

$ح_2 = 1+2 = 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times (2+1)$

$ح_3 = 1+2+3 = 6 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = \frac{1}{2} \times 12$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 3 \times (3+1)$

$ح_4 = 1+2+3+4 = 10 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10 = \frac{1}{2} \times 20$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = \frac{1}{2} \times 4 \times (4+1)$

و بتكرار هذه العملية n من المرات ينتج :

$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2} n (n+1)$

(٢) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$

$ح_2 = 1^2 + 2^2 = 1+4 = 5 = \frac{1}{6} \times 6 \times 5$

$= \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times 5 = \frac{1}{6} \times 2 \times (2+1) \times (2\times 2+1)$

$ح_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1+4+9 = 14 = \frac{1}{6} \times 6 \times 14$

$= \frac{1}{6} \times 3 \times 4 \times 7 = \frac{1}{6} \times 3 \times (3+1) \times (2\times 3+1)$

$ح_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1+4+9+16 = 30 = \frac{1}{6} \times 6 \times 30$

$= \frac{1}{6} \times 4 \times 5 \times 9 = \frac{1}{6} \times 4 \times (4+1) \times (2\times 4+1)$

و بتكرار هذه العملية n من المرات ينتج :

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$

ثانياً : باستخدام الاستنتاج الرياضى :

أثبت باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى أن :

(أ) $\sum_{r=1}^{n} r = 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2} n (n+1)$ (١)

أكتوبر ٢٠١٥

البرهان

عندما : $\text{ن} = ١$ الطرف الأيمن $= ١$ ، الطرف الأيسر $= \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$

∴ الطرفان متساويان ∴ العلاقة صحيحة عندما : $\text{ن} = ١$

نفرض صحة العلاقة (١) عندما : $\text{ن} = \text{ل}$ (ل عدد صحيح موجب) أى

أن : $١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ل} = \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,(\text{ل} + ١)$ (٢)

بإضافة الحد الذى رتبته (ل + ١) إلى الطرفين فى (٢) نجد أن :

$$١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ل} + (\text{ل} + ١) = \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,(\text{ل} + ١) + (\text{ل} + ١)$$

$$= \frac{١}{٢}\,(\text{ل} + ١)(\text{ل} + ٢)$$

وهذه العلاقة نحصل عليها فيما لو عوضنا عن $\text{ن} = (\text{ل} + ١)$ فى (١)

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم ن العددية الصحيحة الموجبة

(٢) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + \text{ن}^٢$

$= \frac{١}{٦}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ١)(٢\text{ن} + ١)$ (١)

البرهان

عندما : $\text{ن} = ١$ الطرف الأيمن $= ١^٢ = ١$ ،

الطرف الأيسر $= \frac{١}{٦} \times ١ \times ٢ \times ٣ = ١$

∴ الطرفان متساويان ∴ العلاقة صحيحة عندما : $\text{ن} = ١$

نفرض صحة العلاقة (١) عندما : $\text{ن} = \text{ل}$ (ل عدد صحيح موجب)

أى أن : $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + \text{ل}^٢$

$= \frac{١}{٦}\,\text{ل}\,(\text{ل} + ١)(٢\text{ل} + ١)$ (٢)

بإضافة الحد الذى رتبته (ل + ١) إلى الطرفين فى (٢) نجد أن :

$$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + \text{ل}^٢ + (\text{ل} + ١)^٢ =$$

$$\frac{١}{٦}\,\text{ل}\,(\text{ل} + ١)(٢\text{ل} + ١) + (\text{ل} + ١)^٢$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ل} + ١)\Big(\text{ل}\,(٢\text{ل} + ١) + ٦(\text{ل} + ١)\Big)$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ل} + ١)(٢\text{ل}^٢ + ٧\text{ل} + ٦)$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ل} + ١)(\text{ل} + ٢)(٢\text{ل} + ٣)$$

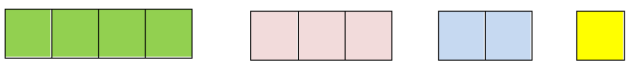
وهذه العلاقة نحصل عليها فيما لو عوضنا عن $\text{ن} = (\text{ل} + ١)$ فى (١)

∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم ن العددية الصحيحة الموجبة

ثالثاً : بالتمثيل الهندسى :

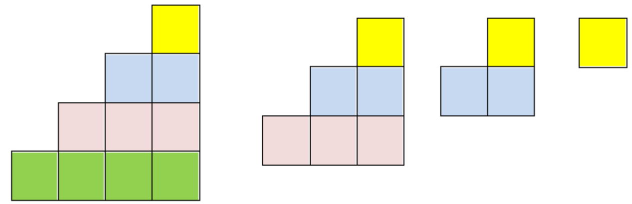
(١) $١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن} = \frac{١}{٢}\,\text{ن}\,(\text{ن} + ١)$

نمثل كل حد بعدد من المربعات كما يلى :

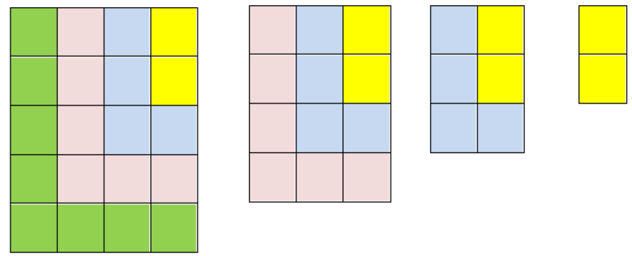


لايجاد المجموع : نضع المربعات على هيئة صفوف كما يلى :

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥



ننسخ الأشكال مرة أخرى و نرتبها كما يلى :



فيتكون مستطيل عرضه يساوى رتبة الحد و طوله يساوى رتبة الحد التالى مباشرة ، و يكون المجموع مساوياً لنصف مساحة المستطيل كما يلى :

$$\text{حـ}_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

$$\text{حـ}_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

$$\text{حـ}_3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

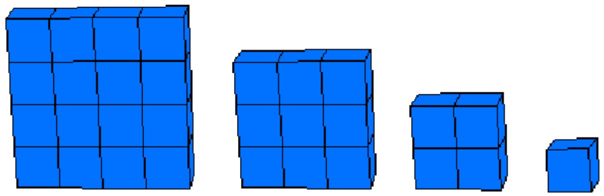
$$\text{حـ}_4 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

و بتكرار هذه العملية ن من المرات ينتج :

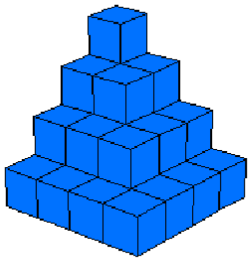
$$1 + 2 + 3 + \cdots + \text{ن} = \frac{1}{2}\,\text{ن}\,(\text{ن} + 1)$$

(٢) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \text{ن}^2 = \frac{1}{6}\,\text{ن}\,(\text{ن} + 1)(2\text{ن} + 1)$

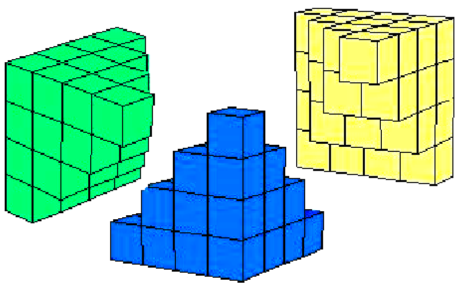
نمثل كل حد بعدد من المكعبات كما يلى :



لايجاد المجموع : نضع المكعبات على هيئة صفوف
و كمثال سنوجد مجموع الحدود الأربعة الأولى
كما يلى :

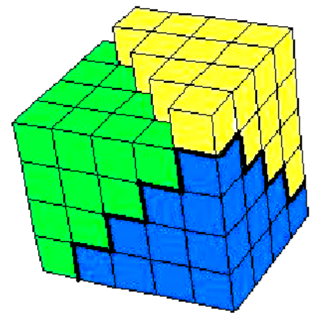


ولكى نوجد مجموع الحدود الأربعة الأولى نقوم بتركيب ثلاثة أشكال من الشكل السابق كما يلى :



أكتوبر ٢٠١٥

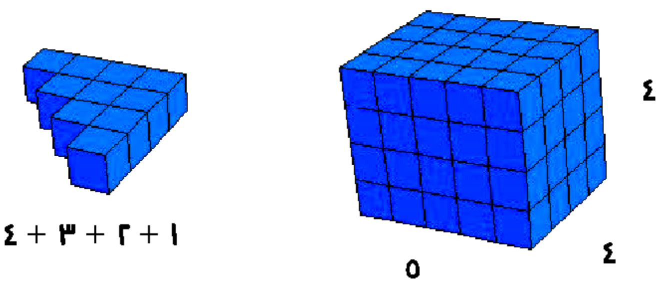
وبعد تركيب هذه الأشكال الثلاثة سنحصل على الشكل التالى :



ولإيجاد مجموع المكعبات فى هذا الشكل هناك طريقتان :

الطريقة الأولى

لنتأمل الشكل ، سنلاحظ أنه من الممكن أن نقسمه إلى القسمين التاليين:



الشكل الأول : متوازي مستطيلات ، الشكل الثانى : مجموع الأعداد

حجمه : $٤ \times ٤ \times ٥ = ٨٠$ ، $١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠$

و يكون المجموع الكلى = $\frac{١}{٣} \times (٨٠ + ١٠) = ٣٠$

حيث : $٨٠ = ٤^٢ \times (٤ + ١)$ ، $١٠ = \frac{١}{٢} \times ٤ \times (٤ + ١)$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

و يكون المجموع الكلى = $\frac{١}{٣} \times \left(٤^٢ \times (٤ + ١) + \frac{١}{٢} \times ٤ \times (٤ + ١) \right)$

$= \frac{١}{٣} \times \left(٤ \times (٤ + ١)(٤ + \frac{١}{٢}) \right)$

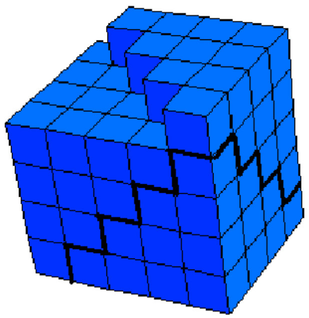
$= \frac{١}{٦} \times \left(٤ \times (٤ + ١)(٢ \times ٤ + ١) \right)$

و بتكرار هذه العملية ن من المرات ينتج :

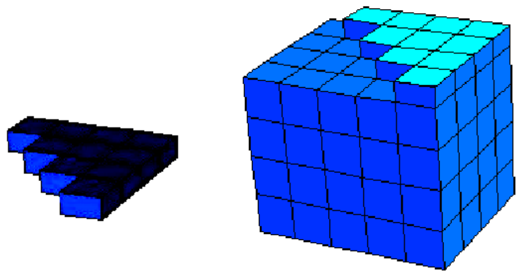
$$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + ن^٢ = \frac{١}{٦} ن (ن + ١)(٢ن + ١)$$

الطريقة الثانية

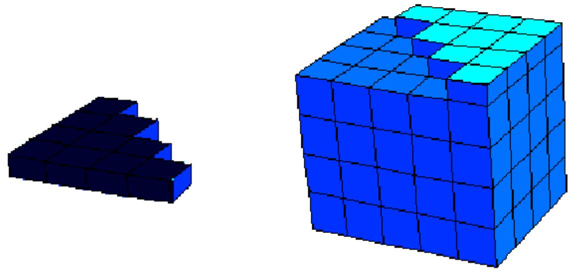
من الشكل



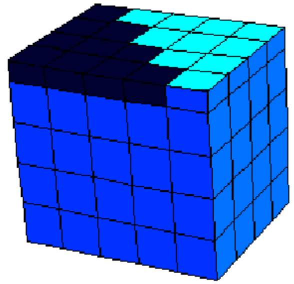
نقسم المكعبات الموجودة فى أعلى الشكل إلى قسمين كما يلى :



ثم نعكس الشكل المقطوع كما يلى :



ثم نركيب الجزء المقطوع فى أعلى الشكل فنحصل على الشكل التالى :



و هو عبارة عن متوازى مستطيلات أبعاده هى : $٤ \times ٥ \times ٤,٥$

حجمه : $٤ \times ٥ \times ٤,٥ = ٩٠$

مجوع الأعداد $= \frac{١}{٣} \times ٩٠ = ٣٠$

أى أن : مجوع الأعداد $= \frac{١}{٣} \times ٤ \, (٤ + ١)(٤ + \frac{١}{٢})$

$$= \frac{١}{٦} \times \left(٤ \times (٤ + ١)(٢ \times ٤ + ١) \right)$$

و بتكرار هذه العملية ن من المرات ينتج :

$$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + ن^٢ = \frac{١}{٦} \, ن \, (ن + ١)(٢ن + ١)$$

إجابة مسألة رقم (١) تمارين (١ – ٢) صفحة (١٢)

(أ) المتسلسلة : $٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + \cdots + ٥٠$

$\because ح_{١} = ٥$ ، $ح_{٢} = ١٠$ ، $ح_{٣} = ١٥$ ، $ح_{٤} = ٢٠$

$\therefore ح_{ر} = ٥ر$ حيث : $ر \in ص^{+}$

و يكون : $ح_{١٠} = ٥٠$ أى أن : عدد الحدود $= ١٠$

$$\therefore ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + \cdots + ٥٠ = \sum_{ر=١}^{١٠} ٥ر$$

(ب) بالمثل : و الحل هو $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٧ر$

(حـ) بالمثل : و الحل هو $\sum_{ر=١}^{\infty} \left((\frac{١}{٢})^{ر} - ١ \right)$

(د) المتسلسلة : $٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + \cdots$ إلى ن حداً

$\because ح_{١} = (١٠^{١} - ١)$ ، $ح_{٢} = (١٠^{٢} - ١)$

، $ح_{٣} = (١٠^{٣} - ١)$ ، $ح_{٤} = (١٠^{٤} - ١)$

$\therefore ح_{ر} = (١٠^{ر} - ١)$ حيث : $ر \in ص^{+}$

$\therefore ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + \cdots$ إلى ن حداً

$$= \sum_{ر=١}^{\infty} (١٠^{ر} - ١)$$

المتتابعة الحسابية

تعريف (١) :

المتتابعة الجسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد و الحد السابق له مباشرة مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة ، و يرمز له عادة بالرمز (ء) أى أن : $ء = ح_{ن+١} - ح_{ن}$ لكل : $ن \in ص^{+}$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (١٥)

(أ) $ح_{ن+١} - ح_{ن} = (٥ - ٣ (ن + ١)) - (٥ - ٣ ن)$

$= -٣$ " مقدار ثابت "

∴ المتتابعة حسابية و أساسها -٣

(ب) $ح_{ن+١} - ح_{ن} = (ن + ١ + ١)^{٢} - (ن + ١)^{٢}$

$= (ن + ٢)^{٢} - (ن + ١)^{٢}$

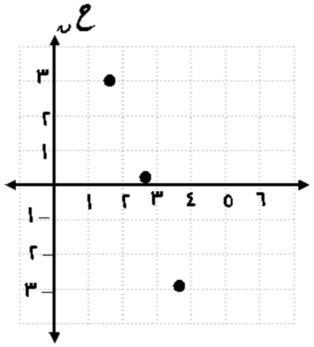
$= ن^{٢} + ٤ ن + ٤ - ن^{٢} - ٢ ن - ١$

$= ٢ ن + ٣$ " ليس مقدار ثابت "

∴ المتتابعة ليست حسابية

أحمد الشنتورى
٩ أكتوبر ٢٠١٥

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية :



عند تمثيل المتتابعة الحسابية نكون نظام احداثى متعامد كما بالشكل المقابل الذى يمثل المتتابعة (٣ ، ٠ ، −٣ ، .....) حيث : ن

مجال المتتابعة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... } ،

مدى المتتابعة = { ٣ ، ٠ ، −٣ ، ..... }

و تكون النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة

مما يعنى أن : المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن لكل : $ن \in ص^{+}$ و يكون معامل ن هو أساس المتتابعة

و تكون العلاقة بين كل : ن ، $ح_{ن}$ هى : $ح_{ن} = ء ن + ب$

حيث : ء ، ب ثابتان ، ء أساس المتتابعة

ملاحظة :

تكون المتتابعة الحسابية تزايدية إذا كانت : $ء > ٠$ ،

و تكون تناقصية إذا كانت : $ء < ٠$ ، و تكون ثابتة إذا كانت : $ء = ٠$

الحد النونى للمتتابعة الحسابية :

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية ($ح_{ن}$) التى حدها الأول أ و أساسها ء كما يلى :

$ح_{١} = أ$ ، $ح_{٢} = أ + ء$ ، $ح_{٣} = أ + ٢ ء$

و بالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو :

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) ء$

و إذا كان : $ح_{ن} = ل$ فإن : $ل = أ + (ن - ١) ء$

حيث : (ل) هو الحد الأخير ، أ (قيمة الحد الأول)

، ء (أساس المتتابعة) ، ن (عدد الحدود أو رتبة الحد الأخير)

ملاحظات :

(١) القانون : $ح_{ن} = أ + (ن - ١)\, ء$ يربط بين :
ن (رتبة الحد) ، $ح_{ن}$ (قيمة الحد) ، أ (قيمة الحد الأول)
، ء (أساس المتتابعة) و هى أربعة مجاهيل يمكن ايجاد احداها بمعلومية الثلاثة الآخرين

(٢) إذا وجد فى هذه العلاقة مجهولين (أ ، ء مثلاً) وجب تكوين معادلتين و حلهما معاً حلاً جبرياً

(٣) يجب التفرقة بين ن (رتبة الحد) ، $ح_{ن}$ (قيمة الحد)

(٤) المعادلة : $ح_{ن} = أ + (ن - ١)\, ء$ تعطى دالة خطية لأنها من الدرجة الأولى فى ن

(٥) لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة ولتكن ل
نضع : $ح_{ن} = ل$

(٦) لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة ولتكن م
نضع : $ح_{ن} < م$

(٧) لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة ولتكن ع
نضع : $ح_{ن} > ع$

(٨) لإيجاد رتبة أول حد سالب　　نضع : $ح_{ن} < ٠$

(٩) لإيجاد رتبة أول حد موجب　　نضع : $ح_{ن} > ٠$

تعيين المتتابعة الحسابية :

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول أ و أساسها ء

الأوساط الحسابية :

عندما يوجد حدان غير متتاليان فى متتابعة حسابية تسمى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدين أوساطاً حسابية ، و يمكن استخدام هذا المفهوم فى ايجاد الحدود الناقصة بين هذين الحدين فى المتتابعة الحسابية

تعريف (٢) :

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود من متتابعة حسابية فإن :
ب تعرف بالوسط الحسابى بين أ ، حـ حيث : ب − أ = حـ − ب
أى أن : ٢ ب = أ + حـ فيكون : $ب = \frac{١}{٢}\,(أ + حـ)$

لذلك فإن : (أ ، $\frac{١}{٢}\,(أ + حـ)$ ، حـ) متتابعة حسابية

و يمكن ادخال عدة أوساط حسابية : $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ٠٠٠٠٠ ، $س_{ن}$
بين الحدين أ ، ب بحيث تكون الأعداد :
(أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ٠٠٠٠٠ ، $س_{ن}$ ، حـ) متتابعة حسابية
و يكون عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد الأوساط الحسابية + ٢

ملاحظات :

(١) ∵ $ل = أ + (ن - ١)\, ء$ و منها : $ء = \frac{ل - أ}{ن - ١}$
حيث : ل قيمة الحد الأخير ، ن رتبته ،
أ قيمة الحد الأول ، رتبته = ١
و بالتالى إذا كان : $ح_{ل}$ ، $ح_{م}$ حدان من متتابعة حسابية فإن :

$$ء \text{ " أساس المتتابعة " } = \frac{ح_{ل} - ح_{م}}{ل - م}$$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

فمثلاً : إذا كان الحد السابع من متتابعة حسابية هو ٢٧ ، و الحد الثالث منها هو ١١ فإن :

$$ء = \frac{٢٧ - ١١}{٧ - ٣} = \frac{١٦}{٤} = ٤$$

(٢) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين العددين أ ، ل :

∵ عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد الأوساط الحسابية + ٢

∴ عدد الحدود − ١ " (ن − ١) " = عدد الأوساط + ١

، ∵ ل − أ = (ن − ١) ء

∴ ل − أ = (عدد الأوساط + ١) ء

و ينتج : $ء = \frac{\text{ل} - \text{أ}}{\text{عدد الأوساط} + ١}$

فمثلاً : لإدخال أربعة أوساط حسابية بين ٧ ، ٤٧ فإن :

$$ء = \frac{٤٧ - ٧}{٤ + ١} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

و تكون الأوساط هى : ١٥ ، ٢٣ ، ٣١ ، ٣٩

إجابة مسألة رقم (٣٥) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

$ح_{١}$ = ١٠٠ ، ء = ١٢٠

∴ $ح_{١٠}$ = ١٠٠ + ٩ × ١٢٠ = ١١٨٠

إجابة مسألة رقم (٣٦) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

$ح_{١}$ = ١٢٠ × ١ + ١٨٠ = ٢٠٠ ، ء = ١٢٠

∴ ١٤٠٠ = ٢٢ + (ن − ١) × ١٢٠

و منها ينتج : ن = ١١

إجابة مسألة رقم (٣٧) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

∵ ل وسط حسابى بين س ، م ∴ ٢ ل = س + م (١)

، ∵ م وسط حسابى بين ل ، ص ∴ ٢ م = ل + ص (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج : ٢ ل − ٢ م = س + م − ل − ص

و منها ينتج : ٣ ل − ٣ م = س − ص

∴ ل − م = $\frac{١}{٣}$ (س − ص)

حل آخر

نفرض أن : ل = س + ء

∴ م = س + ٢ ء ، ص = س + ٣ ء

∴ الطرف الأيمن = س + ء − س − ٢ ء = − ء

، الطرف الأيسر = $\frac{١}{٣}$ (س − س − ٣ ء) = − ء

∴ الطرفان متساويان

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

المتسلسلات الحسابية

المتسلسلة الحسابية هى مجموع حدود المتتابعة الحسابية المرتبطة بها و يرمز لمجموع ن حداً منها بالرمز $حـ_{ن}$

مجموع ن حداً الأولى من متتابعة حسابية :

أولاً : مجموع ن حداً الأولى من متتابعة حسابية :

بمعلومية حدها الأول (أ) و حده الأخير (ل) و عدد حدودها (ن) و يرمز لهذا المجموع بالرمز ($حـ_{ن}$) و يعطى بالمتسلسلة التالية :

$$حـ_{ن} = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ ء) + \cdots + (ل - ء) + ل \quad (١)$$

حيث : ء الأساس ، و يمكن كتابة المتسلسلة بالصورة :

$$حـ_{ن} = ل + (ل - ء) + \cdots + (أ + ٢ ء) + (أ + ء) + أ \quad (٢)$$

و بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$$٢ حـ_{ن} = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + \cdots + (أ + ل)$$

إلى ن من المرات أى أن : $٢ حـ_{ن} = ن (أ + ل)$

$$\therefore حـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

حيث : $حـ_{ن}$ مجموع عدد حدود المتتابعة الحسابية ، أ الحد الذى يبدأ منه الجمع ، ل الحد الأخير ، ن عدد الحدود المراد جمعها

استخدام رمز التجميع :

لايجاد $\sum_{ر = ١}^{٢٠} (٢ ر + ٣)$

فإن : عدد الحدود يساوى ٢٠ بدءاً من الحد الأول

لايجاد $\sum_{ر = ٥}^{٢٠} (٢ ر + ٣)$

فإن : عدد الحدود يساوى ٢٠ − ٥ + ١ بدءاً من الحد الخامس

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة (٢٢)

(أ) عدد الحدود المراد جمعها = ٢٠ ، $ع_{ك} = ٦ ك + ٥$

، $ع_{١} = ٦ \times ١ + ٥ = ١١$ ، $ع_{٢٠} = ٦ \times ٢٠ + ٥ = ١٢٥$

$$\therefore حـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (١١ + ١٢٥) = ١٣٦٠$$

حل آخر : باستخدام رمز التجميع :

$$\sum_{ك = ١}^{٢٠} (٦ ك + ٥) = ٦ \sum_{ك = ١}^{٢٠} ك + \sum_{ك = ١}^{٢٠} ٥$$

$$= ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢٠ \times ٢١ + ٥ \times ٢٠ = ١٣٦٠$$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

(ب) عدد الحدود المراد جمعها = ٣٢ − ٧ + ١ = ٢٦

، ع$_{ر}$ = ١٢ − ٥ ر ، ع$_{٧}$ = ١٢ − ٥ × ٧ = − ٢٣

، ع$_{٣٢}$ = ١٢ − ٥ × ٣٢ = − ١٤٨

∴ حـ$_{٢٦}$ = $\frac{٢٦}{٢}$ (− ٢٣ − ١٤٨) = − ٢٢٢٣

أحمد الشنتورى
٦ أكتوبر ٢٠١٥

حل آخر :

ع$_{١}$ = ١٢ − ٥ × ١ = ٧ ، ع$_{٦}$ = ١٢ − ٥ × ٦ = − ١٨

، ع$_{٧}$ = ١٢ − ٥ × ٧ = − ٢٣ ، ع$_{٣٢}$ = ١٢ − ٥ × ٣٢ = − ١٤٨

∴ حـ$_{٢٦}$ = حـ$_{٣٢}$ − حـ$_{٦}$

= $\frac{٣٢}{٢}$ (٧ − ١٤٨) − $\frac{٦}{٢}$ (٧ − ١٨)

= ١٦ × (− ١٤٨) − ٣ × (− ١١) = − ٢٢٢٣

حل ثالث : باستخدام رمز التجميع كما سبق :

حـ$_{٢٦}$ = حـ$_{٣٢}$ − حـ$_{٦}$ = (١٢ × ٣٢ − ٥ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٢ × ٣٣)

− (١٢ × ٥ − ٥ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٧)

= ٣٨٤ − ٢٦٤٠ − ٧٢ + ١٠٥ = − ٢٢٢٣

ثانياً : مجموع ن حداً الأولى من متتابعة حسابية :

بمعلومية حدها الأول (أ) و أساسها (ء)

نعلم أن : ل = أ + (ن − ١) ء (١) ،

حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) (٢)

و بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج :

∴ حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١) ء]

أى أن : حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

ملاحظات :

(١) لإيجاد المجموع حـ$_{ن}$ يلزم معرفة عدد الحدود ن ، إن لم تكن معلومة نوجدها من القانون : ل = أ + (ن − ١) × ء

(٢) لإيجاد المجموع إبتداءاً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ فى إحدى صورتى قانون المجوع حسب معطيات المسألة

(٣) ع$_{ن}$ = حـ$_{ن}$ − حـ$_{ن - ١}$

(٤) عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود الموجبة
و لايجاد عدد الحدود الموجبة نضع : ع$_{ن}$ > ٠

(٥) عدد الحدود التى تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود السالبة
و لايجاد عدد الحدود الموجبة نضع : ع$_{ن}$ < ٠

(٦) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجباً نضع حـ$_{ن}$ > ٠

(٧) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالباً نضع حـ$_{ن}$ < ٠

(٨) لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع يتلاشى نضع حـ$_{ن}$ = ٠

ملاحظات أخرى :

(١) الحد الأوسط لمتتابعة حسابية عدد حدودها فردى = $\frac{١}{٢}$ (أ + ل)

فيكون : حـ$_{ن}$ = ن × الحد الأوسط

(٢) نعلم أن : ل = أ + (ن − ١) ء

∴ أ = ل − (ن − ١) ء ، (١)

حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) (٢)

و بالتعويض من (١) فى (٢) ينتج :

∴ حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [ل − (ن − ١) ء + ل]

أى أن : حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ ل − (ن − ١) ء]

(٣) نعلم أن : ل = أ + (ن − ١) ء

و منها : ن ء = ل − أ + ء

أى أن : ن = $\frac{ل - أ}{ء}$ + ١

∴ حـ$_{ن}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{ل - أ}{ء}$ + ١) (أ + ل)

المتتابعة الهندسية

تعريف (١) :

تسمى المتتابعة (ع$_{ن}$) حيث ع$_{ن}$ ≠ ٠ متتابعة هندسية إذا كان :

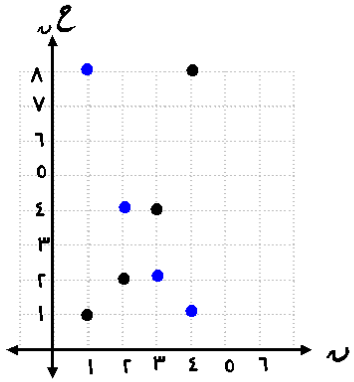
$\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = مقداراً ثابتاً لكل ن ∈ ص$^{+}$ أى لا يتوقف على قيمة ن

يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الهندسية و يرمز له بالرمز ر

أى أن : ر (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية :

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية
و ليس دالة من الدرجة الأولى كما فى المتتابعة الهندسية
ففى الشكل المقابل :



النقاط السوداء تمثل الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة الهندسية :

(١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) و يكون :

المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... } ،

المدى = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، .... }

النقاط الزرقاء تمثل الحدود الأربعة الأولى من المتتابعة الهندسية :

(٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ....) و يكون :

المجال = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... } ،

المدى = { ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، .... }

إجابة تعبير شفهى صفحة (٣٠)

إذا كان : الحد الأول موجب

و الأساس : ر > ١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : تزايدية

و الأساس : ٠ < ر < ١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : تناقصية

و الأساس : −١ < ر < ٠ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

و الأساس : ر < −١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

و إذا كان : الحد الأول سالب

و الأساس : ر > ١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

و الأساس : ٠ < ر < ١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

و الأساس : −١ < ر < ٠ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

و الأساس : ر < −١ فإن : المتتابعة الهندسية تكون : متناوبة الاشارة

إجابة تفكير ناقد صفحة (٣٠)

لا يمكن أن يكون أساس المتتابعة الهندسية صفراً

و لكن يمكن أن يكون مساوياً الواحد و فى هذه الحالة تكون المتتابعة ثابتة

الحد النونى للمتابعة الهندسية :

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النونى للمتتابعة الحسابية (ح$_{ن}$) التى حدها الأول أ و أساسها ر كما يلى :

ح$_{١}$ = أ ، ح$_{٢}$ = أ ر ، ح$_{٣}$ = أ ر^{٢}

و بالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النونى لهذه المتتابعة هو :

ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن - ١}$

و إذا كان : ح$_{ن}$ = ل فإن : ل = أ ر$^{ن - ١}$

حيث : (ل) هو الحد الأخير ، أ (قيمة الحد الأول)

، ر (أساس المتتابعة) ، ن (عدد الحدود أو رتبة الحد الأخير)

تعيين المتتابعة الهندسية :

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول أ و أساسها ر

حل حاول أن تحل (٦) صفحة (٣٢)

ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الأول = ٢٤٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ١٨٠ متر

∴ المتتابعة هى (١٨٠ ، ١٨٠ × $(\frac{٣}{٤})$ ، ١٨٠ × $(\frac{٣}{٤})^{٢}$ ، .....)

