

«الحل»

أولاً : نفرض أن (س، ص)  $\exists$  خط عمل  $\vec{C}$

$$\vec{C} \times \vec{R} = \vec{C} \times (س - ٣, ص + ٢) \times (٢, -٥) = ٢٠ \vec{e}$$

$$(-٥س + ١٥ - ٢ص - ٤) \vec{e} = ٢٠ \vec{e}$$

$$(-٥س + ١٥ - ٢ص - ٢٠) = ١١ - ٢٠ \text{ ----- (١)}$$

معادلة خط عمل  $\vec{C}$  هي :  $٥س + ٢ص + ٩ = ٠$  ----- (٢)

ثانياً : يمكن تحديد احدى نقط تأثير القوة بفرض أى قيمة لـ س وإيجاد قيمة ص المناظرة من (٢)

$$\text{مثلاً : عند } س = ١ : ٥ + ٢ص + ٩ = ٠ \quad ص = -٧$$

(١، -٧) نقطة تأثير القوة

$$\vec{C} \times \vec{R} = \vec{C} \times (س - ٣, ص + ٢) = \vec{C} \times (١ - ٣, -٧ + ٢) = \vec{C} \times (-٢, -٥) = ٢٢ \vec{e}$$

$$\text{العمود ل } \vec{C} = \frac{\vec{C} \times \vec{R}}{\|\vec{C}\|^2} = \frac{٢٢ \vec{e}}{٢٩} = \frac{٢٢}{٢٩} \vec{e} \quad \text{وحدة طول}$$



لمشاهدة المزيد من  
فيديوهات مراجعات الثانوية  
العامة يمكنكم متابعة

[www.cairodar.youm7.com](http://www.cairodar.youm7.com)

## المتجهات والعزوم

$\vec{s}$  = متجه الوحدة في اتجاه محور السينات

$\vec{v}$  = متجه الوحدة في اتجاه محور الصادات

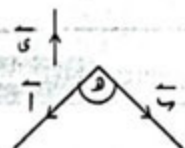
\* إذا كان المتجه  $\vec{A}$  =  $\vec{A}_s \vec{s} + \vec{A}_v \vec{v}$  يمثل الزوج المرتب  $(A_s, A_v)$

فإن معيار المتجه  $\vec{A}$  =  $||\vec{A}|| = \sqrt{A_s^2 + A_v^2}$

متجه الوحدة في اتجاه المتجه  $\vec{A}$  يرمز له  $(\vec{A})^*$  حيث  $\vec{A} = ||\vec{A}|| (\vec{A})^*$

\* توازي متجهين:  $\vec{A} // \vec{B}$  إذا  $\vec{A} = k \vec{B}$  حيث  $k$  ثابت  $\neq 0$ .

### الضرب القياسي والضرب الاتجاهي لمتجهين



إذا كان  $\vec{A} = \vec{A}_s \vec{s} + \vec{A}_v \vec{v}$  ،  $\vec{B} = \vec{B}_s \vec{s} + \vec{B}_v \vec{v}$

\*  $||\vec{A}|| \neq 0$  ،  $||\vec{B}|| \neq 0$

الضرب الاتجاهي (x)	الضرب القياسي (·)
$\vec{A} \times \vec{B} = (\text{أب ج هـ}) \vec{i}$ حيث $\vec{i}$ متجه وحدة عمودي على المستوي الذي يقع فيه $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ويحدد حسب قاعدة اليد اليمنى	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{أب ج هـ}$ ومنها ج هـ = $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{  \vec{A}     \vec{B}  }$
$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ عندما $\vec{A} // \vec{B}$	$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ عندما $\vec{A} \perp \vec{B}$
$\vec{A} \times (\vec{B} - \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) - (\vec{A} \times \vec{C})$	$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
$\vec{A} \times \vec{A} = 0$	$\vec{A} \cdot \vec{A} =   \vec{A}  ^2$

