ادارة الخليفة والمقطم التعليمية
منتدى توجيه الرياضيات

الرياضيات

التفاضل والاحصاء

الصف الثانى الثانوى

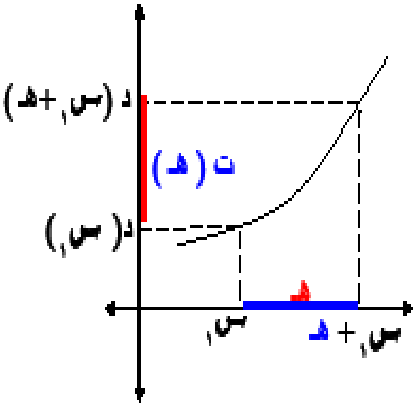
القسم الأدبى

الفصل الدراسى الثانى

تقديم
م/عادل إدوار

دالة التغير ـ دالة متوسط التغير ـ معدل التغير

دالة التغير:



نفرض أن: ص = د (س) حيث د : [٢ ، ب] ← ح

ونفرض أن ص قد تغيرت من ص١ إلى ص٢ حينما

تغيرت س من س١ إلى س٢ حيث س١ ، س٢ ∋ [٢ ، ب]

فإذا كان هـ هو مقدار التغير فى الإحداثى السينى

فإن : هـ = Δ س = س٢ ـ س١ ⟸ س٢ = س١ + هـ

ولكن ص١ = د (س١) ، ص ٢ = د (س٢) = د (س١ + هـ)

∵ مقدار التعير فى الإحداثى الصادى = Δ ص = ص٢ ـ ص١

∴ التعير فى الإحداثى الصادى = د (س١ + هـ) ــ د (س١) يتغير المقدار بتغير هـ

تسمى الدالة " دالة التعير " ت (هـ) = د (س١ + هـ) ـ د (س١)

****

مثــ١ــال : إذا كانت د (س) = ٣ س ـ ٢ فأوجد : دالة التغير فى د عند س = ١ ثم أوجد كلا من : ت (٠,٢) ، ت (ـ ٠,٥)

الحــــــــــــــل

∵ د (س) = ٣ س ـ ٢

∴ د (٣) = ٣ × ١ ـ ٢ = ١

، د (١ + هـ) = ٣ × (١ + هـ) ـ ٢ = ٣ + ٣ هـ ـ ٢ = ١ + ٣ هـ

∴ ت (هـ) = د (١ + هـ) ــ د (١) = ١ + ٣ هـ ــ ١ = ٣ هـ

∴ ت (٠,٢) = ٣ × (٠,٢) = ٠,٦

، ت (ـ ٠,٥) = ٣ × (ـ ٠,٥) = ـ ١,٥

دالة متوسط التغير: بقسمة دالة التغير ت (هـ) على التغير فى س وهو هـ حيث هـ ≠ صفر نحصل على دالة تسمى دالة متوسط التغير فى د عند س = $س_1$ " م (هـ)

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

****

مثـــ٢ـــال : إذا كانت د (س) = $س^2$ ــ ٨ س + ١٥ فأوجد : متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٢

الحـــــــــــــل

∵ د (س) = $س^2$ ــ ٨ س + ١٥ ، عندما تتغير س من ٢ إلى ٢.٢ ∴ هـ = ٠.٢

∴ د ($س_1$) = د (٢) = ٤ ــ ١٦ + ١٥ = ٣

∴ د ($س_1$ + هـ) = د (٢ + هـ) = (٢ + هـ)^2 ــ ٨ × (٢ + هـ) + ١٥

∴ د (٢ + هـ) = ٤ + ٤ هـ + هـ^2 ــ ١٦ ــ ٨ هـ + ١٥ = هـ^2 ــ ٤ هـ + ٣

∴ ت (هـ) = د ($س_1$ + هـ) – د ($س_1$) = هـ^2 ــ ٤ هـ + ٣ – ٣ = هـ^2 ــ ٤ هـ

$$∵ م(هـ) = \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ} = \frac{هـ^2 - ٤ هـ}{هـ} = هـ - ٤$$

∴ متوسط التغير م (هـ) = ٠,٢ ــ ٤ = ــ ٣,٨

****

معدل التغير : عندما تقترب (هـ) من الصفر قد يكون بها نهاية محددة ، كما أنه من المحتمل ألا توجد لها نهاية . إذا كانت م (هـ) إلى نهاية محددة عندما هـ ← ٠

فإن : هذه النهاية تسمى "معدل تغير الدالة د عند النقطة $س_1$"

$$∴ \text{معدل التغير للدالة عند } س_1 = \lim_{س \to ٠} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$$

****

مثـــال٣ : إذا كانت د (س) = س^{٢} – ٣ س + ٤ فأوجد : دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم أحسب ت (٠,٥)

الحـــــــــل

∵ د (س) = س^{٢} – ٣ س + ٤

∴ د (٣) = ٣^{٢} – ٣ × ٣ + ٤ = ٤

، د (٣ + هـ) = (٣ + هـ)^{٢} – ٣ × (٣ + هـ) + ٤

= ٩ + ٦ هـ + هـ^{٢} – ٦ – ٣ هـ + ٤ = هـ^{٢} + ٣ هـ + ٤

∴ ت (هـ) = د (أ + هـ) – د (أ) = هـ^{٢} + ٣ هـ + ٤ – ٤ = هـ^{٢} + ٣ هـ

∴ ت (٠,٥) = (٠,٥)^{٢} + ٣ × (٠,٥) = ١,٧٥

****

مثـــال٤ : إذا كانت د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س – ١ فأوجد : متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٤ إلى ٥,٥

الحـــــــــل

∵ د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س – ١ ، عندما تتغير س من ٤ إلى ٥.٥

فإن : س$_{١}$ = ٤ ، هـ = ٥.٥ – ٤ = ١.٥

∴ د (٤) = ٢ × ٤^{٢} + ٥ × ٤ – ١ = ٥١

، د (٤ + هـ) = ٢ (٤ + هـ)^{٢} + ٥ × (٤ + هـ) – ١

= ٣٢ + ١٦ هـ + ٢هـ^{٢} + ٢٠ + ٥ هـ – ١ = ٢هـ^{٢} + ٢١ هـ + ٥١

∴ ت (هـ) = د (س$_{١}$ + هـ) – د (س$_{١}$) = ٢ هـ^{٢} + ٢١ هـ + ٥١ – ٥١

∴ ت (هـ) = ٢ هـ^{٢} + ٢١ هـ

$$\because \text{م (هـ)} = \frac{\text{د (س}_{١}\text{+هـ) – د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{٢هـ}^{٢}\text{ + ٢١ هـ}}{\text{هـ}} = \text{٢هـ + ٢١}$$

∴ متوسط التغير م (هـ) = ٢ × ١,٥ + ٢١ = ٢٤

مثـــ٦ـــال : إذا كانت د (س) = س^{٢} – ٣ س فأوجد : معدل التغير للدالة د عند س = ٢

الحـــــــــــل

عند س = ٢ $\therefore$ م (هـ) = $\dfrac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$

$\therefore$ م (هـ) = $\dfrac{[(٢+هـ)^{٢} - ٣(٢+هـ)] - [(٢)^{٢} - ٣\times٢]}{هـ}$

= $\dfrac{\cancel{٤} + ٤ هـ + هـ^{٢} - \cancel{٦} - ٣ هـ - \cancel{٤} + \cancel{٦}}{هـ}$ = $\dfrac{هـ(١ + هـ)}{هـ}$ = ١ + هـ

$\therefore$ معدل التغير للدالة عند س = ٢ هو

$\lim_{هـ \leftarrow ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \leftarrow ٠}$ (١+ هـ) = ١

****

مثـــ٧ـــال: صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد :

١) متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,٣ سم

٢) معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ١٥ سم

الحـــــــــــل

بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = س سم ، مساحتها = ص = س^{٢} سم^{٢}

، عندما يتغير طول ضلع الصفيحة س من ١٠ إلى ١٠,٣

ت(هـ) = د (١٠ + هـ) – د(١٠) = (١٠ + هـ)^{٢} = ١٠٠ + ٢٠ هـ + هـ^{٢} – ١٠٠

$\therefore$ م (هـ) = $\dfrac{د(١٠ + هـ) - د(١٠)}{هـ}$ = $\dfrac{هـ^{٢} + ٢٠ هـ}{هـ}$ = هـ + ٢٠

$\therefore$ متوسط التغير = ٠,٣ + ٢٠ = ٢٠,٣

عند س = ١٥ يكون :

$\therefore$ م (هـ) = $\dfrac{د(١٥ + هـ) - د(١٥)}{هـ}$ = $\dfrac{٢٢٥ + ٣٠ هـ + هـ^{٢} - ٢٢٥}{هـ}$ = ٣٠ + هـ

$\therefore$ معدل التغير فى المساحة $\lim_{هـ \leftarrow ٠}$ م (هـ) = $\lim_{هـ \leftarrow ٠}$ (٣٠ + هـ) = ٣٠

