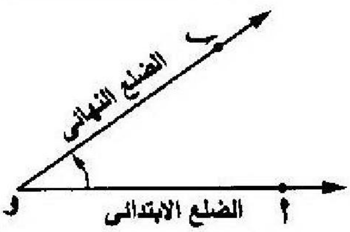
طرق قياس الزاوية

الزاوية الموجهة : هي زوج مرتب من شعاعين لهما نقطة بداية واحدة

يسمى الشعاعين ضلعا الزاوية ، نقطة البداية رأس الزاوية

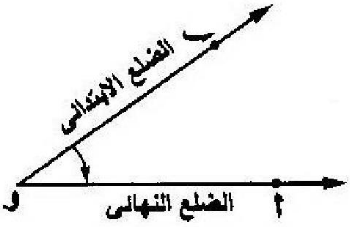
فإذا كان و أ ، و ب ضلعي الزاوية و رأسها (و)

وإذا اعتبرنا أن :الضلع الإبتدائي هو و أ ، والضلع النهائي هو و ب ، فإن الزوج المرتب(و أ ، و ب) يعبر عن ∠ أ و ب الموجهه (شكل ١)



شكل (١)

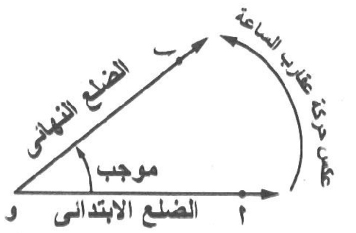
أما إذا اعتبرنا أن : الضلع الإبتدائي هو و ب ، والضلع النهائي هو و أ فإن الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن ∠ ب و أ الموجهه (شكل ٢)



شكل (٢)

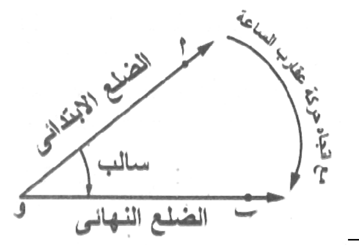
القياس الموجب للزاوية الموجهة :

يكون قياس الزاوية الموجهه موجباً إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي عكس إتجاه دوران عقارب الساعة



القياس السالب للزاوية الموجهة :

يكون قياس الزاوية الموجهه سالباً إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي إلي الضلع النهائي في نفس إتجاه دوران عقارب الساعة



ملاحظات

① لكل زاوية موجهه قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون :

| القياس الموجب | + | القياس السالب | = ٣٦٠°

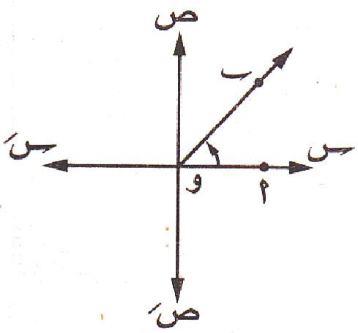
② إذا كان القياس الموجب للزاوية = θ فإن القياس السالب لها = θ - ٣٦٠°

فمثلا :القياس السالب للزاوية الموجهه التي قياسها ١٢٠° = ١٢٠° − ٣٦٠° = − ٢٤٠°

③ إذا كان القياس السالب للزاوية = − θ فإن القياس الموجب لها = − θ + ٣٦٠°

فمثلا :القياس الموجب للزاوية الموجهه التي قياسها − ٤٠° = − ٤٠° + ٣٦٠° = ٣٢٠°

الوضع القياسي للزاوية الموجهه:

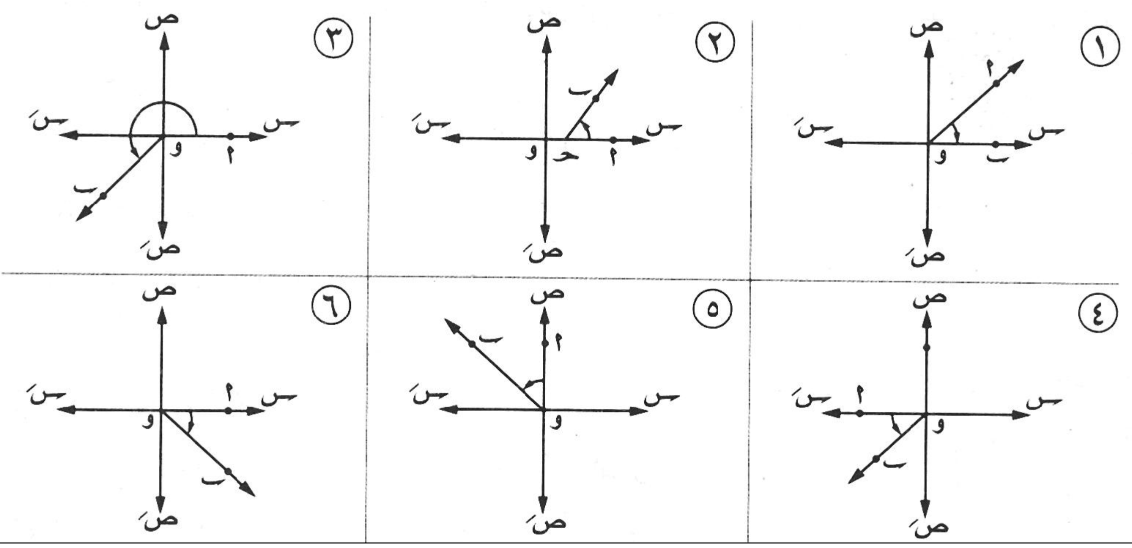


تكون الزاويه في الوضع القياسي إذا كان :

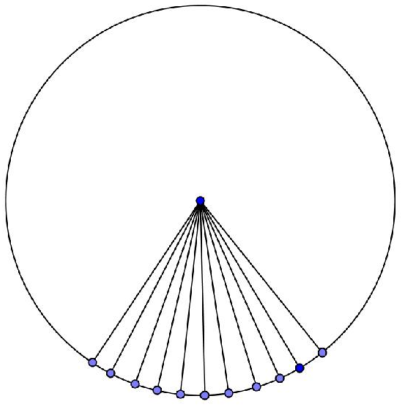
① رأسها نقطة الأصل (و)

② ضلعها الإبتدائي ($\overrightarrow{\text{و أ}}$) يقع على الجزء الموجب لمحور السينات ($\overrightarrow{\text{و س}}$)

أي الزوايا الموجهه التالية في وضعها القياسي؟



القياس الستيني للزاوية



وفيه تقسم الدائرة إلى ٣٦٠ قطاعاً دائرياً كل منها قياس زاويته المركزية يساوي درجة واحدة (1°)، وكل درجة تقسم إلى ٦٠ جزءً كل منها يسمى دقيقة ($1'$) ، وكل دقيقة تقسم إلى ٦٠ جزءً كل منها يسمى ثانية ($1''$).

أي أن وحدات القياس الستيني هى :

الدرجة - الدقيقة - الثانية.