، ارتفاع الكرة بعد الاصطدام السابع = ح$_{٧}$

= ١٨٠ × $(\frac{٣}{٤})^{٦}$ ≃ ٣٢

أكتوبر ٢٠١٥

الأوساط الحسابية :

الأوساط الهندسية كما فى الأوساط الحسابية هى الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين فى متتابعة هندسية و يستخدم أساس المتتابعة الهندسية لايجاد هذه الأوساط

و يكون عدد حدود المتتابعة الهندسية = عدد الأوساط الهندسية + ٢

تعريف (٢) :

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود من متتابعة هندسية فإن :

ب تعرف بالوسط الهندسى بين أ ، حـ حيث : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

أى أن : ب^{٢} = أ حـ فيكون : ب = ± $\sqrt{\text{أ حـ}}$

ملاحظات :

(١) حل تعبير شفهى صفحة (٣٢)

يجب أن يكون : أ جـ > ٠ أى أن : أ ، جـ لهما نفس الاشارة

و فى حالة اختلاف الاشارة بين أ ، جـ فلا يكون هناك وسط هندسى بينهما

(٢) الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها ن هو الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعاً

العلاقة بين الوسط حسابى و الوسط الهندسى :

إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^{+}$ ، س $\neq$ ص

فإن : الوسط الحسابى (ع) = $\frac{\text{س} + \text{ص}}{2}$

و الوسط الهندسى الموجب (هـ) = $\sqrt{\text{س ص}}$

$$\therefore \text{ع} - \text{هـ} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{2} - \sqrt{\text{س ص}}$$

$$= \frac{\text{س} - 2\sqrt{\text{س ص}} + \text{ص}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}\right)^2}{2} > 0 \quad \therefore \text{ع} > \text{هـ}$$

و حيث أن الوسط الهندسى الوجب أكبر من الوسط الهندسى السالب

∴ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين موجبين أكبر من وسطهما الهندسى

أثبت هندسياً أن :

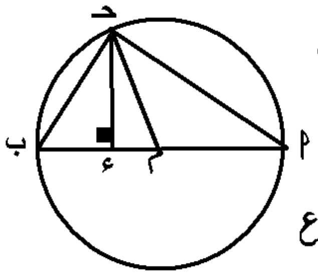
الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من الوسط الهندسى لهما

الحل

نرسم الدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها ، نأخذ ء $\in$ $\overline{\text{أ ب}}$

أحمد الشنتورى

أكتوبر ٢٠١٥



ثم نرسم $\overline{\text{ء جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة فى جـ

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° ، بفرض أن :

أ ء = س ، ء ب = ص ، جـ ء = ع

، ∵ $\overline{\text{ء جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ (جـ ء)^2 = أ ء × ء ب

∴ ع^2 = س ص ∴ ع وسط هندسى بين س ، ص

، ∵ الوسط الحسابى بين س ، ص = $\frac{1}{2}$ (س + ص) = $\frac{1}{2}$ أ ب = نق

، من Δ م جـ ء : جـ م = نق ، جـ ء = ع

، ∵ جـ م > جـ ء ∴ نق > ع أى أن :

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين موجبين أكبر من وسطهما الهندسى

حالة خاصة : إجابة تفكير ناقد صفحة (٣٤)

يتساوى الوسط الحسابى مع الوسط الهندسى إذا كانت المتتابعة ثابتة

حيث تكون المتتابعة الحسابية ثابتة إذا كان أساسها (صفر)

و تكون المتتابعة الهندسية ثابتة إذا كان أساسها (١)

ملاحظات :

(١) ∵ ل = أ ر$^{\text{ن} - 1}$ و منها : ر$^{\text{ن} - 1}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{أ}}$

حيث : ل قيمة الحد الأخير ، ن رتبته ، أ قيمة الحد الأول ، رتبته = ١ و بالتالى إذا كان : ح$_{\text{ك}}$ ، ح$_{\text{م}}$ حدان من متتابعة حسابية فإن : ر$^{\text{ك} - \text{م}}$ = $\frac{\text{ح}_{\text{ك}}}{\text{ح}_{\text{م}}}$

فمثلاً : إذا كان الحد الخامس من متتابعة هندسية هو ٤٨ ، و الحد الثانى منها هو ٦ فإن :

$ر^{٥-٢} = \frac{٤٨}{٦}$ ∴ $ر^{٣} = ٨$ ∴ ر = ٢

(٢) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين العددين أ ، ل :

∵ عدد حدود المتتابعة الهندسية = عدد الأوساط الهندسية + ٢

∴ عدد الحدود − ١ = عدد الأوساط + ١

و ينتج : $ر^{\text{عدد الأوساط} + ١} = \frac{ل}{أ}$

فمثلاً : لإدخال أربعة أوساط حسابية بين ٢ ، ٦٤ فإن :

$ر^{٤+١} = \frac{٦٤}{٢}$ ∴ $ر^{٥} = ٣٢$ ∴ ر = ٢

و تكون الأوساط هى : ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢

إجابة مسألة رقم (٢٧) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

س + ع > ٢ ص (١) ، ص + ل > ٢ ع (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : س + ع + ص + ل > ٢ ص + ٢ ع

و منها : ينتج : س + ص > ص + ع

إجابة مسألة رقم (٢٨) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

$١٥٣٦ = ١٢ \times (٢)^{ن-١}$ و منها : $(٢)^{٧} = (٢)^{ن-١}$ ، ن = ٨

إجابة مسألة رقم (٢٩) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

ر = ١ + ٠,٠٣ = ١,٠٣

$ل = ٦٠٠٠٠ \times (١,٠٣)^{٤} \simeq ٦٧٥٣٠٥$

إجابة مسألة رقم (٣٠) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

ر = ١ − ٠,١٢ = ٠,٨٨

$ل = ١٢٠٠٠٠ \times (٠,٨٨)^{٤} \simeq ٧١٩٦٣$

إجابة مسألة رقم (٣٢) تمارين (١ − ٣) صفحة (١٨)

(أ) أ + ب = ١ − حـ ، أ + حـ = ١ − ب ، ب + حـ = ١ − أ ،

$أ + ب > ٢\sqrt{أب}$ ، $أ + حـ > ٢\sqrt{أحـ}$ ،

$ب + حـ > ٢\sqrt{بحـ}$

بالضرب و الاختصار ينتج :

(أ + ب) (أ + حـ) (ب + حـ) > ٨ أ ب حـ ، بالتعويض ينتج :

(١ − حـ) (١ − ب) (١ − أ) > ٨ أ ب حـ

(ب) ∵ س ، $\frac{١}{س}$ عددان حقيقيان موجبان

∴ $س + \frac{١}{س} > ٢\sqrt{س \times \frac{١}{س}}$

∴ $س + \frac{١}{س} > ٢$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسيية هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية و يرمز لمجموع $ن$ حداً منها بالرمز $ح_ن$

أولاً : مجموع $ن$ حداً الأولى من متسلسلة هندسية :

بمعلومية حدها الأول ($أ$) و أساسها ($ر$) و عدد حدودها ($ن$)

و يرمز لهذا المجموع بالرمز ($ح_ن$) و يعطى بالمتسلسلة التالية :

إذا كانت : $أ + أ ر + أ ر^٢ + \cdots + أ ر^{ن-٢} + أ ر^{ن-١}$

متسلسلة هندسية حدها الأول ($أ$) و أساسها ($ر$)

فإنه يمكن ايجاد المجموع $ح_ن$ لهذه المتسلسلة كما يلى : (١)

$$ح_ن = أ + أ ر + أ ر^٢ + \cdots + أ ر^{ن-٢} + أ ر^{ن-١} \quad (١)$$

و بضرب الطرفين فى $ر$ فإن :

$$ر ح_ن = أ ر + أ ر^٢ + أ ر^٣ + \cdots + أ ر^{ن-١} + أ ر^ن \quad (٢)$$

و بطرح (٢) من (١) ينتج :

$$ح_ن - ر ح_ن = أ - أ ر^{ن-١}$$

أى أن : $ح_ن (١ - ر) = أ (١ - ر^ن)$

و بقسمة الطرفين على ($١ - ر$) بشرط ($١ - ر$) $\neq ٠$ ينتج :

$$\therefore ح_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر} \quad ، \quad ر \neq ١$$

حيث : $ح_ن$ مجموع عدد حدود المتسلسلة الهندسية ،

$أ$ الحد الذى يبدأ منه الجمع ، $ر$ الأساس

، $ن$ عدد الحدود المراد جمعها

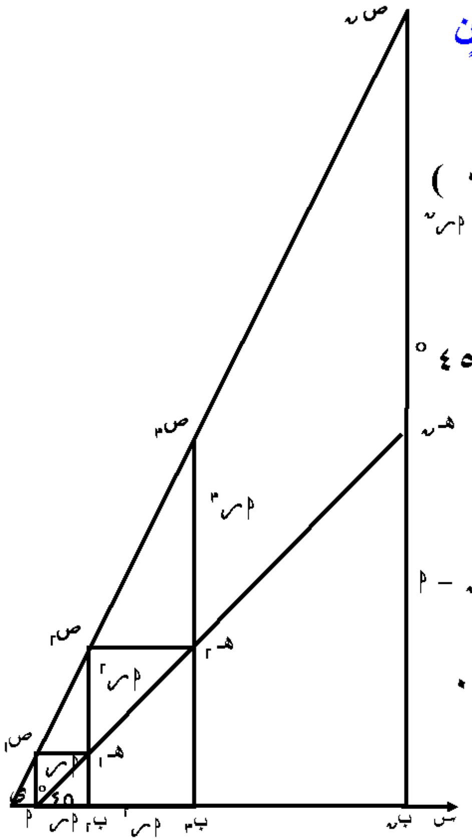
أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

ملاحظة : حل تفكير ناقد (٣٧)

إذا كان : $ر = ١$ فإن : المتتابعة الهندسية تكون ثابتة و يكون :

مجموع $ن$ حداً الأولى منها $= ن \times$ قيمة الحد

ايجاد مجموع $ن$ حداً الأولى من حدود متسلسلة هندسية هندسياً



نفرض أن : المتسلسلة هى :

($أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، \cdots$)

نرسم $\overleftarrow{و س}$ و نأخذ

و $ب = أ$

حيث : $أ$ = الحد الأول

نرسم $\angle$ س ب هـ قياسها $= ٤٥°$

نرسم $\overleftarrow{ب_١ ص_١} \perp \overleftarrow{و س}$

بحيث : $ب_١ ص_١ = أ ر$

، $أ ر$ = الحد الثانى

نأخذ $ب_٢ ، ب_٣ ، \cdots ، ب_ن$

$ب_ن \in \overleftarrow{و س}$

و نرسم من $ب_٢ ، ب_٣ ، \cdots$

، $ب_ن$ أعمدة على $\overleftarrow{و س}$

نلاحظ من الشكل :

$ب_١ ب_٢ = ب_١ ص_١ = أ ر$

، $ب_٢ ب_٣ = هـ_٢ ص_٢ = أ ر^٢$ ، $\cdots$ ، $ب_١ ب_ن = ب_ن هـ_ن = ح_ن - أ$

، $هـ_ن ص_ن = أ ر^ن$ ، و $ب_ن = ح_ن$

من Δ و ب$_{١}$ ص : طا ى $= \frac{\text{أ ر}}{\text{أ}} = \text{ر}$ (١)

من Δ و هـ$_{ن}$ ب$_{ن}$: طا ى $= \frac{\text{حـ}_{ن} - \text{أ} + \text{أ ر}^{ن}}{\text{حـ}_{ن}}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\text{ر} = \frac{\text{حـ}_{ن} - \text{أ} + \text{أ ر}^{ن}}{\text{حـ}_{ن}}$

$\therefore \text{ر حـ}_{ن} = \text{حـ}_{ن} - \text{أ} + \text{أ ر}^{ن}$

$\therefore \text{حـ}_{ن} - \text{ر حـ}_{ن} = \text{أ} - \text{أ ر}^{ن}$

$\therefore \text{حـ}_{ن} (١ - \text{ر}) = \text{أ} (١ - \text{ر}^{ن})$

$\therefore \text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$ حيث : $\text{ر} \neq ١$

ثانياً : مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة هندسية :

بمعلومية حدها الأول (أ) و حدها الأخير (ل)

نعلم أن : $\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$ (١) ،

$\text{ل} = \text{أ ر}^{ن - ١}$ و بضرب الطرفين فى ر ينتج :

$\text{ل ر} = \text{أ ر}^{ن}$ (٢)

و بالتعويض من (٢) فى (١) ينتج :

$\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}}$ حيث : $\text{ر} \neq ١$

استخدام رمز التجميع :

يستخدم رمز التجميع كما سبق

إجابة فكر صفحة (٣٨)

$\text{ع}_{ن} = ٣ \, (٢)^{ن - ١}$ $\therefore$ أ = ٣ ، ر = ٢

، ن = ١٢ − ٥ + ١ = ٨ ، $\text{ع}_{٥} = ٣ \times (٢)^{٤} = ٤٨$

، $\text{ل} = \text{ع}_{١٢} = ٣ \times (٢)^{١١} = ٦١٤٤$

$\therefore \text{حـ}_{٨} = \frac{٤٨ - ٦١٤٤ \times ٢}{١ - ٢} = ١٢٢٤٠$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة (٣٨)

(أ) $\text{ع}_{ن} = \frac{١}{٨} (٢)^{ن - ١}$ ، ر = ٢ ،

ن = ١٦ − ٧ + ١ = ١٠ ، $\text{ع}_{٧} = \frac{١}{٨} \times (٢)^{٦} = ٨$

$\text{حـ}_{١٠} = \frac{٨ \times (١ - (٢)^{١٠})}{١ - ٢} = ٨١٨٤$

(ب) $\text{ع}_{ن} = ١٦ \, (\frac{١}{٢})^{ن - ١}$ ، $\text{ر} = \frac{١}{٢}$ ،

ن = ١١ − ٣ + ١ = ٩ ، $\text{ع}_{٣} = ١٦ \times (\frac{١}{٢})^{٢} = ٤$

$\therefore \text{حـ}_{٩} = \frac{٤ \times (١ - (\frac{١}{٢})^{٩})}{١ - ٢} = \frac{٥١١}{٦٤}$

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة (٣٩)

$\text{ع}_{ن} = \text{حـ}_{ن} - \text{حـ}_{ن - ١} = (١٠٢٤ - ٢^{١٠ - ن}) - (١٠٢٤ - ٢^{١١ - ن})$

$= ٢^{١١ - ن} - ٢^{١٠ - ن}$ و بوضع : ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ينتج :

$(\text{ع}_{ن}) = (٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ...)$

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية :

تعريف :

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود و إذا كان مجموعها عدداً حقيقياً فإنها تكون متقاربة لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقى ، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة أى تباعدية

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :

نعلم أن مجموع ن حداً من متسلسلة هندسية يعطى بالقانون :

$$ح_ن = \frac{أ(1-ر^ن)}{1-ر} = \frac{أ}{1-ر} - \frac{أ\,ر^ن}{1-ر}$$

و عند جمع عدد غير منته من حدودها فإن $ر^ن$ يقترب من الصفر

عندما : $-1 < ر < 1$ أى : $|ر| < 1$ أى : $ر \in]-1 ، 1[$

و يصبح المجموع : $ح_\infty = \frac{أ}{1-ر}$ حيث : $|ر| < 1$

ملاحظة : إجابة تفكير ناقد (٤١)

لا يمكن ايجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية إلا بشرط $|ر| < 1$

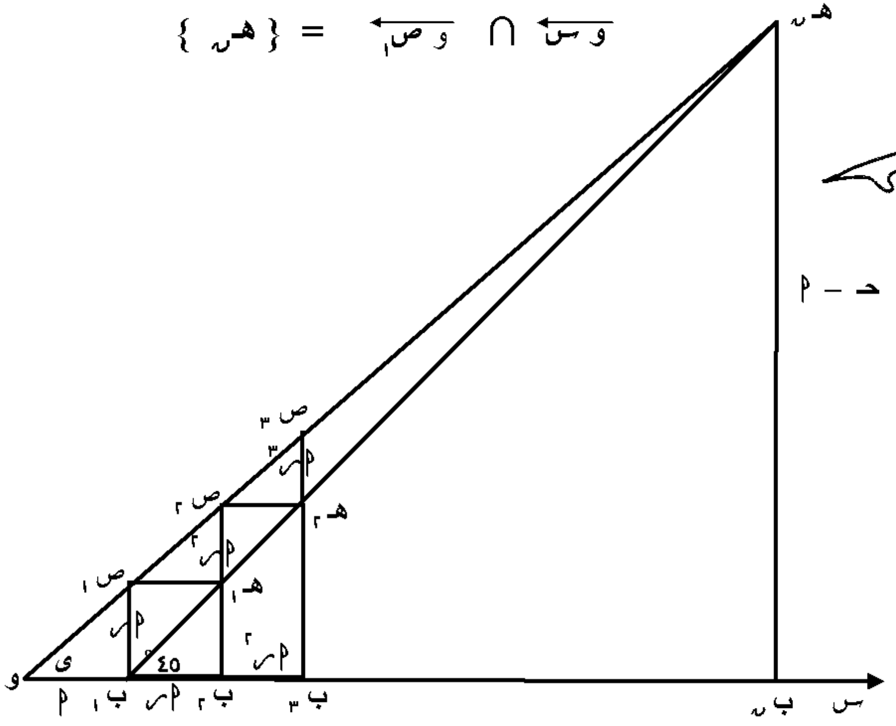
أما إذا كان $|ر| \geq 1$ فلا يمكن ايجاد هذا المجموع

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

ايجاد مجموع ن حداً الأولى من حدود متسلسلة هندسية غير منتهية هندسياً

من الشكل السابق لايجاد مجموع ن حداً الأولى من حدود متسلسلة هندسية هندسياً فى حالة : $|ر| < 1$ يصبح الشكل كما يلى و يكون :

$$\overrightarrow{و س} \cap \overrightarrow{و ص_1} = \{ هـ_ن \}$$



، $طا\,ى = \frac{أر}{أ} = ر$ (١)

$طا\,ى = \frac{ح - أ}{ح}$ (٢)

$\therefore ر\,ح = ح - أ$ $\therefore ح(1 - ر) = أ$

$$\therefore ح = \frac{أ}{1-ر}$$

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة (٤٢)

أ = ٥٦ ، ر = $\frac{٣}{٤}$ ∴ $ح_\infty = \frac{٥٦}{١ - \frac{٣}{٤}} = ٢٢٤$

تحويل الكسر العشرىالدائرى إلى كسر اعتيادى :

لتحويل الكسر الإعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى نجرى عملية القسمة ونلاحظ :
أن عملية القسمة لا تنتهى و أن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكرراً أى أن :
$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٣.... لذا نختصر هذا الناتج بأن نكتب على الصورة :

$\frac{١}{٣} = ٠,\overline{٣}$ بالمثل : $\frac{٥}{٣٣} = ٠,١٥١٥.... = ٠,\overline{١٥}$

، $\frac{١٣٤}{٩٩٩} = ٠,١٣٤١٣٤.... = ٠,\overline{١٣٤}$

استخدام مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية لتحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى :

$٠,\overline{٣} = ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + \cdots$

بوضع : أ = ٠,٣ ، ر = ٠,١ ينتج :

$ح_\infty = \frac{٠,٣}{١ - ٠,١} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{١}{٣}$

$٠,\overline{١٥} = ٠,١٥ + ٠,٠٠١٥ + ٠,٠٠٠٠١٥ + \cdots$

بوضع : أ = ٠,١٥ ، ر = ٠,٠١ ينتج :

$ح_\infty = \frac{٠,١٥}{١ - ٠,٠١} = \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩} = \frac{٥}{٣٣}$ و هكذا ......

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة (٤٣)

أ = ٢٥ ، ر = $\frac{٣}{٥}$ ∴ $ح_\infty = \frac{٢٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = \frac{١٢٥}{٢}$

إجابة مسألة رقم (٢٢) تمارين عامة صفحة (٤٨)

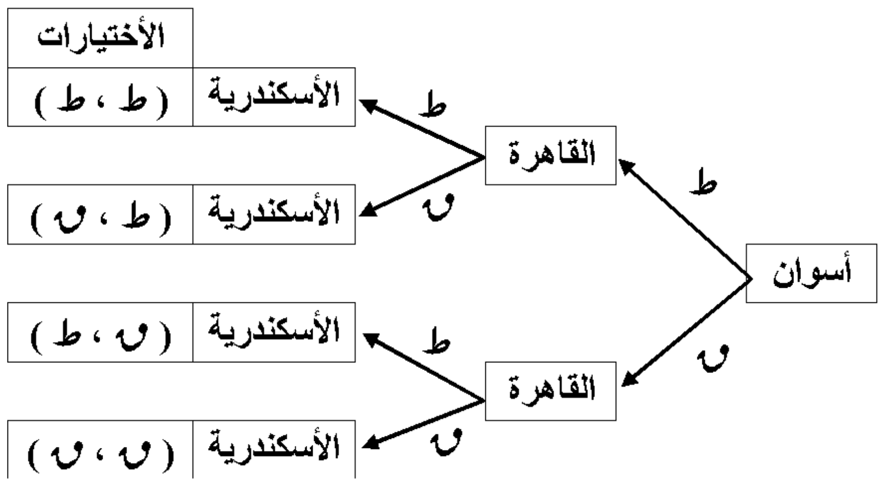
عندما تسقط الكرة من إرتفاع ٩٠ متراً
فإنها ترتد إلى إرتفاع = ٩٠ × $\frac{٢}{٣}$ = ٦٠ متراً
ثم تسقط من إرتفاع ٦٠ متراً ، و ترتد إلى إرتفاع = ٦٠ × $\frac{٢}{٣}$ = ٤٠ متراً
ثم تسقط من إرتفاع ٤٠ متراً ، ..... هكذا
∴ مجموع المسافات التى تقطعها الكرة قبل أن تسكن
= ٩٠ + ٢ (٦٠ + ٤٠ + ... إلى ∞)
= ٩٠ + ٢ × $\frac{٦٠}{١ - \frac{٢}{٣}}$ = ٤٥٠ متر

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

التباديل و التوافيق
مبدأ العد

يستخدم مبدأ العد عند حساب عدد الطرق التى يمكننا أن نختار بها مجموعة من الأشياء

تمهيد :
أراد أحمد أن يسافر من أسوان إلى القاهرة بالطائرة أو القطار ثم يسافر إلى الأسكندرية بالطائرة أو القطار ، كم طريقة يمكن أن يتخذها أحمد للسفر من أسوان إلى الأسكندرية
لايجاد عدد الطرق نستخدم مخطط الشجرة البيانية
و لنرمز للطائرة بالرمز ط و للقطار بالرمز ق فنجد أن :



عدد طرق الوصول للقاهرة = ٢ طريقة
عدد طرق الوصول للأسكندرية = ٢ طريقة

عدد طرق الوصول من أسوان للأسكندرية = ٢ × ٢ = ٤ طريق

مبدأ العد الأساسى :

تعريف :
إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة و كان عدد طرق إجراء عمل ثان يساوى $م_2$ طريقة و كان عدد طرق إجراء عمل ثالث يساوى $م_3$ طريقة ، ..... ، و هكذا فإن عدد إجراء هذه الأعمال معاً =
$م_1 \times م_2 \times م_3 \times ..... \times م_ن$

فمثلاً : إجابة حاول تحل رقم (٢) صفحة (٥٥)
عدد طرق إختيار الفطائر = ٦ ، عدد طرق إختيار السلاطة = ٤
عدد طرق إختيار المشروبات = ٣
عدد طرق إختيار الوجبة = ٦ × ٤ × ٣ = ٧٢ طريقة

ملاحظات :
(١) للربط بين عدد طرق الأعمال $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ..... ، $م_ن$ باستخدام حرف العطف (و) يكون عدد الطرق الممكنة لهذه الأعمال هو حاصل ضربها
(٢) للربط بين عدد طرق الأعمال $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ..... ، $م_ن$ باستخدام حرف العطف (أو) يكون عدد الطرق الممكنة لهذه الأعمال هو ناتج جمعها
(٣) مبدأ العد يسمح بتكرار العناصر (حسب شروط المسألة) و إذا وجد شرط أو أكثر سمى مبدأ العد المشروط

أكتوبر ٢٠١٥

إجابة حاول تحل رقم (٣) صفحة (٥٦)

العدد يتكون من ثلاثة أرقام مختلفة " مبدأ عد مشروط "

الخانة	آحاد	عشرات	مئات	آلاف	العدد
الطرق	٣	٢	٤	٧	٧٤٢٣
	٣	٢	٧	٤	٤٧٢٣
	٧	٢	٣	٤	٤٣٢٧
	٧	٢	٤	٣	٣٤٢٧
	٤	٢	٣	٧	٧٣٢٤
	٤	٢	٧	٣	٣٧٢٤
	٢	٤	٣	٧	٧٣٤٢
	٢	٤	٧	٣	٣٧٤٢
	٣	٤	٢	٧	٧٢٤٣
	٣	٤	٧	٢	٢٧٤٣
	٧	٤	٢	٣	٣٢٤٧
	٧	٤	٣	٢	٢٣٤٧
عدد الطرق	٣	٢	٢	١	١٢

عدد طرق إختيار العدد = ٣ × ٢ × ٢ × ١ = ١٢ طريقة

إجابة مسألة رقم (٤) تمارين (٢ – ١) صفحة (٥٦)

يمكن أن يتكرر الرقم الواحد و بالتالى يكون :

عدد الأعداد = ٣ × ٣ × ٣ = $٣^{٣}$ = ٢٧ عدد

إجابة مسألة رقم (٦) تمارين (٢ – ١) صفحة (٥٦)

عدد طرق إختيار الحرف الأول = ٢٨

عدد طرق إختيار الحرف الثانى = ٢٧

عدد طرق إختيار الحرف الثالث = ٢٦

عدد طرق إختيار الرقم الأول = ٩

عدد طرق إختيار الرقم الثانى = ٨

عدد طرق إختيار الرقم الثالث = ٧

عدد اللوحات = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٩ × ٨ × ٧ = ٩٩٠٦٦٢٤ لوحة

إجابة مسألة رقم (٧) تمارين (٢ – ١) صفحة (٥٦)

∵ الأعداد أصغر من ٩٠٠ ∴ رقم المئات يأخذ الأرقام ٢ أو ٥ أو ٨

عدد طرق إختيار رقم المئات = ٣

عدد طرق إختيار رقم العشرات = ٣

عدد طرق إختيار رقم الآحاد = ٢

عدد الأعداد = ٢ × ٣ × ٣ = ١٨ عدد

إجابة مسألة رقم (٨) تمارين (٢ – ١) صفحة (٥٦)

يمكن أن يتكرر الرقم الواحد لأكثر من مرة فى العدد الممثل لرقم المحمول

∵ رقم المحمول مكون من ١١ رقم ، و الرقم ٠٢٥ ثابت

∴ عدد الأرقام = $١٠^{٨}$ رقم

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

مضروب العدد

تمهيد :

لايجادعدد طرق وقوف أربعة متسابقين على حافة حمام سباحة استعداداً للقفز
نمثل وقوف التسابقين الأربعة على حافة حمام السباحة استعداداً للقفز
كما بالشكل المقابل :

المتسابق	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
عدد الطرق	٤	٣	٢	١

∴ عدد الطرق =
٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

تعريف :

المضروب : مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة $\underline{ن|}$ و يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التى أصغر من أو تساوى ن حيث :

$\underline{ن|}$ = ن (ن − ١) (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

= حاصل ضرب عوامل عددها ن تبدأ بالعدد ن و كل منها ينقص عن سابقه بمقدار " ١ " و ينتهى دائماً بالعدد " ١ "

يستخدم كما يلى :

[١] إذا علم ن :

نوجد الناتج بضرب ن فى الأعداد السابقة له حتى العدد ١

فمثلاً : $\underline{٥|}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

[٢] إذا علم الطرف الأيسر نقسمه على ١ ثم على ٢ ثم على ٣ ثم ... ثم على م حتى نحصل على العدد ١

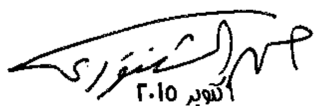
فيكون : ن = م

فمثلاً : إذا كان : $\underline{ن|}$ = ١٢٠

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

∵ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{٥|}$

∴ $\underline{ن|}$ = $\underline{٥|}$ ∴ ن = ٥



ملاحظات :