الضرب الاتجاهي (x)	الضرب القياسي (⊙)
$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_1\vec{b}_2 - \vec{a}_2\vec{b}_1)\vec{e}$	$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2$
حيث $\vec{e}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ مجموعة يمنية أي أن : $\vec{e} = \vec{v} \times \vec{w}$ $\vec{v} = \vec{e} \times \vec{w}$ $\vec{w} = \vec{v} \times \vec{e}$ $0 = \vec{v} \odot \vec{v}$ $1 = \vec{e} \odot \vec{e}$	المركبة الجبرية للمتجه $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$ $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b}$ مركبة المتجه $\vec{a}$ في اتجاه $\vec{b}$ $(\vec{b}) \left[ \frac{\ \vec{a} \odot \vec{b}\ }{\ \vec{b}\ } \right] =$ $(\vec{b}) \left[ \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\vec{b}} \right] =$

لاحظ أن :

مساحة سطح المثلث الذي فيه  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  يمثلها ضلعين متجاورين  $\frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

مثال ١

أثبت أن : (أ)  $\vec{a} \odot \vec{b} = (\vec{a} \odot \vec{b}) + \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

(ب)  $\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \odot \vec{b}} = \text{ظاهر}$

(ج)  $2 = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

## الحل

$$(أ) \text{ الطرف الأيمن} = (أ ب جاه) + (أ ب جتاه) = أ'ب' (جا'ه + جتا'ه) = أ'ب' = الأيسر$$

$$(ب) \text{ الطرف الأيمن} = \frac{أ ب جاه}{أ ب جتاه} = \text{ظاهر}$$

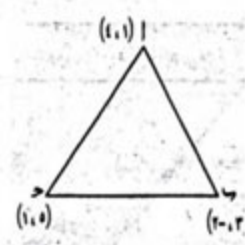
(ج) باستخدام خاصية التوزيع :

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيمن} &= أ' \times أ + أ' \times أ - أ' \times أ - أ' \times أ = 0 \\ &= أ' \times أ + أ' \times أ - أ' \times أ - أ' \times أ = 0 \end{aligned}$$

## مثال ٢

إذا كانت  $أ = (٤, ١)$  ،  $ب = (٣, -٢)$  ،  $ج = (١, ٥)$  أوجد

مساحة سطح  $\Delta أ ب ج$



$$\text{مساحة سطح } \Delta = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{أ ج} \|$$

$$\overrightarrow{أ ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{أ} = (٣ - ٤, -٢ - ١)$$

$$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (١ - ٤, ٥ - ١)$$

$$\overrightarrow{أ ج} \times \overrightarrow{أ ب} = (٣ - ٤, -٢ - ١) \times (١ - ٤, ٥ - ١) = -١٨ ع$$

“مساحة سطح  $\Delta أ ب ج = ٩$  وحدة مربعة”

إذا كان  $\overline{أ} = \overline{م} - \overline{ص} - \overline{ب}$  ،  $\overline{ب} = \overline{س} + \overline{ص}$  ، وكان  $\overline{أ} \odot \overline{ب} = \overline{٧-}$  ،  
 $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{١٧ ع}$  أوجد  $\overline{م}$  ،  $\overline{ص}$

## الحل

$\overline{أ} \odot \overline{ب} = \overline{م} - \overline{٢} = \overline{٧-}$  ..... (١)  
 $\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{(م + ٢) ع} = \overline{١٧}$  ..... (٢)

من (١)  $\overline{م} - \overline{٢} = \overline{٧-}$  ..... (٣) بالتعويض في (١)

$$\frac{\overline{٣-}}{٢} = \overline{أ} ، \overline{٥} = \overline{ص} \text{ ومنها } \overline{١٥} = \overline{٧-} + \overline{٢} = \overline{٩-}$$