وعلى ذلك فإن : ١ درجة = ٦٠ دقيقة ،،، ١ دقيقة = ٦٠ ثانية

فمثلا: الزاوية التي قياسها : ١٠٠ درجة و ٣٠ دقيقة و ٢٥ ثانية

تكتب على النحو التالي: $25''\ 30'\ 100^\circ$ والتي تكتب على الآلة الحاسبة كالتالي :

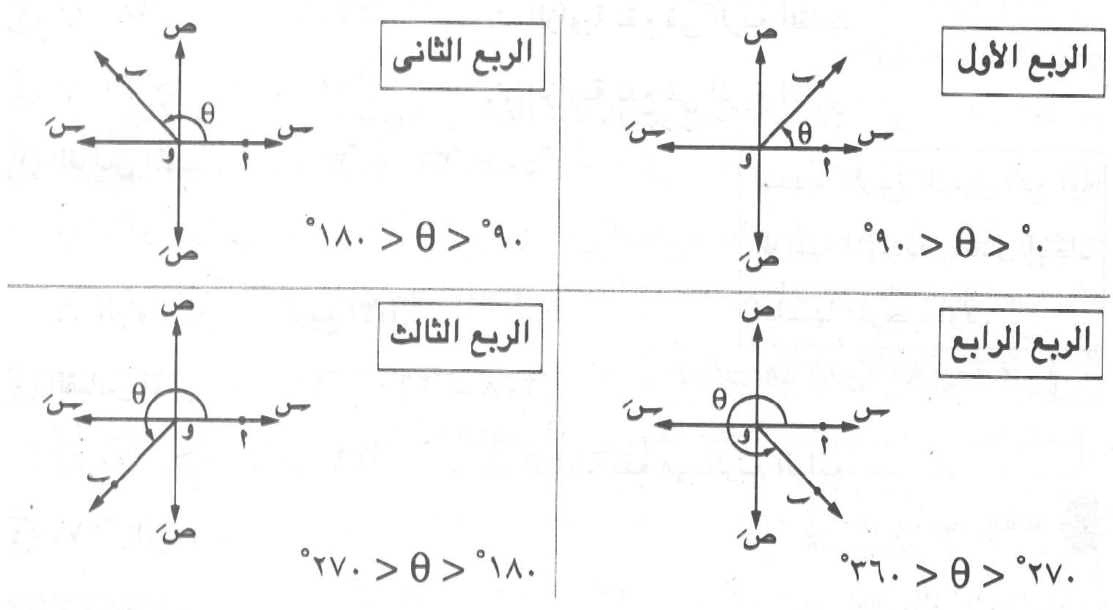
إبدأ	➤	1	0	0	°’’’	3	0	°’’’	2	5	°’’’	=

ملاحظات

① ق (∠ أ و ب) ≠ ق (∠ ب و أ) ولكن : ق (∠ أ و ب) = - ق (∠ ب و أ) (لماذا؟)

فمثلاً إذا كان : ق (∠ أ و ب) = ٤٠° فإن : ق (∠ ب و أ) = - ٤٠°

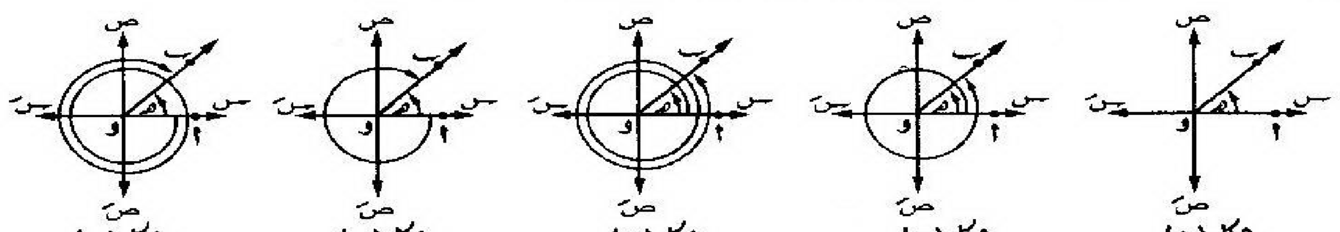
② إذا رسمنا ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي وكان قياسها الموجب θ فإن ضلعها النهائي $\overrightarrow{\text{و ب}}$ يقع في أحد الأرباع الأربعة التي ينقسم اليها المستوى بواسطة محوري الأحداثيات كما في شكل المبين أدناه



③ إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهه (∠ أ و ب) على أحد محوري الإحداثيات فإن الزاوية تسمى بالزاوية الرُبعية أي أن الزوايا الرُبعية هي الزوايا التي قياسها : ± ٩٠°، ± ١٨٠°، ± ٢٧٠°، ± ٣٦٠° أو على الصورة : ٩٠° ن حيث ن عدد صحيح

الزوايا المتكافئة

- إذا تأملنا الزوايا الموجهة فى الوضع القياسى فى الأشكال الآتية :



شكل(١) شكل(٢) شكل(٣) شكل(٤) شكل(٥)

فإننا نلاحظ ما يلي:

① في شكل (١) : الزاوية قياسها = θ

② في شكل (٢) : الزاوية قياسها = θ + ٣٦٠° = θ + ٣٦٠° × ١

③ في شكل (٣) : الزاوية قياسها = θ + ٣٦٠° × ٢

④ في شكل (٤) : الزاوية قياسها = -(٣٦٠° - θ) = θ - ٣٦٠ = θ - ٣٦٠ × ١

⑤ في شكل (٥) : الزاوية قياسها = -(٣٦٠° × ٢ - θ) = θ - ٣٦٠ × ٢

أي أن : إذا كان θ هو قياس زاوية موجهه في الوضع القياسي فإن الزوايا التي قياساتها : (θ ± ٣٦٠°) ،(θ ± ٣٦٠° × ٢)، (θ ± ٣٦٠° × ٣)،.....، (θ ± ٣٦٠° × ن)

حيث ن عدد صحيح ، لها جميعا نفس الضلع النهائي

مثل هذه الزوايا يُطلق عليها زوايا متكافئة

تعريف الزوايا المتكافئة

هي زوايا موجهه في الوضع القياسي و لها جميعاً نفس الضلع النهائي

ملاحظة هامة

لتحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهه θ يجب أن تكون : ٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠°

حيث: θ = θ ± ن × ٣٦٠° ، ن ∈ ص

مثال

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الأتية

① ٤٤٠° ② - ١٤٠° ③ ٨٤٠°

④ - ٤٠٠° ⑤ - ١١٠٠°

الحل

① ٤٤٠° = ٤٤٠° - (١ × ٣٦٠°) = ٨٠° تقع في الربع الأول

② - ١٤٠° = - ١٤٠° + (١ × ٣٦٠°) = ٢٢٠° تقع في الربع الثالث

③ ٨٤٠° = ٨٤٠° - (٢ × ٣٦٠°) = ١٢٠° تقع في الربع الثاني

④ - ٤٤٠° = - ٤٠٠° + (٢ × ٣٦٠°) = ٣٢٠° تقع في الربع الرابع

⑤ - ١١٠٠° = - ١١٠٠° + (٤ × ٣٦٠°) = ٣٤٠° تقع في الربع الرابع

تمــاريــن

❶ أكمل العبارات الآتية :

① الزاوية الموجهه هي......... من شعاعين هما...... ولهما بداية واحدة هي ....

② تكون الزاوية في الوضع القياسي إذا كان ....