تمـــــارين

١) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ١ فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلي ٢,١

٢) إذا كانت د(س) = س^{٢}+ س فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٣ إلي ٣,١

٣)إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٣س فأوجد دالة التغير عندما س = ٢ ثم إحسب ت(٠,٣)

٤) إذا كانت د(س) = س^{٢} – ٣س + ١ فأوجد دالة التغير عندما س = ١ ثم إحسب م(٠,٥)

٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٢ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم إحسب مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلي ٣

٦) إذا كانت د(س) = س^{٢} – ٣س +١ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم إحسب مقدارالتغيرعندما تتغير من ٣ إلي ٣,٥

٧) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير س من ١ إلي ٤ ثم إحسب معـــدل التغير عندما س = ٩

٨) إذا كانت د(س) = س^{٢}+٣ س فأوجد :م(هـ) عندما س = ١ ثم إحسب م(٠,٣)

٩) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س^{٢} + ١ : إحسب معدل التغيرعندما س = ١

١٠) إوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س^{٢} – ٢ س ثم إحسب معدل التغير عندما س = ٢

١١) إذا كانت د(س) = ب س^{٢} + حـ + ٤ حيث ب ، حـ ثابتان فإوجد قيمة كلا من ب ، حـ إذا كان د(٣) = ٤ ؛ عندما س = ٣ فإن ت (٠.٥) = ١.٧٥

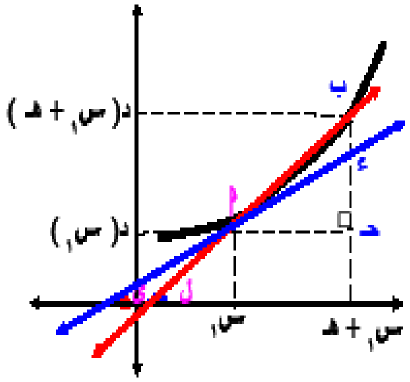
١٢) إذا كانت د(س) = $\frac{٢}{س - ١}$ فإوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من ١إلي ١,١

١٣) إذا كانت د(س) = ب س + حـ حيث ب ، حـ ثابتان فإوجد قيمة كلا من ب ، حـ

١٤) قرص دائري يتمدد بإنتظام محتفظا بشكله أوجد متوسط التغير في مساحة سطحه عندما يزداد طول نصف قطره من ٣ إلي ٣.١ ثم إحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون طول نصف قطره مساويا ٥ سم

التفسير الهندسى لمعدل التغير – المشتقة الأولى

التفسير الهندسى لمعدل التغير :



نفرض أن: ص = د(س) ، أن م ، ب نقطتان على منحنى

هذه الدالة حيث: م هى (س١ ، د (س١))

، ب (س١ + هـ ، د (س١ + هـ))

ميل $\overline{\text{م ب}}$ = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

∴ $\dfrac{\text{ب حـ}}{\text{جـ م}}$ = $\dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ = طا ى

فإذا كانت نقطة م ثابتة وتحركت نقطة ب على منحنى الدالة مقتربة من م

فإن نقطة حـ تقترب أيضا من م

أى أن : $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ = هـ ← ٠ وفى الوضع النهائى يقترب المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ من

الإنطباق علـى المماس $\overleftrightarrow{\text{م ء}}$ الذى يمس المنحنى عند نقطة م (س١ ، د (س١))

وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن : ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س١ ، د (س١))

= $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـــا}}$ $\dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$ = طا ل = معدل تغير الدالة عند س١

المشتقة الأولى للدالة :

المقدار $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـــا}}$ $\dfrac{\text{د}(\text{س}_1+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

" أو الدالة المشتقة أو المعامل التفاضلى الأول للدالة " ويرمز بأحد الرموز

$\dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س)] ؛ أ ص/ ؛ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ؛ أ د/ (س)

قواعد الإشتقاق :

(١) إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : د/ (س) = صفر

مثـــال : إذا كانت : د (س) = ٤ فإن : د/ (س) = صفر

، إذا كانت : د (س) = ـ ٧ ∴ ص/ = صفر

****

(٢) إذا كانت : د (س) = س^{ن} حيث ن ∈ ح فإن : د/ (س) = ن س$^{ن - ١}$

مثـــال : إذا كانت : د (س) = س^{٤} فإن : د/ (س) = ٤ س$^{٤ - ١}$ = ٤ س^{٣}

مثـــال : إذا كانت : د (س) = س^{٧} فإن : د = ٧ س$^{٧ - ١}$ = ٧ س^{٦}

مثـــال : إذا كانت : د (س) = س$^{-٣}$ فإن : د/ (س) = ـ٣ س$^{-٣ - ١}$ = ـ٣ س$^{-٤}$

مثـــال : إذا كانت : د (س) = س$^{٢.٥}$ ∴ ص/ = ٢.٥ س$^{٢.٥ - ١}$ = ٤ س$^{١.٥}$

مثـــال : إذا كانت : د (س) = س فإن : د/ (س) = س$^{١ - ١}$ = ١

****

(٣) إذا كانت : د (س) = جـ س^{ن} حيث جـ ثابت ، ن ∈ ح

فإن : د/ (س) = جـ ن س$^{ن - ١}$

مثـــال : إذا كانت : د (س) = ٩ س فإن : د/ (س) = ٩ × ١ = ٩

مثـــال : إذا كانت : د (س) = ٥ س^{٤} فإن : $\frac{دص}{دس}$ = ٥ × ٤ س^{٣} = ٢٠ س^{٣}

مثـــال : إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} فإن : د/ (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ س^{٥} = ٣ س^{٥}

مثـال : إذا كانت : د (س) = ٨ س$^{-٢}$ ∴ ص/ = ٨ × (ـ٢) س$^{-٣}$ = ـ١٦ س$^{-٣}$

مثـــال : إذا كانت : د (س) = ٦ س$^{\frac{١}{٢}}$ فإن : $\frac{دص}{دس}$ = ٦ × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = ٣ س$^{-\frac{١}{٢}}$

****

(٤) إذا كانت : د (س) = ر (س) ± هـ (س) ± ······· ± ك (س)

فإن : د$^{/}$ (س) = ر$^{/}$(س) ± هـ$^{/}$(س) ± ······ ± ك$^{/}$(س)

مثـــ١ـــال : إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٢} + ٧ س − ٥

فإن : د$^{/}$ (س) = ٤ س + ٧

****

مثـــ٢ـــال : إذا كانت : د (س) = ٤ س^{٣} + س^{٢} + س − ٢ ثم أحسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = − ١

د$^{/}$ (س) = ١٢ س^{٢} + ٢ س + ١

∴ د$^{/}$ (س)$_{\text{س = ٢}}$ = ١٢ × ١ + ٢ × − ١ + ١ = ١٢ − ٢ + ١ = ١١

****

مثـــ٣ـــال : د (س) = (٢ س + ٣) (س − ٥) أوجد د$^{/}$(س) عندما: س = ٢

نفك الأقواس ∴ د (س) = ٢ س^{٢} − ٧ س − ١٥

∴ د$^{/}$ (س) = ٤ س − ٧

عندما س = ٢ ∴ د$^{/}$ (س) = ٤ × ٢ − ٧ = ١

****

مثـــ٤ـــال : إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} − س − ١

فإن : د$^{/}$ (س) = ٢ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٥ س − ١

****

مثـــ٥ـــال : إذا كانت : د (س) = $\frac{١٥}{\text{س}^{٣}}$ + $\frac{٦}{\text{س}^{٢}}$ − $\frac{٢}{\text{س}}$

تكتب على الشكل د (س) = ١٥ س$^{-٣}$ + ٦ س$^{-٢}$ − ٢ س$^{-١}$

فإن : ص$^{/}$ = − ١٥ س$^{-٤}$ − ١٢ س$^{-٣}$ + ٢ س$^{-٢}$

∴ ص$^{/}$ = $\frac{-١٥}{\text{س}^{٤}}$ − $\frac{١٢}{\text{س}^{٣}}$ + $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

****

مثـــال ٦ : إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س}$ أوجد : $د'(س)$

الحـــــــل

$د(س) = س^{\frac{1}{2}}$ ∴ $د'(س) = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{س}}$

****

مثـــال ٧ : إذا كانت : $د(س) = \sqrt[3]{س^{4}}$ أوجد : $د'(س)$

الحـــــــل

$د(س) = س^{\frac{4}{3}}$ ∴ $د'(س) = \frac{4}{3} س^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{س}$

****

مثـــال ٨ : إذا كانت : $د(س) = \sqrt[3]{س}$ أوجد : $د'(س)$

الحـــــــل

$د(س) = س^{\frac{1}{3}}$ ∴ $د'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{س^{2}}}$

****

مثـــال ٩ : إذا كانت : $د(س) = \frac{(٢س + 1)^{2}}{٢س^{3}}$ أوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــــل

∵ $د(س) = \frac{(٢س + 1)^{2}}{٢س^{3}} = \frac{(٤س^{2} + ٦س + 1)}{٢س^{3}}$

$د(س) = ٢س^{-1} + ٣س^{-2} + \frac{1}{2}س^{-3}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -٢س^{-2} - ٦س^{-3} - \frac{3}{2}س^{-4} = \frac{-٤س^{2} - ١٢س + ٣}{٢س^{4}}$

****

مثـــال ١٠ : إذا كانت : $د(س) = س^{3} + ٦س^{2} - ٣٦س + ٤$

فأوجد : $د'(1)$ ثم اوجد قيم س التى تجعل $د'(س) = $ صفر

الحـــــــل

∵ د/ (س) = ٣ س^{٢} + ١٢ س – ٣٦

∴ د/ (١) = ٣ × (١)^{٢} + ١٢ × ١ – ٣٦ = – ٢١

بوضع د/ (س) = صفر ∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س – ٣٦ = ٠ بالقسمة على ٣

∴ س^{٢} + ٤ س – ١٢ = ٠ ∴ (س + ٦)(س – ٢) = ٠

∴ س = - ٦ أ؛ س = ٢

****

مثـال ١١ : إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ ـ ٢ س^{٢} ـ ٥ س +٤

اوجد قيم س التى تجعل (١) د/ (س) = صفر (٢) د/ (س) = ٧

الحـــــــل

∵ د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ـ ٢ س^{٢} – ٥ س + ٤

∴ د/ (س) = س^{٢} ـ ٤ س ـ ٥

أولاً : د/ (س) = س^{٢} ـ ٤ س ـ ٥ = ٠ ⟸ (س + ١) (س ـ ٥) = ٠

∴ س = - ١ أ؛ س = ٥

ثانياً : د/ (س) = س^{٢} ـ ٤ س ـ ٥ = ٧

س^{٢} ـ ٤ س ـ ١٢ = ٠ ⟸ (س + ٢) (س ـ ٦) = ٠

∴ س = ـ ٢ أ، س = ٦

****

تذكر ما يلى :

*** ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه هو :**

(د)$_{س = س_١}$ = طا هـ حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

*** إذا كان : المماس يوازى محور السينات فإن : ميل المماس = صفر**

*** إذا كان : المماس يوازى محور الصادات فإن : ميل المماس غير معرف**

- ميل المستقيم : ٲ س + ب ص + حـ = ٠

• هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{ﻡ}}{\text{ب}}$

* ميل أى مستقيم يوازيه = $\frac{-\text{ﻡ}}{\text{ب}}$ * ميل أى مستقيم عمودى عليه = $\frac{\text{ب}}{\text{ﻡ}}$

أى أن : المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان

أما المستقيمان المتعامدان فحاصل ضرب ميلاهما = ـ ١

* ميل المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه ($س_١$ ، $ص_١$) هى :

ميل المستقيم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = م

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور السينات نضع : ص = ٠

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور الصادات نضع : س = ٠

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى $ص_١$ = د (س) مع المستقيم $ص_٢$ = م س + حـ

نضع : $ص_١ = ص_٢$

****

مثــ١ـــال: أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس المنحنى الدالة : ص= $س^٢$ ـ ٣ س

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٢ ، ـ ٢) الواقعة عليه

الحـــــــــــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ظا هـ = ٢ س ـ ٣   ∴ (ظا هـ) $_{س = ٢}$ = ٢ × ٢ ـ ٣ = ١

∴ ظا هـ = ١   ∴ هـ = ٤٥°

****

مثـ٢ـال : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الماس للمنحنى: ص = $س^٣$ ـ ٥ س ـ ٥

عند النقطة (١ ، ١) مع الاتجاه المجب لمحور السينات

الحـــــــــــل

∵ ص = س^{٣} ــ ٥ س ـ ٥

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ظا هـ = ٣ س^{٢} ــ ٥ ∴ ميل المماس عند (١ ، ١)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ظا هـ = ٣ × ١ ـ ٥ = ـ ٢

∴ ظا هـ = ـ ٢ ومنها : هـ = ١١٦° ٣٣′

****

مثــ٣ــال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٢} ــ ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات

الحـــــــــــل

ص/ = ٢ س ــ ٤ ∴ ميل المماس = ٢ س ــ ٤

، ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ ميله = صفر

∴ ص/ = ٠ ∴ ٢ س ــ ٤ = ٠ ومنها : س = ٢

∴ ص = (٢)^{٢} ــ ٤ × ٢ + ٣ = ــ ١

∴ المماس للمنحنى يوازى محور السينات عند (٢ ، ــ ١)

****

مثــ٤ــال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ ــ س ـ ٢ والتى ميل المماس عندها = ١

الحـــــــــــل

∵ المماس يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

∴ ميل المماس عند أى نقطة م = $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٢} + س ـ ١ = ١

∴ س^{٢} + س ـ ١ = ١ ⟸ (س ـ ١) (س + ٢) = ٠

∴ س = ١ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ـ ١ ـ ٢ = $\frac{-١٣}{٦}$ النقطة (١ ، $\frac{-١٣}{٦}$)

أ، س = ـ ٢ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ـ ٨ + $\frac{١}{٢}$ × ٤ + ١ ـ ٢ =$\frac{-٥}{٣}$ النقطة(ـ٢ ، $\frac{-٥}{٣}$)

****

مثـ٥ـال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ١ والتى يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم : ٣ ص = ٦ + س

الحـــــــــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = م = ٣ س^{٢} – ٦ ، ∵ ميل المستقيم = $\frac{١}{٣}$

، ∵ المماس والمستقيم متعامدان ∴ ميل المماس = – ٣

∴ ٣ س^{٢} – ٦ = – ٣ ومنها : س^{٢} – ١ = (س + ١)(س –١) = ٠

∴ س = ١ فإن : ص = (١)^{٣} –٣(١)^{٢} +١ = – ١ ∴ النقط هى : (١ ، – ١)

،: س = – ١ فإن : ص = (–١)^{٣} –٣(–١)^{٢} +١ = –٣ ∴ النقط هى (– ١ ، –٣)

****

مثـ٦ـال : أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ س و الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحـــــــــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ١٢ س + ٥ ∵ ميل المماس = طا هـ = طا ١٣٥° = – ١

∴ ٦ س^{٢} + ١٢ س + ٥ = – ١

∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠ ∴ (س + ١)^{٢} = ٠

∴ س = – ١ ∴ ص = – ١

∴ المماس للمنحنى عند (– ١ ، – ١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

وتكون معادلته هى : $\frac{ص + ١}{س + ١}$ = – ١ أى : ص + س + ٢ = ٠

****

تمــــــــــارين

١ ـ أوجد المشتقـة الأولي للدوال الآتية : ـ

١) د (س) = ٣ $س^{٣}$ ـ ٢ $س^{٢}$ + ٥ س + ٢ ثم أوجد $د^{/}$(١)

٢) د (س) = ($س^{٥}$ + ٣ $س^{٤}$ + ٢ س) ÷ (س) ثم أوجد $د^{/}$(ـ ١)

٣) د (س) = ($س^{٣}$ ـ ٢٧) ÷ (س ـ ٣) ثم أوجد $د^{/}$(ـ ٢)

٤) ص = س ـ $س^{-١}$ + ٣ $س^{-٢}$ عند س = ١

٥) ص = $\frac{٢}{س}$ + $\frac{٣}{س^{٢}}$ ـ $\frac{١}{س^{٣}}$ عند س = ١

٦) د (س) = س + ^{٣} $س^{٢}$ ثم أوجد $د^{/}$(١)

٧) د (س) = ٣ $س^{٤}$ + $س^{٣}$ ثم أوجد $د^{/}$(١)

٢ ـ أوجـد معدل تغير كلا مـن الــدوال الآتيـــة عند قيم س المبينة أمام كلا منها :

١) د (س) = $س^{٢}$ + ٢ س - ١ عند س = ١

٢) د (س) = $س^{٣}$ + ٢ س عند س = ـ١

٣ ـ أوجد ميل المماس لمنحنيـات الـدوال الآتيـة عند النقط المبينة أمام كلا منهـــا :

١) ص = $س^{٢}$ + س ـ ٥ عند النقطة (٢ ، ١)

٢) ص = $س^{٢}$ ـ ٤ س + ٣ عند نقط تقاطعه مع محور السينات

٣) ص = $س^{٣}$ ـ ٢ $س^{٢}$ + ٣ س ـ ١ عند نقط تقاطعه مع محور الصادات

٤ ـ اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :

١) ص = ٣ $س^{٢}$ ـ ٥ س + ١ عند النقطة (١ ، ـ ١)

٢) ص = $س^{٣}$ ـ ٥ س + ١ عند النقطة (٢ ، ـ ١)

٥ ـ اوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية وتحقق الشروط المبينة أمام كلا منها