(١) عندما : ن = ٠ فإن : $\underline{٠|}$ = ١

(٢) عندما : ن = ١ فإن : $\underline{١|}$ = ١

(٣) عندما : $\underline{ا|}$ = ١ فإن : ا = ١ أو ا = ٠

(٤) $\underline{ن|}$ = ن $\underline{ن - ١|}$ حيث : ن ∈ ص$_+$

= ن (ن − ١) $\underline{ن - ٢|}$

= ن (ن − ١) (ن − ٢) $\underline{ن - ٣|}$

= .... و هكذا

و يستخدم لإختصار المضروبات

فمثلاً : $\underline{٥|}$ = ٥ $\underline{٤|}$ = ٥ × ٤ $\underline{٣|}$

(٤) ناتج مضروب بعض الأعداد :

مضروب العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الناتج	١	١	٢	٦	٢٤	١٢٠	٧٢٠	٥٠٤٠	٤٠٣٢٠	٣٦٢٨٨٠	٣٦٢٨٨٠٠

(٥) مضروب أى عدد يقبل القسمة على مضروب أى عدد أصغر منه

لأن : من (٤) ينتج : $\frac{\underline{\text{ن}|}}{\underline{\text{ن} - ١|}} = \text{ن}$ و هكذا

، $\frac{\underline{\text{ن}|}}{\text{ن}} = \underline{\text{ن} - ١|}$

فمثلاً : $\frac{\underline{٨|}}{\underline{٧|}} = \frac{٨\,\underline{٧|}}{\underline{٧|}} = ٨$

، $\frac{\underline{٨|}}{٨} = \frac{٨\,\underline{٧|}}{٨} = \underline{٧|}$

إجابة حاول أن تحل رقم (١) (ب) صفحة (٥٧)

$$\frac{٧ \times ٦\,\underline{٥|}}{\underline{٥|}} + \frac{٩ \times ٨\,\underline{٧|}}{\underline{٧|}} = ٧ \times ٦ + ٩ \times ٨ = ١١٤$$

إجابة حاول أن تحل رقم (٢) صفحة (٥٨)

$$\frac{١}{\underline{\text{ن}|}} + \frac{٢}{(\text{ن} + ١)\,\underline{\text{ن}|}} = \frac{٥٦}{(\text{ن} + ٢)(\text{ن} + ١)\,\underline{\text{ن}|}}$$

بالضرب فى $(\text{ن} + ٢)(\text{ن} + ١)\,\underline{\text{ن}|}$ و التبسيط ينتج :

$\text{ن}^٢ + ٥\,\text{ن} - ٥٠ = ٠$ و منها : $\text{ن} = ٨$ أو $\text{ن} = -١٠$ مرفوض

إجابة مسألة رقم (١٧) (ب) تمارين (٢ – ٢) صفحة (٦١)

$\text{ن}\,\underline{٢\text{ن} - ١|} = ١٢$ بالضرب × ٢ ينتج : $٢\,\text{ن}\,\underline{٢\text{ن} - ١|} = ٢٤$

∴ $\underline{٢\text{ن}|} = \underline{٤|}$ ∴ $٢\,\text{ن} = ٤$ و منها : $\text{ن} = ٢$

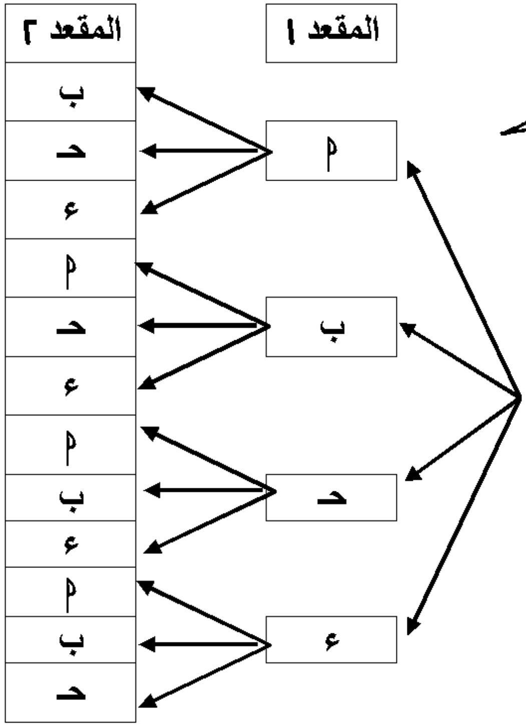
الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

التباديل (التراتيب)

تمهيد :

بكم طريقة يمكن أن يجلس طالبين من بين أربعة طلاب (أ ، ب ، حـ ، ء) فى مقعدين متجاورين فى صف واحد

نستخدم مخطط الشجرة البيانية كما يلى :



الأختيارات
(أ ، ب)
(أ ، حـ)
(أ ، ء)
(ب ، أ)
(ب ، حـ)
(ب ، ء)
(حـ ، أ)
(حـ ، ب)
(حـ ، ء)
(ء ، أ)
(ء ، ب)
(ء ، حـ)

يسمى كل ترتيب من هذه التراتيب " تبديلة "

و بالتالى يكون عدد التبديلات = ١٢ و يلاحظ :

(١) التباديل يهتم فيها بالترتيب فالتبديلة (أ ، ب) تختلف عن التبديلة (ب ، أ)

(٢) التبديلة الواحدة هنا تحتوى على طالبين تم اختيارهما من بين أربعة أربعة طلاب ، و يرمز لذلك بالرمز $^{٤}ل_{٢}$ و يقرأ " أربعة لام أثنين " و هى تدل على عدد تباديل أربعة طلاب المأخوذة اثنين اثنين أى أن :

$^{٤}ل_{٢}$ = ١٢ = حاصل ضرب عددين صحيحين موجبين متتالين أكبرهما ٤ = ٤ × ٣ و بالمثل ...

$^{٩}ل_{٤}$ = حاصل ضرب أربعة صحيحة موجبة متتالية أكبرها ٩ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ ،

$^{٢٠}ل_{٣}$ = حاصل ضرب ثلاثة صحيحة موجبة متتالية أكبرها ٢٠ = ٢٠ × ١٩ × ١٨ و هكذا ....

تعريف :

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث :

$$^{ن}ل_{ر} = ن \, (ن - ١) \, (ن - ٢) \times \cdots \times (ن - ر + ١)$$

حيث : ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ $ص^{+}$

ملاحظات :

(١) $^{ن}ل_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر مع الترتيب

(٢) $^{ن}ل_{ر}$ = حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ بالعدد ن و كل عامل ينقص عن سابقه بمقدار " ١ " و العامل الأخير يزيد عن الفرق بين ن ، ر بمقدار " ١ "

(٣) التباديل لا تسمح بتكرار العناصر (يهتم فيها بالترتيب)

(٤) $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$

(٥) $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ك}$ إذا و فقط إذا كان : ر = ك

(٦) إذا كان : $^{ن}ل_{ر}$ = ك فإن :

[١] إذا علم ر : نحلل ك إلى عوامل ثم كتابة هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

فمثلاً إذا كان : $^{ن}ل_{٤}$ = ٨٤٠ فإن :

∵ $^{ن}ل_{٤}$ = ٨٤٠

نبحث عن أربعة عوامل متتالية حاصل ضربها = ٨٤٠

∴ $^{ن}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = $^{٧}ل_{٤}$ ∴ ن = ٧

٨٤٠	٢
٤٢٠	٢
٢١٠	٢
١٠٥	٣
٣٥	٥
٧	٧
١	

[٢] إذا علم ن : نقسم ك على ن ثم على العدد السابق له مباشرة فالسابق له مباشرة و هكذا حتى نحصل على الواحد الصحيح ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ر

فمثلاً إذا كان : $^{٨}ل_{ر}$ = ١٦٨٠ أوجد قيمة ر

∵ $^{٨}ل_{ر}$ = ١٦٨٠ نبحث عن عدة عوامل أكبرها ٨ و حاصل ضربها = ١٦٨٠

١٦٨٠	٨
٢١٠	٧
٣٠	٦
٥	٥
١	

لذا نقسم ١٦٨٠ على ٨ ثم على ٧ ثم على و هكذا حتى نحصل على ١

$\therefore\ ^{٨}\text{ل}_{\text{ر}} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = {^{٨}\text{ل}_{٤}} \qquad \therefore\ \text{ر} = ٤$

(٧) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - \text{ر}}}$ حيث : $\text{ر} \leq \text{ن}$ ، $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

تستخدم إذا تساوت تبديلتين و علم ن أو ر بإختصار المضروبات

البرهان :

$\underline{|\text{ن}} = \text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢) \times \cdots \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= \text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢) \times \cdots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١)$
$[\,(\text{ن} - \text{ر})(\text{ن} - \text{ر} - ١) \times \cdots \times ٣ \times ٢ \times ١\,]$

$= \text{ن}(\text{ن} - ١) \times \cdots \times (\text{ن} - \text{ر} + ١)\ \underline{|\text{ن} - \text{ر}}$

$= {^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}\ \underline{|\text{ن} - \text{ر}}$

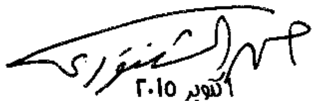
و منها : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - \text{ر}}}$

فمثلاً : إجابة مسألة رقم (١٨) تمارين (٢ – ٢) صفحة (٦٢)

$\dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - ٤}} = ١٤ \times \dfrac{\underline{|\text{ن} - ٢}}{\underline{|\text{ن} - ٥}}$

$\dfrac{\text{ن}(\text{ن} - ١)\ \underline{|\text{ن} - ٢}}{(\text{ن} - ٤)\ \underline{|\text{ن} - ٥}} = ١٤ \times \dfrac{\underline{|\text{ن} - ٢}}{\underline{|\text{ن} - ٥}}$

و منها : $\text{ن}(\text{ن} - ١) = ٥٦ = ٨ \times ٧$



$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {^{٨}\text{ل}_{٢}} \qquad \therefore\ \text{ن} = ٨$

حل آخر :

و منها : $\text{ن}(\text{ن} - ١) = ٥٦ \qquad \therefore\ \text{ن}^{٢} - \text{ن} - ٥٦ = ٠$

$\therefore\ (\text{ن} - ٨)(\text{ن} + ٧) = ٠$

و منها : $\text{ن} = ٨$ أو $\text{ن} = -٧$ مرفوض

حل حاول أن تحل (٤) صفحة (٥٩)

$^{٢٨}\text{ل}_{٥} = ١١٧٩٣٦٠٠$

الترتيب فى دائرة

حل تفكير ناقد صفحة (٥٩)

عدد طرق ترتيب ن من الأشخاص فى دائرة = $\dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\text{ن}} = \underline{|\text{ن} - ١}$

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة (٥٩)

$\dfrac{\underline{|٩}}{٩} = \underline{|٨} = ٤٠٣٢٠$

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة (٥٩)

$^{٩}\text{ل}_{\text{ر} - ١} = {^{٩}\text{ل}_{٣}} \qquad \therefore\ \text{ر} - ١ = ٣$ و منها : $\text{ر} = ٤$

إجابة تفكير ناقد صفحة (٦٠)

$^{٧}\text{ل}_{٧} = \underline{|٧} = ٥٠٤٠$

التوافيق

تمهيد :

بكم طريقة يمكن اختيار طالبين من بين أربعة طلاب للذهاب إلى معرض الكتاب
نفرض أن الطلاب الأربعة هم : أ ، ب ، جـ ، ء بذلك يمكن أن نختار :
{ أ ، ب } أو { أ ، جـ } أو { أ ، ء } أو { ب ، جـ } أو
{ ب ، ء } أو { جـ ، ء } فنجد أن : عدد الاختيارات = ٦
يسمى كا اختيار من هذه الاختيارات " توفيقة " و بالتالى فإن :
عدد التوافيق = ٦

ملاحظات :

(١) التوافيق لا يهتم فيها بالترتيب ، و لذا استخدمت أقواس المجموعات
فالتوفيقتين { أ ، ب } ، { ب ، أ } متساويتين
بينما فى التباديل تستخدم الأقواس التى تدل على الترتيب فالتبديلتين
(أ ، ب) ، (ب ، أ) غير متساويتين

(٢) التوفيقة الواحدة هنا عبارة عن مجموعة تحتوى على طالبين تم اختيارهما من بين أربعة طلاب ، و يرمز لعدد عناصر مجموعة مثل هذه التوافيق بالرمز $^{٤}ق_{٢}$ و تقرأ " أربعة قاف اثنين " و هى تدل على عدد التوافيق المأخوذة من أربعة اثنين اثنين أى أن :

$$^{٤}ق_{٢} = ٦ = \frac{^{٤}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$ بالمثل :

$$^{٩}ق_{٤} = \frac{^{٩}ل_{٤}}{\lfloor ٤} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٦$$ و هكذا ....

تعريف :

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء و المختارة من بين ن من العناصر فى نفس الوقت هو $^{ن}ق_{ر}$
حيث : $ر \le ن$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

يقرأ الرمز $^{ن}ق_{ر}$: ن قاف ر كما يرمز له أيضاً بالرمز ($\binom{ن}{ر}$)
و يقرأ : ن فوق ر
$^{ن}ق_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر بدون الترتيب

العلاقة بين التباديل و التوافيق :

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر}$$

ملاحظة :

$^{ن}ل_{ر}$ تمثل عدد الترتيبات المكونة من ر من العناصر مأخوذة من ن من العناصر (مع مراعاة الترتيب)

$^{ن}ق_{ر}$ تمثل عدد الإختيارات المكونة من ر من العناصر مأخوذة من ن من العناصر (دون مراعاة الترتيب)

حيث : عدد الترتيبات المكونة من ر عنصر يساوى $\lfloor ر$

و تستخدم هذه القاعدة إذا كانت ر معلومة بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامل ثم كتابة هذهالعوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

فمثلاً : إذا كان : ${}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ أوجد قيمة ن

الحل

$\because {}^{ن}ق_{٣} = ٣٥ \qquad \therefore \dfrac{{}^{ن}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ٣٥$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٣٥ \times ٦ = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣} \qquad \therefore ن = ٧$

نتائج :

(١) ${}^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$

و تستخدم هذه النتيجة إذا كانت ر غير معلومة بإختصار المضروبات

فمثلاً : إذا كان : ${}^{١٥}ق_{ر+١} = \dfrac{١٥}{٤}\ {}^{١٤}ق_{ر}$ أوجد قيمة ر

الحل

$\dfrac{\underline{|١٥}}{\underline{|ر+١}\ \underline{|١٥ - ر - ١}} = \dfrac{١٥}{٤} \times \dfrac{\underline{|١٤}}{\underline{|ر}\ \underline{|١٤ - ر}}$

$\therefore \dfrac{١٥\ \underline{|١٤}}{(ر + ١)\ \underline{|ر}\ \underline{|١٤ - ر}} = \dfrac{١٥}{٤} \times \dfrac{\underline{|١٤}}{\underline{|ر}\ \underline{|١٤ - ر}}$

و منها : $ر + ١ = ٤$ أى أن : $ر = ٣$

ملاحظة :

فى النتيجة السابقة : بوضع $ر = ن$ ، حيث : $\underline{|٠} = ١$

فيكون : ${}^{ن}ق_{ن} = ١$

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

تستخدم لتبسيط التوفيق العددى إذا كان : $ر > \dfrac{١}{٢} ن$

البرهان :

${}^{ن}ق_{ن-ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}\ \underline{|ن - ن + ر}} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}\ \underline{|ر}} = {}^{ن}ق_{ر}$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

فمثلاً إذا كان : ${}^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ أوجد قيمة ن

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥ \qquad \therefore {}^{ن}ق_{ن-ن+٢} = ٤٥$

$\therefore {}^{ن}ق_{٢} = ٤٥ \qquad \therefore \dfrac{{}^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٤٥$

$\therefore {}^{ن}ل_{٢} = ٤٥ \times ٢ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}ل_{٢} \qquad \therefore ن = ١٠$

ملاحظات :

(١) فى النتيجة السابقة : بوضع $ر = ن$

يكون : ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

(٢) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$

فإن : $ر = هـ$ أو $ر + هـ = ن$ حيث : $ر + هـ \leq ن$

فمثلاً إذا كان : $\text{ق}^{١٨}_{\text{ر}+٩} = \text{ق}^{١٨}_{٣\text{ر}+١}$ أوجد قيمة ر

الحل

∵ $\text{ق}^{١٨}_{\text{ر}+٩} = \text{ق}^{١٨}_{٣\text{ر}+١}$

∴ $\text{ر} + ٩ = ٣\text{ر} + ١$ و منها : $\text{ر} = ٤$

أو $\text{ر} + ٩ + ٣\text{ر} + ١ = ١٨$ و منها : $\text{ر} = ٢$

، و النتيجتان صحيحتان

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (٦٣)

أما $٢\text{ر} - ٥ = \text{ر}$ و منها : $\text{ر} = ٥$

أو $٢\text{ر} - ٥ + \text{ر} = ٢٨$ و منها : $\text{ر} = ١١$

حل حاول أن تحل (٣) صفحة (٦٣)

عدد المباريات $= \text{ق}^{٧}_{٢} = ٢٧$

إجابة تفكير ناقد صفحة (٦٤)

عدد الطرق $= \text{ق}^{٦}_{٤} + \text{ق}^{٥}_{٣} = ١٥ + ١٠ = ٢٥$

حل حاول أن تحل (٤) صفحة (٦٣)

عدد الطرق $= \text{ق}^{١٠}_{٣} \times \text{ق}^{٨}_{٢} = ١٢٠ \times ٢٨ = ٣٣٦٠$

إجابة تطبيق على النشاط صفحة (٦٥)

$$\text{ق}^{٥}_{٠} + \text{ق}^{٥}_{١} + \text{ق}^{٥}_{٢} + \text{ق}^{٥}_{٣} + \text{ق}^{٥}_{٤} + \text{ق}^{٥}_{٥}$$

$$= \text{ق}^{٥}_{٠} + \text{ق}^{٥}_{١} + \text{ق}^{٥}_{٢} + \text{ق}^{٥}_{٣} + \text{ق}^{٥}_{١} + \text{ق}^{٥}_{٠}$$

$$= ١ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣٢ = ٢^{٥} = (١ + ١)^{٥}$$

(٣) إذا كان : عدد أضلاع المضلع المحدب = ن

فإن : عدد القطع المستقيمة الممثلة فيه $= \text{ق}^{\text{ن}}_{٢}$

لأن كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين

و يكون عدد أقطاره = عدد القطع المستقيمة الممثلة فيه − عدد أضلاعه

أى أن : عدد أقطاره $= \text{ق}^{\text{ن}}_{٢} - \text{ن}$

استنتاج صورة أخرى :

عدد أقطاره $= \frac{\text{ن}(\text{ن} - ٣)}{٢}$

$$= \frac{|\underline{\text{ن}}}{|\underline{٢}\;|\underline{\text{ن} - ٢}} - \text{ن}$$

∴ عدد أقطاره $= \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)\;|\underline{\text{ن} - ٢}}{|\underline{٢}\;|\underline{\text{ن} - ٢}} - \text{ن}$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)}{٢} - \text{ن} = \frac{\text{ن}(\text{ن} - ٣)}{٢}$$

و هذه الصورة تصلح للمرحلة الاعدادية

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

استنتاج صورة ثالثة :

عدد أقطاره $= \frac{٦ \times {}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن-١}ق_{٢}}$

عدد أقطاره $= \frac{ن(ن-٣)}{٢}$

بالضرب بسطاً و مقاماً × $\frac{(ن-١)(ن-٢)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$ ينتج :

عدد أقطاره $= \dfrac{\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}}{\frac{٢(ن-١)(ن-٢)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}}$

$= \dfrac{\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}}{\frac{(ن-١)(ن-٢)}{٦ \times ٢ \times ١}}$

$= \dfrac{\frac{٦ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}}{\frac{(ن-١)(ن-٢)}{٢ \times ١}} = \frac{٦ \times {}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن-١}ق_{٢}}$

إجابة مسألة رقم (٧) تمارين (٢ – ٣) صفحة (٦٥)

${}^{ن}ق_{٣} = \frac{٩١}{٣} ن$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)\underline{|ن-٣}}{\underline{|٣}\ \underline{|ن-٣}} = \frac{٩١}{٣} ن$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)\underline{|ن-٣}}{٦ \times \underline{|ن-٣}} = \frac{٩١}{٣} ن$

و منها : $(ن-١)(ن-٢) = ١٨٢ = ١٤ \times ١٣$

$\therefore {}^{ن-١}ل_{٢} = {}^{١٤}ل_{٢}$ $\therefore ن - ١ = ١٤$ $\therefore ن = ١٥$

إجابة مسألة رقم (٨) تمارين (٢ – ٣) صفحة (٦٥)

${}^{٥}ق_{٥} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٣} = {}^{٥}ق_{٥} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢}$

$= ١ + ٥ + ١٠ = ١٦$

إجابة مسألة رقم (١٢) اختبار تراكمى فقرة (ب) صفحة (٦٨)

تعديل : الطرف الأيسر = ١٢٠

بالضرب × ٢ ينتج :

$٢ن\ \underline{|٢ن-١} = ٢٤٠$

$\underline{|٢ن} = \underline{|٦}$ $\therefore ٢ن = ٦$ و منها : ن = ٣

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

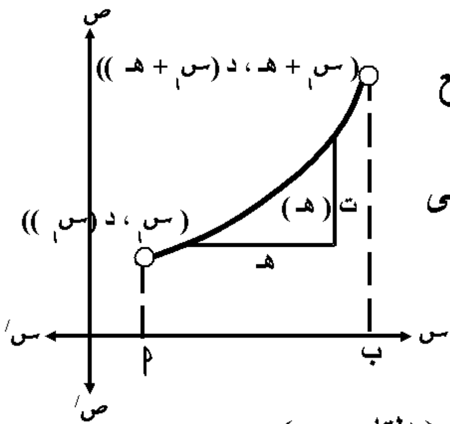
معدل التغير

دالة التغير :

إذا كانت د :] أ ، ب [← ح

حيث : ص = د (س) فإن :

أى تغير فى قيمة س من $س_1$ إلى $س_2$ فى مجال د يقابله تغير فى ص من د ($س_1$) إلى د ($س_2$) و عليه فإن :



مقدار التغير فى س = Δ س (دلتا س) = $س_2$ − $س_1$

و مقدار التغير فى ص = Δ ص = $ص_2$ − $ص_1$

و باعتبار أن ($س_1$ ، د ($س_1$)) نقطة على منحنى الدالة د

فإن لكل تغير فى احداثيها السينى من $س_1$ إلى $س_2$ = $س_1$ + هـ

حيث : $س_1$ + هـ ∈] أ ، ب [، هـ ≠ ٠

يحدث تغير مناظر فى احداثيها الصادى يتعين من العلاقة :

ت (هـ) = د ($س_1$ + هـ) − د ($س_1$)

و تسمى الدالة ت (هـ) بدالة التغير فى د عند س = $س_1$

ملاحظة :

كلا الرمزين Δ س أو هـ يمثلان التغير فى س

دالة متوسط التغير :

بقسمة دالة التغير ت (هـ) على هـ حيث : هـ ≠ ٠

نحصل على دالة جديدة م (هـ) تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = $س_1$ حيث :

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

أو
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(س_2) - (س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

ملاحظات :

(1) متوسط التغير يمثل ميل خط مستقيم

(٢) إذا كان منحنى الدالة ص = د (س) يمثل بخط مستقيم فى] أ ، ب [فإن : متوسط التغير فى] أ ، ب [يكون ثابتاً

(٣) $$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{مقدار التغير فى ص}}{\text{مقدار التغير فى س}}$$

أى : يعنى خارج قسمة المقدارين Δ ص ، Δ س

دالة معدل التغير :

إذا كانت د :] أ ، ب [← ح حيث : ص = د (س)

، $س_1$ ، $س_1$ + هـ ∈] أ ، ب [فإن :

$$\text{دالة معدل التغير فى د عند } س_1 = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} م(هـ)$$ بشرط أن تكون النهاية موجودة

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (٧٤)

(أ) من الرسم : د (٤) = ١ ، د (٦) = ٣,٦

متوسط التغير = $\frac{\text{٣,٦} - \text{١}}{\text{٦} - \text{٤}}$ = ١,٣ مليون جنيه / شهر

بالمثل : (ب) متوسط التغير = ١,٤ مليون جنيه / شهر

، (حـ) متوسط التغير = صفر

إجابة تفكير ناقد صفحة (٧٥)

الفترات التى يكون فيها متوسط التغير فى د ثابتاً هى :

]−٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[

لأن : متوسط التغير يمثل ميل خط مستقيم

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة (٧٧)

∵ د (س) = $\sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}$ ∴ مجال د = [٥ ، ∞[

عند : س = س$_1$ فإن : د (س$_1$) = $\sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}$

، د (س$_1$ + هـ) = $\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}}$ ،

م (هـ) = $\frac{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} - \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} + \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} + \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}$

= $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} + \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}$

معدل التغير = $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} + \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}$ حيث : س$_1$ > ٥

و عندما : س = س$_1$ = ٩ ∴ معدل التغير فى د = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

لا يمكن حساب معدل التغير فى د عندما : س = س$_1$ = ٥

لأن : $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - \text{٥}} + \sqrt{\text{س}_1 - \text{٥}}}$

غير موجودة عند : س = س$_1$ = ٥

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة (٧٧)

نفرض أن : طول ضلع الصفيحة = س سم ، مساحتها = م سم^2

∴ م = د (س) = س^2 و عنما تتغير س من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ

∴ دالة متوسط التغير فى م = $\frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ = ٢ س$_1$ + هـ

عندما تتغير س من ٢ إلى ٣,٤ ∴ س = ٣ ، هـ = ٠,٤

، م (هـ) = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

، دالة معدل التغير فى م = $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

= $\lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 - (\text{س}_1)^2}{\text{هـ}}$ = ٢ س$_1$

عندما : س = س$_1$ = ٥ ∴ معدل التغير فى م = ٢ × ٥ = ١٠

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة (٧٧)

نفرض أن : $\text{ص} = \text{د}(\text{ن}) = ٢\,\text{ن}^{٣} + ١٠٠$ ، عندما : $\text{ن} = ٥$

∴ معدل النمو اللحظى = معدل التغير فى ص

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(٥ + \text{هـ}) - \text{د}(٥)}{\text{هـ}} = ٢ \times ٣ \times ٢٥$$

= ١٥٠ ملليجرام / دقيقة

إجابة مسألة رقم (٤) تمارين (٣ – ١) صفحة (٧٨)

متوسط التغير الأكبر فى د هو [أ ، ب]

إجابة مسألة رقم (١٠) تمارين (٣ – ١) صفحة (٧٨)

الحل الأول هو الصحيح

وضع العرض فقط بالمتغير المستقل س لأن المطلوب هو حساب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة للعرض و ليس بالنسبة إلى طولها

إجابة مسألة رقم (١٢) تمارين (٣ – ١) صفحة (٧٨)

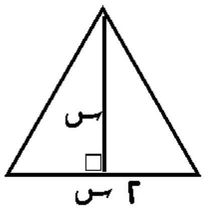
مساحة سطح الفقاعة $\text{م} = \text{د}(\text{نق}) = ٤\pi\,\text{نق}^{٢}$

عندما يتغير نق من ٠,٥ إلى ٠,٦

$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(٠,٦) - \text{د}(٠,٥)}{٠,٦ - ٠,٥} = \frac{٤\pi\left[(٠,٦)^{٢} - (٠,٥)^{٢}\right]}{٠,١}$$

$$= ٤,٤\,\pi = ١٣,٨$$

إجابة مسألة رقم (١٣) تمارين (٣ – ١) صفحة (٧٨)



نفرض أن : الارتفاع = س سم

∴ طول القاعدة = ٢ س سم

$$\text{م} = \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times ٢\,\text{س} = \text{س}^{٢}$$

عندما تتغير س من ٨ إلى ٨,٤

$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(٨,٤) - \text{د}(٨)}{٨,٤ - ٨} = \frac{(٨,٤)^{٢} - (٨)^{٢}}{٠,٤} = ١٦,٤$$

أحمد الشنتورى
٩ أكتوبر ٢٠١٥

الاشتقاق

إذا كانت د :] ا ، ب [← ح

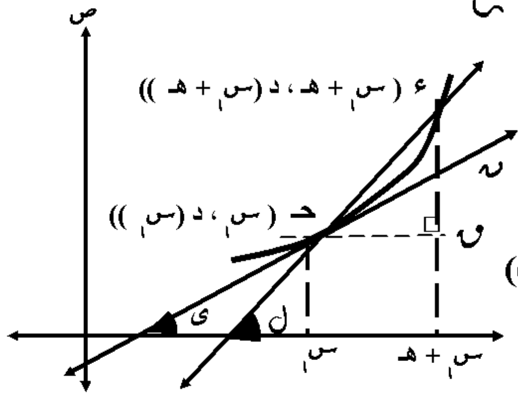
حيث : ص = د (س)

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ قاطع لمنحنى د

فى النقطتين :

حـ (س$_1$ ، د (س$_1$)) ، ء (س$_1$ + هـ ، د (س$_1$ + هـ))

و باعتبار س تتغير من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ



فإن ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = طا ى = م (هـ)

$$= \frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) – د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$$

و إذا كانت النقطة حـ (س$_1$ ، د (س$_1$)) ثابتة على منحنى الدالة د

و تحركت النقطة ء على المنحنى بحيث تقترب من نقطة حـ ليأخذ

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ الوضع $\overleftrightarrow{\text{حـ ر}}$ ليصبح مماساً للمنحنى عند حـ