③ يكون قياس الزاوية الموجهه موجباً إذا كان الإتجاه من الضلع الإبتدائي الى الضلع النهائي في .... ، وسالباً إذا كان الإتجاه ....

④ يقال للزوايا الموجهه في الوضع القياسي انها متكافئة إذا كان ....

⑤ إذا كان هو القياس الموجب لزاوية موجهه(θ°)فإن القياس السالب لها يساوي......

⑥ إذا كان هو القياس السالب لزاوية موجهه($-\theta^\circ$)فإن القياس الموجب لها يساوي....

⑦ إذا وقع الضلع النهائي للزاوية ا لموجهه على أحد محوري الإحداثيات فإنها تسمى ....

⑨ الزاوية التي قياسها(- ٣٠٠°) أصغر قياس موجب لها هو......... وتقع في الربع ....

⑩ الزاوية التي قياسها ١٢٠° يكون قياسها السالب هو.........و تقع في الربع.........

⑪ الزاوية التي قياسها ٤٥° تكافئ زاوية موجبة قياسها........ وتكافئ زاوية سالبة قياسها.............

⑫ أصغر قياس موجب لزاوية موجهه تكافئ الزاوية التي قياسها ٨٠٠° يساوي ....

⑬ الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها ١٢٠٠° هو الربع ....

⑭ أصغر قياس موجب لزاوية موجهه تكافئ الزاوية التي قياسها ١٥٣٠° هو .... وهي زاوية ....

⑮ أضغر قياس موجب لزاوية موجهه نكافئ الزاوية التي قياسها ١١٤٠° هو ....

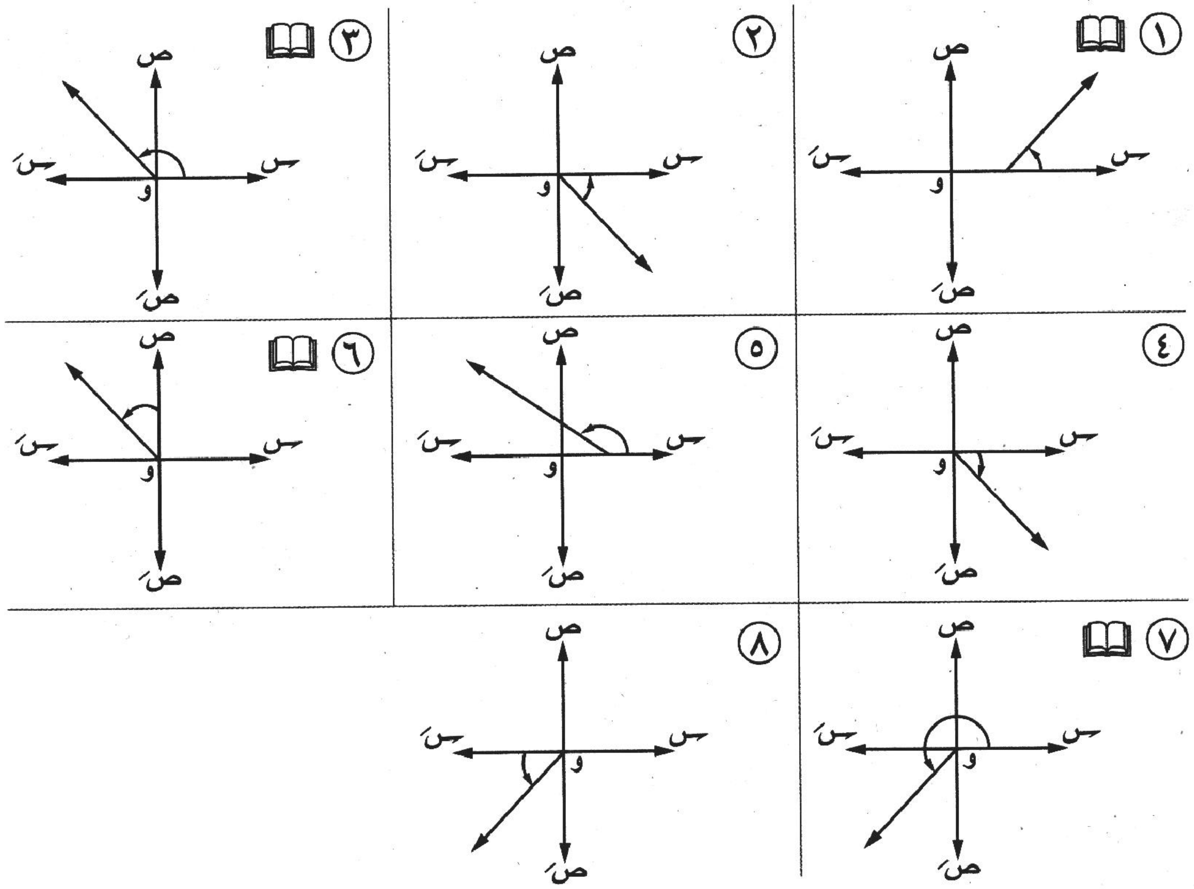
❷ أوجد زاويتين احداهما موجبة والأخرى سالبة تكافئان كل زاوية مما يأتي:

① ٦٥°	② ١٠٠°	③ ١٤٠°	④ - ١٥٠°	⑤ - ١٨٠°
⑥ - ٣١٥°	⑦ ٦٣٠°	⑧ ١١٠٠°	⑨ - ١٨٠٠°	⑩ - ٧٧٠°

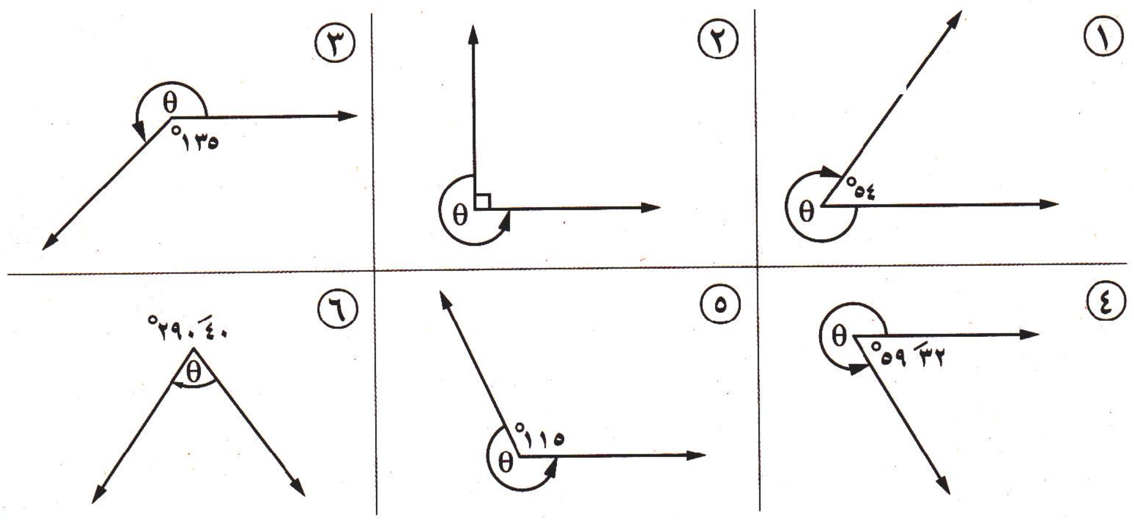
❸ حدد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الأتية:

① ٥٧°	② ٢٢٠°	③ - ٥٠٠°	④ ٥١٠°	⑤ - ٦٠°
⑥ - ٣٠٠°	⑦ ٩٨٠°	⑧ - ٨٨٠°	⑨ - ١٠٠°	⑩ ١٢٠٠°

❹ أي الزوايا الموجهه الآتية في وضعها القياسي ؟ فسر إجابتك



❺ أوجد قياس الزاوية المشار اليها في كل شكل من الأشكال الآتية :

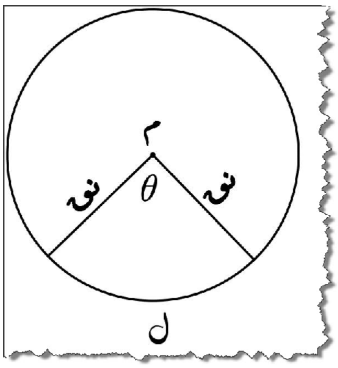


طرق قياس الزاوية

أولاً القياس الستيني :

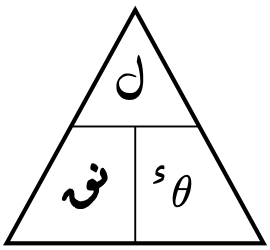
سبق عرضة في الدرس السابق...

ثانياً : القياس الدائري (القياس الزاوي)



القياس الدائري لزواية مركزية تحصر قوس طوله ل في دائرة طول نصف قطرها **نق** هو:
النسبة بين طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية إلى طول نصف قطر الدائرة. ويرمز له بالرمز $\theta^{ء}$

أي أن : $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ومنها: $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$



وأيضاً : $ل = \theta^{ء} \times نق$

تعريف الزاوية النصف قطرية (الراديان)

هي زاوية مركزية تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة (ل = **نق**)

مثال

زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم تحصر قوساً طوله ٢٥ سم
أوجد قياسها بالتقدير الدائري

الحل

$\because$ ل = ٢٥ سم ، **نق** = ١٥ سم

$\therefore \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

$\therefore \theta^{ء} = \frac{٢٥}{١٥} = ١,٦٦٧^{ء}$

مثال

زاوية مركزية قياسها $١,٢^{ء}$ تحصر قوساً طوله ١٢ سم
أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة

الحــــل

$\because$ $\theta^{د} = ٢,١^{د}$ ، ل = ١٢ سم

$\therefore$ نق $= \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{١٢}{١,٢} = ١٠$ سم

مثـــال

زاوية مركزية قياسها ٢,٢ ^د^ في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

أوجد طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية .

الحــــل

$\because$ $\theta^{د} = ٢,٢$ ، نق = ١٥ سم

$\therefore$ ل = $\theta^{د}$ × نق

$\therefore$ ل = ٢,٢ × ١٥ = ٣٣ سم

مثـــال

زاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٥ سم في دائرة محيطها ٤٤ سم

أوجد قياسها الدائري

الحــــل

$\because$ ل = ٢٠ سم ، محيط الدائرة = ٤٤ سم

$\because$ ٢ط نق = ٤٤

$\because$ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق = ٤٤

$\because$ $\frac{٤٤}{٧}$ × نق = ٤٤

$\because$ نق = ٤٤ × $\frac{٧}{٤٤}$ = ٧ سم

$\because$ $\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٥}{٧} = ٢,١٤^{د}$

تذكر أن :

محيط الدائرة = ٢ط نق

مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

العلاقة بين التقديرين الدائري والستيني

إذا كان لدينا زاوية قياسها بالتقدير الستيني (θ°)

وقياسها بالتقدير الدائري ($\theta^{ء}$) فإن

$$\frac{\theta^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{ط}$$

للتحويل من الستيني إلى الدائري

$$\theta^{ء} = \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ}$$

للتحويل من الدائري إلى الستيني

$$\theta^\circ = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{ط}$$

مثـــال

أوجد القياس الدائري لكل مما يأتي

(١) ٢٢٥° (٢) -٢٤٠° (٣) ٤٢٠° (٤) -٩٠٠°

الحـــل

للتحويل من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري نستخدم قانون التحويل :

$$\theta^{ء} = \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ}$$

(١) $\theta^\circ = ٢٢٥^\circ$ $\Longleftarrow$ $\theta^{ء} = \frac{٢٢٥^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ٣,٩٣^{ء}$

تذكر أنه يجب أن تكون الزاوية $\theta^\circ \in [٠^\circ ، ٣٦٠^\circ[$

(٢) $\theta^\circ = -٢٤٠^\circ = -٢٤٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$ $\Longleftarrow$ $\theta^{ء} = \frac{١٢٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ٢,٠٩^{ء}$

(٣) $\theta^\circ = ٤٢٠^\circ = ٤٢٠^\circ - ٣٦٠^\circ = ٦٠^\circ$ $\Longleftarrow$ $\theta^{ء} = \frac{٦٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ١,٠٥^{ء}$

(٤) $\theta^\circ = -٩٠٠^\circ + ٣ \times ٣٦٠^\circ = ١٨٠^\circ$ $\Longleftarrow$ $\theta^{ء} = \frac{١٨٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ط = ٣,١٤^{ء}$

مثال

أوجد القياس الستيني لكل مما يأتي :

① $١,١^{ء}$ ② $٠,٥٧^{ء}$ ③ $\frac{\text{ط}}{٢}$ ④ $\frac{٣\text{ط}}{٢}$

الحل

للتحويل من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني نستخدم قانون التحويل :

$$\theta^\circ = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{\text{ط}}$$

① $\theta^{ء} = ١,١^{ء}$ $\Longleftarrow$ $\theta^\circ = \frac{١,١ \times ١٨٠^\circ}{\text{ط}} = ٣١''\ \ ١'\ \ ٦٣^\circ$

② $\theta^{ء} = ٠,٥٧^{ء}$ $\Longleftarrow$ $\theta^\circ = \frac{٠,٥٧ \times ١٨٠^\circ}{\text{ط}} = ٣١''\ \ ٣٩'\ \ ٣٢^\circ$

ملاحظة

إذا كان قياس الزاوية بالتقدير الدائري معطى بدلالة ط

فإنه للتحويل إلى التقدير الستيني يتم التعويض عن ط بـ ١٨٠°

③ $\theta^{ء} = \frac{\text{ط}}{٢}$ $\Longleftarrow$ $\theta^\circ = \frac{١٨٠^\circ}{٢} = ٩٠^\circ$

④ $\theta^{ء} = \frac{٣\text{ط}}{٢}$ $\Longleftarrow$ $\theta^\circ = \frac{٣ \times ١٨٠^\circ}{٢} = ٢٧٠^\circ$

مثال

زاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٢٨ سم في دائرة طول قطرها ٢٤ سم