١) ص = $س^{٢}$ ـ ٤ س + ١ ، المماس // محور السينات

٢) ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٩ س + ١٥ ، المماس // محور السينات

٣) ص = ٥ س^{٢} + ٢ س – ١٨ ، المماس // المستقيم ٢٢ س – ص + ١٢=٠

٤) ص = س^{٣} – ٤ س + ٢ ، المماس ⊥ المستقيم س = ص – ٤

٥) ص = ٩ س – س^{٣} ، ميل المماس = - ٣

٦ – أوجد قيم الثوابت ب ؛ حـ ؛ ء والتي تحقق الشروط المعطاه فيما يلي :

١) د (س) = س^{٣} + ب س + حـ ، المماس عند النقطة (١ ، ٦) أفقي

٢) د (س) = حـ س^{٢} + ء س ، د (٢) = ٢ ؛ د$^{/}$ (٠) = ٣

٣) د (س) = ب س^{٢} + حـ س

والمنحني يمس المستقيم ص = ٣ س + ٢ عند النقطة (١ ، -١)

٤) د (س) = حـ س^{٢} + ء س

والمنحني يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (-١،- ١٥)

٥) د (س) = حـ س^{٢} + ء س والمماس عند النقطة (١ ، ٠) يصنع مع

الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥$^{\circ}$

٧ – أوجد معادلة المماس فيما يلى :

١) ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ١ عند النقطة (٠ ، ١)

٢) ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٢ عند النقطة (١ ، ٠)

٣) ص = (س + ١)(س^{٣} – ٢) عند النقطة : س = ١

٨ – إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص= س^{٣} – ٣ س عند النقطتين (٠ ، ٣)
؛ (– ١ ، ٤) متوازيان

٩ – إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص = س^{٢} – س + ٣ عند النقطتين (٠ ، ٣)
؛ (١، ٣) متعامدين

١٠ – إذا كانت : د (س) = س × ر (س) ، وكانت : ر (١) = ٣ ،
ر$^{/}$ (١) = ٢ فأوجد : د$^{/}$ (١)

مشتقة حاصل ضرب دالتين

(٥) المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للإشتقاق =

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = د (س) × ر (س)

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = د$'$ (س) × ر (س) + ر$'$ (س) × د (س)

****

مثــ١ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = (٢س -١)(٣س +٥)   (!!) ص = (س^{٢} +٧)(س^{٣} − ١)

الحــــــل

(!) ص$'$ = ٢(٣س+٥) + ٣ (٢س- ١) = ٦س +١٠ +٦س ـ ٣ = ١٢س + ٧

(!!) ص$'$ = ٢س(س^{٣}-١)+٣س^{٢}(س^{٢}+٧) = ٢س^{٤} ـ٢س + ٣س^{٤} + ٢١س^{٢}

= ٥ س^{٤} + ٢١ س^{٢} ـ ٢ س

****

مثــ٢ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) ص = (٢س^{٣}+٥)(س^{٤}+١)   (!!) ص = س^{٥} (٣س^{٢}+٨)

الحــــــل

(!) ص$'$ =٦س^{٢}(س^{٤}+١)+٤س^{٣}(٢س^{٣}+٥)

= ٦س^{٦} + ٦س^{٢} + ٨س^{٦} + ٢٠س^{٣} = ١٤ س^{٦} + ٢٠ س^{٣} + ٦ س^{٢}

(!!) ص$'$ =٥س^{٤}(٣س^{٢}+٨)+٦س×س^{٥} = ١٥ س^{٥} + ٤٠ س^{٤} + ٦ س^{٦}

****

مثــ٣ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!!) ص = (س^{٢}+١)(س^{٢}-٣س+٥)   (!!) ص = س^{٥} (س + $\frac{١}{\text{س}}$)

الحــــــل

(!) ص$'$ = ٢س (س^{٢} − ٣ س + ٥) + (٢س-٣)(س^{٢}+١)

$= ٢س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ١٠ س + ٢س^{٣} + ٢س ـ ٣س^{٢} ـ ٣$

$= ٤س^{٣} ـ ٩س^{٢} + ١٠س ـ ٣$

(!!) $ص = س^{٥} (س + س^{-١})$

$\therefore ص^{/} = ٥س^{٤} (س + س^{-١}) + (١ ـ س^{-٢}) \times س^{٥}$

$= ٥س^{٥} + ٥ س^{٣} + س^{٥} ـ س^{٣} = ٦ س^{٥} + ٤ س^{٣}$

****

مثـــ٤ـــال :أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية

(!) $ص = س^{٦} (س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})$ (!!) $ص = س^{٣} (س ـ \sqrt{س})$

الحـــــل

(!) $ص = س^{٦} (س^{٢} + س^{-٢}) = س^{٨} + س^{٤}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٨ س^{٧} + ٤ س^{٣}$

(!!) $ص = س^{٣} (س - س^{\frac{١}{٢}}) = س^{٤} ـ س^{\frac{٥}{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} ـ \frac{٥}{٢} س^{\frac{٣}{٢}}$

****

نتيجة :- مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الاولى × الثانية × الثالثة + مشتقة الثانية × الاولى × الثالثة

+ مشتقة الثالثة × الاولى × الثانية

إذا كانت $ص = د \times ر \times و$ فان

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = د^{/} \times ر \times و + ر^{/} \times د \times و + و^{/} \times د \times ر$

****

مثـــ٥ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة : $د (س) = (٢س+٥) (س^{٢}+١) (س^{٣} ـ ٢)$

الحـــــل

$د^{/} (س) = ٢ (س^{٢} +١) (س^{٣} ـ ٢) + ٢س (٢س +٥) (س^{٣}-٢)$

$+٣س^{٢}(٢س+٥) (س^{٢}+١)$

****

مشتقة قسمة دالتين

(٦) المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين :

$$\text{المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين} = \frac{\text{مشتقة البسط}\times\text{المقام} - \text{مشتقة المقام}\times\text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ حيث ر (س) ≠ صفر

فإن : $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{د}'\text{(س)} \times \text{ر (س)} - \text{ر}'\text{(س)} \times \text{د (س)}}{(\text{ر (س)})^{٢}}$$

****

مثـــال٦ : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{ص} = \frac{\text{٢ س} - ٥}{\text{٣ س} + ٢}$

الحـــــــــل

$$\text{ص}' = \frac{٢(\text{٣س}+٢) - ٣\,(\text{٢س} - ٥)}{(\text{٣س}+٢)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٦س} + ٤ - \text{٦س} + ١٥}{(\text{٣س} + ٢)^{٢}} = \frac{١٩}{(\text{٣س} + ٢)^{٢}}$$

****

مثـــال٧ : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٢}$

الحـــــــــل

$$\text{ص}' = \frac{\text{٢س}(\text{س}^{٢} - ٢) - \text{٢س}\,(\text{س}^{٢}+٣)}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٢س}^{٣} - \text{٤ س} - \text{٢س}^{٣} - \text{٦ س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}} = \frac{-\text{١٠س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}}$$

****

مثـــ٨ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١ + \text{س}}{١ - \text{س}}$

الحـــــــــل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ - \text{س})\,١ - (-١)\,(١ + \text{س})}{(١ - \text{س})^{٢}} = \frac{١ - \text{س} + ١ + \text{س}}{(١ - \text{س})^{٢}} = \frac{٢}{(١ - \text{س})^{٢}}$$

****

مثـــ٩ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $\text{ص} = \dfrac{٢\text{س}}{٥\text{س} + ٣}$

الحـــــــــل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(٥\text{س} + ٣)\,٢ - ٥ \times ٢\text{س}}{(٥\text{س} + ٣)^{٢}} = \frac{١٠\text{س} + ٦ - ١٠\text{س}}{(٥\text{س} + ٣)^{٢}} = \frac{٦}{(٥\text{س} + ٣)^{٢}}$$

****

مثـــ١٠ـــال : إذا كانت : ص $= \dfrac{٣\,\text{س} - ٤}{٢\,\text{س} + ٥}$ **أوجد :** $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحـــــــــل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\,(٢\,\text{س} + ٥) - ٢\,(٣\,\text{س} - ٤)}{(٢\,\text{س} + ٥)^{٢}} = \frac{٢٣}{(٢\,\text{س} + ٥)^{٢}}$$

****

تذكر ما يلى :

* ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) الواقعة عليه هو :

$\left(\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = \text{س}_١}$ = طا هـ حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

* ميل المستقيم : ﻫ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\dfrac{-\,\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \dfrac{-\,\text{ﻫ}}{\text{ب}}$

* ميل أى مستقيم يوازيه $= \dfrac{-\,\text{ﻫ}}{\text{ب}}$ * ميل أى مستقيم عمودى عليه $= \dfrac{\text{ب}}{\text{ﻫ}}$

* ميل المستقيم المار بالنقطتين ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$) ، ($\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$) يساوى $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه ($س_١$ ، $ص_١$) هى :