أى أن : هـ ← صفر فإن :

$$\text{ميل المماس = طا ل = } \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) – د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$$

إن وجدت النهاية أى أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) عند النقطة

(س$_1$ ، د (س$_1$)) يساوى معدل التغير فى د عند س = س$_1$

إجابة حاول أن تحل رقم (١) صفحة (٨١)

∵ د (١) = ١ – ٤ = – ٣ ∴ النقطة ا تنتمى إلى منحنى د

ميل المماس عند ا (– ١ ، – ٣) = معدل التغير فى د عند ا (– ١ ، – ٣)

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د (١ + هـ) – د (١)}}{\text{هـ}} =$$

$$\underset{\text{١ + هـ} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د (١ + هـ)}^{٣}\text{ – د (١)}^{٣}}{\text{(١ + هـ) – (١)}} = ٣$$

و يكون : طا ل = ٣ ∴ ل = ٧١ $^\circ$ ٣٤ $'$

الدالة المشتقة :

لكل قيمة للمتغير س فى مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير فى د و على هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضاً فى المتغير س يطلق عليها " الدالة المشتقة " أو " المشتقة الأولى للدالة " أو " المعامل التفاضلى الأول "

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

تعريف :

إذا كانت د :] ا ، ب [← ح ، س ∈] ا ، ب [فإن :

$$\text{الدالة المشتقة د}' \text{ : د}' \text{(س) = } \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{د (س + هـ) – د (س)}}{\text{هـ}}$$

رموز الدالة المشتقة :

إذا كانت : ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز :

ص$'$ أو د$'$ و تقرأ مشتقة ص أو مشتقة د

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و تقرأ دال ص دال س " مشتقة ص بالنسبة إلى س "

لاحظ أن : ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة

(س$_1$ ، د (س$_1$)) هو د$'$ (س$_1$)

و هو تعبير رياضى يرمز لمشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س
أو معدل تغير الدالة ص بالنسبة للمتغير س
و لا يعنى خارج قسمة مقدارين ء ص ، ء س

إجابة حاول أن تحل رقم (٢) صفحة (٨٣)

$\because$ د (س) = ٣ $\text{س}^{٢}$ − ٤ س + ٧

$\therefore$ د (س + هـ) = ٣ $(\text{س} + \text{هـ})^{٢}$ − ٤ (س + هـ) + ٧

= ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٦ س هـ + ٣ $\text{هـ}^{٢}$ + ٤ س + ٤ هـ + ٧

$\therefore$ د (س + هـ) − د (س) = ٦ س هـ + ٣ $\text{هـ}^{٢}$ + ٤ هـ

، $\because$ $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$\therefore$ $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} (٦\,\text{س} + ٣\,\text{هـ} + ٤)$

= ٦ س + ٤

، $\because$ د (−١) = ٦ $\therefore$ النقطة (−١ ، ٦) تقع على منحنى د

، ميل المماس عند النقطة (−١ ، ٦) = ٦ × (−١) + ٤ = −٢

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة :

يقال للدالة د أنها قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث : أ تنتمى إلى مجال الدالة) إذا كانت $\text{د}'(\text{أ})$ لها وجود حيث :

$$\text{د}'(\text{أ}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

و إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة] حـ ، ء [نقول أن الدالة قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة

إجابة حاول أن تحل رقم (٣) صفحة (٨٣)

مجال د = ح " كثيرة حدود "

$\because$ د (س) = $\text{س}^{٢}$ − س + ١ $\therefore$ د (١) = ١

، د (١ + هـ) = $(١ + \text{هـ})^{٢}$ − (١ + هـ) + ١

= $\text{هـ}^{٢}$ + هـ + ١

، د (١ + هـ) − د (١) = $\text{هـ}^{٢}$ + هـ = هـ (هـ + ١)

، $\because$ $\text{د}'(١) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$

$\therefore$ $\text{د}'(١) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{هـ}(\text{هـ} + ١)}{\text{هـ}} = ١ \in \text{ح}$

$\therefore$ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

أكتوبر ٢٠١٥

المشتقة اليمنى و المشتقة اليسرى :

إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ (حيث : أ تنتمى إلى مجال الدالة) و كانت قاعدة الدالة على يمين أ تختلف عن قاعدتها على يسار أ فنبحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ بأن نوجد المشتقة اليمنى للدالة و يرمز لها بالرمز $\text{د}'(\text{أ}^{+})$ و المشتقة اليسرى للدالة و يرمز لها بالرمز $\text{د}'(\text{أ}^{-})$

المشتقة اليمنى : $\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \dfrac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

المشتقة اليسرى : $\text{د}'(\text{أ}^{-}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \dfrac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

و تكون الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا و فقط إذا كان :
$\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \text{د}'(\text{أ}^{-})$ و يرمز لمشتقة الدالة بالرمز $\text{د}'(\text{أ})$

ملاحظة :

إذا كان : $\text{د}'(\text{أ}^{+}) \neq \text{د}'(\text{أ}^{-})$

فإن : د (س) تكون غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

إجابة حاول أن تحل رقم (٤) صفحة (٨٣)

مجال د = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

، د (٢) = ٤ × ٢ − ٩ = −١

$$\text{د}'(٢^{+}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{(٢+\text{هـ})^{٢} - ٥ + ١}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{هـ}(٤+\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤$$

$$\text{د}(٢^{-}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{٤(٢+\text{هـ}) - ٩ + ١}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{٤\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٤$$

∴ $\text{د}'(٢^{+}) = \text{د}(٢^{-})$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

إجابة تفكير ناقد صفحة (٨٣)

(أ) بحث اتصال الدالة فى مثال (٤)

$$\text{د}(٢^{+}) = \lim_{\text{هـ} \to ٢^{+}} (\text{س} + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

$$، \text{د}(٢^{-}) = \lim_{\text{هـ} \to ٢^{-}} (\text{س}^{٢}) = ٤$$

∵، $\text{د}(٢^{+}) = \text{د}(٢^{-}) = \text{د}(٢) = ٤$

∴ د متصلة عند س = ٢ أى أن :

د متصلة عند س = ٢ و لكنها غير قابلة للاشتقاق س = ٢

بحث اتصال الدالة فى حاول أن تحل (٤)

$$\text{د}(٢^{+}) = \lim_{\text{هـ} \to ٢^{+}} (\text{س}^{٢} - ٥) = ٤ - ٥ = -١$$

$$، \text{د}(٢^{-}) = \lim_{\text{هـ} \to ٢^{-}} (٤\text{س} - ٩) = ٨ - ٩ = -١$$

∵، $\text{د}(٢^{+}) = \text{د}(٢^{-}) = \text{د}(٢) = -١$

∴ د متصلة عند س = ٢ أى أن :

د متصلة عند س = ٢ و قابلة للاشتقاق س = ٢

(ب) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \\ -\text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

بنفس الخطوات السابقة لبحث الاتصال و لبحث الاشتقاق نجد :

د متصلة عند س = ٢ و لكنها غير قابلة للاشتقاق س = ٢

م/ الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

الاشتقاق و الاتصال :

نظرية :

إذا كانت الدالة د حيث : ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند س = أ
فإنها تكون متصلة عند س = أ

ملاحظات :

(١) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند س = أ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

(٢) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند س = أ فليس بالضرورة أن تكون قابلة للاشتقاق عند س = أ

(٣) عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها يفضل بحث اتصالها عند نفس النقطة أولاً فإذا كانت متصلة نبحث الاشتقاق و إذا كانت عير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق

إجابة حاول أن تحل رقم (٥) صفحة (٨٤)

بحث الاتصال عند س = ١ بنفس خطوات بحث الاتصال نجد :

$\text{د}(١^{+}) = \text{د}(١^{-}) = \text{د}(١) = ٣$ ∴ د متصلة عند س = ١

بحث الاشتقاق عند س = ١ بنفس خطوات بحث الاشتقاق نجد :

$\text{د}'(١^{+}) = \text{د}(١^{-}) = ٢$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

إجابة حاول أن تحل رقم (٦) صفحة (٨٤)

∵ د قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ∴ د متصلة عند س = ٢

∴ $\text{د}(٢^{+}) = \text{د}(٢^{-}) = \text{د}(٢)$

∴ ٤ + أ = ٢ أ + ب و منها : أ + ب = ٤

إجابة مسألة رقم (٧) تمارين (٣ – ٢) صفحة (٨٥)

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{أ}(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + \text{ب} - \text{أ}\,\text{س}^{٢} - \text{ب}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\,\text{أ}\,\text{س} + \text{أ}\,\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٢\,\text{أ}\,\text{س}$$

، ∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، – ٣) يساوى ١٢

∴ $\text{د}'(٢) = ١٢$

∴ ٢ أ × ٢ = ١٢ و منها : أ = ٣

، ∵ النقطة (٢ ، – ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ د (٢) = – ٣

∴ ٤ أ + ب = – ٣ و منها : ب = – ١٥

إجابة حاول أن تحل رقم (٨) صفحة (٨٤)

برسم ميل المماس لكل من فرعى منحنى كل دالة على يمين و يسار النقطة س = ١ نجد :

(أ) $\text{د}(١^{+}) > ٠$ ، $\text{د}(١^{-}) < ٠$ ∴ $\text{د}(١^{+}) \neq \text{د}(١^{-})$

(ب) $\text{د}(١^{+}) > ٠$ ، $\text{د}(١^{-}) = ٠$ ∴ $\text{د}(١^{+}) \neq \text{د}(١^{-})$

(حـ) $\text{د}(١^{+}) > \text{د}(١^{-})$

(ء) $\text{د}(١^{+}) < ٠$ ، $\text{د}(١^{-}) > ٠$ ∴ $\text{د}(١^{+}) \neq \text{د}(١^{-})$

قواعد الاشتقاق

مشتقة الدالة الثابتة :

إذا كانت : $\text{ص} = \text{حـ}$ حيث : $\text{حـ} \in \text{ح}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

البرهان : باستخدام طريقة الخطوات الأربع

الخطوات هى :

[١] نوجد : $\text{د}(\text{س} + \text{هـ})$

[٢] نوجد : $\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})$

[٣] نوجد : $\frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

[٤] نوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \text{حـ}$ ، $\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) = \text{حـ}$

$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \text{حـ} - \text{حـ} = ٠$

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \frac{\text{حـ} - \text{حـ}}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{حـ} - \text{حـ}}{\text{هـ}} = \text{صفر}$$

$(\text{هـ} \neq ٠)$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

مشتقة الدالة $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$:

(أ) إذا كانت : $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$ حيث : $\text{ن} \in \text{ح}$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

البرهان

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) = (\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}}$

$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = (\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}$

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{(\text{س} + \text{هـ}) - \text{س}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{س} + \text{هـ} \to \text{س}} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{(\text{س} + \text{هـ}) - \text{س}} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$$

برهان آخر المقدار $= (\text{س} + \text{هـ})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}$

$= \text{س}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{هـ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{هـ}^{٢} + \cdots + \text{هـ}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}$

$= \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{هـ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{هـ}^{٢} + \cdots + \text{هـ}^{\text{ن}}$

" و بالقسمة على هـ " ينتج :

$$\frac{\text{المقدار}}{\text{هـ}} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{هـ} + \cdots + \text{هـ}^{\text{ن}-١}$$

و عندما : $\text{هـ} \to ٠$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

(٢) إذا كانت : $\text{ص} = \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

(٣) إذا كانت : $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}}$ حيث : ن ، $\text{أ} \in \text{ح}$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}\,\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

مشتقة مجموع دالتين و الفرق بينهما :

إذا كانت : ع ، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

فإن : (ع ± ق) تكون أيضاً قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

و يكون : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ع} \pm \text{ق}) = \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} \pm \frac{\text{ءق}}{\text{ءس}}$

أى أن : إذا كان : د (س) = ع (س) + ق (س)

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س})$

البرهان :

د (س + هـ) = ع (س + هـ) + ق (س + هـ)

د (س + هـ) − د (س) = [ع (س + هـ) − ع (س)]

+ [ق (س + هـ) − ق (س)]

$\underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ع}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$+ \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \text{ع}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س})$

بالمثل : إذا كان : د (س) = ع (س) − ق (س)

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}'(\text{س}) - \text{ق}'(\text{س})$

و بصفة عامة :

إذا كان : د_1 ، د_2 ، د_3 ، ..... ، $\text{د}_\text{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة

للمتغير س فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{د}_1 \pm \text{د}_2 \pm \text{د}_3 \pm \cdots \pm \text{د}_\text{ن}) =$

$\text{د}_1'(\text{س}) \pm \text{د}_2'(\text{س}) \pm \text{د}_3'(\text{س}) \pm \cdots \pm \text{د}_\text{ن}'(\text{س})$

مشتقة حاصل ضرب دالتين :

إذا كانت : ع ، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

فإن : الدالة (ع · ق) تكون أيضاً قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

و يكون : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ع} \cdot \text{ق}) = \text{ع} \frac{\text{ءق}}{\text{ءس}} + \text{ق} \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

أى أن : إذا كان : د (س) = ع (س) · ق (س)

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}(\text{س}) \cdot \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ع}'(\text{س})$

أحمد الشنتورى ٩ أكتوبر ٢٠١٥

البرهان :

د (س + هـ) = ع (س + هـ) · ق (س + هـ)

د (س + هـ) − د (س) = ع (س + هـ) ق (س + هـ) −

ع (س) ق (س) بإضافة (± ع (س + هـ) ق (س))

د (س + هـ) − د (س) =

[ع (س + هـ) ق (س + هـ) − ع (س + هـ) ق (س)]

+ [ع (س + هـ) ق (س) − ع (س) ق (س)]

= ع (س + هـ) [ق (س + هـ) − ق (س)]

+ ق (س) [ع (س + هـ) − ع (س)]

$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) \frac{\text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ع}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$+ \text{ق}(\text{س}) \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

و عندما هـ ← ٠ ينتج :

$\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}(\text{س}) \cdot \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ع}'(\text{س})$

مشتقة خارج قسمة دالتين :

إذا كانت : ع ، ن دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س و كانت $\text{ن}(\text{س}) \neq ٠$ فإن : الدالة $\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س و يكون :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right) = \frac{\text{ن}\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} \quad \text{ع}\,\frac{\text{ءن}}{\text{ءس}}}{\text{ن}^{2}}$$

أى أن : إذا كان : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ع}(\text{س})}{\text{ن}(\text{س})}$

أثبت أن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ن}(\text{س})\,\text{ع}'(\text{س}) - \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}'(\text{س})}{[\text{ن}(\text{س})]^{2}}$

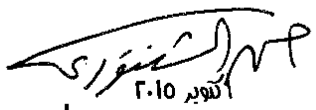
البرهان

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ع}(\text{س})}{\text{ن}(\text{س})} = \text{ع}(\text{س}) \cdot \frac{1}{\text{ن}(\text{س})}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{ع}(\text{س}) \cdot \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{1}{\text{ن}(\text{س})}\right) + \frac{1}{\text{ن}(\text{س})} \cdot \text{ع}'(\text{س})$$

$$= \text{ع}(\text{س}) \cdot \frac{-\text{ن}'(\text{س})}{[\text{ن}(\text{س})]^{2}} + \frac{1}{\text{ن}(\text{س})} \cdot \text{ع}'(\text{س})$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{س})\,\text{ع}'(\text{س}) - \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}'(\text{س})}{[\text{ن}(\text{س})]^{2}}$$



برهان آخر

$$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) = \frac{\text{ع}(\text{س} + \text{هـ})}{\text{ن}(\text{س} + \text{هـ})}$$

$$\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ع}(\text{س} + \text{هـ})}{\text{ن}(\text{س} + \text{هـ})} - \frac{\text{ع}(\text{س})}{\text{ن}(\text{س})}$$

$$= \frac{\text{ع}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ن}(\text{س}) - \text{ن}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ع}(\text{س})}{\text{ن}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ن}(\text{س})}$$

بإضافة ($\pm\, \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}(\text{س})$) للبسط ينتج :

$$\text{البسط} = [\,\text{ع}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ن}(\text{س}) - \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}(\text{س})\,]$$

$$-\,[\,\text{ن}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}(\text{س})\,]$$

$$= \text{ن}(\text{س})\,[\,\text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ع}(\text{س})\,]$$

$$-\,\text{ع}(\text{س})\,[\,\text{ن}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ن}(\text{س})\,]$$

$$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = [\,\text{ن}(\text{س})\,\frac{\text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$-\,\text{ع}(\text{س})\,\frac{\text{ع}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}\,] \times \frac{1}{\text{ن}(\text{س}+\text{هـ})\,\text{ن}(\text{س})}$$

و عندما هـ ← ٠ ينتج :

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ن}(\text{س})\,\text{ع}'(\text{س}) - \text{ع}(\text{س})\,\text{ن}'(\text{س})}{[\text{ن}(\text{س})]^{2}}$$

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) :

نعلم أن : (د ○ ر) (س) = د [ر (س)]

فإذا كانت : د ، ر دالتين حيث : ص = د (ع) ، ع = ر (س)

فإن : ص = د [ر (س)] و نقول أن : ص دالة الدالة فى س

نظرية (قاعدة السلسلة) :

إذا كانت : ص = د (ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع

و كانت : ع = ر (س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

فإن : ص = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

و يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

البرهان :

∵ الدالة د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

∴ $\Delta ع \leftarrow ٠ \Longleftarrow \Delta ص \leftarrow ٠$

، ∵ الدالة ر قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\Delta س \leftarrow ٠ \Longleftarrow \Delta ع \leftarrow ٠$

، ∵ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \times \frac{\Delta ع}{\Delta ع} = \frac{\Delta ص}{\Delta ع} \times \frac{\Delta ع}{\Delta س}$

بالضرب بسطاً و مقاماً × Δ ع " مقدار التغير فى ع "

$$\therefore \lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta ع \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta ع} \times \lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ع}{\Delta س}$$

أى أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

لاحظ : $\Delta س = س_٢ - س_١$ ، $\Delta ص = ص_٢ - ص_١$

، $\Delta ع = ع_٢ - ع_١$ كل منهم مقدار النغير فى س ، ص ، ع على الترتيب

مشتقة الدالة $[د (س)]^ن$:

إذا كان : $ع (س) = [د (س)]^ن$: د قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س ، ن عدد حقيقى فإن :

$$\frac{ءع}{ءس} = ن [د (س)]^{ن - ١} \times د' (س)$$

البرهان

$ع (س) = [د (س)]^ن$ ،

$ع (س + هـ) = [د (س + هـ)]^ن$

$ع (س + هـ) - ع (س) = [د (س + هـ)]^ن - [د (س)]^ن$

$$\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ع (س + هـ) - ع (س)}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{[د (س + هـ)]^ن - [د (س)]^ن}{هـ}$$

بالضرب بسطاً و مقاماً × د (س + هـ) − د (س) ينتج :

$$ع' (س) = \lim_{د (س + هـ) \leftarrow د (س)} \frac{[د (س + هـ)]^ن - [د (س)]^ن}{د (س + هـ) - د (س)} \times \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د (س + هـ) - د (س)}{هـ}$$

$$= ن [د (س)]^{ن - ١} \times د' (س)$$

ملاحظة : $\frac{ء}{ءس} [ص]^ن = ن [ص]^{ن - ١} \times \frac{ءص}{ءس}$

برهان آخر

نعلم أن : إذا كان : $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ى}(\text{س})$

فإن : $\text{ع}'(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \cdot \text{د}'(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ى}'(\text{س})$

و بالقسمة على : $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ى}(\text{س})$ ينتج :

$$\frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} + \frac{\text{ى}'(\text{س})}{\text{ى}(\text{س})}$$

و بصفة عامة لعدد محدود من الدوال إذا كان :

$$\text{ع}(\text{س}) = \text{د}_1(\text{س}) \cdot \text{د}_2(\text{س}) \cdot \ldots \cdot \text{د}_{\text{ن}}(\text{س})$$

فإن : $$\frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \frac{\text{د}_1'(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})} + \frac{\text{د}_2'(\text{س})}{\text{د}_2(\text{س})} + \ldots + \frac{\text{د}_{\text{ن}}'(\text{س})}{\text{د}_{\text{ن}}(\text{س})}$$

و إذا كانت : $\text{د}_1(\text{س}) = \text{د}_2(\text{س}) = \ldots = \text{د}_{\text{ن}}(\text{س}) = \text{د}(\text{س})$

فإن : $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \cdot \text{د}(\text{س}) \ldots \text{د}(\text{س})$

" ن من العوامل " أى أن : $\text{ع}(\text{س}) = [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$

$$\therefore \frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} + \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} + \ldots + \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$$

" إلى ن من الحدود "

$$\therefore \frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \text{ن} \, \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$$

$$\therefore \text{ع}'(\text{س}) = \text{ن} \, \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} \cdot \text{ع}(\text{س})$$

$$= \text{ن} \, \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} \cdot [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} = \text{ن} [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}-1} \cdot \text{د}'(\text{س})$$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

استخدام اللوغاريتمات لبراهين قواعد الاشتقاق

تمهيد :

يستخدم العدد (هـ) " عدد حقيقى غير نسبى " كأساس للوغاريتمات الطبيعية ، و كقاعدة للدوال اللوغاريتمية

و كأساس للدالة الأسية : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

و يعرف بعدة طرق منها :

$$\text{هـ} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \lim_{\text{ن} \to \infty} (1 + \text{ن})^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

$$\text{هـ} = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \ldots + \frac{1}{\underline{|\text{ن}}} \qquad (1)$$

حيث : هـ = ٢,٧١٨٢٨١٨

تعريف الدالة الأسية :

هى كل دالة تكتب على الشكل : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ حيث :

$$\text{هـ}^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = 1 + \frac{\text{س}}{\underline{|1}} + \frac{\text{س}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{س}^3}{\underline{|3}} + \ldots \qquad (2)$$

ملاحظة بوضع : س = ١ نحصل على قيمة العدد هـ كما فى (١)

نظريات و نتائج :

(١) $$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = 1$$

البرهان

من (٢) ينتج : $$\text{هـ}^{\text{س}} - 1 = \frac{\text{س}}{\underline{|1}} + \frac{\text{س}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{س}^3}{\underline{|3}} + \ldots$$

$\therefore$ $هـ^{س} - ١ = س \left(١ + \frac{س^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{س^{٣}}{\underline{|٣}} + ... \right)$

$\therefore$ $\frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١ + \frac{س^{٢}}{\underline{|٢}} + \frac{س^{٣}}{\underline{|٣}} + ...$

$\therefore$ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١$

(٢) إذا كانت : $د(س) = هـ^{س}$ فإن : $د'(س) = هـ^{س}$

البرهان :

$د(س) = هـ^{س}$ ، $د(س + و) = هـ^{س+و}$

$\therefore$ $\frac{د(س+و) - د(س)}{و} = \frac{هـ^{س+و} - هـ^{س}}{و} = \frac{هـ^{س}(هـ^{و} - ١)}{و}$

$\therefore$ $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{د(س+و) - د(س)}{و} = هـ^{س} \lim\limits_{و \to ٠} \frac{هـ^{و} - ١}{و}$

$\therefore$ $د'(س) = هـ^{س} \times ١ = هـ^{س}$ **لاحظ (١)**

(٣) إذا كانت : $د(س) = هـ^{ك(س)}$

فإن : $د'(س) = هـ^{ك(س)} \times ك'(س)$

البرهان :

بوضع : $ص = هـ^{ع}$ ، $ع = ك(س)$

، $\because$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{ع} \times ك'(س) = هـ^{ك(س)} \times ك'(س)$

(٤) إذا كانت : $د(س) = لو_{هـ} س$ فإن : $د'(س) = \frac{١}{س}$

البرهان

$\because$ $د(س) = لو_{هـ} س$

$\therefore$ $هـ^{د(س)} = س$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore$ $هـ^{د(س)} \times د'(س) = ١$

$\therefore$ $د'(س) = \frac{١}{هـ^{د(س)}} = \frac{١}{س}$

(٥) إذا كانت : $د(س) = لو_{م} س$

فإن : $د'(س) = \frac{١}{س} لو_{م} هـ = \frac{١}{س \, لو_{هـ} م}$

البرهان

$\because$ $د(س) = لو_{م} س$ $\therefore$ $د(س + و) = لو_{م}(س + و)$

، $\frac{د(س+و) - د(س)}{و} = \frac{لو_{م}(س+و) - لو_{م} س}{و}$

$= \frac{١}{و} لو_{م} \frac{س+و}{س} = \frac{١}{و} لو_{م} \left(١ + \frac{و}{س} \right)$

$= \frac{١}{س} \times \frac{س}{و} لو_{م} \left(١ + \frac{و}{س} \right) = \frac{١}{س} لو_{م} \left(١ + \frac{و}{س} \right)^{\frac{س}{و}}$

$\therefore$ $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{د(س+و) - د(س)}{و} = \frac{١}{س} \lim\limits_{و \to ٠} لو_{م} \left(١ + \frac{و}{س} \right)^{\frac{س}{و}}$

$\therefore$ $د'(س) = \frac{١}{س} لو_{م} هـ = \frac{١}{س \, لو_{هـ} م}$

أكتوبر ٢٠١٥

(٦) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}[\text{ل}(\text{س})]$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})} \times \text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}$

حالة خاصة : إذا كانت : $\text{أ} = \text{هـ}$ فإن :

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}[\text{ل}(\text{س})]$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

البرهان

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}[\text{ل}(\text{س})]$

بوضع : $\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{ع}$ $\therefore \text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\text{ع}$

، $\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{ع}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{ل}(\text{س})}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ} \times \text{ل}'(\text{س})$

و عندما : $\text{أ} = \text{هـ}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$

(٧) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

البرهان

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ بوضع : $\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$

$\therefore \text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\text{ص} = \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ ص

$\therefore \frac{1}{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} = \text{أ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

برهان آخر لـ (٢) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

بوضع : $\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$

$\therefore \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ ص

$\therefore \frac{1}{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص} \times 1 = \text{هـ}^{\text{س}}$ أى أن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

برهان آخر لـ (5)

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ} = \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

بوضع : $\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$

$\therefore \text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{أ}^{\text{ص}} = \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore \text{أ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} = 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{أ}^{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} = \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

أى أن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\text{هـ}$

أكتوبر ٢٠١٥

(١) إذا كان : $د(س) = س^{ن}$ أثبت أن : $د'(س) = ن\,س^{ن-١}$

البرهان ∵ $د(س) = س^{ن}$ بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

∴ $لو_{هـ} د(س) = ن\,لو_{هـ} س$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{د'(س)}{د(س)} = ن \cdot \frac{1}{س}$ بالضرب × $د(س) = س^{ن}$ ينتج :

∴ $د'(س) = ن\,س^{ن-١}$

(٢) إذا كان : $ع(س) = د(س) + ى(س)$

أثبت أن : $ع'(س) = د'(س) + ى'(س)$

البرهان

∵ $ع(س) = د(س) + ى(س)$ بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

∴ $لو_{هـ}[ع(س)] = لو_{هـ}[د(س) + ى(س)]$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ع'(س)}{ع(س)} = \frac{د'(س) + ى'(س)}{د(س) + ى(س)}$

بالضرب × $ع(س) = د(س) + ى(س)$ ينتج :

$ع'(س) = د'(س) + ى'(س)$

بالمثل : إذا كان : $ع(س) = د(س) - ى(س)$

فإن : $ع'(س) = د'(س) - ى'(س)$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

(٣) إذا كان : $ع(س) = د(س) \cdot ى(س)$

أثبت أن : $ع'(س) = د(س) \cdot ى'(س) + ى(س) \cdot د'(س)$

البرهان

∵ $ع(س) = د(س) \cdot ى(س)$ بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

∴ $لو_{هـ}[ع(س)] = لو_{هـ} د(س) + لو_{هـ} ى(س)$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ع'(س)}{ع(س)} = \frac{د'(س)}{د(س)} + \frac{ى'(س)}{ى(س)}$

بالضرب × $ع(س) = د(س) \cdot ى(س)$ ينتج :

$ع'(س) = ى(س) \cdot د'(س) + د(س) \cdot ى'(س)$

(٤) إذا كان : $ع(س) = \frac{د(س)}{ى(س)}$

أثبت أن : $ع'(س) = \frac{ى(س)\,د'(س) - د(س)\,ى'(س)}{[ى(س)]^{٢}}$

البرهان

∵ $ع(س) = \frac{د(س)}{ى(س)}$ بأخذ $لو_{هـ}$ للطرفين

∴ $لو_{هـ}[ع(س)] = لو_{هـ} د(س) - لو_{هـ} ى(س)$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ع'(س)}{ع(س)} = \frac{د'(س)}{د(س)} - \frac{ى'(س)}{ى(س)}$

$$\therefore \frac{\text{ع}'(\text{س})}{\text{ع}(\text{س})} = \frac{\text{ى}(\text{س})\,\text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ى}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})\cdot\text{ى}(\text{س})}$$

بالضرب × $\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ى}(\text{س})}$ ينتج :

$$\text{ع}'(\text{س}) = \frac{\text{ى}(\text{س})\,\text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ى}'(\text{س})}{[\text{ى}(\text{س})]^{٢}}$$

(٥) إذا كان : $\text{ك}(\text{س}) = [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ أثبت أن :

$$\text{ك}'(\text{س}) = \text{ن}[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}-١}\cdot\text{د}'(\text{س})$$

البرهان

$\because \text{ك}(\text{س}) = [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ بأخذ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}[\text{ك}(\text{س})] = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}}[\text{د}(\text{س})]$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س $\therefore \frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})} = \text{ن}\cdot\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$

بالضرب × $\text{ك}(\text{س}) = [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ ينتج :

$$\text{ك}'(\text{س}) = \text{ن}[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}-١}\cdot\text{د}'(\text{س})$$

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة (٩١)