أوجد قياسها الدائري و الستيني

الحل

$ل = ٢٨$ سم ، $نق = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$ سم

$$\text{هـ}^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{٢٨}{١٢} = ٢,٣٣^{ء}$$

$$\theta^\circ = \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{\text{ط}} = \frac{٢,٣٣ \times ١٨٠^\circ}{\text{ط}} = ٢٥''\ \ ٤١'\ \ ١٣٣^\circ$$

مثال

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٤٠°

في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

الحل

θ° = ١٤٠°

نق = ١٠ سم

$\theta^{ء} = \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{١٤٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ٢,٤٤^{ء}$

ل = $\theta^{ء}$ × نق

ل = ٢,٤٤ء × ١٠ = ٢٤,٤ سم

مثال

ا ب حـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ١,٢ء ، ق (∠ حـ) = ٥٠°

أوجد ق (∠ أ) بالتقديرين الدائري و الستيني

الحل

ق (∠ ب) تقدير ستيني = $\frac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{ط} = \frac{١,٢ \times ١٨٠^\circ}{ط}$ = ٦٨° ٤٥′ ١٧″

ق (∠ أ) تقدير ستيني = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٨° ٤٥′ ١٧″) = ٦١° ١٤′ ٤٢″

ق (∠ أ) تقدير دائري = $\frac{\theta^{ء} \times ١٨٠^\circ}{ط} = \frac{٦١,٢٥^\circ \times ط}{١٨٠^\circ}$ = ١,٠٧ء

مثال

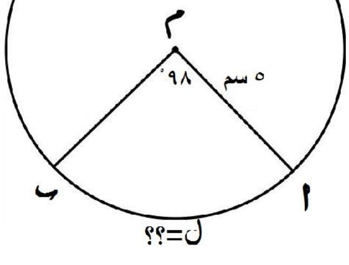
م دائرة ، أ ، ب نقطتان عليها بحيث ق (∠ م أ ب) = ٩٨°

، م أ = ٥ سم احسب طول $\overset{\frown}{أب}$

الحل

ق (∠ م أ ب) = θ° = ٩٨°

م أ = نق = ٥ سم



$$\theta^{ء} = \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٩٨^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ١,٧^{ء}$$

$$ل = \theta^{ء} \times نق$$

$$ل = طول \overset{\frown}{أب} = ١,٧^{ء} \times ٥ = ٨,٥ \text{ سم}$$

مثال

مثلث أ ب حـ النسبة بين قياسات زواياه ٣ : ٤ : ٥

أوجد القياس الستيني و الدائري لزاوية حـ

الحل

ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٥

نفرض أن : ق (∠ أ) = ٣ك ، ق (∠ ب) = ٤ك ، ق (∠ حـ) = ٥ك

ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

٣ك + ٤ ك + ٥ ك = ١٨٠°

١٢ ك = ١٨٠°

ك = ١٥°

ق (∠ حـ) تقدير ستيني = ٥ك = ٥ × ١٥° = ٧٥°

ق (∠ حـ) تقدير دائري $= \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٧٥^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = ١,٣^{ء}$

مثال

أوجد بدلالة ط طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ١٠٠°

في دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم

الحل

θ° = ١٠٠° ، نق = ١٨ سم

$$\theta^{ء} = \frac{\theta^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{١٠٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٥}{٩} ط^{\,ء}$$

$$ل = \theta^{ء} \times نق$$

$$ل = \frac{٥}{٩} ط \times ١٨ = ١٠ ط \text{ سم}$$

أ / وليد زوال | ت : ٠١٠٠٨٠٨٧٨٣٤

تمــاريــن

❶ أكمل العبارات الآتية :

① الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥ \pi}{٩}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

② الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

③ الزاوية التى قياسها $\frac{-٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

④ إذا كان القياس الستينى لزاوية $°٤٣ \; ١٢'$ فإن قياسها الدائرى = ...

(أ) $٠,٢٤^{ء}$ (ب) $٠,٢٤ \pi$ (جـ) $٠,٢٨^{ء}$ (د) $٠,٢٨ \pi$

⑤ الزاوية التى قياسها $\frac{٨ \pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ....

(أ) $°٥٤٠$ (ب) $°٨٢٠$ (جـ) $°١٥٠$ (د) $°٤٨٠$

⑥ طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها $°٦٠$ يساوى .... سم.

(أ) ٥π (ب) ٤π (جـ) ٣π (د) ٢π

⑦ القوس الذى طوله ٥π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) $°٣٠$ (ب) $°٦٠$ (جـ) $°٩٠$ (د) $°١٨٠$

⑧ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث $°٧٥$ وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥ \pi}{١٢}$

⑨ إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى $°١٨٠ \times (ن - ٢)$ حيث ن عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى تساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧ \pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٥}$ (د) $\frac{٢ \pi}{٣}$

⑩ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى تساوى ....

(أ) ٢π (ب) π (جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ (د) ٣π

(١١) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{1}{4}$ طول قوسها. (ب) $\frac{1}{2}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.

(١٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٧° ٣٠َ (جـ) ١٣٥° (د) ٤٣° تقريبًا.

(١٣) الزاوية المركزية التي قياسها ٢ ^ء وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم تقابل قوساً طوله .... سم

(١٤) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٣٥° ، ق (∠ ب) = $\frac{ط}{٢}$

فإن : ق (∠ حـ) = ... °

---

❷ أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله (ل) فى دائرة طول نصف قطرها (نق) فى كل من الحالات الآتية :

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

(٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم

(٣) ل = ٢ π سم ، نق = ٦ سم

(٤) ل = ١٥,٧٢ سم ، نق = ٩,١٧ سم

---

❸ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

(١) θ = $\frac{9}{8}$ π ، ل = ٢٢,٥ سم

(٢) θ = ٠,٧٦٧ ^ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم

(٣) θ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم

(٤) θ = ٢٦ً ٣٦َ ٧٨° ، ل = ٤٣,٩٢ سم

---

❹ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ ^ء

(٢) نق = ٧,٥ سم ، θ = ٤٠َ ٦٧°

(٣) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ ^ء

(٤) نق = ١٥ سم ، θ = ٩ً ٥٨َ ١٠٤°

❺ أوجد التقديرين الدائري والستيني لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٠ سم
في دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم

---

❻ زاوية مركزية في دائرة طول قطرها ٣٠ سم تقابل قوس طوله ٤٥ سم
أوجد قياسها بالتقديرين الدائري والستيني

---

❼ أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٢,٢ ء
في دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

---

❽ أوجد محيط الدائرة المرسوم فيها قوساً طوله ٤٤ سم
ويقابل زاوية محيطية قياسها يساوي ٣٣°

---

❾ زاوية مركزية قياسها ١,٤ ء تقابل قوساً طوله ١٥ سم أوجد مساحة هذه الدائرة

---

❿ قوس من دائرة مساحة سطحها ١٥٤ سم^{2} فإذا كان طول هذا القوس
يساوي ١١ سم فبين أن القوس يقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥° (إعتبر ط = $\frac{22}{7}$)

⓫ دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم أوجد القياس الدائري و الستيني
للزاوية المركزية التي تقابل قوس طوله ١٥ سم

⓬ زاوية مركزية قياسها ١٢٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم
أوجد طول القوس المقابل لهذه الزاوية .