$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ميل المستقيم   أ، $(ص_٢ - ص_١) = م\ (س_٢ - س_١)$

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور السينات نضع : ص = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور الصادات نضع : س = ٠
* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى $ص_١$ = د (س) مع المستقيم $ص_٢$ = م س + حـ

نضع : $ص_١ = ص_٢$

****

مثـــال ١١ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (س − ٢) (س - ٣)

عند النقطة (٣ ، ٦)

الحــــــــــــل

ميل المماس م = ص′ = ١ (س - ٣) + ١ (س − ٢)

= س − ٣ + س − ٢ = ٢س − ٥

عند النقطة (٣ ، ٦)   ∴ م = ٢ × ٣ − ٥ = ١

****

مثـــال ١٢ : أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٣}{س + ١}$ عند النقطة (١ ، ١,٥)

الحــــــــــــل

ميل المماس م = $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(س+١)\times صفر - ٣\times ١}{(س+١)^٢}$ = $\frac{-٣}{(س+١)^٢}$

عند النقطة (١ ، ١,٥)   م = $\frac{-٣}{(١+١)^٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

****

مثـــال ١٣ : أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة

ص = $\frac{٤}{س+١}$ عند النقطة (-٣، -٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحــــــــــــل

ظاهـ = $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(س+١)\times صفر - ٤\times ١}{(س+١)^٢}$ = $\frac{-٤}{(س+١)^٢}$

عند النقطة (-٣، -٢)   ظاهـ = $\frac{-٤}{(-٣+١)^{٢}}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ق (∠ هـ) = ١٣٥° = $\frac{٣\pi}{٤}$

****

مثـــ١٤ـــال : أوجد قيم س التى عندها المماس التى عندها المماس لمنحنى الدالة ص = ٢س^{٣}ـ ١٥س^{٢}+٣٥س+٥ يصنع زاوية ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحـــــــــل

∵ المماس يصنع زاوية١٣٥°   ∴ ص/ = ظا١٣٥° = -١

∴ ص/ = ٦ س^{٢} – ٣٠س +٣٥ = -١   ∴ ٦س^{٢} – ٣٠س +٣٦ =٠   ÷ ٦

∴ س^{٢} – ٥ س +٦ = ٠ نحلل   ∴ (س -٢)(س – ٣) = ٠

ومنها   ∴ س = ٢   أ، س = ٣

****

تمـــــارين

١ – أوجد المشتقة الأولي للدوال الآتية : ـ

١) ص = (س^{٢} – ٥ س)(س^{٣} + ١)   عند س = ٠

٢) ص = (س^{٢} + ١)(س^{٢} + ٣س – ٣)   عند س = ٢

٣) ص = س (س – ٢)(س + ٣)   عند س = – ٣

٤) ص = $\frac{س – ١}{٣}$ عند س = ٢

٥) ص = $\frac{س – ١}{س + ٢}$ عند س = – ١

٢ – أوجد معدل تغير كلا من الدوال الآتية عند قيم س المبينة أمام كلا منها :

١) د (س) = (س^{٢} – ٣)(س + ٤)   عند س = ٢

٢) د (س) = $\frac{س^{٢} – ٣}{س +١}$ عند س = ٢

٣ – أوجد ميل المماس لمنحنيات الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كلا منها :

١) ص = (س^{٢} + س)(س^{٢} – ٣) عند النقطة (– ١ ، ٠)

٢) ص = (س^{٢} – ٦ س + ٣)(٢ س – ٣) عند النقطة (١ ، ٢)

٣) ص = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$ عند النقطة (١ ، ١)

٤ – اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :

١) ص = $\frac{١}{٢}$ س (س^{٢} – ٥ س + ١)(٢ س – ٣) عند نقطة الأصل

٢) ص = $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$ عند النقطة (٠ ، – ١)

٥ – اوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية والتي تحقق الشروط :

١) ص = (٢ س + ١)(س – ١)

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

٢) ص = س^{٣} – ٢ س + ١

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

٦ – أوجد معادلة المماس فيما يلي :

١) ص = (س + ١)(س^{٣} – ٢) عند النقطة : س = ١

٢) ص = $\frac{١٦}{\text{س} + ١}$ عند النقطة : س = ٣

٧ – إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص= س^{٣} – ٣ س عند النقطتين (٠ ، ٣) ؛ (– ١ ، ٤) متوازيان

٨ – إثبت أن المماسين لمنحني الدالة ص = س^{٢} – س + ٣ عند النقطتين (٠ ، ٣) ؛ (١ ، ٣) متعامدين

٩ – إذا كانت : د (س) = س × ى (س) ،وكانت : ى (١) = ٣ ، ى$^{/}$(١) = ٢

فأوجد : د$^{/}$(١)

****

مشتقة دالة الدالة

إذا كانت : ص = [د (س)]^ن فإن : دَ = ن [د (س)]^ن-١ × دَ (س)

مشتقة (قوس)^م = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً :

إذا كانت : ص = (٥ س + ١)^٤

فإن : دَ = ٤ (٥ س + ١)^٣ × ٥ = ٢٠ (٥ س + ١)^٣

****

مثـــ١ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = (٢ س – ٣)^٥

الحـــــل

صَ = ٥ (٢ س – ٣)^٤ × ٢ = ١٠ (٢ س – ٣)^٤

****

مثـــ٢ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = (س^٣ + ٥)^٦

الحـــــل

ءص / ءس = = ٦ (س^٢ + ٥)^٥ × ٣س^٢ = ١٨س^٢ (س^٢ + ٥)^٥

****

ملحوظة :

إذا كانت : ص = √ د (س) فإن : ءص / ءس = ١ / (٢ √د (س)) × دَ (س)

فمثلاً :

إذا كانت : ص = √ ٣ س + ١

فإن : ءص / ءس = ١ / (٢ √ ٣ س+١) × ٣ = ٣ / (٢ √ ٣س+١)

****

مثـــ٣ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة: ص = ∛(٥ س^٢ ـ ٣س +٢)

الحـــــل

∴ ص = (٥ س^٢ ـ ٣ س+٢)^(١/٣)

∴ ءص / ءس = ١/٣ (٥ س^٢ ـ ٣ س+٢)^(-٢/٣) × (١٠س ـ ٣) = (١٠ س ـ ٣) / (٣ ∛(٥س^٢ ـ ٣س+٢)^٢)

مثـــ٤ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \frac{-5}{(3س^2 - س)^4}$

الحـــــــل

$\because ص = -5\,(3س^2 - س)^{-4}$

$\therefore ص' = -5 \times -4\,(3س^2 - س)^{-5}\,(6س - 1)$

$\therefore ص' = \frac{20\,(6س - 1)}{(3س^2 - س)^5}$

****

مثـــ٥ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \sqrt{(2س+3)^3}$ **عندما س = ٣**

الحـــــــل

$\because ص = (2س + 3)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ص' = \frac{3}{2}(2س + 3)^{\frac{1}{2}} \times 2 = 3\,(2س + 3)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{(2س+3)}$

عندما س = ٣ $\therefore ص' = 3 \times \sqrt{6 + 3} = 3\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$

****

مثـــ٦ـــال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $ص = \sqrt[4]{(س^2 - 3س + 1)^5}$

الحـــــــل

$\because ص = (س^2 - 3س + 1)^{\frac{5}{4}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{5}{4}(س^2 - 3س + 1)^{\frac{1}{4}}(2س - 3) = \frac{5}{4}(2س - 3)\sqrt[4]{(س^2 - 3س + 1)}$

****

نظرية :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = د [ر (س)] تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

فمثلاً :

إذا كانت : ص = ع^{8} + ١ ، ع = ٣ س ـ ٤

فإن : د = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٨ ع^{7}) × (٣) = ٢٤ $(\text{٣ س} - ٤)^{7}$

نتيجة :

إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن}-1} \times \text{ص}'$

فمثلاً :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{4}) = ٤\,\text{ص}^{3} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{4} + \text{س}^{5}) = ٤\,\text{ص}^{3} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٥\,\text{س}^{4}$

****

مثـــ٧ـــال : إذا كانت ص = ع^{5} ، ع = ٢س + ١ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحـــــــل

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٥\,\text{ع}^{4}$ ،، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥\,\text{ع}^{4} \times ٢ = ١٠\,\text{ع}^{4} = ١٠\,(\text{٢س} + ١)^{4}$

حل أخـــــــر

∵ ص = ع^{5} = $(\text{٢س} + ١)^{5}$ ∴ $\text{ص}'$ = = ٥ $(\text{٢س}+١)^{4}$ = ١٠ $(\text{٢س}+١)^{4}$

****

مثـــ٨ـــال : إذا كانت ص = ع^{6} + ٣ ، ع = س^{2} + ٥ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحـــــــل

∵ ص = ع^{6} + ٣ = $(\text{س}^{2} + ٥)^{6}$ + ٣

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\,(\text{س}^{2} + ٥)^{5} \times \text{٢س} = \text{١٢س}\,(\text{س}^{2} + ٥)^{5}$