(أ) $\text{د}'(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٢} - ٥ = ٧$

$\therefore ٣\,\text{س}^{٢} = ١٢$ و منها : $\text{س} = \pm ٢$

(ب) $\text{د}'(\text{س}) = ٧(\text{س} - ٥)^{٦} = ٧ \quad \therefore (\text{س} - ٥)^{٦} = ١$

$\therefore \text{س} - ٥ = ١$ أو $\text{س} - ٥ = -١$

$\therefore \text{س} = ٤$ أو $\text{س} = ٦$

إجابة مسألة رقم (١٩) تمارين (٣ – ٣) صفحة (٩١)

$\text{ص}' = ٣\,\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ب}\,\text{س}$ ، عندما : $\text{ص}' = ٨$ عند $\text{س} = ١$

فإن : $٣\,\text{أ} + ٢\,\text{ب} = ٨$ (١)

متوسط تغير ص عندما تتغير س من – ١ إلى ٢ $= ٣\,\text{أ} - \text{ب} = ٧$ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : $\text{أ} = \frac{٢٢}{٩}$ ، $\text{ب} = \frac{١}{٣}$

إجابة مسألة رقم (٢١) تمارين (٣ – ٣) صفحة (٩١)

حجم البرميل $= \text{ح} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$

عندما : $\text{نق} = ٩٠ \quad \therefore \text{ح} = ٨١٠٠\,\pi\,\text{ع}$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\text{دح}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٨١٠٠\,\pi\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

و عندما : $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ١٠$ فإن : $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١}{٨١٠٠\,\pi}$

إجابة مسألة رقم (٢٢) تمارين (٣ – ٣) صفحة (٩١)

$$\frac{\text{د}}{\text{دن}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$$

إجابة مسألة رقم (٢٣) تمارين (٣ – ٣) صفحة (٩١)

الحلان صحيحان

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

مشتقة الدوال المثلثية

مشتقة دالة الجيب :

إذا كانت : د (س) = حا س فإن : د/ (س) = حتا س

د (س + هـ) = حا (س + هـ) = حا س حتا هـ + حتا س حا هـ

د (س + هـ) − د (س) = حا س حتا هـ + حتا س حا هـ − حا س

= حا س (حتا هـ − ١) + حتا س حا هـ

∴ د/ (س) = نهـا (هـ ← ٠) [حا (س + هـ) − حا س] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠) [حا س (حتا هـ − ١) + حتا س حا هـ] ÷ هـ

= حا س نهـا (هـ ← ٠) (حتا هـ − ١) ÷ هـ + حتا س نهـا (هـ ← ٠) حا هـ ÷ هـ

= حا س × صفر + حتا س × ١ = حتا س

أى أن : ء/ءس (حا س) = حتا س

برهان آخر لمشتقة دالة الجيب

∵ حا أ − حا ب = ٢ حتا [١/٢ (أ + ب)] حا [١/٢ (أ − ب)]

أى : حا (س + هـ) − حا س =

٢ حتا [١/٢ (س + هـ + س)] حا [١/٢ (س + هـ − س)]

= ٢ حتا [(س + ١/٢ هـ)] حا [١/٢ هـ]

∴ د/ (س) = نهـا (هـ ← ٠) ٢ حتا [(س + ١/٢ هـ)] حا [١/٢ هـ] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠) حا [١/٢ هـ] ÷ (١/٢ هـ) × حتا [(س + ١/٢ هـ)]

= ١ × حتا س = حتا س

حيث : حا أ − حا ب = ٢ حتا [١/٢ (أ + ب)] حا [١/٢ (أ − ب)]

البرهان

∵ حا (س + ص) = حا س حتا ص + حتا س حا ص

، حا (س − ص) = حا س حتا ص − حتا س حا ص

بالطرح ينتج :

حا (س + ص) − حا (س − ص) = ٢ حتا س حا ص (١)

بوضع : س + ص = أ ، س − ص = ب

بالجمع ينتج : ٢ س = أ + ب ، ٢ ص = أ − ب

∴ س = ١/٢ (أ + ب) ، ص = ١/٢ (أ − ب)

بالتعويض فى (١) ينتج :

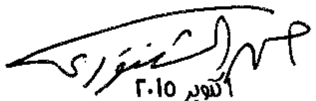
حا أ − حا ب = ٢ حتا [١/٢ (أ + ب)] حا [١/٢ (أ − ب)]

بالمثل يمكن إثبات أن :

حتا أ − حتا ب = ٢ حا [١/٢ (أ + ب)] حا [١/٢ (أ − ب)]

حتا أ + حتا ب = ٢ حتا [١/٢ (أ + ب)] حتا [١/٢ (أ − ب)]

حا أ + حا ب = ٢ حا [١/٢ (أ + ب)] حتا [١/٢ (أ − ب)]



مشتقة دالة جيب التمام :

إذا كانت : د (س) = حتا س   فإن : د/ (س) = – حا س

البرهان

∵ حتا س = حا ($\frac{\pi}{٢}$ – س)

∴ د/ (س) = $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [حا ($\frac{\pi}{٢}$ – س)]

= حتا ($\frac{\pi}{٢}$ – س) × – ١

= – حتا ($\frac{\pi}{٢}$ – س) = – حا س

برهان آخر

د (س + هـ) = حتا (س + هـ) = حتا س حتا هـ – حا س حا هـ

د (س + هـ) – د (س) = حتا س حتا هـ – حا س حا هـ – حتا س

= حتا س (حتا هـ – ١) + حا س حا هـ

∴ د/ (س) = نهـا$_{\text{هـ} \to ٠}$ $\frac{\text{حتا (س + هـ) – حتا س}}{\text{هـ}}$

= نهـا$_{\text{هـ} \to ٠}$ $\frac{\text{حتا س (حتا هـ – ١) – حا س حا هـ}}{\text{هـ}}$

= حتا س نهـا$_{\text{هـ} \to ٠}$ $\frac{\text{حتا هـ – ١}}{\text{هـ}}$ – حا س نهـا$_{\text{هـ} \to ٠}$ $\frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}}$

= حتا س × صفر – حا س × ١ = – حا س

برهان ثالث

∵ حتا أ – حتا ب = – ٢ حا [$\frac{١}{٢}$ (أ + ب)] حا [$\frac{١}{٢}$ (أ – ب)]

أى : حتا (س + و) – حتا س =

– ٢ حا [$\frac{١}{٢}$ (س + و + س)] حا [$\frac{١}{٢}$ (س + و – س)]

= – ٢ حا [(س + $\frac{١}{٢}$ و)] حا [$\frac{١}{٢}$ و]

∴ د/ (س) = نهـا$_{\text{و} \to ٠}$ $\frac{\text{– ٢ حا [(س + ½ و)] حا [½ و]}}{\text{و}}$

= نهـا$_{\text{و} \to ٠}$ $\frac{\text{– حا [½ و]}}{\text{½ و}}$ × نهـا$_{\text{و} \to ٠}$ حا [(س + $\frac{١}{٢}$ و)]

= – ١ × حا س = – حا س

مشتقة دالة الظل :

إذا كانت : د (س) = ظا س   فإن : د/ (س) = قا^{٢} س

البرهان

د (س) = ظا س = $\frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$

د/ (س) = $\frac{\text{حتا س × (حتا س) – حا س × (– حا س)}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$

= $\frac{\text{حتا}^{٢}\text{ س + حا}^{٢}\text{ س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{ س}}$ = قا^{٢} س

بالمثل

إذا كان : د (س) = طتا س   فإن : د/ (س) = – قتا^{٢} س

إذا كان : د (س) = قا س   فإن : د/ (س) = قا س طتا س

إذا كان : د (س) = قتا س   فإن : د/ (س) = – قتا س طتا س

برهان آخر باستخدام الأعداد المركبة :

نعلم من الأعداد المركبة أن :

$\text{هـ}^{\text{ت س}} = \text{حتا س} + \text{ت حا س}$ ، $\text{هـ}^{-\text{ت س}} = \text{حتا س} - \text{ت حا س}$

بالجمع ينتج : $\text{حتا س} = \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)$

و بالطرح ينتج : $\text{حا س} = \frac{1}{2\text{ت}}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)$

و حيث : $\frac{1}{2\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = -\frac{1}{2}\text{ت}$ " تذكر أن : $\text{ت}^2 = -1$ "

$\therefore \text{حا س} = -\frac{1}{2}\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)$ ،

$\text{طا س} = \frac{-\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)}{\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}}$ ، $\text{قا س} = \frac{2}{\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}}$

ملاحظة :

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{ت س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{ت هـ}^{\text{ت س}}$

و إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{ت س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = -\text{ت هـ}^{-\text{ت س}}$

$\therefore$ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{حا س}$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = -\frac{1}{2}\text{ت}\left(\text{ت هـ}^{\text{ت س}} + \text{ت هـ}^{-\text{ت س}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right) = \text{حتا س}$

و إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{حتا س}$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{2}\left(\text{ت هـ}^{\text{ت س}} - \text{ت هـ}^{-\text{ت س}}\right)$

$= -\frac{1}{2}\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right) = -\text{حا س}$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

و إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{طا س}$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left[\frac{-\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)}{\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}}\right]$

$= \frac{-\text{ت}^2\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)^2 + \text{ت}^2\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)^2}{\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)^2}$

$= \frac{\text{هـ}^{2\text{ت س}} + \text{هـ}^{-2\text{ت س}} + 2 - \text{هـ}^{2\text{ت س}} - \text{هـ}^{-2\text{ت س}} + 2}{\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)^2}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{4}{\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}\right)^2} = \text{قا}^2\text{س}$

ملاحظة :

إذا كانت : $\text{ع} = \text{د}(\text{س})$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

و كانت : $\text{ص} = \text{حا ع}$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left[\text{حا ع}\right] = \text{حتا ع} \cdot \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$

قاعدة السلسلة ، بالتالى يكون :

(١) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حا د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{حتا د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

(٢) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ن حا}^{\text{ن}-1}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{حتا س} \times \text{د}'(\text{س})$

بالمثل :

إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا ع}$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\text{حتا ع}\right] = -\text{حا ع}\cdot\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

قاعدة السلسلة ، بالتالى يكون :

(١) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{حا د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

(٢) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ن حتا}^{\text{ن}-١}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{حا د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

، بالمثل :

إذا كانت : $\text{ص} = \text{طا ع}$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\text{طا ع}\right] = \text{قا}^{٢}\text{ع}\cdot\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

قاعدة السلسلة ، بالتالى يكون :

(١) إذا كانت : $\text{ص} = \text{طا د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

(٢) إذا كانت : $\text{ص} = \text{طا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن طا}^{\text{ن}-١}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{قا}^{٢}\text{د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

فمثلاً :

إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا}^{٣}(٤\text{س}^{٢} - ٧)$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\,\text{حتا}^{٢}(٤\text{س}^{٢} - ٧) \times \text{حا}(٤\text{س}^{٢} - ٧) \times ٨\text{س}$

$= -٢٤\,\text{حتا}^{٢}(٤\text{س}^{٢} - ٧) \times \text{حا}(٤\text{س}^{٢} - ٧)$

حل آخر

بفرض أن : $\text{ص} = \text{حتا}^{٣}\text{ع}$ ، $\text{ع} = ٤\text{س}^{٢} - ٧$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٣\,\text{حتا}^{٢}\text{ع} \times -\text{حا ع}$

، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٨\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢٤\text{س}\,\text{حتا}^{٢}\text{ع} \times \text{حا ع}$

$= -٢٤\,\text{حتا}^{٢}(٤\text{س}^{٢} - ٧) \times \text{حا}(٤\text{س}^{٢} - ٧)$

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة (٩٤)

(أ) $٢\text{س} + \text{حتا س}$ (ب) $-٧\,\text{حتا س}$

(حـ) $٥\,\text{حتا}(٣ - ٢\text{س}) \times (-٢) = -١٠\,\text{حتا}(٣ - ٢\text{س})$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (٩٥)

(أ) ٢ قا^{٢} ٣ س × ٣ = ٦ قا^{٢} ٣ س

(ب) – ٢ حا (٤ – ٣ س^{٢}) × (– ٦س) = ١٢س حا (٤ – ٣ س^{٢})

(جـ) ص = حا ٢ س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢ حتا ٢ س

(ء) ٢ س قا^{٢} س + طا س

(هـ) ٢ طا ٣ س قا^{٢} ٣ س × ٣ = ٦ طا ٣ س قا^{٢} ٣ س

(و) ١٢ س^{٢} قا^{٢} ٤ س^{٣}

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة (٩٦)

ص = س حا ٢ س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حا ٢ س + ٢ س حتا ٢ س

إجابة تطبيق على النشاط صفحة (٩٦)

معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

= ٢ حا س حتا س + ٢ حا ٢ س – ٤

= حا ٢ س + ٢ حا ٢ س – ٤ = ٣ حا ٢ س – ٤

عندما : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = – ١

∴ ٣ حا ٢ س – ٤ = – ١   و منها : حا ٢ س = ١

∴ ٢ س = $\frac{١}{٢}$ π ∴ س = $\frac{١}{٤}$ π

إجابة تفكير ابداعى صفحة (٩٧)

(أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حتا (طا ٣ س) × ٣ قا^{٢} ٣ س

= ٣ حتا (طا ٣ س) × قا^{٢} ٣ س

حل آخر

بفرض أن : ص = حا ع ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = حتا ع

، ع = طا ٣ س ∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٣ قا^{٢} ٣ س

∵ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حتا ع × ٣ قا^{٢} ٣ س

= ٣ حتا (طا ٣ س) × قا^{٢} ٣ س

(ب) ص = حا $\frac{\text{١٨٠ س}}{\pi}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{١٨٠}}{\pi}$ حتا $\frac{\text{١٨٠ س}}{\pi}$

إجابة مسألة رقم (١٦) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

حتا (حتا^{٢} س) × ٢ حتا س × – حا س

= – ٢ حا س حتا س حتا (حتا^{٢} س) = – حا ٢ س حتا (حتا^{٢} س)

إجابة مسألة رقم (٢٤) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\text{قا}^{2}\sqrt{\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{قا}^{2}\sqrt{\text{س}}}{2\sqrt{\text{س}}}$$

إجابة مسألة رقم (٢٥) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$20\,\text{حتا}^{4}\text{س} \times -\,\text{حا س} = -\,20\,\text{حتا}^{4}\text{س}\ \text{حا س}$$

إجابة مسألة رقم (٢٩) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\frac{1}{2}(\text{حتا } 5\text{ س})^{-\frac{1}{2}} \times (-\,\text{حا } 5\text{ س}) \times 5$$

$$= \frac{-\,5\ \text{حا } 5\text{ س}}{2\sqrt{\text{حتا } 5\text{ س}}}$$

إجابة مسألة رقم (٣٠) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$-\,\text{حا (حتا س)} \times (-\,\text{حا س}) = \text{حا س حا (حتا س)}$$

إجابة مسألة رقم (٣١) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\text{ص} = \text{طا}\left(\text{س} + \tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\left(\text{س} + \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

إجابة مسألة رقم (٣٥) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\text{حا س}} + \frac{1}{2}\text{س}\,(\text{حا س})^{-\frac{1}{2}} \times \text{حتا س}$$

و عندما : $\text{س} = \frac{1}{2}\pi$ فإن : ميل المماس $= 1$

إجابة مسألة رقم (٣٨) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\text{ص} = \text{حا}^{2}\text{س} + \text{حتا}^{2}\text{س} + 2\,\text{حا س حتا س} = 1 + \text{حا } 2\text{ س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{حتا } 2\text{ س}$$

إجابة مسألة رقم (٣٩) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(1 + \text{حتا س}) \times \text{حتا س} - \text{حا س} \times (-\,\text{حا س})}{(1 + \text{حتا س})^{2}}$$

$$= \frac{\text{حتا س} + \text{حتا}^{2}\text{س} + \text{حا}^{2}\text{س}}{(1 + \text{حتا س})^{2}} = \frac{\text{حتا س} + 1}{(1 + \text{حتا س})^{2}}$$

$= \dfrac{1}{1 + \text{حتا س}}$ بالضرب $\times\ (1 + \text{حتا س})$ ينتج :

$$(1 + \text{حتا س})\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$$

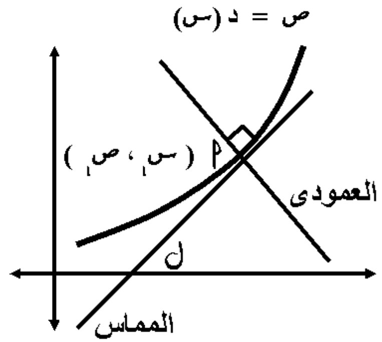
أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

إجابة مسألة رقم (٤٠) تمارين (٣ – ٤) صفحة (٩٧)

$$\text{ص} = \text{قا } 4\text{ س} = \frac{1}{\text{حتا } 4\text{ س}} \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{4\ \text{حا } 4\text{ س}}{\text{حتا}^{2}\, 4\text{ س}}$$

و عندما : $\text{س} = \frac{1}{4}\pi$ فإن : معدل التغير = صفر

تطبيقات على المشتقة



المشتقة الأولى للدالة د حيث :
ص = د (س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه
أى أن : ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ و يكون :

طا ل = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$

حيث : ل قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السنات

ملاحظات :

إذا كان : م١ ، م٢ ميلى مستقيمين معلومين ل١ ، ل٢ فإن :

(١) ل١ // ل٢ إذا و فقط إذا كان : م١ = م٢

(٢) ل١ ⊥ ل٢ إذا و فقط إذا كان : م١ × م٢ = −١

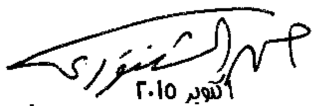
و على ذلك فإن : ميل العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه = $\dfrac{١}{\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة (١٠٠)

ص/ = ٢ س − ٢

(أ) ∵ المماس // محور السينات　　∴ ص/ = ٠
∴ ٢ س − ٢ = ٠　　و منها : س = ١
، بالتعويض فى معادلة المنحنى س = ١ نجد : ص = ٢
∴ عند النقطة (١ ، ٢) المماس // محور السينات

(ب) ميل المستقيم = $\frac{١}{٤}$　　، ∵ المستقيم ⊥ المماس
∴ ميل المماس = −٤　　∴ ٢ س − ٢ = −٤
و منها : س = −١
، بالتعويض فى معادلة المنحنى س = −١ نجد : ص = ٦
∴ عند النقطة (−١ ، ٦) المماس ⊥ المستقيم المعطى



إجابة تفكير ابداعى صفحة (١٠٠)

ص/ = ٢ س　　، ميل المستقيم = ٤
عندما : يمس المستقيم المنحنى　　فإن : ٢ س = ٤
و منها : س = ٢
، بالتعويض فى معادلة المنحنى س = ٢ نجد : ص = ٩
∴ نقطة التماس هى : (٢ ، ٩)
∵ نقطة التماس تقع على المنحنى فهى تحقق معادلته
∴ ٩ = ٨ + أ　　و منها : أ = ١

معادلتا المماس و العمودى لمنحنى :

إذا كانت : (س$_1$ ، ص$_1$) نقطة تقع على منحنى الدالة د

حيث : ص = د (س) ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة فإن :

(١) معادلة المماس عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى :

ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)

(٢) معادلة العمودى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى :

ص − ص$_1$ = $\frac{-1}{\text{م}}$ (س − س$_1$)

تذكر ما يلى :

طرق إيجاد ميل الخط المستقيم

(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) هو : م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

(٢) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + جـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : م = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٤) ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = طا هـ

و يكون : م = ٠ إذا كان المستقيم يوازى محور السينات

، م > ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، م < ٠ إذا كان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (١٠١)

ص$'$ = $\frac{-2}{(\text{س}+1)^2}$

، بالتعويض فى معادلة المنحنى س = ١ نجد : ص = ٢

∴ النقطة (١ ، ٢) تقع على المنحنى

و عندها : ميل المماس = ص$'$ = $-\frac{1}{2}$ ، ميل العمودى = ٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = $-\frac{1}{2}$ (س − ١)

أى : س + ٢ ص − ٥ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٢ (س − ١)

أى : ٢ س + ص = ٠

، بالتعويض فى معادلة المنحنى س = − ٣ ، ص = ٤

نجد أنها تحقق معادلته ∴ النقطة (− ٣ ، ٤) تقع على المنحنى

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة (١٠٢)

ص$'$ = حا ٢ س + ٢ س حتا ٢ س

و عندما : س = $\frac{1}{4}\pi$ فإن : ميل المماس = ١

و ميل العمودى = − ١

∴ معادلة المماس هى : ص − $\frac{1}{4}\pi$ = س − $\frac{1}{4}\pi$

أى : س − ص = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − $\frac{1}{4}\pi$ = − س + $\frac{1}{4}\pi$

أى : س + ص − $\frac{1}{2}\pi$ = ٠

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة (١٠٢)

ص/ = ٢ س + أ

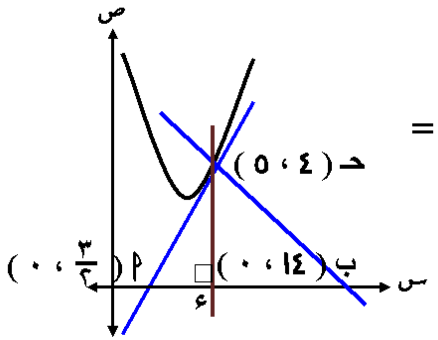
، ∵ ميل المماس عند النقطة (١ ، ٣) يساوى ٥

∴ ٢ × ١ + أ = ٥   و منها : أ = ٥

، ∵ النقطة (١ ، ٣) تقع على المنحنى فهى تحقق معادلته

∴ ٣ = ١ + ٣ × ١ + ب   و منها : ب = − ١

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة (١٠٣)



ص/ = ٢ س − ٦

∴ ميل المماس عند النقطة (٤ ، ٥) = ٢ × ٤ − ٦ = ٢

، ميل العمودى عندها = − $\frac{1}{2}$

∴ معادلة المماس هى :

ص − ٥ = ٢ (س − ٤)   أى : ٢ س − ص − ٣ = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات عند النقطة أ ($\frac{3}{2}$ ، ٠)

، معادلة العمودى هى : ص − ٥ = − $\frac{1}{2}$ (س − ٤)

أى : ٢ س + ٢ ص − ١٤ = ٠

∴ العمودى يقطع محور السينات عند النقطة ب (١٤ ، ٠)

∴ أ ب = ١٤ − $\frac{3}{2}$ = $\frac{25}{2}$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب × حـ ء = $\frac{1}{2}$ × $\frac{25}{2}$ × ٥

= $\frac{125}{4}$ وحدة مربعة

إجابة مسألة رقم (٩) تمارين (٣ − ٥) صفحة (١٠٤)

للمنحنى الأول : ص/ = ٢ س + ١

، ميل المماس له عند النقطة (١ ، ١) = م$_1$ = ٣

للمنحنى الثانى : ص/ = − $\frac{1}{3}$ س$^{-\frac{2}{3}}$

، ميل المماس له عند النقطة (١ ، ١) = م$_2$ = − $\frac{1}{3}$

، ∵ م$_1$ × م$_2$ = − ١   ∴ المماسان متعامدان

إجابة مسألة رقم (١٠) تمارين (٣ − ٥) صفحة (١٠٤)

ص/ = (س^2 − ٢ س) × أ + (أ س + ب) × (٢ س − ٢)

، ∵ المنحنى يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠)

∴ ص/$_{(٢ ، ٠)}$ = ٢ أ + ب   (١)

، ص/$_{(٠ ، ٠)}$ = ميل المستقيم = ٢   ∴ − ٢ ب = ٢

أى أن : ب = − ١ ، بالتعويض فى (١) ينتج : أ = $\frac{1}{2}$

التكامل

مقدمة :

درسنا سابقاً كيفية الحصول على الدالة المشتقة $د^{/}$ من الدالة الأصلية د و لكن فى كثير من المواقف العملية يحدث العكس ، أى يكون المطلوب الحصول على الدالة د

إذا علمت الدالة المشتقة $د^{/}$ (عملية عكسية)

و هذا يستدعى البحث عن دالة إذا فاضلناها حصلنا على المشتقة المعلومة تسمى هذه العملية بإيجاد دالة مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة و هذا ما يعرف بعلم التكامل

تمهيد :

إذا كانت : $د(س) = ٣ س^{٢}$ و بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

نلاحظ أن : $ن س^{ن-١} = ٣ س^{٢}$

$\therefore ن - ١ = ٢ \qquad \therefore ن = ٣$

فيكون : $ت(س) = س^{٣}$ أو $س^{٣} + ١$ أو $س^{٣} - ٤$

تسمى الدالة ت دالة المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د

المشتقة العكسية :

إذا كانت : $ص = س^{٣}$ فإن المشتقة الأولى هى : $\frac{ءص}{ءس} = ٣ س^{٢}$

أما استنتاج الدالة ص من الدالة المشتقة $\frac{ءص}{ءس}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية

فمثلاً $س^{٣}$ هى مشتقة عكسية للدالة $٣ س^{٢}$

الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

لاحظ أن : $٣ س^{٢}$ لها العديد من المشتقات العكسية منها :

$س^{٣} + ١$ ، $س^{٣} - ٤$ ، $س^{٣} + ث$ حيث : $ث \in ح$ ، ....

جميعها مشتقتها $٣ س^{٢}$

$\therefore \frac{ء}{ءس}(س^{٣} + ث)$ حيث : ث مقدار ثابت

تعريف :

يقال أن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت :

$ت^{/}(س) = د(س)$ لكل س فى مجال د

أى أن :

إذا كانت د (س) دالة معرفة و وجدت دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجال هذه الدالة بحيث كان : $ت^{/}(س) = د(س)$

فإن : ت (س) تسمى دالة المشتقة العكسية للدالة د أو دالة أصلية مقابلة للدالة د

إجابة حاول أن تحل رقم (١) صفحة (١٠٦)

$\because ت(س) = \frac{١}{٢} س^{٦}$

$\therefore ت^{/}(س) = \frac{١}{٢} \times ٦ س^{٥} = ٣ س^{٥} = د(س)$

$\therefore ت^{/}(س) = د(س)$

أى أن : الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

إجابة تفكير ناقد صفحة (١٠٦)

إذا كانت : $ت_1$ ، $ت_2$ كل منهما مشتقة عكسية للدالة د

فإن : $ت_1 - ت_2$ = مقدار ثابت لأن :

$ت_1(س) = د(س) + ث_1$ ، $ت_2(س) = د(س) + ث_2$

بالطرح ينتج : $ت_1(س) - ت_2(س) = ث_1 - ث_2$ = مقدار ثابت

التكامل المحدد :

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل المحدد لهذه الدالة

و يرمز لها بالرمز : $\int د(س)\, ءس$ و يقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س

ملاحظة :

أى دالة يكون لها مشتقة وحيدة بينما يكون لها أكثر من مشتقة عكسية

تعريف :

إذا كان : $ت'(س) = د(س)$ فإن :

$\int د(س)\, ءس = د(س) + ث$

حيث : ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل) ، تعيين الثابت خارج نطاق الدراسة

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة (١٠٧)

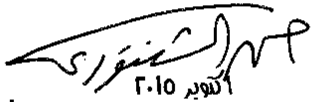
$\because \frac{ء}{ءس}\left(-\frac{1}{3}س^{-3} + ث\right) = -\frac{1}{3} \times -3س^{-4} = س^{-4}$

$\therefore$ العلاقة صحيحة ،

$\because \frac{ء}{ءس}\left[\frac{1}{3}(1+س^2)^{\frac{3}{2}} + ث\right] = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(1+س^2)^{\frac{1}{2}} \times 2س$

$= س(1+س^2)^{\frac{1}{2}} = س\sqrt{1+س^2}$

$\therefore$ العلاقة صحيحة



قاعدة :

$$\int س^ن\, ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$$

حيث : ن عدد نسبى ، $ن \neq -1$ ، ث ثابت

البرهان :

$\because \frac{ء}{ءس}\left(\frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث\right) = (ن+1)\left(\frac{س^ن}{ن+1}\right)$

$= س^ن$ $\therefore$ العلاقة صحيحة

برهان آخر

يعتمد هذا البرهان على التكامل بالتجزئ (بالأجزاء)

يستخدم التكامل بالتجزئ لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحداهما مشتقة الأخرى على الصورة :

$و(س) \cdot ك'(س)$

بفرض أن : $د(س) = و(س) \cdot ك(س)$

$\therefore \frac{ء}{ءس}\left[و(س) \cdot ك(س)\right] =$

$و(س) \cdot ك'(س) + و'(س) \cdot ك(س)$

$\therefore \int \frac{ء}{ءس}\left[و(س) \cdot ك(س)\right] ءس =$

$\int و(س) \cdot ك'(س)\, ءس + \int و'(س) \cdot ك(س)\, ءس$

$\therefore و(س) \cdot ك(س) + ث =$

$\int و(س) \cdot ك'(س)\, ءس + \int و'(س) \cdot ك(س)\, ءس$

$$\therefore \int \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ك}'(\text{س}) \,\text{ءس} = \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{ك}(\text{س}) - \int \text{ق}'(\text{س}) \,.\, \text{ك}(\text{س}) \,\text{ءس} + \text{ث}$$

و بصورة مختصرة

$$\int \text{ق} \,\text{ءك} = \text{ق} \,.\, \text{ك} - \int \text{ك} \,\text{ءق}$$

حيث : ءق تعنى مشتقة الدالة ق (س) ، ءك تعنى مشتقة الدالة ك (س)

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

خطوات البرهان بالتجزئ :

نجزئ المقدار المراد تكامله إلى جزأين نفرض :
أحدهما ق بحيث يكون سهل الاشتقاق و أن تكون مشتقته الأولى أو الثانية أو ... مقدار ثابت ، و الآخر ءك بحيث يكون سهل التكامل