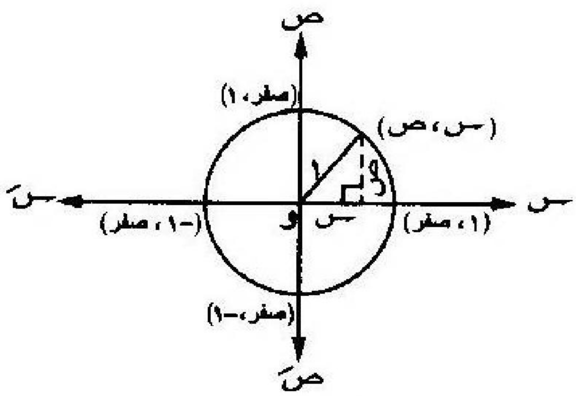
⓭ زاوية مركزية قياسها ١,٤ ء تحصر قوساً طوله ٢٥ سم
أوجد طول نصف قطر دائرتها و أوجد قياسها بالتقدير الستيني

⓮ ا ب حـ مثلث فيه ق (∠ ا) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ١,٢٢ ء
أوجد ق (∠ حـ) بالتقديرين الستيني و الدائري

⓯ ا ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة: فيه ق (∠ ا) : ق (∠ حـ) = ٥ : ٤
أوجد ق (∠ ا) بالتقدير الدائري ثم إحسب محيط الدائرة المارة برؤوسه
إذا علمت أن طول ($\overset{\frown}{\text{ب حـ ء}}$) = ٥ط سم

الدوال المثلثية

دائرة الوحدة



إذا كان $\overleftrightarrow{\text{سسَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{صصَ}}$ محورين لنظام إحداثى متعامد حيث (و) نقطة الأصل فإن الدائرة التى مركزها النقطة (و) وطول نصف قطرها وحدة الأطوال تسمى «دائرة الوحدة»

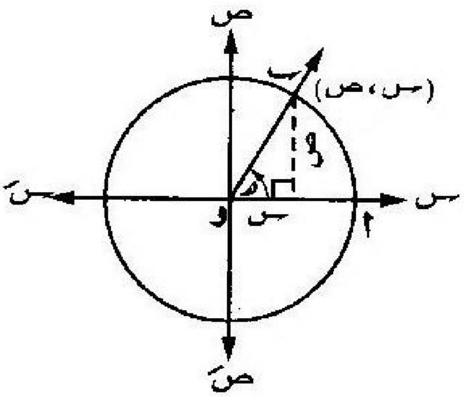
- وإذا كان (س ، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن :

① س $\in$ [-١ ، ١]

② ص $\in$ [-١ ، ١]

③ حسب نظرية فيثاغورس يكون : س^{٢} + ص^{٢} = ١

الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها



إذا رسمنا الزاوية الموجهة أ و ب فى وضعها القياسى فإن ضلعها النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ يقطع دائرة الوحدة فى نقطة مثل ب كما فى الشكل المقابل

فإذا فرضنا أن ق (∠ أ و ب) = هـ

وأن إحداثيي النقطة ب هما (س ، ص)

فمن الواضح أن أى تغير فى قيمة هـ يتبعه تغير فى موضع النقطة ب على دائرة الوحدة وبالتالى فإن أى تغير فى قيمة هـ يتبعه تغير فى س ، ص

أى أن إحداثيى نقطة ب دوال فى هـ

ومن ذلك يمكن استنتاج الدوال المثلثية الأساسية للزاوية هـ كما يلى :

أولاً: الدوال المثلثية الأساسية

① جيب تمام الزاوية هـ (جتا هـ = س) $\sin\theta$

② جيب الزاوية هـ (جا هـ = ص) $\cos\theta$

③ ظل الزاوية هـ (ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$) $\tan\theta$ حيث س ≠ صفر

ثانياً: مقلوبات الدوال المثلثية

① قاطع الزاوية هـ (قا هـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}} = \frac{1}{\text{س}}$) $\sec\theta$ حيث س ≠ صفر

② قاطع تمام الزاوية هـ (قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}} = \frac{1}{\text{ص}}$) $\csc\theta$ حيث ص ≠ صفر

③ ظل تمام الزاوية هـ (ظتا هـ = $\frac{1}{\text{ظا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$) $\cot\theta$ حيث ص ≠ صفر

ملاحظة

■ الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية فمثلاً :

جا ٣٠° = جا ٣٩٠° ،، جتا ٥٠° = جتا - ٦٧٠° ،، ظا ١٢٠° = ظا - ٦٠٠°

مثــال

إذا كان الضلع النهائي لزاوية (هـ) في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة (٠,٦ ، ٠,٨) أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية هـ

الحــل

جتا هـ = س = ٠,٦ = $\frac{٣}{٥}$ قا هـ = $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{٥}{٣}$

جا هـ = ص = ٠,٨ = $\frac{٤}{٥}$ قتا هـ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{٥}{٤}$

ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{٠,٨}{٠,٦}$ = $\frac{٤}{٣}$ ظتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{٣}{٤}$

مثال

إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) فأوجد قيمة س حيث س ∋ ح$^{-}$ ، ثم أوجد : جا هـ ، ظا هـ ، قا هـ

الحل

معادلة دائرة الوحدة: س^{٢} + ص^{٢} = ١

س^{٢} + $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ = ١

س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ = ١

س^{٢} = ١ - $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

س = - $\frac{١}{٢}$ (والموجب مرفوض)

النقطة هي $(-\frac{١}{٢}, \frac{\sqrt{٣}}{٢})$

∴ جا هـ = س = - $\frac{١}{٢}$

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

قا هـ = $\frac{١}{س}$ = -٢

مثال

إذا كان الضلع النهائي للزاوية الموجهه هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ($\frac{٥}{١٣}$ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث ص ∋ ح$^{+}$ ثم أوجد : ظا هـ ،، قتا هـ

الحل

معادلة دائرة الوحدة: س^{٢} + ص^{٢} = ١

$(\frac{٥}{١٣})^{٢}$ + ص^{٢} = ١

$\frac{٢٥}{١٦٩}$ + ص^{٢} = ١

ص^{٢} = ١ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$

ص^{٢} = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$

ص = $\frac{١٢}{١٣}$ (والسالب مرفوض)

النقطة هي ($\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$)

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٢}{٥}$

قتا هـ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

مثال

إذا كان الضلع النهائي لزاوية الموجهه هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة(٢س ، س) فأوجد قيمة س الموجبة ، ثم أوجد جا هـ ، قا هـ

الحل

معادلة دائرة الوحدة : $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$(٢س)^{٢} + س^{٢} = ١$

$٤س^{٢} + س^{٢} = ١$

$٥س^{٢} = ١$

$س = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

النقطة هي $(٢س ، س) = (\frac{٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٥}})$

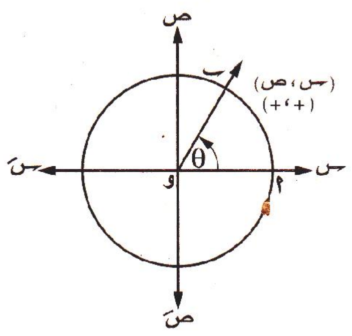
$\therefore$ جا هـ $= ص = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