مثـــ٩ـــال : إذا كانت ص = ع^{٥} + ع^{٣} ، ع = ٢ س – ٧ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحـــــــــل

∵ ص = (٢س – ٧)^{٥} + (٢ س – ٧)^{٣}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٥ (٢س-٧)^{٤} ×٢ + ٣ (٢س-٧)^{٢} ×٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ =١٠ (٢ س – ٧)^{٤} + ٦ (٢ س – ٧)^{٢}

****

مثـــ١٠ـــال : إذا كانت ص = ٢ ع^{٥} + $\frac{١}{ع^{٥}}$ ، ع = ٣س + ١ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحـــــــــل

∵ ص = ع^{٥} + ع$^{-٥}$ = ٢ (٣س+١)^{٥} + (٣س+١)$^{-٥}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ =١٠ (٣س+١)^{٤} × ٣ – ٥ (٣س+١)$^{-٦}$ ×٣

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣٠ (٣س+١)^{٤} – $\frac{-١٥}{(٣س+١)^{٦}}$

****

مثـــ١١ـــال : إذا كانت د (س) = (ع – ٥)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٧ أوجد : د$'$ (١)

الحـــــــــل

∵ د (س) = (س^{٢} + ٧ – ٥)^{٥} = (س^{٢} + ٢)^{٥}

∴ د$'$ (س) = ٥ (س^{٢} + ٢)^{٤} × ٢ س

∴ د$'$ (س) = ١٠ س (س^{٢} + ٢)^{٤} ∴ د$'$ (١) = ١٠ × ١ (١ + ٢)^{٤} = ٨١٠

****

مثـــ١٢ـــال : إذا كانت ص = $\frac{١}{ع^{٤}}$ ، ع = (س^{٣}+١) : أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحـــــــــل

∵ ص = ع$^{-٤}$ = (س^{٣} + ١)$^{-٤}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = - ٤ (س^{٣} +١)$^{-٥}$ × ٣س^{٢}

∴ $\frac{دص}{دس}$ = – ١٢س^{٢} (س^{٣} +١)$^{-٥}$ = $\frac{-١٢س^{٢}}{(س^{٣}+١)^{٥}}$

****

مثـــال ١٣ : إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{ع^{٧}}$ ، ع = س^{٢} + ٢س + ١ أوجد: $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــــل

∵ $ص = ع^{\frac{٧}{٣}} = (س^{٢} + ٢س + ١)^{\frac{٧}{٣}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٧}{٣}(س^{٢} + ٢س + ١)^{\frac{٤}{٣}} \times (٢س + ٢)$

$= \frac{٧\,(٢س + ٢)}{٣ \times \sqrt[٣]{(س^{٢}+٢س+١)^{٤}}}$

****

مثـــال ١٤ : إذا كانت ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = س^{٢} + ٥ إوجد : $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــــــل

∵ $ص = \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٥ - ١} = \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} + ٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س(س^{٢}+٤) - ٢س(س^{٢}+٥)}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س^{٣} + ٨س - ٢س^{٣} - ١٠س}{(س^{٢}+٤)^{٢}} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+٤)^{٢}}$

****

مثـــال ١٥ : إذا كانت ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢س^{٢}

إثبت أن $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ١٦س^{٣}$

الحـــــــل

∵ $\frac{ءع}{ءس} = ٤س$

∵ $ص = (٢س^{٢})^{٢} + ٢س^{٢} = ٤س^{٤} + ٢س^{٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١٦س^{٣} + ٤س$

∴ الطرف الايمن = $١٦س^{٣} + ٤س - ٤س = ١٦س^{٣}$ = الطرف الايسر

****

تمـــــــــارين

١ – أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي :-

١) $ص = ع^{٨}$ ؛ $ع = س^{٣} + ٢\ س$

٢) $ص = ع^{٦}$ ؛ $ع = ٢\ س^{٢} - س + ١$

٣) $ص = ع^{٥} + ع^{٣}$ ؛ $ع = ٣س^{٢} - ١$

٤) $ص = ع^{٢} + ١$ ؛ $ع = س - \frac{١}{س}$ عندما $س = ٢$

٥) $ص = (س^{٢} - ٣\ س + ٤)^{٦}$

٦) $ص = \frac{٣}{(س^{٣} + ٤\ س)^{٨}}$ ٧) $ص = \sqrt{(س^{٢} - ٢\ س)^{٥}}$

٨) $ص^{٤} = (س^{٢} - ١)^{٧}$ ٩) $ص^{٣} = \sqrt{(٣\ س - ١)^{٤}}$

٢ – أوجد كلاً من :

١) $\frac{د}{دس}(س^{٦})$ ٢) $\frac{د}{دس}(ص^{٦})$ ٣) $\frac{د}{دس}(س^{٣} + ٣\ ص^{٣})$

٣ – أجـب عما يـأتــي :-

١) إذا كانت $ص = \sqrt{ع + ٩}$ ؛ $ع = س^{٢} + ٦\ س$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ١$

٢) إذا كانت $ص = \sqrt{٢\ ع^{٣} + ٧}$ ؛ $ع = (س + ١)^{٢}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٠$

٣) إذا كانت $ص = س^{٢} + س$ ؛ $س = \sqrt{ع^{٢} - ٤\ ع + ٧}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ع=٣$

٤) إذا كانت $ص = ع\ (\sqrt{ع} - ١)$ ؛ $ع^{٢} = س^{٢} - ٢س + ١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س=٤$

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = (١ + س)^{٤}\ (١ - س)^{٤}$ والتى يكون عندها المماس موازياً محور السينات

(٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ عند النقطة (٣ ، ٤)

(٦) إذا كانت : $ص = ع^{٢}$ ، $ع = ٣\ س^{٣} - س^{٢}$ فأوجد قيم س التى تجعل : $\frac{دص}{دس} = ٠$

****

التكامـــــــــل

تعريف :

إذا كانت د (س) دالة متصلة و أمكن إيجاد دالة ت (س) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة فى مجالها بحيث : ت/ (س) = د (س) فإن :

ت (س) تسمى المشتقة العكسية للدالة د (س) أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة د (س) و يرمز للدالة ت (س) بالرمز ∫ د (س) ء س

أى أن : ت (س) = ∫ د (س) ء س إذا و فقط إذا كان : ت/ (س) = د (س)

فمثلاً: إذا كانت : د (س) = س٢ فإن : د/ (س) = ٢ س

و بالتالى تكون الدالة س٢ هى مشتقة عكسية " دالة أصلية مقابلة " للدالة ٢ س

مثـــ١ـــال : أى أن : ∫ ٢ س ء س = س٢ + ث حيث : ث ثابت التكامل

نظرية :

$$\int س^{ن}\ ء س = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$$ حيث : ن ≠ −١ ، ث ثابت

مثـــ٢ـــال : أى أن : $\int س^{٥}\ ء س = \frac{س^{٦}}{٦} + ث$

مثـــ٣ـــال : أى أن : $\int س^{٣}\ ء س = \frac{س^{٤}}{٤} + ث$

مثـــ٤ـــال : أى أن : $\int س^{٢}\ ء س = \frac{س^{٣}}{٣} + ث$

مثـــ٥ـــال : أى أن : $\int س\ ء س = \frac{س^{٢}}{٢} + ث$

****

نتيجة.

$$\int أ س^{ن}\ ء س = \frac{أ س^{ن+1}}{ن+1} + ث$$ حيث : ن ≠ −١ ، أ ، ث ثوابت

ملاحظة.

$\int ء س = س + ث$ ، $\int أ\ ء س = أ س + ث$

قاعدة:

$$\int [\text{د}_1(\text{س}) \pm \text{د}_2(\text{س}) \pm \ldots\ldots\ldots \pm \text{د}_\text{ن}(\text{س})]\ \text{ء س}$$

$$= \int [\text{د}_1(\text{س})\ \text{ء س} \pm \int \text{د}_2(\text{س})\text{ء س} \pm \ldots\ldots \pm \int [\text{د}_\text{ن}(\text{س})\text{ء س}$$

مثـــال١: $\int (٣\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٥)\ \text{ء س} = \frac{٣\text{س}^٣}{٣} + \frac{٤\text{س}^٢}{٢} - ٥\text{س} + \text{ث}$

$= \text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٢: $\int (\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٣})\ \text{ء س} = \int (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-٣})\ \text{ء س}$

$= \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}}^{\,٣} - \frac{١}{٢\text{س}^٢} + \text{ث}$

مثـــال٣: $\int (\text{س} - ٥)(\text{س} + ١)\ \text{ء س} = \int (\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥)\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٤: $\int \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ - ٥}{\text{س}}\ \text{ء س} = \int (\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥)\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ث}$

مثـــال٥: $\int \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١}\ \text{ء س} = \int \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{س} - ١}\ \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^٢ + \text{س} + ١)\ \text{ء س} = \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} + \text{ث}$