خطوات البرهان الآخر :

$$\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \int \text{س}^{\text{ن}-1} \,.\, \text{س} \,\text{ءس}$$

بوضع : $\text{ق} = \text{س}^{\text{ن}-1}$ $\quad \therefore \text{ءق} = (\text{ن} - 1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}\,\text{ءس}$

، $\text{ءك} = \text{س} \,\text{ءس}$ $\quad \therefore \text{ك} = \frac{1}{2}\text{س}^2$

$$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} =$$

$$\frac{1}{2}\text{س}^2 \,.\, \text{س}^{\text{ن}-1} - \int \frac{1}{2}\text{س}^2 (\text{ن} - 1)\,\text{س}^{\text{ن}-2} \,\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^{\text{ن}+1} - \frac{1}{2}(\text{ن} - 1)\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس}$$

بالضرب × ٢ ينتج :

$$2\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \text{س}^{\text{ن}+1} - (\text{ن} - 1)\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس}$$

$$\therefore 2\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} + (\text{ن} - 1)\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \text{س}^{\text{ن}+1}$$

$$\therefore 2\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} + \text{ن}\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} - \int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \text{س}^{\text{ن}+1}$$

$$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} + \text{ن}\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \text{س}^{\text{ن}+1}$$

$$\therefore (\text{ن} + 1)\int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \text{س}^{\text{ن}+1}$$

$$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}} \,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

ملاحظات :

(١) $\int \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{أ} \,\text{ءس} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ث}$ حيث : أ ثابت $\neq 0$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة (١٠٧)

(أ) $\int \text{س}^{8} \,\text{ءس} = \frac{1}{9}\text{س}^{9} + \text{ث}$

(ب) $\int \text{س}^{\frac{2}{3}} \,\text{ءس} = \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

(جـ) $\int 7\,\text{س}^{\frac{7}{9}} \,\text{ءس} = 7 \times \frac{9}{16}\text{س}^{\frac{16}{9}} + \text{ث} = \frac{63}{16}\text{س}^{\frac{16}{9}} + \text{ث}$

(د) $\int \sqrt[7]{\text{س}^{5}} \,\text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{5}{7}} \,\text{ءس} = \frac{7}{12}\text{س}^{\frac{12}{7}} + \text{ث}$

خواص التكامل :

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

(١) $\int \text{أ}\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{أ}\int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$ حيث : أ ثابت $\neq 0$

(٢) $\int [\,\text{د}(\text{س}) \pm \text{ر}(\text{س})\,]\,\text{ء}\text{س} =$

$$\int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \pm \int \text{ر}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$$

ملاحظات :

(١) يكفى إضافة ثابت تكامل واحد لمجموع عدة تكاملات

(٢) يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل لأنه لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة (١٠٨)

(أ) $\int (2 + \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-\frac{1}{2}})\,\text{ء}\text{س}$

$$= 2\text{س} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$= 2\text{س} + \frac{2}{3}\text{س}\sqrt{\text{س}} + 2\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

(ب) $\int (\text{س}^{-2} + \text{س}^{\frac{1}{2}} + 3)\,\text{ء}\text{س}$

$$= -\text{س}^{-1} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 3\text{س} + \text{ث}$$

$$= -\frac{1}{\text{س}} + \frac{2}{3}\text{س}\sqrt{\text{س}} + 3\text{س} + \text{ث}$$

بعض قواعد التكامل :

(١) $\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

حيث : ن عدد نسبى ، $\text{ن} \neq -1$ ، ث ثابت

البرهان : حل تفكير ناقد صفحة (١٠٨)

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}}\left(\frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \right) =$$

$$\frac{1}{\text{أ}} \times (\text{ن} \times 1) \times \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}}{\text{ن}+1} \times \text{أ} = (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}$$

∴ العلاقة صحيحة

برهان آخر

نضع : $\text{ص} = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$ ∴ $\text{ء}\text{ص} = \text{أ}\,\text{ء}\text{س}$

∴ $\text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ء}\text{ص}$

∴ $\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{س} = \int \text{ص}^{\text{ن}} \,.\, \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ء}\text{ص} =$

$$\frac{1}{\text{أ}}\int \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{ص} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

∴ $\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

(٢) ∫ [د (س)]^{ن} . د$'$(س) ءس = [د (س)]$^{ن + ١}$ / (ن + ١) + ث

حيث : ن عدد نسبى ، ن ≠ − ١ ، ث ثابت

البرهان

ء / ءس ([د (س)]$^{ن + ١}$ / (ن + ١) + ث) =

(ن − ١) × [د (س)]^{ن} / (ن + ١) × د$'$(س) =

[د (س)]^{ن} . د$'$(س)

∴ العلاقة صحيحة

برهان آخر

نضع : ص = د (س) ∴ ءص = د$'$(س) ءس

∴ ∫ [د (س)]^{ن} . د$'$(س) ءس = ∫ ص^{ن} ءص

= ص$^{ن + ١}$ / (ن + ١) + ث = [د (س)]$^{ن + ١}$ / (ن + ١) + ث

إجابة حاول أن تحل رقم (٥) صفحة (١٠٩)

(أ) ∫ (٣س + ٥)$^{-٩}$ ءس = − ١/٨ × (٣س + ٥)$^{-٨}$ × ١/٣ + ث

= − ١/٢٤ (٣س + ٥)$^{-٨}$ + ث

(ب) ∫ (س + ١) (س + ٣)^{٧} ءس " بإضافة ± ٢ ينتج "

= ∫ (س + ٣ − ٢) (س + ٣)^{٧} ءس

= ∫ (س + ٣)^{٨} ءس − ٢ ∫ (س + ٣)^{٧} ءس

١/٩ × (س + ٣)^{٩} − ٢ × ١/٨ × (س + ٣)^{٨} + ث

= ١/٩ × (س + ٣)^{٩} − ١/٤ × (س + ٣)^{٨} + ث

(جـ) ∫ (س^{٢} + ٣س − ٢)^{٩} (٢س + ٣) ءس

∵ د (س) = س^{٢} + ٣س − ٢

، د$'$(س) = ٢س + ٣

∴ ∫ (س^{٢} + ٣س − ٢)^{٩} (٢س + ٣) ءس =

١/١٠ × (س^{٢} + ٣س − ٢)^{١٠} + ث

(ء) ∫ س (٤س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (٢س − ١) ءس =

∫ (٤س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (٢س^{٢} − س) ءس

∵ د (س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤

الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

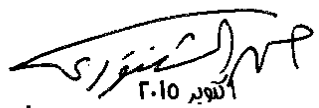
، $د'(س) = ١٢س^{٢} - ٦س$ " بالضرب × $\frac{٦}{٦}$ ينتج "

$$\therefore \int (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (٢س^{٢} - س)\, ءس =$$

$$\frac{١}{٦} \int (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٥} (١٢س^{٢} - ٦س)\, ءس$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٦} + ث$$

$$= \frac{١}{٣٦} \int (٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤)^{٦} + ث$$



إجابة أبحث صفحة (١٠٩)

$$\int \frac{١}{س}\, ءس = لو_{هـ} |س| + ث$$

البرهان

$\frac{ء}{ءس} (لو_{هـ} |س| + ث) = \frac{١}{س}$ ∴ العلاقة صحيحة

إجابة مسألة رقم (١٩) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int (س - ٢)(س + ٢)\, ءس = \int (س^{٢} - ٤)\, ءس$$

$$= \frac{١}{٣} س^{٨} - ٤س + ث$$

إجابة مسألة رقم (٢٣) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \frac{٢س^{٢} + ٣}{س^{٢}}\, ءس = \int (٢ + ٣س^{-٢})\, ءس$$

$$= ٢س - ٣س^{-١} + ث = ٢س - \frac{٣}{س} + ث$$

إجابة مسألة رقم (٢٥) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}\, ءس = \int \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}\, ءس$$

$$= \int (س + ١)\, ءس = \frac{١}{٢} س^{٢} + س + ث$$

إجابة مسألة رقم (٣٤) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \frac{٧}{\sqrt{س + ٤}}\, ءس = ٧ \int (س + ٤)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= ١٤ (س + ٤)^{\frac{١}{٢}} + ث = ١٤ \sqrt{س + ٤} + ث$$

إجابة مسألة رقم (٣٥) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int (س - ١)(س - ١)^{٢}\, ءس = \int (س - ١)^{٣}\, ءس$$

$$= \frac{١}{٤} (س - ١)^{٤} + ث$$

إجابة مسألة رقم (٣٦) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \sqrt{س - ٣}\, (س - ٣)^{٤}\, ءس = \int (س - ٣)^{\frac{٩}{٢}}\, ءس$$

$$= \frac{٢}{١١} (س - ٣)^{\frac{١١}{٢}} + ث = \frac{٢}{١١} \sqrt{س - ٣}\, (س - ٣)^{٥} + ث$$

إجابة مسألة رقم (٤٠) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\frac{١}{٤} \int (س^{٤} + ١)^{-٦} \times ٤س^{٣}\, ءس =$$

$$= -\frac{١}{٢٠} (س^{٤} + ١)^{-٥} + ث$$

تكاملات بعض الدوال المثلثية :

(١) $\int \text{حا س} \; \text{ء س} = - \text{حتا س} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{حتا س} \; \text{ء س} = \text{حا س} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{قا}^{2}\text{س} \; \text{ء س} = \text{ظا س} + \text{ث}$

البرهان :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left(- \text{حتا س} + \text{ث} \right) = \text{حا س}$ ∴ العلاقة صحيحة

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left(\text{حا س} + \text{ث} \right) = \text{حتا س}$ ∴ العلاقة صحيحة

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left(\text{ظا س} + \text{ث} \right) = \text{قا}^{2}\text{س}$ ∴ العلاقة صحيحة

برهان آخر للتكاملين (١) ، (٢) :

باستخدام الأعداد المركبة :

نعلم من الأعداد المركبة أن : $\text{حتا س} = \frac{1}{2} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)$

، $\text{حا س} = -\frac{1}{2} \text{ت} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)$

ملاحظة :

$\int \text{هـ}^{\text{ت س}} \; \text{ء س} = \frac{1}{\text{ت}} \int \text{هـ}^{\text{ت س}} \; \text{ء س} = - \text{ت هـ}^{\text{ت س}} + \text{ث}$ ،

$\int \text{هـ}^{-\text{ت س}} \; \text{ء س} = -\frac{1}{\text{ت}} \int \text{هـ}^{-\text{ت س}} \; \text{ء س} = \text{ت هـ}^{-\text{ت س}} + \text{ث}$

∴ $\int \text{حا س} \; \text{ء س} = -\frac{1}{2} \text{ت} \int \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right) \text{ء س}$

$= -\frac{1}{2} \text{ت} \int \text{هـ}^{\text{ت س}} \; \text{ء س} + \frac{1}{2} \text{ت} \int \text{هـ}^{-\text{ت س}} \; \text{ء س}$

$= -\frac{1}{2} \text{ت} \times \left(- \text{ت هـ}^{\text{ت س}} \right) + \frac{1}{2} \text{ت} \times \text{ت هـ}^{-\text{ت س}} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{ت س}} - \frac{1}{2} \text{هـ}^{-\text{ت س}} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{2} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right) + \text{ث} = - \text{حتا س} + \text{ث}$

، $\int \text{حتا س} \; \text{ء س} = \frac{1}{2} \int \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{\text{ت س}} \; \text{ء س} + \frac{1}{2} \int \text{هـ}^{-\text{ت س}} \; \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \left(- \text{ت هـ}^{\text{ت س}} \right) + \frac{1}{2} \text{ت هـ}^{-\text{ت س}} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{2} \text{ت} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right) + \text{ث} = \text{حا س} + \text{ث}$

الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

أما لبرهان التكامل (٣) نستخدم المشتقة العكسية :

$\int \text{قا}^{2}\text{س} \; \text{ء س} = \int \frac{4}{\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)^{2}} \; \text{ء س}$

$= \frac{- \text{ت} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)}{\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}} + \text{ث} = \text{ظا س} + \text{ث}$

، ∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left(\frac{- \text{ت} \left(\text{هـ}^{\text{ت س}} - \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)}{\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}}} + \text{ث} \right)$

$= \frac{4}{\left(\text{هـ}^{\text{ت س}} + \text{هـ}^{-\text{ت س}} \right)^{2}}$ "راجع صفحة ٥٣" ∴ العلاقة صحيحة

برهان ثالث :

(أ) باستخدام متسلسلة مكلورين

سنرمز للمشتقة الأولى بالرمز : د$^{/١}$ (س) ، و للثانية د$^{/٢}$ (س) و للثالثة د$^{/٣}$ (س) و هكذا .....

متسلسلة مكلورين :

إذا كانت : د (س) قابلة للاشتقاق المتكرر عند النقطة س = ٠

فإن : د (س) = د (٠) + $\frac{د^{/١}(٠)}{\underline{|١}}$ س + $\frac{د^{/٢}(٠)}{\underline{|٢}}$ س^{٢} + $\frac{د^{/٣}(٠)}{\underline{|٣}}$ س^{٣} + ...

متسلسلة مكلورين للدالة : د (س) = حا س

نكون الجدول التالى :

د (س) = حا س	د (٠) = ٠
د$^{/١}$ (س) = حتا س	د$^{/١}$ (٠) = ١
د$^{/٢}$ (س) = − حا س	د$^{/٢}$ (٠) = ٠
د$^{/٣}$ (س) = − حتا س	د$^{/٣}$ (٠) = − ١
د$^{/٤}$ (س) = حا س	د$^{/٤}$ (٠) = ٠
د$^{/٥}$ (س) = حتا س	د$^{/٥}$ (٠) = ١
....	....

∴ حا س = ٠ + $\frac{١}{\underline{|١}}$ س + ٠ + $\frac{-١}{\underline{|٣}}$ س^{٣} + ٠ + $\frac{١}{\underline{|٥}}$ س^{٥} +

..... = $\frac{س}{\underline{|١}}$ − $\frac{س^{٣}}{\underline{|٣}}$ + $\frac{س^{٥}}{\underline{|٥}}$ − $\frac{س^{٧}}{\underline{|٧}}$ + ...

متسلسلة مكلورين للدالة : د (س) = حتا س

نكون الجدول التالى :

د (س) = حتا س	د (٠) = ١
د$^{/١}$ (س) = − حا س	د$^{/١}$ (٠) = ٠
د$^{/٢}$ (س) = − حتا س	د$^{/٢}$ (٠) = − ١
د$^{/٣}$ (س) = حا س	د$^{/٣}$ (٠) = ٠
د$^{/٤}$ (س) = حتا س	د$^{/٤}$ (٠) = ١
د$^{/٥}$ (س) = − حا س	د$^{/٥}$ (٠) = ٠
....	....

∴ حتا س = ١ + ٠ + $\frac{-١}{\underline{|٢}}$ س^{٢} + ٠ + $\frac{١}{\underline{|٤}}$ س^{٤} +

..... = ١ − $\frac{س^{٢}}{\underline{|٢}}$ + $\frac{س^{٤}}{\underline{|٤}}$ − $\frac{س^{٦}}{\underline{|٦}}$ + ...

∴ ∫ حا س ء س = $\frac{س^{٢}}{٢\,\underline{|١}}$ − $\frac{س^{٤}}{٤\,\underline{|٣}}$ + $\frac{س^{٦}}{٦\,\underline{|٥}}$ − ..... + ث

= $\frac{س^{٢}}{\underline{|٢}}$ − $\frac{س^{٤}}{\underline{|٤}}$ + $\frac{س^{٦}}{\underline{|٦}}$ − ..... + ث

و بإضافة : ١ ، − ١ للطرف الأيسر و ملاحظة أن :

(١ + ث) = ثابت ينتج :

$$\int \text{حا س ء س} = -١ + \frac{\text{س}^{٢}}{|\underline{٢}} - \frac{\text{س}^{٤}}{|\underline{٤}} + \frac{\text{س}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots + \text{ث}$$

$$= -\left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{\text{س}^{٤}}{|\underline{٤}} - \frac{\text{س}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots \right) + \text{ث}$$

$$= -\text{حتا س} + \text{ث}$$

$$،\ \int \text{حتا س ء س} = \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣\,|\underline{٢}} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥\,|\underline{٤}} - \frac{\text{س}^{٧}}{٧\,|\underline{٦}} + \cdots + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{س}}{|\underline{١}} - \frac{\text{س}^{٣}}{|\underline{٣}} + \frac{\text{س}^{٥}}{|\underline{٥}} - \frac{\text{س}^{٧}}{|\underline{٧}} + \cdots + \text{ث}$$

$$= \text{حا س} + \text{ث}$$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

ملاحظة :

استخدام متسلسلة مكلورين لبرهان اشتقاق الدالتين : حا س ، حتا س

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\,\text{حا س} = ١ - \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{|\underline{٣}} + \frac{٥\,\text{س}^{٤}}{|\underline{٥}} - \frac{٧\,\text{س}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots$$

$$= ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{\text{س}^{٤}}{|\underline{٤}} - \frac{\text{س}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots = \text{حتا س}$$

$$،\ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\,\text{حتا س} = ٠ - \frac{٢\,\text{س}}{|\underline{٢}} + \frac{٤\,\text{س}^{٣}}{|\underline{٤}} - \frac{٦\,\text{س}^{٥}}{|\underline{٥}} + \cdots$$

$$= -\left(\frac{\text{س}}{|\underline{١}} - \frac{\text{س}^{٣}}{|\underline{٣}} + \frac{\text{س}^{٥}}{|\underline{٥}} - \cdots \right) = -\text{حا س}$$

متسلسلة مكلورين للدالة : د (س) = طا س

نكون الجدول التالى :

د (س) = طا س	د (٠) = ٠
$\text{د}^{/١}(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\text{س}$	$\text{د}^{/١}(٠) = ١$
$\text{د}^{/٢}(\text{س}) = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س طا س}$	$\text{د}^{/٢}(٠) = ٠$
$\text{د}^{/٣}(\text{س}) = ٢\,\text{قا}^{٤}\text{س} + ٤\,\text{قا}^{٢}\text{س طا}^{٢}\text{س}$ $= ٦\,\text{قا}^{٤}\text{س} - ٤\,\text{قا}^{٢}\text{س}$	$\text{د}^{/٣}(٠) = ٢$
$\text{د}^{/٤}(\text{س}) = ٨\,\text{طا س}\,(٣\,\text{قا}^{٤}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س})$	$\text{د}^{/٤}(٠) = ٠$
$\text{د}^{/٥}(\text{س}) = ١٢٠\,\text{قا}^{٦}\text{س} - ١٢٠\,\text{قا}^{٤}\text{س} + ١٦\,\text{قا}^{٢}\text{س}$	$\text{د}^{/٥}(٠) = ١٦$
....	....

$$\therefore \text{طا س} = ٠ + \frac{١}{|\underline{١}}\,\text{س} + ٠ + \frac{٢}{|\underline{٣}}\,\text{س}^{٣} + ٠ + \frac{١٦}{|\underline{٥}}\,\text{س}^{٥} + \cdots$$

$$= \text{س} + \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣} + \frac{٢}{١٥}\,\text{س}^{٥} + \cdots$$

متسلسلة مكلورين للدالة : د (س) = $\text{قا}^{٢}$ س

نكون الجدول التالى :

د (س) = $\text{قا}^{٢}$ س	د (٠) = ١
$\text{د}^{/}$ (س) = ٢ $\text{قا}^{٢}$ س طا س	$\text{د}^{/}$ (٠) = ٠
$\text{د}^{//}$ (س) = ٦ $\text{قا}^{٤}$ س − ٤ $\text{قا}^{٢}$ س	$\text{د}^{//}$ (٠) = ٢
$\text{د}^{///}$ (س) = ٨ طا س (٣ $\text{قا}^{٤}$ س − $\text{قا}^{٢}$ س)	$\text{د}^{///}$ (٠) = ٠
$\text{د}^{(٤)}$ (س) = ١٢٠ $\text{قا}^{٦}$ س − ١٢٠ $\text{قا}^{٤}$ س + ١٦ $\text{قا}^{٢}$ س	$\text{د}^{(٤)}$ (٠) = ١٦
$\text{د}^{(٥)}$ (س) = طا س (١٢٠ $\text{قا}^{٦}$ س − ١٢٠ $\text{قا}^{٤}$ س + ١٦ $\text{قا}^{٢}$ س)	$\text{د}^{(٥)}$ (٠) = ٠
....	....

∴ $\text{قا}^{٢}$ س = ١ + ٠ + $\frac{٢}{\lfloor ٢}$ $\text{س}^{٢}$ + ٠ + $\frac{١٦}{\lfloor ٤}$ $\text{س}^{٤}$ + ...

= ١ + $\text{س}^{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$ $\text{س}^{٤}$ + ...

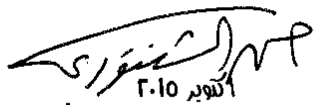
∴ ∫ $\text{قا}^{٢}$ س ءس = س + $\frac{١}{٣}$ $\text{س}^{٣}$ + $\frac{٢}{١٥}$ $\text{س}^{٥}$ + ... + ث

= طا س + ث

ملاحظة :

استخدام متسلسلة مكلورين لبرهان اشتقاق الدالة : طا س

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ طا س = ١ + $\text{س}^{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$ $\text{س}^{٤}$ + ... = $\text{قا}^{٢}$ س



نتائج هامة :

(١) ∫ حا (أ س + ب) ءس = − $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث

(٢) ∫ حتا (أ س + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث

(٣) ∫ $\text{قا}^{٢}$ (أ س + ب) ءس = − $\frac{١}{أ}$ طا (أ س + ب) + ث

البرهان :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (− $\frac{١}{أ}$ حتا (أ س + ب) + ث) =

− $\frac{١}{أ}$ × أ × − حا (أ س + ب) = حا (أ س + ب)

∴ العلاقة صحيحة

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{١}{أ}$ حا (أ س + ب) + ث) =

$\frac{١}{أ}$ × أ × حتا (أ س + ب) = حتا (أ س + ب)

∴ العلاقة صحيحة

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{١}{أ}$ طا (أ س + ب) + ث) =

$\frac{١}{أ}$ × أ × $\text{قا}^{٢}$ (أ س + ب) = $\text{قا}^{٢}$ (أ س + ب)

∴ العلاقة صحيحة

برهان آخر

(١) بوضع : ع = أ س + ب ∴ ءع = أ ءس

∴ ءس = $\frac{١}{أ}$ ءع

$$\therefore \int \text{حا}\,(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})\ \text{ء}\text{س} = \int \text{حا}\,\text{ع} \times \frac{1}{\text{أ}}\ \text{ء}\text{ع}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}} \times (-\,\text{حتا}\,\text{ع}) + \text{ث}$$

$$= -\frac{1}{\text{أ}}\ \text{حتا}\,(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}) + \text{ث}$$

بالمثل يمكن برهان كل من : **(٢)** ، **(٣)**

تذكر ما يلى :

(١) $\text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س} = 1$

(٢) $\text{طا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$

(٣) $\text{حا}\,\text{س}\ \text{حتا}\,\text{س} = \frac{1}{2}\ \text{حا}\,2\text{س}$

(٤) $\text{حتا}^2\text{س} - \text{حا}^2\text{س} = \text{حتا}\,2\text{س}$

(٥) $\text{حا}^2\text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \text{حتا}\,2\text{س}$

(٦) $\text{حتا}^2\text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \text{حتا}\,2\text{س}$

إجابة مسألة رقم (٦) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \left(\text{حتا}\,\text{س}\ \text{حتا}\,\frac{\pi}{4} - \text{حا}\,\text{س}\ \text{حا}\,\frac{\pi}{4}\right) \text{ء}\text{س} =$$

$$\int \text{حتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ء}\text{س} = \text{حا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) + \text{ث}$$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

إجابة مسألة رقم (٧) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{1 + \text{حا}\,\text{س}}\ \text{ء}\text{س} = \int \frac{1 - \text{حا}^2\text{س}}{1 + \text{حا}\,\text{س}}\ \text{ء}\text{س} =$$

$$\int \frac{(1 - \text{حا}\,\text{س})(1 + \text{حا}\,\text{س})}{1 + \text{حا}\,\text{س}}\ \text{ء}\text{س} = \int (1 - \text{حا}\,\text{س})\ \text{ء}\text{س}$$

$$= \text{س} - \text{حا}\,\text{س} + \text{ث}$$

إجابة مسألة رقم (٨) تمارين (٣ − ٦) صفحة (١١١)

$$\int 2\ \text{طا}\,\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{ء}\text{س} = 2\int \text{طا}\,\text{س}\ (\text{قا}^2\text{س})\ \text{ء}\text{س}$$

$$\text{،}\ \because \text{د}(\text{س}) = \text{طا}\,\text{س}\ \text{،}\ \text{د}'(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$$

$$\therefore 2\int \text{طا}\,\text{س}\ (\text{قا}^2\text{س})\ \text{ء}\text{س} = 2 \times \frac{1}{2}\ \text{طا}^2\text{س} + \text{ث}$$

$$= \text{طا}^2\text{س} + \text{ث}$$

$$\int 2\ \text{طا}\,\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{ء}\text{س} = \int 2 \times \frac{\text{حا}\,\text{س}}{\text{حتا}\,\text{س}} \times \frac{1}{\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{ء}\text{س} =$$

$$2\int \text{حا}\,\text{س}\ \text{حتا}^{-3}\text{س}\ \text{ء}\text{س}$$

$$\because \text{د}(\text{س}) = \text{حتا}\,\text{س}\ \text{،}\ \text{د}'(\text{س}) = -\,\text{حا}\,\text{س}$$

$$\therefore -2\int \text{حتا}^{-3}\text{س}\ (-\,\text{حا}\,\text{س})\ \text{ء}\text{س} =$$

$$-2 \times -\frac{1}{2}\ \text{حتا}^{-2}\text{س} + \text{ث} = \text{قا}^2\text{س} + \text{ث}$$

و كلا الحلان صحيحان لأن :

$\frac{ء}{ءس}$ (طا^{٢} س + ث) = ٢ طا س قا^{٢} س ،

$\frac{ء}{ءس}$ (قا^{٢} س + ث) = ٢ قا س طا س قا س

= ٢ طا س قا^{٢} س

لاحظ يمكن الوصول للحل الثانى كما يلى :

$\int$ ٢ طا س قا^{٢} س ء س = ٢ $\int$ قا س (قا س طا س) ء س

، ∵ د (س) = قا س ، د$^{/}$ (س) = قا س طا س

∴ ٢ $\int$ قا س (قا س طا س) ء س = ٢ × $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} س + ث

= قا^{٢} س + ث

ملاحظة :

(١) $\int$ قتا^{٢} س ء س = − ظتا س + ث

(٢) $\int$ قا س طا س ء س = قا س + ث

(٣) $\int$ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

إجابة مسألة رقم (٤٨) تمارين (٣ – ٦) صفحة (١١١)

$\int$ حتا ٢ س ء س = $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + ث

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

إجابة مسألة رقم (٤٩) تمارين (٣ – ٦) صفحة (١١١)

$\int$ (١ + حتا ٢ س) ء س = س + $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + ث

إجابة مسألة رقم (٥٠) تمارين (٣ – ٦) صفحة (١١١)

$\int$ (٤ − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س) ء س =

$\int$ ($\frac{٧}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س) ء س = $\frac{٧}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ث

إجابة مسألة رقم (٢٢) تمارين عامة صفحة (١١٥)

$\int$ (حا^{٢} س + حتا^{٢} س + ٢ حا س حتا س) ء س =

$\int$ (١ + حا ٢ س) ء س = س − $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + ث

إجابة مسألة رقم (٨) فقرة (حـ) اختبار تراكمى صفحة (١١٧)

$\int$ (١ + حتا س)^{٢} ء س = $\int$ (١ + ٢ حتا س + حتا^{٢} س) ء س

= $\int$ (١ + ٢ حتا س + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س) ء س

= $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ + ٢ حتا س + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س) ء س

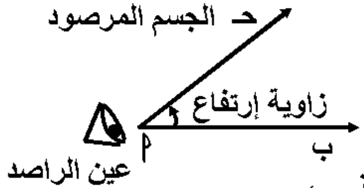
= $\frac{٣}{٢}$ س + ٢ حا س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ث

إجابة السؤال الرابع فقرة ثانياً (أ) صفحة (١٦١)

$\int$ حا^{٥} س حتا س ء س = $\frac{١}{٦}$ حا^{٦} س + ث

تطبيقات على حل المثلث
زوايا الارتفاع و الانخفاض

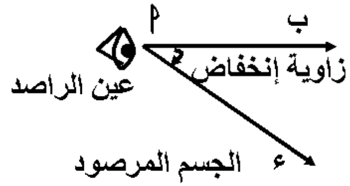
زاوية الارتفاع :



إذا فرض أن الراصد عند أ ، الجسم المرصود عند حـ أعلى مستوى نظر الراصد الأفقى

فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ الأفقى ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى زاوية ارتفاع الجسم المرصود حـ عن المستوى الأفقى لنظر الراصد أ

زاوية الانخفاض :

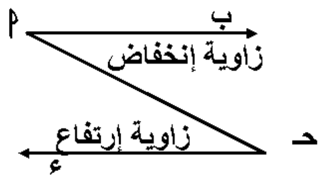


إذا فرض أن الراصد عند أ ، الجسم المرصود عند ء أسفل مستوى نظر الراصد الأفقى

فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ الأفقى ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود تسمى زاوية انخفاض الجسم المرصود حـ عن المستوى الأفقى لنظر الراصد أ

ملاحظات :

(١) فى الشكل المقابل :