من (٣)  $\overline{م} = \overline{٣}$  ،  $\overline{أ} = \overline{١٠-}$

## مثال ٤

$\overline{أ} ، \overline{ب}$  متجهان متوازيان حيث  $\overline{أ} = \overline{٢س} - \overline{٣ص}$  فإذا كان  $\overline{أ} \odot \overline{ب} = \overline{٣٩-}$  ،  
 أوجد  $\overline{ب}$  ، وإذا كان  $\overline{ج} = \overline{٣س} + \overline{٤ص}$  أوجد المركبة الجبرية للمتجه  $\overline{ب}$  في اتجاه  $\overline{ج}$

## الحل

$\overline{أ} // \overline{ب} \quad \overline{ب} = \overline{ك} \quad \overline{ب} = \overline{٢ك} - \overline{٣كص}$   
 $\overline{أ} \odot \overline{ب} = \overline{(٢س - ٣ص) \odot (٢ك - ٣كص)} = \overline{٤ك + ٩كص} = \overline{٣٩-}$   
 $\overline{٣-} = \overline{ك} \quad \overline{ب} = \overline{٢ك - ٣كص}$   
 $\overline{المركبة الجبرية} = \frac{\overline{ب} \odot \overline{ج}}{\overline{ج} \odot \overline{ج}} = \frac{١٨}{٥}$

## مسائل دليل التقويم

مثال ٥

(٢)  $\Delta$  أ ب ج فيه م  $\exists$  أ ب بحيث أ م : م ب = ١ : ٢ ، ن  $\exists$  أ ج بحيثأ ن : ن ج = ١ : ٢ فإذا كان أ ن  $\times$  م ن = أ ج  $\times$  أ ج  $\times$  ك ب ج فأوجد

قيمة الثابت ك

الحل

نستخدم المعنى الهندسي لمعيار حاصل الضرب الاتجاهي لفك رموز هذه المسألة

$$\overrightarrow{أ ن} \times \overrightarrow{م ن} = \overrightarrow{أ ج} \times \overrightarrow{ك ب ج}$$

$$\|\overrightarrow{أ ن} \times \overrightarrow{م ن}\| = \|\overrightarrow{أ ج} \times \overrightarrow{ك ب ج}\|$$

$$\overrightarrow{أ ن} \times \overrightarrow{م ن} ، \overrightarrow{أ ج} \times \overrightarrow{ك ب ج}$$

لهما نفس الاتجاه  $\leftarrow$  ك < .

$$\|\overrightarrow{ك}\| = ١$$

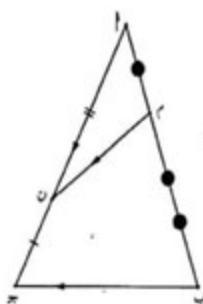
$$٢ \times \text{المساحة } \Delta أ م ن = \overrightarrow{ك} \times ٢ \times \text{مساحة } \Delta أ ب ج$$

$$٢ \times \frac{١}{٢} \times أ م \times أ ن جا أ = \overrightarrow{ك} \times ٢ \times \frac{١}{٢} \times أ ب \times أ ج جا أ$$

$$\frac{أ م}{أ ب} \times \frac{أ ن}{أ ج} = \overrightarrow{ك}$$

$$\overrightarrow{ك} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣}$$

$$\overrightarrow{ك} = \frac{٢}{٩}$$



$$(١) \quad \overline{أ}، \overline{ب}، \overline{ج} \text{ ثلاثة متجهات تحقق أن } \overline{أ} + \overline{ب} + \overline{ج} = \overline{٠}$$

$$\text{أوجد قيمة المقدار ص} = \overline{أ} \odot \overline{ب} + \overline{ب} \odot \overline{ج} + \overline{ج} \odot \overline{أ}$$

$$\text{إذا علمت أن } \overline{||\overline{أ}}|| = ١، \overline{||\overline{ب}}|| = ٤، \overline{||\overline{ج}}|| = ٢$$