****

نظرية : إذا كان : أ ، ب ثابتين ، $\text{ن} \neq -١$ فإن :

$$\int (\text{أ س} + \text{ب})^\text{ن}\ \text{ء س} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن} + ١)} + \text{ث} \qquad \text{حيث ث ثابت}$$

مثـــال١: $\int (٢\text{س} + ٣)^٥\ \text{ء س} = \frac{(٢\text{س} + ٣)^٥}{٢ \times ٦} + \text{ث}$

مثـــال٢: $\int \sqrt{٢س - ٥}\ ء س = \int (٢س - ٥)^{\frac{١}{٢}}\ ء س$

$$= \frac{(٢س - ٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٢ \times \frac{٣}{٢}} + ث = \frac{١}{٣} \left(\sqrt{٢س - ٥}\right)^{٣} + ث$$

مثـــال٣: $\int س^{١٠} \left(\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥} ء س = \int \left[س^{٢} \left(\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^{٢}}\right) \right]^{٥} ء س$

$$= \int (٧س + ١)^{٥}\ ء س = \frac{١}{٤٢} (٧س + ١)^{٦} + ث$$

مثـــال٤: $\int (س + ١) \sqrt{٣س + ٥}\ ء س$ بالضرب فى $٣ \times \frac{١}{٣}$

$$= \frac{١}{٣} \int (٣س + ٣)(٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}} ء س$$

$$= \frac{١}{٣} \int (٣س + ٥ - ٢)(٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}} ء س$$ بإضافة ± ٥

$$= \frac{١}{٣} \int (٣س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} ء س - \frac{٢}{٣} \int (٣س + ٥)^{\frac{١}{٢}} ء س$$

$$= \frac{٢}{٤٥} (٣س + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٢٧} (٣س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$$

****

تمـــــــــارين

١ – أوجد :

(١) $\int ٥\ س^{٢} (٢س - ١)^{٢} ء س$

(٢) $\int (س^{٢} - ١)^{٢} (س^{٢} + ١)^{٢} ء س$

(٣) $\int \frac{س^{٣} + ١}{س + ١} ء س$ (٤) $\int (٥ - ٣س)^{٨} ء س$

(٥) $\int \sqrt{٣س - ١}\ ء س$ (٦) $\int \frac{٣}{(٥س + ١)^{٤}} ء س$

(٧) $\int س (س + ١)^{٥} ء س$ (٨) $\int (٢س + ١) \sqrt{س - ١}\ ء س$

الإحتمـــال

التجربة العشوائية :

هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً

فضاء العينة :

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)

أمثلة على فضاء العينة :

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر :

ف = { ص ، ك } حيث : ن (ف) = ٢

(٢) تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين" قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة "

و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

حيث : ن (ف) = $٢^٢$ = ٤

****

(٣) تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متمايزة نقود مرة واحدة "

و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص ، ص) ،(ص ، ص ، ك) ،(ص ، ك ، ص) ،(ص ، ك ، ك)

، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) (ك ، ك ، ك) }

حيث : ن (ف) = $٢^٣$ = ٨

****

(٤) تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى :

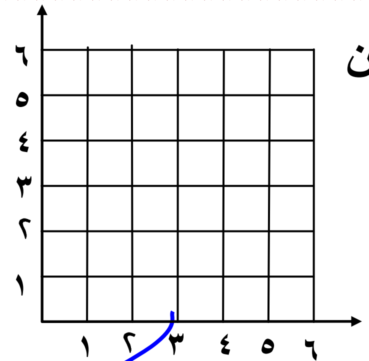
ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } حيث : ن (ف) = ٦

****

(٥) تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتالتين " حجرى نرد متمايزين مرة واحدة "وملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوى :

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ..... ، (٦ ، ٦) }

حيث : ن (ف) = $٦^٢$ = ٣٦



الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

فإذا كان : أ حدث فى ف فإن : أ ⊂ ف

و عدد عناصره هو : ن (أ) أى عدد فرص وقوع الحدث أ

فمثلا : إذا كان أ هو حدث ظهور رقم زوجى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى فإن : أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

لاحظ أن : أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⊂ ف

* **الحدث المستحيل** " ∅ " = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه
* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
* **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
* **الحدث المركب** : هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط
* **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن هما حدثان تقاطعهما = ∅

ملاحظة :

الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

****

مثـــ١ـــال: تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين" قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات : أكتب الأحداث الآتية مبيناً عدد عناصرة :

(أ) ظهور صورة على الأقل (ب) ظهور صورة (ج) ظهور صورة على الأكثر

الحـــــل

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } ن (ف) = ٤

(أ) { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، } ن(أ) = ٣

(ب) { (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ن(ب) = ٢

(حـ) { (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } ن(حـ) = ٣

****

مثـــ٢ـــال: فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى أكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً نوع كل حدث :

الحـــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ن(ف) = ٦

(١) أ حدث ظهور عدد أكبر من ٦ = ∅ حدث مستحيل

(٢) ب حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥ = {٥} حدث بسيط

(٣) حـ حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ = {٣ ، ٦} حدث مركب

(٤) ء حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ١ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} مؤكد

(٥) هـ حدث ظهور عدد زوجى = {٢ ، ٤ ، ٦} حدث مركب

(٦) و حدث ظهور عدد فردى = {١ ، ٣ ، ٥} حدث مركب

نلاحظ أن رغم أن ن(ء) = ن(و) = ٣ إلا انهما حدثان متنافيان

****

مسلمات الإحتمال :

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ ⊂ ف

فإن : إحتمال الحدث أ " ل (أ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى :

$$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ف})}$$

حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١ أى : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

أى أن : إحتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى موجب لا يزيد عن الواحد الصحيح

(٢) ل (ف) = ١ أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل (∅) = صفر أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافين من فضاء عينة فإن :

ل (أ ∩ ب) = صفر

، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

(٥) إذا كان : ف = { أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، ٠٠٠ ، أن } فإن :

ل (أ١) + ل (أ٢) + ل (أ٣) + ... + ل (أن) = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب فإن :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

****

مثـــ٣ـــال: فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى أوجد إحتمال كلاً من الأحداث الآتية :

الحـــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ن(ف) = ٦

(أ) حدث ظهور عدد أكبر من ٤ = {٥ ، ٦}   ل (أ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(ب) حدث ظهور عدد أقل من ٤ = { ١ ، ٢ ، ٣ }   ل (ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(حـ) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ = { ٣ ، ٦}   ل (أ) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(ء) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ٣= { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}   ل (د) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

(هـ) حدث ظهور عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ }   ل (هـ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

****

مثـــ٤ـــال: صندوق يحتوي علي ٤ كرات بيضاء ، ٩ كرات سوداء ، ٧ كرات حمراء أختيرت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال أن تكون الكرة المختارة :

أ ـ بيضاء   ب ـ ليست حمراء   حـ ـ سوداء أو حمراء

الحــــل

(أ) كرات بيضاء = ٤   ل (أ) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(ب) كرات ليست حمراء = ٢٠ ـ ٧ = ١٣   ل (ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$

(حـ) كرات سوداء أو حمراء = ٩ + ٧ = ١٦   ل (أ) = $\frac{١٦}{٢٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

****

مثـــ٥ـــال: ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد إحتمال الحصول على :

أ ـ صورة واحدة فقط   ب ـ كتابة واحدة على الأكثر

الحــــل

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }   ن (ف) = ٤

(أ) صورة واحدة فقط ={ (ص ، ك) ، (ك ، ص) }

ن(ب) = ٢   ل (أ) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) كتابة واحدة على الأكثر = { (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ص ، ص) }

ن(حـ) = ٣   ل (ب) = $\frac{٣}{٤}$

****

مثـــ٦ـــال: من بين ١٠ بطاقات مرقمة من ١إلى١٠ سحبت بطاقة عشوائيا أوجد إحتمال

(أ) أن يكون العدد زوجيا   (ب) أن يكون العدد مربع كامل

الحــــل

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}   ن(ف) = ١٠

(أ) العدد زوجيا = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }   ل (أ) = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(ب) العدد مربع كامل = { ١ ، ٤ ، ٩ }   ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$

العمليات على الأحداث .