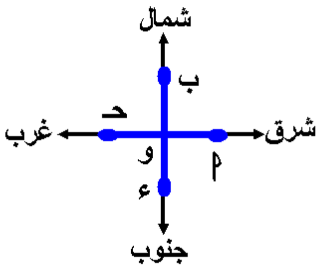


∠ ء حـ أ هى زاوية ارتفاع الجسم عند أ بالنسبة للشخص عند حـ

، ∠ ب أ حـ هى زاوية انخفاض الشخص عند حـ بالنسبة عند للجسم عند أ

و فى هذه الحالة : ق (∠ ء حـ أ) = ق (∠ ب أ حـ) بالتبادل

(٢) لتحديد نقطة ما بالنسبة للجهات الأصلية من نقطة معلومة نجد من الأشكال التالية أن :

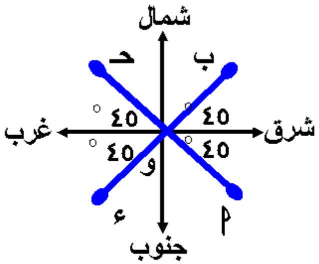


أ تقع شرق و

، ب تقع شمال و

، حـ تقع غرب و

، ء تقع جنوب و

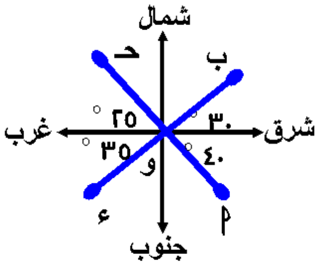


أ تقع فى إتجاه الجنوب الشرقى من و

، ب تقع فى إتجاه الشمال الشرقى من و

، حـ تقع فى إتجاه الشمال الغربى من و

، ء تقع فى إتجاه الجنوب الغربى من و



أ تقع فى إتجاه °٤٠ جنوب شرق و أو °٥٠ شرق جنوب و

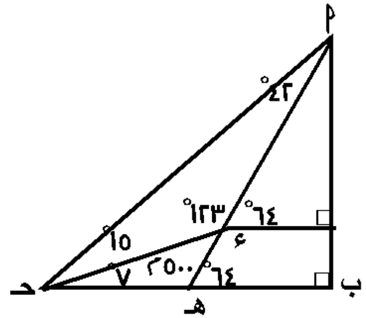
، ب تقع فى °٣٠ شمال شرق و أو °٦٠ شرق شمال و

، حـ تقع فى إتجاه °٢٥ شمال غرب و أو °٦٥ غرب شمال و

، ء تقع فى إتجاه °٣٥ جنوب غرب و أو °٥٥ غرب جنوب و

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

اجابة حاول أن تحل (٦) صفحة (١٢٥)



من هندسة الشكل :

ق (∠ أ حـ ء) = ٢٢° − ٧° = ١٥° ،

ق (∠ ب هـ أ) = ٦٤° بالتبادل ،

ق (∠ حـ أ ء) = ٦٤° − ٢٢° = ٤٢° ،

ق (∠ أ ء حـ) = ١٨٠° − (١٥° + ٤٢°)

= ١٢٣°

من Δ أ حـ ء :

$$\frac{\text{٥٠٠}}{\text{حا ٤٢°}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حا ١٢٣°}}$$

و منها : $\text{أ حـ} = \frac{\text{٥٠٠} \times \text{حا ١٢٣°}}{\text{حا ٤٢°}} = \text{٦٢٧ م}$

من Δ أ ب حـ :

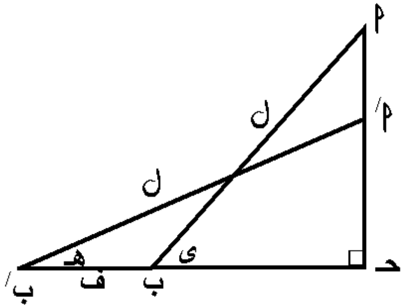
$$\frac{\text{١٤٦٤}}{\text{حا ٩٠°}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حا ٢٢°}}$$

و منها : $\text{أ ب} = \frac{\text{٦٢٧} \times \text{حا ٢٢°}}{\text{حا ٩٠°}} = \text{٢٣٥ م}$

∴ ارتفاع التل = ٢٣٥ م تقريباً

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

اجابة حاول أن تحل (٨) صفحة (١٢٧)



من Δ أ ب حـ :

$$\text{حتا ى} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ل}}$$

من Δ أ/ ب/ حـ :

$$\text{حتا هـ} = \frac{\text{ب/ حـ}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{حتا هـ} - \text{حتا ى} = \frac{\text{ب/ حـ}}{\text{ل}} - \frac{\text{ب حـ}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب/ حـ} - \text{ب حـ}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{\text{ف}}{\text{حتا هـ} - \text{حتا ى}}$$

و عندما : ف = ٤٠ سم ، ق (∠ هـ) = ٣٠° ، ق (∠ ى) = ٤٠°

فإن : ل " طول السلم " $= \frac{\text{٤٠}}{\text{حتا ٣٠°} - \text{حتا ٤٠°}} = \text{٤٠٠ م}$

ملاحظة :

∵ ٠ < هـ < ٩٠° ، ٠ < ى < ٩٠°

، ق (∠ هـ) < ق (∠ ى)

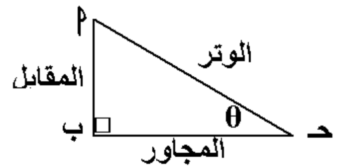
∴ حتا هـ > حتا ى

و بالتالى : (حتا هـ − حتا ى) تكون موجبة

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

تذكر ما يلى :

(١) فى أى Δ أ ب حـ قائم فى ب يكون :



حا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

حتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

طا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

(٢) المتطابقة المثلثية الأساسية :

حا θ × قتا θ = ١ ، قتا θ = $\frac{1}{\text{حا } \theta}$

، حتا θ × قا θ = ١ ، قا θ = $\frac{1}{\text{حتا } \theta}$

، طا θ × طتا θ = ١ ، طتا θ = $\frac{1}{\text{طا } \theta}$

(٣) التعبير عن طا θ ، طتا θ بدلالة حا θ ، حتا θ :

طا θ = $\frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$ ، طتا θ = $\frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$

(٤) الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين :

[١] حا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = حتا θ ، قتا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = قا θ

[٢] حتا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = حا θ ، قا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = قتا θ

[٣] طا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = طتا θ ، طتا $(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ = طا θ

(٥) الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $-\theta$:

[١] حا $(-\theta)$ = − حا θ ، قتا $(-\theta)$ = − قتا θ

[٢] حتا $(-\theta)$ = حتا θ ، قا $(-\theta)$ = قا θ

[٣] طا $(-\theta)$ = − طا θ ، طتا $(-\theta)$ = − طتا θ

(٦) الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين :

[١] حا $(\pi - \theta)$ = حا θ ، قتا $(\pi - \theta)$ = قتا θ

[٢] حتا $(\pi - \theta)$ = − حتا θ ، قا $(\pi - \theta)$ = − قا θ

[٣] طا $(\pi - \theta)$ = − طا θ ، طتا $(\pi - \theta)$ = − طتا θ

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

(٧) متطابقات فيثاغورث :

[١] حتا$^2\theta$ + حا$^2\theta$ = ١ و منها :

حا$^2\theta$ = ١ − حتا$^2\theta$ ، حتا$^2\theta$ = ١ − حا$^2\theta$

[٢] ١ + طا$^2\theta$ = قا$^2\theta$ و منها :

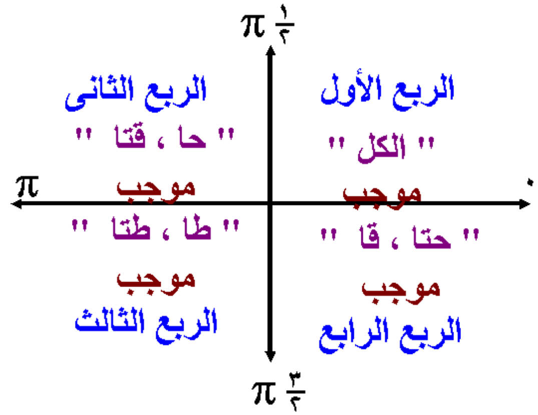
طا$^2\theta$ = قا$^2\theta$ − ١ ، قا$^2\theta$ − طا$^2\theta$ = ١

[٣] ١ + طتا$^2\theta$ = قتا$^2\theta$ و منها :

طتا$^2\theta$ = قتا$^2\theta$ − ١ ، قتا$^2\theta$ − طتا$^2\theta$ = ١

(٨) اشارات الدوال المثلثية :

الربع الذى يقع فيه الضلع النهائى للزاوية	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية: حا ، قتا	حتا ، قا	طا ، طتا
الأول	$]0 ، \frac{1}{2}\pi[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{1}{2}\pi ، \pi[$	+	−	−
الثالث	$]\pi ، \frac{3}{2}\pi[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{3}{2}\pi ، 2\pi[$	−	+	−



(٩) الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

س°	٣٠°	٤٥°	٦٠°
$\theta^{ء}$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
إحداثيات النقطة التى يعينها ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة	$(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2})$
حا θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
حتا θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
طا θ	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ملاحظات

(١) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(٢) يمكن استنتاج قيم الدوال (قتا θ ، قا θ ، طتا θ) من قيم الدوال (حا θ ، حتا θ ، طا θ) بكتابة معكوساتها الضربية على الترتيب

(٣) قيم حا θ $\in [-1 ، 1]$ ، قيم حتا θ $\in [-1 ، 1]$

أكتوبر ٢٠١٥

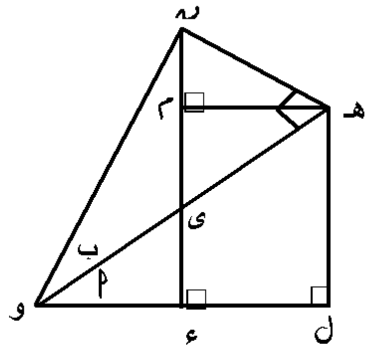
دالة الجيب لمجموع وفرق قياسى زاويتين :

إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين فإن :

(١) حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

(٢) حا (أ − ب) = حا أ حتا ب − حتا أ حا ب

البرهان :



فى الشكل المقابل :

ق (∠ ن ء و) = ق (∠ ن هـ و) = ٩٠° ،

∴ الشكل ن هـ ء و رباعى دائرى

∴ ق (∠ ء و هـ) = ق (∠ هـ ن ء)

بفرض أن : ق (∠ ء و هـ) = أ ،

ق (∠ هـ و ن) ب فيكون :

حا (أ + ب) = $\frac{\text{ن ء}}{\text{ن و}} = \frac{\text{م ء + ن م}}{\text{ن و}}$

$= \frac{\text{م ء}}{\text{ن و}} + \frac{\text{ن م}}{\text{ن و}} = \frac{\text{هـ ل}}{\text{ن و}} + \frac{\text{ن م}}{\text{ن و}}$

$= \frac{\text{هـ ل}}{\text{و هـ}} \times \frac{\text{و هـ}}{\text{ن و}} + \frac{\text{ن م}}{\text{ن هـ}} \times \frac{\text{ن هـ}}{\text{ن و}}$

= حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

، بوضع (− ب) بدلاً من ب ينتج :

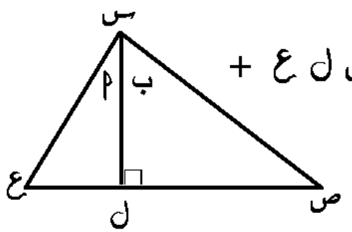
حا [أ + (− ب)] = حا أ حتا (− ب) + حتا أ حا (− ب)

∵ ، حتا (− ب) = حتا ب ، حا (− ب) = − حا ب

∴ حا (أ − ب) = حا أ حتا ب − حتا أ حا ب

برهان آخر

من الشكل المقابل :



∵ مساحة Δ س ص ع = مساحة Δ س ل ع +
مساحة Δ س ص ل

∴ $\frac{١}{٢}$ × س ع × س ص
× حا (أ + ب) = $\frac{١}{٢}$ × س ع × س ل × حا أ +
$\frac{١}{٢}$ × س ص × س ل × حا ب

بالقسمة على $\frac{١}{٢}$ × س ع × س ص ينتج :

حا (أ + ب) = $\frac{\text{س ل}}{\text{س ص}}$ × حا أ + $\frac{\text{س ل}}{\text{س ع}}$ × حا ب

∴ حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا ب حا أ

برهان ثالث باستخدام الأعداد المركبة :

نعلم أن :

حتا أ = $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\text{ت أ}}$ + هـ$^{-\text{ت أ}}$) ، حا أ = − $\frac{١}{٢}$ ت (هـ$^{\text{ت أ}}$ − هـ$^{-\text{ت أ}}$)

حتا ب = $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\text{ت ب}}$ + هـ$^{-\text{ت ب}}$) ، حا ب = − $\frac{١}{٢}$ ت (هـ$^{\text{ت ب}}$ − هـ$^{-\text{ت ب}}$)

(١) حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

الطرف الأيسر = − $\frac{١}{٢}$ ت (هـ$^{\text{ت أ}}$ − هـ$^{-\text{ت أ}}$) × $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\text{ت ب}}$ + هـ$^{-\text{ت ب}}$)

+ $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\text{ت أ}}$ + هـ$^{-\text{ت أ}}$) × − $\frac{١}{٢}$ ت (هـ$^{\text{ت ب}}$ − هـ$^{-\text{ت ب}}$)

$= -\frac{1}{4}\text{ت}\,(\text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} + \text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}} - \text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} - \text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}}$

$+ \text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} - \text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}} + \text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} - \text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}})$

$= -\frac{1}{4}\text{ت}\,(٢\,\text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} - ٢\,\text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}})$

$= -\frac{1}{2}\text{ت}\,(\text{هـ}^{\text{تأ}}\text{هـ}^{\text{تب}} - \text{هـ}^{-\text{تأ}}\text{هـ}^{-\text{تب}})$

$= -\frac{1}{2}\text{ت}\,(\text{هـ}^{\text{ت(أ+ب)}} - \text{هـ}^{-\text{ت(أ+ب)}})$

= حا (أ + ب) = الطرف الأيمن

بالمثل : حا (أ – ب) = حا أ حتا ب – حتا أ حا ب

دالة جيب التمام لمجموع وفرق قياسى زاويتين :

إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين فإن :

(١) حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب – حا أ حا ب

(٢) حتا (أ – ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

البرهان :

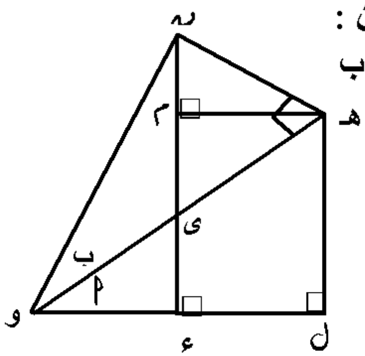
من الشكل السابق يمكن إثبات أن :

حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب – حا أ حا ب

ثم بوضع (– ب) بدلاً من ب يمكن استنتاج أن :

حتا (أ – ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

كما يلى :



فى الشكل المقابل :

ق (∠ ن ء و) =

، ق (∠ ن هـ و) = ٩٠° ،

∴ الشكل ن هـ ء و رباعى دائرى

∴ ق (∠ ء و هـ) = ق (∠ هـ ن ء)

بفرض أن : ق (∠ ء و هـ) = أ ، ق (∠ هـ و ن) = ب فيكون :

$\text{حتا (أ + ب)} = \frac{\text{ء و}}{\text{ن و}} = \frac{\text{ل و} - \text{ل ء}}{\text{ن و}}$

$= \frac{\text{ل و}}{\text{ن و}} - \frac{\text{ل ء}}{\text{ن و}} = \frac{\text{ل و}}{\text{ن و}} - \frac{\text{هـ م}}{\text{ن و}}$

$= \frac{\text{ل و}}{\text{هـ و}} \times \frac{\text{هـ و}}{\text{ن و}} - \frac{\text{هـ م}}{\text{ن هـ}} \times \frac{\text{ن هـ}}{\text{ن و}}$

= حتا أ حتا ب – حا أ حا ب

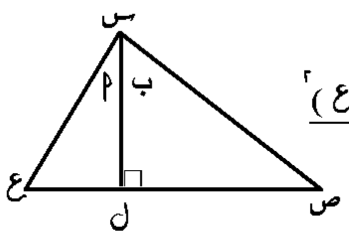
، بوضع (– ب) بدلاً من ب ينتج :

حتا [أ + (– ب)] = حتا أ حتا (– ب) + حا أ حا (– ب)

∴ حتا (أ – ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

برهان آخر

من الشكل المقابل :



$\text{حتا س} = \frac{(\text{س ص})^2 + (\text{س ع})^2 - (\text{ص ع})^2}{٢\,(\text{س ص})\,(\text{س ع})}$

$\therefore \text{حتا (أ + ب)} = \frac{(\text{س ص})^2 + (\text{س ع})^2 - [\,(\text{ل ص}) + (\text{ل ع})\,]^2}{٢\,(\text{س ص})\,(\text{س ع})}$

$= \frac{(\text{س ص})^2 + (\text{س ع})^2 - (\text{ل ص})^2 - ٢\,(\text{ل ص})\,(\text{ل ع}) - (\text{ل ع})^2}{٢\,(\text{س ص})\,(\text{س ع})}$

$$= \frac{[(\text{س ص})^2 - (\text{ل ص})^2] + [(\text{س ع})^2 - (\text{ل ع})^2] - 2(\text{ل ص})(\text{ل ع})}{2(\text{س ص})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{(\text{س ل})^2 + (\text{س ل})^2 - 2(\text{ل ص})(\text{ل ع})}{2(\text{س ص})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{2(\text{س ل})^2 - 2(\text{ل ص})(\text{ل ع})}{2(\text{س ص})(\text{س ع})}$$ بالقسمة ٢ ينتج :

$$\therefore \text{حتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{س ل}}{\text{س ع}} \times \frac{\text{س ل}}{\text{س ص}} - \frac{\text{ل ع}}{\text{س ع}} \times \frac{\text{ل ص}}{\text{س ص}}$$

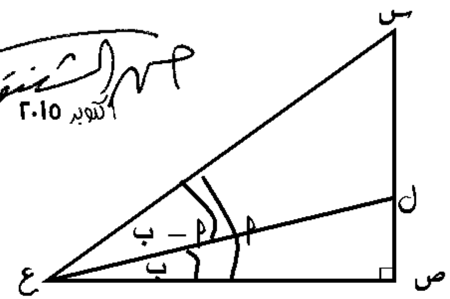
∴ حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب

كما يمكن إثبات أن :

حتا (أ − ب) =

حتا أ حتا ب + حا ب حا أ

كما يلي :



(أ) في الشكل المقابل : من Δ س ل ع

$$\text{حتا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{(\text{ل ع})^2 + (\text{س ع})^2 - (\text{س ل})^2}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{(\text{ل ع})^2 + (\text{س ع})^2 - [(\text{س ص}) - (\text{ل ص})]^2}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{(\text{ل ع})^2 + (\text{س ع})^2 - (\text{س ص})^2 + 2(\text{س ص})(\text{ل ص}) - (\text{ل ص})^2}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

أحمد الشنتوري
أكتوبر ٢٠١٥

$$= \frac{[(\text{ل ع})^2 - (\text{ل ص})^2] + [(\text{س ع})^2 - (\text{س ص})^2] + 2(\text{س ص})(\text{ل ص})}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

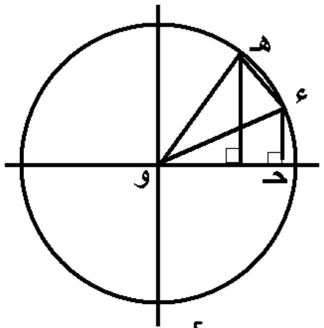
$$= \frac{(\text{ص ع})^2 + (\text{ص ع})^2 + 2(\text{س ص})(\text{ل ص})}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{2(\text{ص ع})^2 + 2(\text{س ص})(\text{ل ص})}{2(\text{ل ع})(\text{س ع})} = \frac{(\text{ص ع})^2 + (\text{س ص})(\text{ل ص})}{(\text{ل ع})(\text{س ع})}$$

$$= \frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}} \times \frac{\text{ص ع}}{\text{ل ع}} + \frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} \times \frac{\text{ل ص}}{\text{ل ع}}$$

= حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

(٢) في الشكل المقابل : و دائرة وحدة ،



بفرض أن : ق (∠ حـ و ء) = ب ،

ق (∠ حـ و هـ) = أ

∴ ق (∠ هـ و ء) = أ − ب

∴ ء = (حتا ب ، حا ب) ،

هـ = (حتا أ ، حا أ)

$\therefore (\text{ء هـ})^2 = (\text{حتا أ} - \text{حتا ب})^2 + (\text{حا أ} - \text{حا ب})^2$

$= (\text{حتا أ})^2 - 2\ \text{حتا أ حتا ب} + (\text{حتا ب})^2$

$+ (\text{حا أ})^2 - 2\ \text{حا أ حا ب} + (\text{حا ب})^2$

$= [(\text{حتا أ})^2 + (\text{حا أ})^2] + [(\text{حتا ب})^2 + (\text{حا ب})^2]$

− ٢ حتا أ حتا ب − ٢ حا أ حا ب

= ١ + ١ − ٢ حتا أ حتا ب − ٢ حا أ حا ب

= ٢ − ٢ حتا أ حتا ب − ٢ حا أ حا ب   (١)

من Δ ء و هـ : حتا (أ − ب) = $\dfrac{(\text{و ء})^{2} + (\text{و هـ})^{2} - (\text{ء هـ})^{2}}{2\,(\text{و ء})\,(\text{و هـ})}$

و بالتعويض من (١) ينتج :

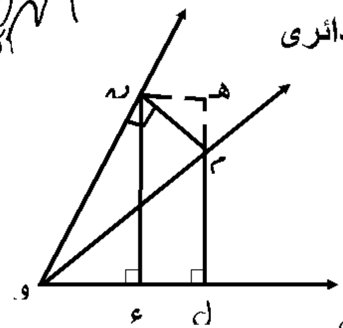
حتا (أ − ب) = $\dfrac{1 + 1 - 2 + 2\,\text{حتا أ حتا ب} + 2\,\text{حا أ حا ب}}{2 \times 1 \times 1}$

= $\dfrac{2 - 2 + 2\,\text{حتا أ حتا ب} + 2\,\text{حا أ حا ب}}{2}$

= $\dfrac{2\,(\text{حتا أ حتا ب} + \text{حا أ حا ب})}{2}$

= حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

(٣) فى الشكل المقابل : الشكل م ل و ن رباعى دائرى



و بفرض أن : ق (∠ ن و ل) = أ

∴ ق (∠ ن م هـ) = أ

، ق (∠ ن و م) = ب

، ق (∠ ل و م) = أ − ب

∴ حتا (أ − ب) = $\dfrac{\text{و ل}}{\text{و م}}$ = $\dfrac{\text{و ء} + \text{ء ل}}{\text{و م}}$

، ∵ ء ل = ن هـ

∴ حتا (أ − ب) = $\dfrac{\text{و ء} + \text{ن هـ}}{\text{و م}}$ = $\dfrac{\text{و ء}}{\text{و م}}$ + $\dfrac{\text{ن هـ}}{\text{و م}}$

= ($\dfrac{\text{و ء}}{\text{و ن}} \times \dfrac{\text{و ن}}{\text{و م}}$) + ($\dfrac{\text{ن هـ}}{\text{م ن}} \times \dfrac{\text{م ن}}{\text{و م}}$)

∴ حتا (أ − ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

برهان آخر باستخدام الأعداد المركبة :

حتا (أ − ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

الطرف الأيسر = $\frac{1}{2}$ ($\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}$) × $\frac{1}{2}$ ($\text{هـ}^{\text{ت ب}} + \text{هـ}^{-\text{ت ب}}$)

− $\frac{1}{2}$ ت ($\text{هـ}^{\text{ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}$) × − $\frac{1}{2}$ ت ($\text{هـ}^{\text{ت ب}} - \text{هـ}^{-\text{ت ب}}$)

= $\frac{1}{4}$ ت ($\text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}} + \text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}}$

− $\text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}} + \text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}}$)

= − $\frac{1}{4}$ ت (٢ $\text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}}$ − ٢ $\text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}}$)

= − $\frac{1}{2}$ ت ($\text{هـ}^{\text{ت أ}}\text{هـ}^{-\text{ت ب}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\text{هـ}^{\text{ت ب}}$)

= − $\frac{1}{2}$ ت ($\text{هـ}^{\text{ت}(\text{أ}-\text{ب})} - \text{هـ}^{-\text{ت}(\text{أ}-\text{ب})}$)

= حتا (أ − ب) = الطرف الأيمن

بالمثل : حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب

دالة الظل لمجموع وفرق قياسى زاويتين :

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{حا}\,(\text{أ} + \text{ب})}{\text{حتا}\,(\text{أ} + \text{ب})}$ = $\dfrac{\text{حا أ حتا ب} + \text{حتا أ حا ب}}{\text{حتا أ حتا ب} - \text{حا أ حا ب}}$

و بقسمة كل من البسط و المقام على حتا أ حا ب ≠ ٠ ينتج :

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}}$

، بوضع (– ب) بدلاً من ب و حيث طا (– ب) = – طا ب فينتج :

$$\text{طا}\,(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{1 + \text{طا أ طا ب}}$$

حيث : أ ، ب $\neq \frac{\pi}{2}(2\text{ن}+1)$ ، ن $\in$ ص

برهان آخر باستخدام الأعداد المركبة :

(5) $$\text{طا}\,(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{1 - \text{طا أ طا ب}}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{\dfrac{-\text{ت}\left(\text{ه}^{\text{ت أ}} - \text{ه}^{-\text{ت أ}}\right)}{\text{ه}^{\text{ت أ}} + \text{ه}^{-\text{ت أ}}} + \dfrac{-\text{ت}\left(\text{ه}^{\text{ت ب}} - \text{ه}^{-\text{ت ب}}\right)}{\text{ه}^{\text{ت ب}} + \text{ه}^{-\text{ت ب}}}}{1 - \dfrac{-\text{ت}\left(\text{ه}^{\text{ت أ}} - \text{ه}^{-\text{ت أ}}\right)}{\text{ه}^{\text{ت أ}} + \text{ه}^{-\text{ت أ}}} \times \dfrac{-\text{ت}\left(\text{ه}^{\text{ت ب}} - \text{ه}^{-\text{ت ب}}\right)}{\text{ه}^{\text{ت ب}} + \text{ه}^{-\text{ت ب}}}}$$

و بالفك و الاختصار ينتج :

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{-\text{ت}\left(\text{ه}^{\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})} - \text{ه}^{-\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})}\right)}{\text{ه}^{\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})} + \text{ه}^{-\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})}}$$

$= \text{طا}\,(\text{أ} + \text{ب}) =$ الطرف الأيمن

بالمثل : $$\text{طا}\,(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{1 + \text{طا أ طا ب}}$$

اجابة حاول أن تحل (٣) صفحة (١٣١)

$\because$ أ ب ح مثلث

، حتا أ $= -\frac{3}{5}$ $\therefore$ $\angle$ أ منفرجة ، حا أ $= \frac{4}{5}$

، $\angle$ ب حادة ، $\because$ حا ب $= \frac{5}{13}$ $\therefore$ حتا ب $= \frac{12}{13}$

، ق($\angle$أ) + ق($\angle$ب) + ق($\angle$ح) = 180°

$\therefore$ 180° – ق($\angle$ح) = ق($\angle$أ) + ق($\angle$ب)

$\therefore$ حا (180° – ح) = حا (أ + ب)

$\therefore$ حا ح = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{13} = \frac{33}{65}$

اجابة حاول أن تحل (٤) صفحة (١٣١)

ت $= \frac{3}{2}$ حتا ($330^\circ - 45^\circ$ ن) ، و بعد ثانية واحدة يكون :

ت $= \frac{3}{2}$ حتا ($330^\circ - 45^\circ$)

$= \frac{3}{2}$ (حتا 330° حتا 45° + حا 330° حا 45°)

$= \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{3}{8}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

أكتوبر ٢٠١٥

اجابة مسألة (١٢) تمارين (٤ – ٢) صفحة (١٣٤)

المقدار = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب – حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

= ٢ حا أ حا ب

اجابة مسألة (١٧) تمارين (٤ – ٢) صفحة (١٣٤)

$$\frac{\text{ظا}\,\theta + \text{ظا}\,٤٥^\circ}{١ - \text{ظا}\,\theta\ \text{ظا}\,٤٥^\circ} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ظا}\,\theta + ١}{١ - \text{ظا}\,\theta} = \frac{٣}{٢}$$ و منها :

$٢\,\text{ظا}\,\theta + ٢ = ٣ - ٣\,\text{ظا}\,\theta$ و منها :

$٥\,\text{ظا}\,\theta = ١ \quad \therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{١}{٥}$

اجابة مسألة (١٨) تمارين (٤ – ٢) صفحة (١٣٤)

$$\frac{\text{حتا أ حتا ب} - \text{حا أ حا ب}}{\text{حتا أ حتا ب} + \text{حا أ حا ب}} = \frac{١}{٣}$$

∴ ٣ حتا أ حتا ب – ٣ حا أ حا ب = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

∴ ٢ حتا أ حتا ب = ٤ حا أ حا ب

∴ حتا أ حتا ب = ٢ حا أ حا ب ، بالقسمة على حتا أ حا ب ينتج :