الحل

يجب استخدام معطيات المسألة حتى يمكن الحصول على قيمة المقدار المطلوب

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{٠} \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}|| \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}|| \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\text{بالمثل } \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}|| \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}|| \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}||$$

$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}||$$

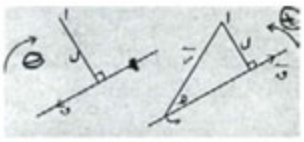
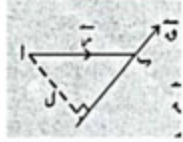
$$\overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}|| \quad \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ب}}||$$

$$\text{كذلك يمكن استنتاج أن } \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| = \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\text{ص} = \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}||$$

$$\text{ص} = \overline{||\overline{أ}}|| + \overline{||\overline{ب}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| = \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}|| + \overline{||\overline{ج}}||$$

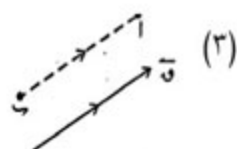
# العزوم (عزم قوة حول نقطة)

القياس الجبري للعزم	متجة العزم
 <p> <math>\text{ج} ١ = \text{ق} \times \text{ل}</math>  <math>\text{ج} ١ = - \text{ق} \times \text{ل}</math>                      لاحظ أن :  <math>\text{ل} = \text{طول القطعة العمودية من أ علي}</math>  <math>\text{خط عمل ق} ، \text{ل} = \text{ر جا هـ}</math> </p>	 <p> <math>\vec{ج} و \vec{ر} = \vec{ق} \times \vec{ل}</math>  <math>\text{حيث } \vec{ر} = \vec{أ ب} = \vec{ب} - \vec{أ}</math>  <math display="block">\frac{\text{معيار العزم}}{\text{معيار القوة}} = \frac{\ \vec{ج} أ\ }{\ \vec{ق}\ } = \text{ل}</math> </p>

\* قواعد هامة :

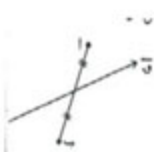
(١) إذا كانت أ  $\exists$  خط عمل ق فإن عزم ق حول أ = صفر

(٢) إذا كانت ق  $\neq ٠$  وكان ج  $= ١$  فإن أ  $\exists$  خط عمل ق



إذا كان : ج  $= ١$  ج ب فإن أ ب // خط عمل ق

(٤) إذا كان : ج  $= -١$  ج ب فإن خط عمل ق ينصف أ ب



مثال (١)

إذا كانت القوة ق  $= \vec{س} + \vec{ص}$  تؤثر في النقطة أ (-٣ ، ٢) أثبت باستخدام

العزوم أن خط عمل ق يوازي ب ء ونصّف ب ج حيث : ب (-١ ، ٢) ،



جـ (٥، ٦) ، ع (٧، ٤)

الحل

نوجد متجه عزم القوة  $\vec{Q}$  المؤثرة في أ حول كل من النقط ب ، ج ، ع ،

$$\vec{Q} \times \vec{B} = \vec{Q} \times \vec{C} = \vec{Q} \times \vec{E}$$

$$= (\vec{B} - \vec{C}) \times \vec{Q}$$

$$= (-2, 3) \times (4, 2) =$$

$$= -2 \times 2 -$$

$$= -4 - 6 = -10$$

$$= (-2, 3) \times (4, 2) =$$

$$= -2 \times 2 -$$

$$= -4 - 6 = -10$$

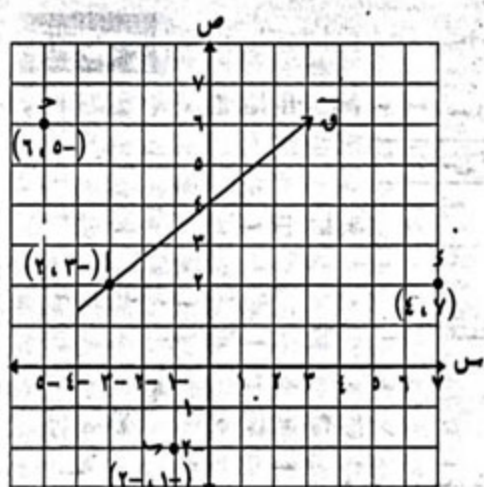
$$= \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{B} = \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{C}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{B}$$