الصورة الرمزية	الصورة اللفظية
ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) – ل (م ∩ ب)	إحتمال وقوع الحدث م أو الحدث ب إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل (م ∩ ب) = ل (م) + ل (ب) – ل(م ∪ ب)	إحتمال وقوع م و ب إحتمال وقوعهما معا
ل (م′) = ١ – ل (م)	إحتمال عدم وقوع م
ل (م – ب) = ل (م) – ل (م ∩ ب) ل (م ∩ ب′) = ل (م) – ل (م ∩ ب)	إحتمال وقوع م فقط إحتمال وقوع م و عدم وقوع ب
ل (ب – م) = ل (ب) – ل (م ∩ ب) ل (م′ ∩ ب) = ل (ب) – ل (م ∩ ب)	إحتمال وقوع ب فقط إحتمال وقوع ب و عدم وقوع م
ل (م ∪ ب′) = ١ – ل (ب – م) ل (ب – م)′ = ١ – ل (ب – م)	إحتمال عدم وقوع ب فقط إحتمال وقوع م أو عدم وقوع ب
ل (م′ ∪ ب) = ١ – ل (م – ب) ل (م – ب)′ = ١ – ل (م – ب)	إحتمال عدم وقوع أ فقط إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع م
ل (م′ ∪ ب′) = ١ – ل (م ∩ ب) ل (م ∩ ب)′ = ١ – ل (م ∩ ب)	إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع م و ب معا
ل (م′ ∩ ب′) = ١ – ل (م ∪ ب) ل (م ∪ ب)′ = ١ – ل (م ∪ ب)	إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع م أو ب
ل[(م – ب) ∪ (ب – م)] = ل (م) + ل (ب) – ٢ ل (م ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع م أو ب فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر

مثـــ١ـــال: إذا كان م ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان :

ل (م) = ٠,٤٣ ، ل (ب′) = ٠,٦٨ ، ل(م ∩ ب) = ٠,٣

أوجد : ل (ب) ، ل (م ∪ ب) ، ل (ب – م)

الحـــــــــل

∵ ل(ب′) = ١ – ل (ب) ∴ ل (ب) = ١ – ل(ب′) = ١ – ٠,٦٨ = ٠,٣٢

∵ ل (م ∪ ب) = ل (م) + ل (ب) – ل (م∩ ب)

= ٠,٤٣ + ٠,٣٢ ـ ٠,٣ = ٠,٤٥

∵ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(ب − أ) = ٠,٣٢ ـ ٠,٣ = ٠,٠٢

****

مثـــ٢ـــال: إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(ب/) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

أوجد : ل(ب) ، ل(أ ∪ ب) ، ل(أ − ب)

الحـــل

∵ ل(ب/) = ١ − ل(ب) ∴ ل(ب) = ١ − ل(ب/) = ١ ـ $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٥}{٨}$ ـ $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ ـ $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

****

مثـــ٣ـــال: إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٣

أوجد : ل(أ/ ∩ ب/) ، ل(ب − أ)

الحـــل

∵ ل(أ/ ∩ ب/) = ل(أ ∪ ب)/ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ ـ ٠,٦٨ = ٠,٣٢

∵ ل(أ/ ∩ ب/) = ١ ـ [ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)]

= ١ ـ [٠,٧ + ٠,٤ ـ ٠,٣] = ٠,٢

∵ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(ب − أ) = ٠,٤ ـ ٠,٣ = ٠,١

****

مثـــ٤ـــال: إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ/) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

أوجد (١) ل(أ ∩ ب) (٢) ل(أ − ب) (٣) ل(أ/ ∩ ب/)

الحـــل

∵ ل(أ/) = ١ − ل(أ) ∴ ل(أ) = ١ − ل(أ/) = ١ ـ $\frac{٥}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$

(١) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

$= \frac{٣}{٨} + \frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٤} = \frac{١٣}{٢٤}$

(٢) ل(أ − ب) = ل (أ ∪ ب) − ل (ب) = $\frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{١٢}$

(٣) ل (أ/ ∩ ب/) = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − $\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

****

مثـــ٥ــال: إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(أ/ ∩ ب/) = $\frac{١}{٤}$ أوجد ل(ب) إذا كان : (١) أ ، ب حدثين متنافيين (٢) أ ⊂ ب

الحـــــــــــل

(١) ∵ أ ، ب متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

∵ ل(أ/ ∩ ب/) = ١ − ل (أ ∪ ب) ∴ ل (أ ∪ ب) = ١ − $\frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

ل(ب) = ل (أ ∪ ب) − ل(أ) = $\frac{٣}{٤} + - \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٢٠}$

(٢) ∵ أ ⊂ ب ل (ب) = ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$

****

مثـــ٦ــال: إذا كان أ ، ب حدثين من ف ، ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد إحتمال (!) وقوع حدث واحد على الأقل (!!)عدم وقوع الحدثين أ ، ب معا

الحـــــــــــل

(!!)وقوع حدث واحد على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (أ ∪ ب) = = ٠,٥ + ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٩

(!!)عدم وقوع الحدثين أ ، ب معا = ل (أ ∩ ب)/ = ١ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب)/ = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

****

مثـــ٧ــال: إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة بحيث ٣ ل (أ) = ٤ ل (ب) ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٦٣ أوجد ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ/)

الحـــــــــــل

∵ أ ، ب متنافيان ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ ل (ٲ ∪ ب) = ل (ٲ) + ل (ب) = ٠,٦٣

= ل (ٲ) + $\frac{٤}{٣}$ ل (ٲ) = $\frac{٧}{٣}$ ل (ٲ) = ٠,٦٣

∴ ل(ٲ) = ٠,٦٣ × $\frac{٣}{٧}$ = ٠,٢٧ ، ل (ب) = ٠,٣٦

∴ ل(ٲ/) = ١ ـ ل (ٲ) = ١ ـ ٠,٢٧ = ٠,٧٣

****

تمـــــــارين

١ ــ ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أوجد إحتمال ظهور :
ٲ ــ صورة واحدة أو صورتين ب ــ صورة واحدة على الأقل

٢ ــ إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة في الدوري وكان إحتمال تعادله في عدد من المباريات هو ٠.٣ وإحتمال فوزه في عدد من المباريات هو ٠.٥ أوجد عدد المباريات التي يخسرها هذا النادي في الدوري

٣ ــ كيس يحتوى على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩ إلى ١٤ سحبت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة
ٲ ــ تحمل عددا أوليا ب ــ تحمل عددا مربعا

٤ ــ سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددا : * زوجيا ويقبل القسمة علي ٥ ** يقبل القسمة علي ٣ أ، ٥

٥ ــ صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١إلى ٨ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال أوجد إحتمال أ ن يكون : ٲ ــ الفرق المطلق بين العددين ٣
ب ــ مجموع العددين أقل من ٨

٦ ــ ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة أوجد إحتمال :
(ٲ) الحصول على عددين مختلفين (ب) مجموع العددين أكبر من ٧
(ج) مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨ (د) الفرق المطلق لعددين عددا أوليا

٧ – من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} كون عدد من رقمين مختلفين و أوجد
إحتمال الحصول على ﻢ – رقم العشرات فردى ب – رقم الآحاد أولى
جـ – رقم العشرات فردى أو رقم الآحاد أولى

٨ – إذا كان أ، ب حدثين من ف، ل(ﻢ) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ﻢ – ب) = $\frac{١}{٨}$
أوجد ل(ﻢ ∪ ب)$^{/}$ ؛ ل(ﻢ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$)

٩ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين من ف، ل(ﻢ$^{/}$ ∪ ب$^{/}$) = ٠,٧٤ ، ل(ب) = ٠,٦٥ ،
ل(ﻢ$^{/}$ ∩ ب$^{/}$) = ٠,٢٥ أوجد ل(ﻢ) ؛ ل(ﻢ ∩ ب$^{/}$)

١٠ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين من ف، ل(ﻢ ∪ ب) = ٠,٤٥ ، ل(ﻢ - ب) = ٠,١٥
، ل(ﻢ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد : ل(ﻢ) ؛ ل(ب) ، ل(ﻢ$^{/}$ ∩ ب)

١١ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين متنافيين من ف ، ل(ﻢ) = ٠,٢٧ ، ل(ب) = ٠,٣٥
أوجد: ل(ﻢ ∩ ب)$^{/}$ ، ل(ﻢ$^{/}$ ∩ ب$^{/}$)

١٢ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين متنافيين من ف ، ل(ﻢ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(ﻢ – ب) = $\frac{١}{٢}$
أوجد ل(ﻢ) ؛ ل(ب) ، ل(ﻢ$^{/}$∪ ب$^{/}$)

١٣ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين من ف ، ل(ﻢ) = $\frac{١}{٤}$ ؛ ل(ﻢ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل(ب)
إذا كان : (!) ﻢ ، ب حدثين متنافيين (!!) ﻢ ⊂ ب

١٤ – إذا كان ﻢ ، ب حدثين من ف ، ل(ﻢ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(ﻢ ∩ ب) = ٠,٤
أوجد إحتمال * وقوع أحد الحدثين على الأكثر * وقوع أحد الحدثين دون الآخر

١٥ – يصوب لاعبان ﻢ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب
اللاعب ﻢ الهدف هو $\frac{٢}{٥}$ ، إحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو $\frac{١}{٤}$ ، إحتمال أن
يصيب اللاعبان الهدف معا هو $\frac{١}{٦}$ أوجد
* إحتمال إصابة الهدف * إحتمال إصابة الهدف من اللاعب ﻢ فقط