طتا ب = ٢ ظا أ ، ∵ ظا أ = $\frac{٢}{٥}$

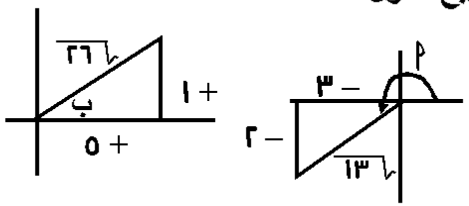
∴ طتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، طا ب = $\frac{٥}{٤}$

$$\text{، ظا}\,(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٥}{٤}}{١ + \frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٤}} = -\frac{١٧}{٣٠}$$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

اجابة مسألة (٢٥) تمارين (٤ – ٢) صفحة (١٣٤)

أ تقع فى الربع الثالث ، ب تقع فى الربع الأول



$$\text{ظا}\,(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = ١ > ٠$$

$$\text{حتا}\,(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{-٣}{\sqrt{١٣}} \times \frac{٥}{\sqrt{٢٦}} - \frac{-٢}{\sqrt{١٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٢٦}}$$

$$= -\frac{\sqrt{٢}}{٢} < ٠$$

، ∵ ظا (أ + ب) > ٠ ، حتا (أ + ب) < ٠

∴ (أ + ب) تقع فى الربع الثالث

$$\text{، ق}\,\angle(\text{أ} + \text{ب}) = \pi + \frac{١}{٤}\pi = \frac{٥}{٤}\pi$$

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

دالة الظل لضعف قياس زاوية :

إذا كان : أ قياس زاوية معلومة فإن :

حا ٢أ = ٢ حا أ حتا أ   لكل أ ∈ ح

البرهان :

∵ حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب   بوضع : ب = أ

∴ حا (أ + أ) = حا أ حتا أ + حتا أ حا أ

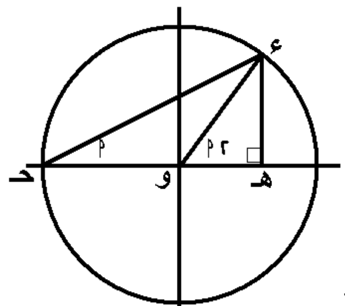
∴ حا ٢أ = ٢ حا أ حتا أ

برهان آخر

فى الشكل المقابل : و دائرة وحدة ،

بفرض أن : ء هـ = ص ،

و هـ = س ، حـ هـ = س + ١



∴ (حـ ء)^{2} = (س + ١)^{2} + ص^{2}

= س^{2} + ٢ س + ١ + ص^{2}

= (س^{2} + ص^{2}) + ٢ س + ١

= ١ + ٢ س + ١ = ٢ س + ٢ = ٢ (س + ١)

∴ حـ ء = $\sqrt{\text{٢ (س + ١)}}$

∴ ٢ حا أ حتا أ = ٢ × $\dfrac{\text{ص}}{\sqrt{\text{٢ (س + ١)}}}$ × $\dfrac{\text{س + ١}}{\sqrt{\text{٢ (س + ١)}}}$

= ص = حا ٢أ

برهان ثالث باستخدام الأعداد المركبة :

حا ٢أ = ٢ حا أ حتا أ

الطرف الأيسر = ٢ × − $\frac{1}{2}$ ت (هـ$^{\text{ت أ}}$ − هـ$^{-\text{ت أ}}$) × $\frac{1}{2}$ (هـ$^{\text{ت أ}}$ + هـ$^{-\text{ت أ}}$)

= − $\frac{1}{2}$ ت (هـ$^{\text{٢ت أ}}$ − هـ$^{-\text{٢ت أ}}$)

= حا ٢أ = الطرف الأيمن

دالة جيب التمام لضعف قياس زاوية :

حتا ٢أ = حتا^{2} أ − حا^{2} أ

= ٢ حتا^{2} أ − ١

= ١ − ٢ حا^{2} أ   لكل أ ∈ ح

البرهان :

∵ حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب   بوضع : ب = أ

∴ حتا (أ + أ) = حتا أ حتا أ − حا أ حا أ

∴ حتا ٢أ = حتا^{2} أ − حا^{2} أ

، ∵ حا^{2} أ + حتا^{2} أ = ١

∴ حا^{2} أ = ١ − حتا^{2} أ ، حتا^{2} أ = ١ − حا^{2} أ

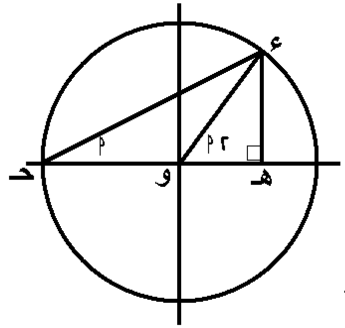
بالتعويض ينتج أن : حتا ٢أ = ٢ حتا^{2} أ − ١ = ١ − ٢ حا^{2} أ

برهان آخر

فى الشكل المقابل : و دائرة وحدة ،

بفرض أن : ء هـ = ص ،

و هـ = س ، جـ هـ = س + ١



∴ (جـ ء)^{٢} = (س + ١)^{٢} + ص^{٢}

= س^{٢} + ٢ س + ١ + ص^{٢}

= (س^{٢} + ص^{٢}) + ٢ س + ١

= ١ + ٢ س + ١ = ٢ س + ٢ = ٢ (س + ١)

∴ جـ ء = $\sqrt{٢ (\text{س} + ١)}$

∴ حا^{٢}أ − حتا^{٢}أ = $\left(\frac{\text{س} + ١}{\sqrt{٢(\text{س} + ١)}}\right)^{٢}$ − $\left(\frac{\text{ص}}{\sqrt{٢(\text{س} + ١)}}\right)^{٢}$

= $\frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٢(\text{س} + ١)}$ − $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢(\text{س} + ١)}$

= $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ١ - \text{ص}^{٢}}{٢(\text{س} + ١)}$

= $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + \text{س}^{٢}}{٢(\text{س} + ١)}$ = $\frac{٢\,\text{س}\,(\text{س} + ١)}{٢(\text{س} + ١)}$

= ٢ س = حتا ٢أ

بالمثل يمكن اثبات أن :

٢ حتا^{٢}أ − ١ = حتا ٢أ ،

١ − ٢ حا^{٢}أ = حتا ٢أ

برهان ثالث باستخدام الأعداد المركبة :

حتا ٢أ = حا^{٢}أ − حتا^{٢}أ

الطرف الأيسر = $\frac{١}{٤}$ (هـ$^{\text{تأ}}$ + هـ$^{-\text{تأ}}$)^{٢} − $\frac{١}{٤}$ ت^{٢} (هـ$^{\text{تأ}}$ − هـ$^{-\text{تأ}}$)^{٢}

= $\frac{١}{٤}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$ + ٢ + هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$ − ٢)

= $\frac{١}{٤}$ (٢ هـ$^{٢\text{تأ}}$ + ٢ هـ$^{-٢\text{تأ}}$) = $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$)

= حتا ٢أ = الطرف الأيمن

، حتا ٢أ = ٢ حتا^{٢}أ − ١

الطرف الأيسر = ٢ × $\frac{١}{٤}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$ + ٢) − ١

= $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$) + ١ − ١

= $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$) = حتا ٢أ = الطرف الأيمن

، حتا ٢أ = ١ − ٢ حا^{٢}أ

الطرف الأيسر = ١ − ٢ × $\frac{١}{٤}$ ت^{٢} (هـ$^{\text{تأ}}$ − هـ$^{-\text{تأ}}$)^{٢}

= ١ + ٢ × $\frac{١}{٤}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$ − ٢)

= ١ + $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$) − ١

= $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{٢\text{تأ}}$ + هـ$^{-٢\text{تأ}}$) = حتا ٢أ = الطرف الأيمن

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

دالة الظل لضعف قياس زاوية :

$$\text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ}}$$ حيث ظا أ معرفة ، $\text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ} \neq \text{١}$

البرهان :

$$\because \text{ظا (أ + ب)} = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{\text{١} + \text{ظا أ ظا ب}}$$ بوضع : ب = أ

$$\therefore \text{ظا (أ + أ)} = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا أ}}{\text{١} + \text{ظا أ ظا أ}}$$

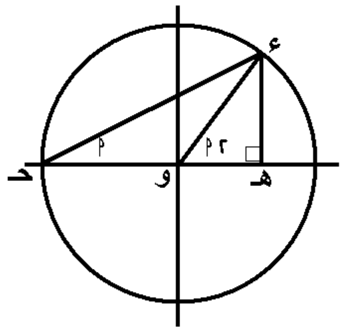
$$\therefore \text{ظا ٢أ} = \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ}}$$

برهان آخر

فى الشكل المقابل : و دائرة وحدة ،

بفرض أن : ء هـ = ص ،

و هـ = س ، حـ هـ = س + ١



$$\therefore \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ}} = \frac{\text{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{١}}}{\text{١} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{\text{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{١}}}{\frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١} - \text{ص}^{\text{٢}}}{(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}}$$

، $\because \text{١} - \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}}$

$$\therefore \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{أ}} = \frac{\text{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س} + \text{١}}}{\frac{\text{٢ س (س + ١)}}{(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ظا ٢أ}$$

أكتوبر ٢٠١٥

برهان ثالث باستخدام الأعداد المركبة :

$$\text{الأيسر} = \frac{\frac{-\text{٢ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)}{\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}}}{\text{١} + \frac{\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)^{\text{٢}}}{\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)^{\text{٢}}}} = \frac{\frac{-\text{٢ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)}{\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}}}{\frac{\text{٢}\left(\text{هـ}^{\text{٢ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{٢ت أ}}\right)}{\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)^{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{-\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)\left(\text{هـ}^{\text{ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{ت أ}}\right)}{\text{هـ}^{\text{٢ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{٢ت أ}}}$$

$$= \frac{-\text{ت}\left(\text{هـ}^{\text{٢ت أ}} - \text{هـ}^{-\text{٢ت أ}}\right)}{\text{هـ}^{\text{٢ت أ}} + \text{هـ}^{-\text{٢ت أ}}} = \text{ظا ٢أ} = \text{الأيمن}$$

ملاحظات :

حل تعبير شفهى صفحة (١٣٦)

(أ) إذا ضعفنا الزاوية ٢أ لتصبح ٤أ نستنتج ما يلى :

[١] $\text{حا ٤أ} = \text{٢ حا ٢أ حتا ٢أ}$

[٢] $\text{حتا ٤أ} = \text{حتا}^{\text{٢}}\text{ ٢أ} - \text{حا}^{\text{٢}}\text{ ٢أ}$

$= \text{٢ حتا}^{\text{٢}}\text{ ٢أ} - \text{١} = \text{١} - \text{٢ حا}^{\text{٢}}\text{ ٢أ}$

[٣] $\text{ظا ٤أ} = \frac{\text{٢ ظا ٢أ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢أ}}$

(٢) بوضع أ بدلاً من ٢ أ نستنتج ما يلى :

[١] $\text{حا } أ = ٢ \text{ حا } \frac{١}{٢}أ \text{ حتا } \frac{١}{٢}أ$

[٢] $\text{حتا } أ = \text{حتا}^٢ \frac{١}{٢}أ - \text{حا}^٢ \frac{١}{٢}أ$

$= ٢ \text{ حتا}^٢ \frac{١}{٢}أ - ١ = ١ - ٢ \text{ حا}^٢ \frac{١}{٢}أ$

[٣] $\text{ظا } أ = \frac{٢ \text{ ظا } \frac{١}{٢}أ}{١ - \text{ظا}^٢ \frac{١}{٢}أ}$

اجابة حاول أن تحل (٢) فقرة (هـ) صفحة (١٣١)

بالضرب بسطاً و مقاماً فى ٢ ينتج :

$\text{المقدار} = \frac{٢ (٢ \text{ حتا}^٢ ١٦٥^\circ - ١)}{٢ \text{ حا } ٧٥^\circ \text{ حتا } ٧٥^\circ} = \frac{٢ \text{ حتا } ٣٣٠^\circ}{\text{حا } ١٥٠^\circ} = ٢\sqrt{٣}$

الدوال المثلثية لنصف الزاوية :

دالة الجيب لنصف الزاوية :

$\because \text{حتا } أ = ١ - ٢ \text{ حا}^٢ \frac{١}{٢}أ$

$\therefore \text{حا}^٢ \frac{١}{٢}أ = \frac{١}{٢} (١ - \text{حتا } أ)$

$\therefore \text{حا } \frac{١}{٢}أ = \pm \sqrt{\frac{١}{٢} (١ - \text{حتا حـ})}$ (١)

دالة جيب التمام لنصف الزاوية :

$\because \text{حتا } أ = ٢ \text{ حتا}^٢ \frac{١}{٢}أ - ١$

$\therefore \text{حتا}^٢ \frac{١}{٢}أ = \frac{١}{٢} (١ + \text{حتا } أ)$

$\therefore \text{حتا } \frac{١}{٢}أ = \pm \sqrt{\frac{١}{٢} (١ + \text{حتا حـ})}$ (٢)

دالة الظل لنصف الزاوية :

بقسمة (١) على (٢) ينتج :

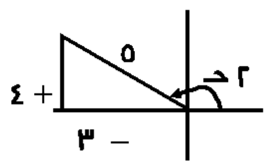
$\text{ظا } \frac{١}{٢}أ = \pm \sqrt{\frac{١ - \text{حتا حـ}}{١ + \text{حتا حـ}}}$

و يتم تحديد الإشارة وفقاً للربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها $\frac{١}{٢}أ$

اجابة فكر صفحة (١٣٩)

، $\because ٠ < \text{حـ} < ٩٠^\circ$ ، بالضرب × ٢ ينتج : $٠ < ٢\text{حـ} < ١٨٠^\circ$

، $\because \text{ظا } ٢\text{حـ} = -\frac{٤}{٣} < ٠$ $\therefore$ ٢حـ تقع فى الربع الثانى



$\therefore \text{ظا حـ} = \sqrt{\frac{١ - \text{حتا } ٢\text{حـ}}{١ + \text{حتا } ٢\text{حـ}}}$

$= \sqrt{\frac{١ + \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥}}} = ٢$

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

اجابة حاول أن تحل (٥) صفحة (١٤٠)

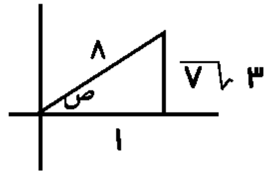
$$\text{٤ حا هـ} = \text{٣} \left(\text{١} - \text{حتا هـ} \right)$$

$$\therefore \text{٤} \times \text{٢ حا } \tfrac{١}{٢} \text{ هـ حتا } \tfrac{١}{٢} \text{ هـ} = \text{٣} \left(\text{١} - \text{١} + \text{٢ حا}^{٢} \tfrac{١}{٢} \text{ هـ} \right)$$

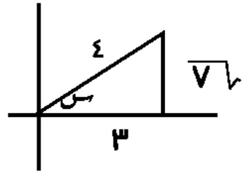
$$\text{و منها ينتج : ٤ حتا } \tfrac{١}{٢} \text{ هـ} = \text{٣ حا } \tfrac{١}{٢} \text{ هـ}$$

$$\therefore \text{طا } \tfrac{١}{٢} \text{ هـ} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

اجابة حاول أن تحل (٧) صفحة (١٤٠)



$$\text{حتا ص} = \frac{\text{١٤٤} + \text{٢٢٥} - \text{٣٢٤}}{\text{٢} \times \text{١٢} \times \text{١٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}} \text{ ،}$$



$$\text{حتا س} = \frac{\text{٢٢٥} + \text{٣٢٤} - \text{١٤٤}}{\text{٢} \times \text{١٥} \times \text{١٨}} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$$

$$\therefore \text{حا ٢ س} = \text{٢ حا س حتا س}$$

$$= \text{٢} \times \frac{\sqrt{\text{٧}}}{\text{٤}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٧}}}{\text{٨}} = \text{حا ص}$$

$$\therefore \text{ق} \left(\angle \text{ ص} \right) = \text{٢ ق} \left(\angle \text{ س} \right)$$

اجابة مسألة (١٢) تمارين (٤ – ٣) صفحة (١٤١)

$$\text{(أ) المقدار} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٢ حا ٣٥° حتا ٣٥°} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ حا ٧٠°}$$

$$\text{(ب) المقدار} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{٢ طا ٤٠°}}{\text{١} - \text{طا}^{٢}\text{ ٤٠°}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ طا ٨٠°}$$

$$\text{(حـ) المقدار} = - \left(\text{حا ٣٥° حتا ٢٥°} - \text{حتا ٣٥° حا ٢٥°} \right)$$

$$= - \text{حا} \left(\text{٣٥°} - \text{٢٥°} \right) = - \text{حا ١٠°}$$

$$\text{(ء) المقدار} = \text{طا} \left(\text{٥٠°} - \text{٤٠°} \right) = \text{طا ١٠°}$$

$$\text{(هـ) المقدار} = \frac{\text{١} - \text{١} + \text{٢ حا}^{٢} \tfrac{١}{٢}\theta + \text{٢ حا } \tfrac{١}{٢}\theta \text{ حتا } \tfrac{١}{٢}\theta}{\text{١} + \text{٢ حتا}^{٢} \tfrac{١}{٢}\theta - \text{١} + \text{٢ حا } \tfrac{١}{٢}\theta \text{ حتا } \tfrac{١}{٢}\theta}$$

$$= \frac{\text{٢ حا } \tfrac{١}{٢}\theta \left(\text{حا } \tfrac{١}{٢}\theta + \text{حتا } \tfrac{١}{٢}\theta \right)}{\text{٢ حتا } \tfrac{١}{٢}\theta \left(\text{حا } \tfrac{١}{٢}\theta + \text{حتا } \tfrac{١}{٢}\theta \right)}$$

$$= \frac{\text{حا } \tfrac{١}{٢}\theta}{\text{حتا } \tfrac{١}{٢}\theta} = \text{طا } \tfrac{١}{٢}\theta$$

اجابة مسألة (١٥) تمارين (٤ – ٣) صفحة (١٤١)

$$\text{ف} = \frac{\text{ع}^{٢} \text{ حا ٢} \theta}{\text{ء}} = \frac{\left(\text{١٤,٧} \right)^{٢} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}}{\text{٩,٨}} = \text{٩ تقريباً}$$

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

صيغة هيرون

ايجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه :

البرهان

نفرض أن : $\text{أ}'$ ، $\text{ب}'$ ، $\text{حـ}'$ هى أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ حيث :

$\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' = ٢\text{ع}$ ، ع = نصف محيط المثلث

$$\because \text{حتا حـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢}}{٢\text{أ}'\text{ب}'} \quad , \quad \text{حا}^{٢}\text{حـ} = ١ - \text{حتا}^{٢}\text{حـ}$$

$$\therefore \text{حا حـ} = \sqrt{١ - \text{حتا}^{٢}\text{حـ}} = \sqrt{١ - \left(\frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢}}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤\text{أ}'^{٢}\text{ب}'^{٢} - (\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢})^{٢}}{٤\text{أ}'^{٢}\text{ب}'^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{[٢\text{أ}'\text{ب}' + (\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢})][٢\text{أ}'\text{ب}' - (\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢})]}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{[(\text{أ}' + \text{ب}')^{٢} - \text{حـ}'^{٢}][\text{حـ}'^{٢} - (\text{أ}' - \text{ب}')^{٢}]}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}')(\text{أ}' + \text{ب}' - \text{حـ}')(\text{حـ}' + \text{أ}' - \text{ب}')(\text{حـ}' - \text{أ}' + \text{ب}')}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{٢\text{ع}(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' - ٢\text{أ}')(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' - ٢\text{ب}')(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' - ٢\text{حـ}')}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{٢\text{ع}(٢\text{ع} - ٢\text{أ}')(٢\text{ع} - ٢\text{ب}')(٢\text{ع} - ٢\text{حـ}')}$$

أحمد الشنتورى ١ أكتوبر ٢٠١٥

$$= \frac{١}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{١٦\text{ع}(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

$$= \frac{٤}{٢\text{أ}'\text{ب}'}\sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$ و منها :

$$\frac{١}{٢}\text{أ}'\,\text{ب}'\,\text{حا حـ} = \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

$$\therefore \text{م}(\Delta\,\text{أ ب حـ}) = \sqrt{\text{ع}(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

برهان آخر

$$\because \text{حتا حـ} = ٢\,\text{حتا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢} - ١ = ١ - ٢\,\text{حا}^{٢}\frac{\text{حـ}}{٢}$$

$$\therefore \text{حتا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{١}{٢}(١ + \text{حتا حـ})} \quad ،$$

$$\text{حا}\frac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{١}{٢}(١ - \text{حتا حـ})}$$

$$\because ، \text{ع} = \frac{١}{٢}(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}')$$

$$\therefore \text{ع} - \text{أ}' = \frac{١}{٢}(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{أ}')$$

$$، \text{ع} - \text{ب}' = \frac{١}{٢}(\text{أ}' + \text{حـ}' - \text{ب}') \quad ،$$

$$\text{ع} - \text{حـ}' = \frac{١}{٢}(\text{أ}' + \text{ب}' - \text{حـ}')$$

$$\because ، \text{حتا حـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{حـ}'^{٢}}{٢\text{أ}'\text{ب}'}$$

$$\therefore \text{حتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{١}{٢}\left(١ + \frac{\text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}' + \text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2}{٤\,\text{أ}'\,\text{ب}'}} = \sqrt{\frac{(\text{أ}' + \text{ب}')^2 - \text{حـ}'^2}{٤\,\text{أ}'\,\text{ب}'}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{أ}' + \text{ب}' - \text{حـ}')(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}')}{٤\,\text{أ}'\,\text{ب}'}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{حـ}')}{\text{أ}'\,\text{ب}'}}$$

بالمثل : $\text{حا}\ \frac{\text{حـ}}{٢} = \sqrt{\frac{(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')}{\text{أ}'\,\text{ب}'}}$

، $\because \text{حا حـ} = ٢\ \text{حا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}\ \text{حتا}\ \frac{\text{حـ}}{٢}$

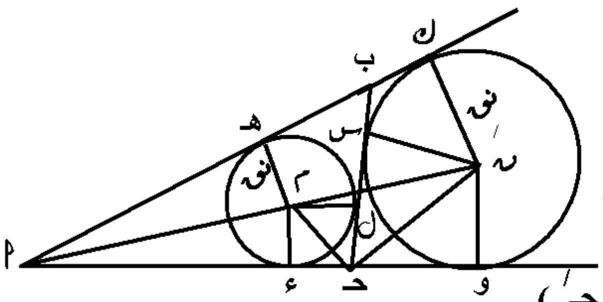
$$\therefore \frac{١}{٢}\ \text{حا حـ} = \sqrt{\frac{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}{\text{أ}'^2\,\text{ب}'^2}}$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\ \text{أ}'\ \text{ب}'\ \text{حا حـ} = \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

$$\therefore \text{م}\,(\Delta\ \text{أ ب حـ}) = \sqrt{\text{ع}\,(\text{ع} - \text{أ}')(\text{ع} - \text{ب}')(\text{ع} - \text{حـ}')}$$

الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥

البرهان الهندسى لصيغة هيرون



فى الشكل المقابل :
الدائرة م هى الدائرة الداخلة للمثلث أ ب حـ ، طول نصف قطرها نق ، حيث :

$$\text{ع} = \frac{١}{٢}\,(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}')$$

، $\text{أ هـ} = \text{أ ء} = \text{ع} - \text{أ}'$

لأن : $\text{ع} - \text{أ}' = \frac{١}{٢}\,(\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}') - \text{أ}' = \frac{١}{٢}\,(\text{ب}' + \text{حـ}' - \text{أ}')$

$$= \frac{١}{٢}\,(\text{أ ء} + \text{ء حـ} + \text{أ هـ} + \text{هـ ب} - \text{ب ل} - \text{ل حـ})$$

$$= \frac{١}{٢}\,(٢\ \text{أ هـ}) = \text{أ هـ}$$

حيث : أ هـ = أ ء ، ء حـ = ل حـ ، هـ ب = ب ل
" أطوال قطع مماسة "

بالمثل : $\text{حـ ء} = \text{ع} - \text{حـ}'$

، الدائرة ن تمس $\overline{\text{ب حـ}}$ فى س ، تمس $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ فى و
، تمس $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ فى ك ،
طول نصف قطرها نق' " تسمى الدائرة الخارجة المقابلة للزاوية أ "

$\text{أ ك} = \text{أ و} = \text{ع}$

لأن : $\text{أ ك} + \text{أ و} = \text{أ هـ} + \text{هـ ب} + \text{ب ك} + \text{أ ء} + \text{ء حـ} + \text{حـ و}$

، حيث : ب س = ب ك ، حـ و = حـ س

$$\therefore ٢\ \text{أ و} = \text{أ هـ} + \text{هـ ب} + \text{ب س} + \text{أ ء} + \text{ء حـ} + \text{حـ س}$$

$$= \text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' = ٢\ \text{ع} \quad \therefore \text{أ ك} = \text{ع}$$

، ∵ أو = أحـ + حـو ∴ ع = ب' + حـو

، ومنها : حـو = ع − ب'

Δ أهـ م ~ Δ أك ن لأن : ∠ أ مشتركة ،

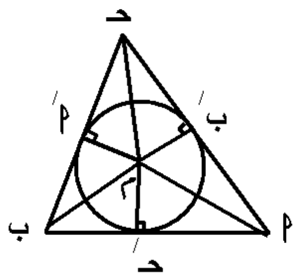
ق (∠ أهـ م) = ق (∠ أك ن) = ٩٠°

∴ أهـ / أك = هـ م / ك ن ∴ نق / نق' = (ع − أ') / ع

ومنها : نق = ((ع − أ') / ع) نق'

، ∵ م (Δ أ ب حـ) = ع نق (١) لأن :

إذا كان المثلث أ ب حـ مرسوم خارج دائرة نصف قطرها نق



أى أن : م مركز الدائرة الداخلة للمثلث ، نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

م (Δ أ ب حـ) =

م (Δ أ م ب) + م (Δ ب م حـ) + م (Δ حـ م أ)

= ½ حـ' × نق + ½ أ' × نق + ½ ب' × نق

= ½ نق (حـ' + أ' + ب') = نق ع

بالتعويض فى (١) ينتج : م (Δ أ ب حـ) = (ع − أ') نق' (٢)

Δ ن س حـ ≡ Δ ن و حـ لأن : ن س = ن و = نق'

، س حـ = و حـ ، حـ ن مشترك

∴ حـ ن يتصف ∠ ب حـ أ " الزاوية الخارجة عند الرأس حـ "

، ∵ حـ م يتصف ∠ ب حـ أ " الزاوية الداخلة عند الرأس حـ "

∴ حـ م ⊥ حـ ن

Δ حـ م ء ~ Δ ن حـ و

لأن : ق (∠ حـ ء م) = ق (∠ حـ و ن) = ٩٠°

، ق (∠ حـ م ء) = ق (∠ و حـ ن)

حيث : ∠ و حـ ن تتم كلاً من : ∠ و ن حـ ، ∠ م حـ ء

∴ حـ ء / و ن = م ء / و حـ ∴ حـ ء / نق' = نق / و حـ

ومنها : نق نق' = حـ ء . و حـ

، ∵ حـ ء = ع − حـ' ، حـ و = ع − ب'

∴ نق نق' = (ع − حـ') (ع − ب')

بضرب (١) × (٢) ينتج :

[م (Δ أ ب حـ)]² = ع (ع − أ') نق نق'

= ع (ع − أ') (ع − حـ') (ع − ب')

بأخذ الجذر التربيعى للطرفين ينتج :

م (Δ أ ب حـ) = √(ع (ع − أ') (ع − ب') (ع − حـ'))

أحمد الشنتورى أكتوبر ٢٠١٥

اجابة تفكير ناقد صفحة (١٤٤)

∵ مجموع مربعى طولى أصغر ضلعين = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

= مربع طول الضلع الثالث

∴ المثلث قائم الزاوية

∴ مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^{٢}

اجابة تفكير ناقد صفحة (١٤٥)

إذا كانت احدى القيم : (ع − أ')

أو (ع − حـ') أو (ع − ب') سالبة

فإنه لا توجد مساحة للمثلث لأن :

القيم السالبة تحت الجذر التربيعى غير معرفة فى ح

" مجموعة الأعداد الحقيقية "

اجابة فكر صفحة (١٤٦) " فقرة (حـ) من مثال (٢) "

∵ ١٢ + ١٤ = ٢٦ < ٣٠

أى أن : مجموع طولى ضلعين فى المثلث < طول الضلع الثالث

∴ لا يمكن رسم المثلث

اجابة حاول أن تحل (٤) صفحة (١٤٦)

م (الشكل أ ب حـ ء) = م (Δ أ ء حـ) + م (Δ أ ب حـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٥٠ × ٥٠ × حا ٦٠° + $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ٢٥ $\sqrt{٣}$

= ١٦٢٣,٨ سم^{٢} تقريباً

حل آخر

بالنسبة للمثلث أ ء حـ :

٢ ع = ١٥٠   ∴ ع = ٧٥

، ع − أ' = ع − حـ' = ع − ء' = ٢٥

∴ م (Δ أ ء حـ) = $\sqrt{٧٥ × ٢٥ × ٢٥ × ٢٥}$ = ١٠٨٢,٥ سم^{٢}

، بالنسبة للمثلث أ ب حـ :

ب حـ = ٢٥ سم ، أ ب = ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ٤٣,٣ سم

٢ ع = ١١٨,٣   ∴ ع = ٥٩,١٥

، ع − أ' = ٣٤,١٥ ، ع − ب' = ٩,١٥ ، ع − حـ' = ١٥,٨٥

∴ بالمثل : م (Δ أ ب حـ) = ٥٤١,٢ سم^{٢}

∴ م (الشكل أ ب حـ ء) = م (Δ أ ء حـ) + م (Δ أ ب حـ)

= ١٠٨٢,٥ + ٥٤١,٢

= ١٦٢٣,٨ سم^{٢} تقريباً

أحمد الشنتورى
أكتوبر ٢٠١٥