$$= (-2, 3) \times (4, 2) =$$

$$\vec{Q} \parallel \vec{B}$$

$$\vec{Q} \parallel \vec{C}$$



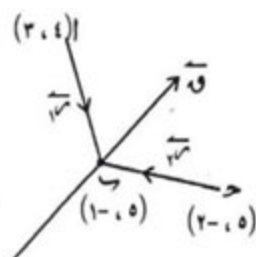
مثال (٢)

إذا كانت القوة  $\vec{Q}$  = ٢س - ٥ص عزمها حول النقطة أ (٣، ٢) يساوي ٢٠ع  
 فأوجد معادلة خط عمل  $\vec{Q}$  ثم احسب بعد النقطة ب (١، ٤) عن خط عمل  $\vec{Q}$

-----

إذا كانت النقط أ (٣, ٤) , ب (١, ٥) , ج (٢, ٥) أوجد القوة  $\vec{Q}$  إذا علم أن عزومها حول النقط أ , ب , ج تساوى ٣٨ ع , ٠ , ٨- على الترتيب.

◀ الحل ▶



$$\vec{Q} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{ب } \vec{Q} \text{ خط عمل } \vec{Q}$$

$$\text{نفرض أن } \vec{Q} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$$

$$\text{ج } ٣٨ = \vec{Q} \cdot \vec{AB} = m\vec{AB} \cdot \vec{AB} + n\vec{AC} \cdot \vec{AB} = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{ب } ٣٨ = \vec{Q} \cdot \vec{AB} = m\vec{AB} \cdot \vec{AB} + n\vec{AC} \cdot \vec{AB} = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{ج } ٨- = \vec{Q} \cdot \vec{AB} = m\vec{AB} \cdot \vec{AB} + n\vec{AC} \cdot \vec{AB} = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{ب } ٨- = \vec{Q} \cdot \vec{AB} = m\vec{AB} \cdot \vec{AB} + n\vec{AC} \cdot \vec{AB} = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{بحل (١) , (٢) ينتج أن } m = ٨, n = ٦ \quad \vec{Q} = ٨\vec{AB} + ٦\vec{AC}$$

### نظرية العزوم

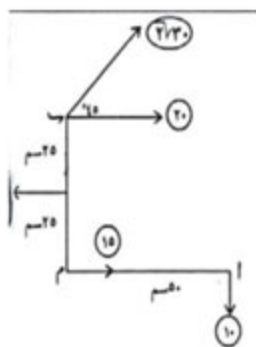
مجموع عزوم عدة قوى مستوية بالنسبة لاي نقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

- هذه النظرية يمكن تطبيقها لاي مجموعة من القوى التي تقع في مستوى واحد (متلاقية متوازية - غير متلاقية).

■ قاعدة هامة ينعدم مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة إذا كانت :

- (١) المجموعة متزنة . أو (٢) هذه النقطة تقع على خط عمل محصلة هذه المجموعة

## مثال (١)



في الشكل المقابل اذا كانت محصلة القوى المؤثرة تمر بنقطة م.  
أوجد ق. ( مقادير القوى ينقل الكجم ).