قا هـ $= \frac{١}{س} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت الزاوية الموجهة (د أ و ب) فى وضعها القياسـى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) وكان ق (د أ و ب) = θ فإن :

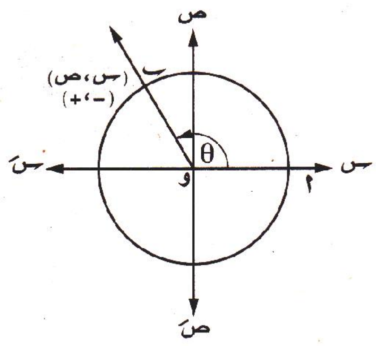
الربع الأول : $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$



س > ٠ ، ص > ٠

جميع الدوال المثلثية موجبة

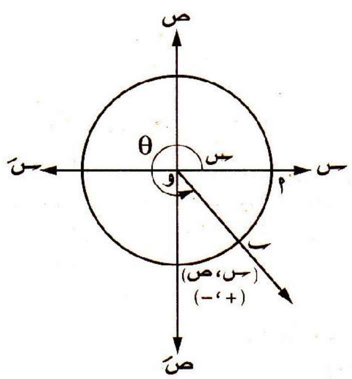
الربع الثانى : $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$



س < ٠ ، ص > ٠

$\boxed{\text{جا } \theta \text{ ، قتا } \theta}$ موجبتان وباقى الدوال سالبة

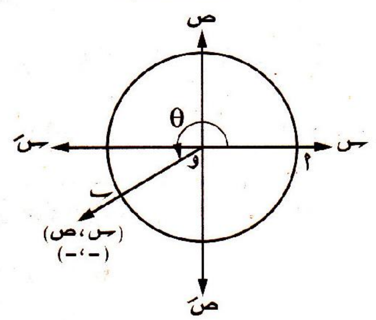
الربع الرابع : $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$



س > ٠ ، ص < ٠

$\boxed{\text{جتا } \theta \text{ ، قا } \theta}$ موجبتان وباقى الدوال سالبة

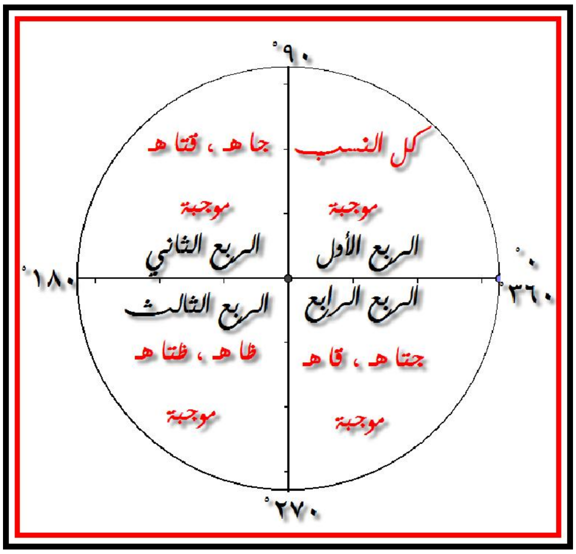
الربع الثالث : $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$

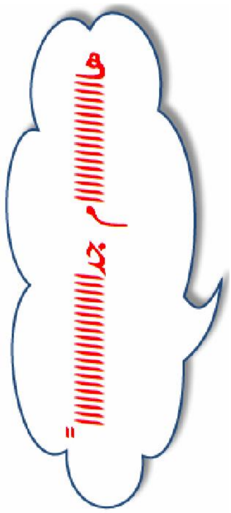


س < ٠ ، ص < ٠

$\boxed{\text{ظا } \theta \text{ ، ظتا } \theta}$ موجبتان وباقى الدوال سالبة

وهو مايمكن تلخيصه في الشكل التالي:





مثال

إبحث إشارة كل من النسب المثلثية الآتية

① جا ٦٠° ② جتا ٢٤٠° ③ ظا ٢١٠°

④ قا ٣٠٠° ⑤ جتا ١٥٠° ⑥ ظتا (− ٣٠°)

⑦ جتا $\frac{٧ \pi}{٥}$ ⑧ قتا $(-\frac{٢ \pi}{٣})$ ⑨ قا $\frac{٥ \pi}{١٢}$

الحل

① ∵ ٦٠° تقع في الربع الأول ∴ جا ٦٠° موجبة

② ∵ ٢٤٠° تقع في الربع الثالث ∴ جتا ٢٤٠° سالبة

③ ∵ ٢١٠° تقع في الربع الثالث ∴ ظا ٢١٠° موجبة

④ ∵ ٣٠٠° تقع في الربع الرابع ∴ قا ٣٠٠° موجبة

⑤ ∵ ١٥٠° تقع في الربع الثاني ∴ جتا ١٥٠° سالبة

⑥ ∵ (− ٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ ظتا (− ٣٠°) سالبة

⑦ ∵ $\frac{٧ \pi}{٥} = \frac{٧ \times ١٨٠°}{٥} = ٢٥٢°$ تقع في الربع الثالث ∴ جتا $\frac{٧ \pi}{٥}$ سالبة

⑧ ∵ $(-\frac{٢ \pi}{٣}) = -\frac{٢ \times ١٨٠°}{٣} = -١٢٠°$ تقع في الربع الثالث ∴ قتا $(-\frac{٢ \pi}{٣})$ موجبة

⑨ ∵ $\frac{٥ \pi}{١٢} = \frac{٥ \times ١٨٠°}{١٢} = ٧٥°$ تقع في الربع الأول ∴ قا $\frac{٥ \pi}{١٢}$ موجبة

مثال

إذا كانت : $\theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ ، ولكان الضلع النهائي لزاوية الموجهه θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة(٤ك ، -٣ك) فأوجد قيمة ك ، ثم أوجد قيمة :

جتا² θ - جا² θ

الحل

$\because \theta \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

$\therefore \theta \in$ تقع في الربع الرابع

$\therefore$ ك > صفر

معادلة دائرة الوحدة : س² + ص² = ١

(٤ك)² + (٣ك)² = ١

١٦ك² + ٩ك² = ١

٢٥ك² = ١

ك = $\frac{1}{5}$

النقطة هي ($\frac{4}{5}$ ، $-\frac{3}{5}$)

جتا θ = س = $\frac{4}{5}$

جا θ = ص = $-\frac{3}{5}$

جتا² θ - جا² θ = $\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = -\frac{7}{25}$

مثال

إذا كانت : ١٨٠° $\leqslant \alpha \leqslant$ ٢٧٠° ، ولكان ظا α = $\frac{7}{24}$ أوجد قيمة جميع النسب المثلثية للزاوية α