◀ الحل ▶

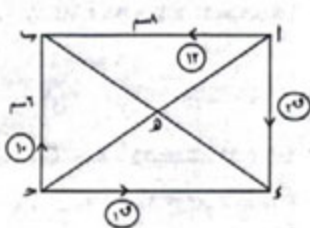
المحصلة تم بنقطة م

ج م = صفر

$$\begin{aligned} \text{ج م} &= 10 \times 4 + 20 \times 2 - 25 \times 3 - 50 \times 2 = 135 \\ &= 100 - 25 + 50 - 100 = 150 \times 2 \sqrt{3} \\ &= 120 \text{ ث كجم} \end{aligned}$$

## مثال (٢)

أ ب د ه مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب ج = ٦ سم ، أثرت قوة مقاديرها ١٠ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢ نيوتن في أ ب ، ج د ، د ه ، ه أ على الترتيب فإذا انعدم مجموع عزوم هذه القوى حول كل من ج ، ه فأوجد ق. ١ ، ق. ٢ حيث ه مركز المستطيل



الحل

$$\text{ع ج} = 12 \times 6 - 10 \times 8 = 12$$

$$\text{ق ٢} = \frac{6 \times 12}{8} = 9 \text{ نيوتن}$$

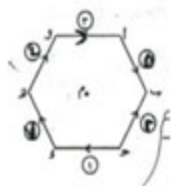
$$\text{ع د} = 10 \times 4 - 3 \times 12 + 4 \times 2 - 3 \times 10 = 10$$

$$\text{بالتعويض عن ق ٢} = 9 \text{ ينتج أن : ق ١} = \frac{40}{3} \text{ نيوتن}$$

## مثال ٣

أ ب ج د ه و سداسي منتظم ، أثرت قوي مقاديرها ٥ ، ٢ ، ١ ، ٧ ، ٤ ، ٣ ث.جم في أ ب ، ب ج ، ج د ، د ه ، ه و ، و أ على الترتيب أثبت أن مجموع عزوم هذه القوى حول كل من النقط أ ، ب ، مركز المستطيل يكون ثابتاً

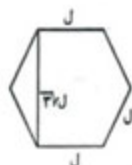
## الحل



نفرض أن طول السداسي = ل سم

$$ج'' = ١ + \frac{\sqrt{3}}{2} ل \times ٢ - \frac{\sqrt{3}}{2} ل \times ١ - \frac{\sqrt{3}}{2} ل \times ٧ + \frac{\sqrt{3}}{2} ل \times ٤$$

$$= ٥ \frac{\sqrt{3}}{2} ل \text{ نيوتن.سم}$$



$$ج'' = ١ + ج' = ٥ \frac{\sqrt{3}}{2} ل \text{ نيوتن.سم}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} ل = \text{لاحظ أن بعد المركز م عن كل ضلع}$$

## مثال ٤

أ ب ج د ه شبة منحرف فيه : أب = ١٢ سم ، ب ج د = ١٨ سم ، أ ه = ٩ سم ، فإذا كان أ ه // ج د ، ق (ب) = ٩٠° وأثرت قوي مقاديرها ق ١ ، ق ٢ ، ق ٣ ، ث.جم في أب ، ب ج ، ج د ، د ه على الترتيب ، أوجد ق ١ ، ق ٢ إذا علم أن مجموع عزوم القوي حول أي نقطة في مستوي الشكل يكون ثابتاً

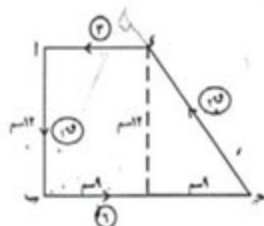
## الحل

$$ج' = ج ه ،$$

$$ج'' = ق ١ \times ١٨ + ١٢ \times ق ٢ = ٩ \times ١٢ + ١٢ \times ٦$$

$$ج'' = ١٨٠$$

$$ج'' = ١٨٠ \text{ ث.جم}$$



$$ج' = ١٨ \times ٤ + ١٢ \times ٣ = ١٠٨ \text{ ث.جم. سم (مقدار ثابت)}$$

$$ج' = ٣ + ١٢ \times ق ٢ + ١٨ \times ج' = ١٠٨$$

$$ج'' = ٣٦ + ق ٢ \times ١٨ \times \frac{٤}{٥} = ١٠٨ \text{ ومنها : ق ٢ = ٥ ث.جم}$$