الحل

$\because$ ظا α = $\frac{7}{24}$

$\therefore \frac{\text{جا}\,\alpha}{\text{جتا}\,\alpha} = \frac{7}{24}$

جا α = ص = ٧ك ، جتا α = س = ٢٤ك

حيث ك < صفر ؟؟؟

معادلة دائرة الوحدة : س² + ص² = ١

(٤ك)² + (٣ك)² = ١

١٦ك² + ٩ك² = ١

٢٥ك² = ١

(٢٤ك)² + (٧ك)² = ١

٦٢٥ك² = ١

ك = $-\frac{1}{25}$

جا α = $-\frac{7}{25}$ ، جتا α = $-\frac{24}{25}$

قتا α = $-\frac{25}{7}$ ، قا α = $-\frac{25}{24}$

ظا α = $\frac{7}{24}$ ، ظتا α = $\frac{24}{7}$

تمــاريــن

❶ حدد إشارات الدوال المثلثية الآتية:

① جا ١١٠° ② جتا ٢١٠° ③ ظا ٣١٥° ④ قا ٤٥°

⑤ جا ١٣٥° ⑥ ظتا ٤٢٠° ⑦ ظا - ٣٠٠° ⑧ قتا ٤٠٠°

⑨ قتا ٥٠٠° ⑩ قا ٥٦٠°

❷ إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (٠,٨ ، ص) فأوجد قيمة ص حيث ص ∈ ح⁻ ،، ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

❸ إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (-س ، $\frac{١}{٢}$) فأوجد قيمة س حيث س > ٠ ،، ثم أوجد ظا هـ ، جا هـ ، قتا هـ

❹ إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، ٣س) فأوجد قيمة س الموجبة ،، ثم أوجد جتا هـ ، جا هـ ، ظتا هـ

❺ إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$) فأوجد قيمة س السالبة ، ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

❻ إذا كانت جتا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ حيث (∠ هـ) حادة موجبة فأوجد الدوال المثلثية للزاوية هـ

❼ إذا كان الضلع النهائي لزاوية هـ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، -س) فأوجد قيمة س حيث س > صفر ، ثم أوجد الدوال المثلثية لزاوية هـ

❽ إذا كان : هـ ∈] ٠° ، ٩٠° [، جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ فأوجد قيمة:

جا² هـ + جتا² هـ + ٢ جاهـ جتاهـ - ظاهـ ظتاهـ

❾ إذا كانت س = ٢,٤ ^ء^ فاوجد ق (∠ س) بالتقدير الستيني ثم حدد إشارة:

جا س ، جتا س ، ظا٢س

⑩ أكمل العبارات الآتية:

(١) الجيب (جاهـ) يكون موجبًا إذا وقعت الزاوية هـ فى الربع .... أو الربع ....

(٢) جيب التمام (جتاهـ) يكون سالبًا إذا وقعت الزاوية هـ فى الربع .... أو الربع ....

(٣) الظل (ظاهـ) يكون موجبًا إذا وقعت الزاوية هـ فى الربع .... أو الربع ....

(٤) القاطع (قاهـ) يكون موجبًا إذا وقعت الزاوية هـ فى الربع .... أو الربع ....

(٥) الجيب وجيب التمام يكونان سالبين معًا إذا وقعت الزاوية فى الربع .... ويكونان موجبين معًا إذا وقعت الزاوية فى الربع ....

(٦) الزاوية التى قياسها (-١٥٠°) تقع فى الربع .... وإشارة ظلها ....

(٧) إذا كانت النقطة $\left(س ، \frac{١}{٢}\right)$ تقع على دائرة الوحدة فإن : س = ...

(٨) إذا كانت الزاوية هـ فى وضعها القياسى يقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ص\right)$ فإن : ص = ... ، ظاهـ = ...

(٩) إشارة الدالة جا $\frac{٧ط}{٤}$ ....

---

⑪ إذا كان هـ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية هـ فى كل من الحالات الآتية :

(١) ب (٠,٦ ، ص) ، ص > ٠

(٢) ب (س ، -٠,٦) ، س > ٠

(٣) ب (-س ، س) ، س > ٠

(٤) ب (٩ أ ، ١٢ أ) حيث ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

---

⑫ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية أ وب التى قياسها هـ فى كل من الحالات الآتية :

(١) هـ ∈ $\left[٠° ، \frac{ط}{٢}\right]$ ، جتاهـ = ٠,٦

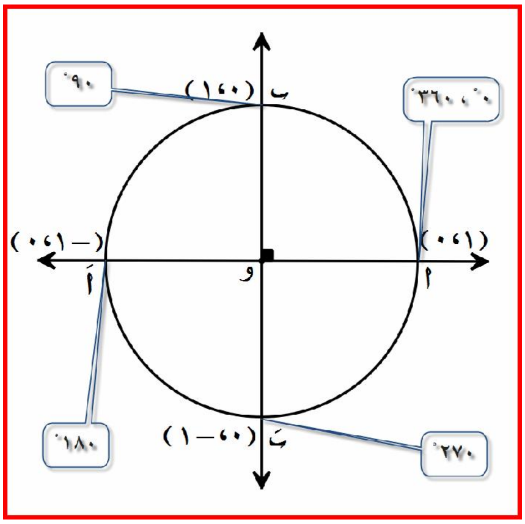
(٢) هـ ∈ $\left[\frac{ط}{٢} ، ط\right]$ ، جاهـ = $\frac{١٢}{١٣}$

(٣) هـ ∈ $\left[\frac{ط}{٢} ، ط\right]$ ، ظاهـ = $-\frac{٣}{٤}$

(٤) هـ ∈ $\left[\frac{٣ط}{٢} ، ٢ط\right]$ ، قاهـ = ٢

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

قياس الزاوية هـ	إحداثيا نقطة تقاطع الضلع النهائي مع دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية		
		جتا هـ	جا هـ	ظا هـ
٠° أو ٣٦٠°	(١ ، ٠)	١	٠	٠
٩٠°	(٠ ، ١)	٠	١	غير معرف
١٨٠°	(-١ ، ٠)	-١	٠	٠
٢٧٠°	(٠ ، -١)	٠	-١	غير معرف
٣٠°	$(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$
٦٠°	$(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٤٥°	$(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١



مثـــال

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كلاً مما يأتي

(أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° - جتا^{٢} ٤٥°

(ب) جتا ٣٠° ظا ٦٠° + جا^{٢} ٤٥° - جتا ١٨٠°

(حـ) جتا ٩٠° + ٢ جتا ١٨٠° + ٣ جتا ٢٧٠° + ٤ جتا ٦٠°

(ء) ظا^{٢} ٦٠° - قا^{٢} ٦٠° + جا ٩٠° + ٤ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحـــل

(أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا ٩٠° - جتا² ٤٥°

$$= (\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}) + ١ - (\frac{\sqrt{٢}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} + ١ - \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$$

(ب) جتا ٣٠° ظا ٦٠° + جا² ٤٥° - جتا ١٨٠°

$$= (\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣}) + (\frac{\sqrt{٢}}{٢})^٢ - (-١) = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} + ١ = ٣$$

(جـ) جتا ٩٠° + ٢ جتا ١٨٠° + ٣ جتا ٢٧٠° + ٤ جتا ٦٠°

$$= ٠ + (٢ \times -١) + (٣ \times ٠) + (٤ \times \frac{١}{٢}) = ٠ - ٢ + ٠ + ٢ = \text{صفر}$$

(د) ظا² ٦٠° - قا² ٦٠° + جا ٩٠° + ٤ جا ٤٥° جتا ٤٥°

$$= (\sqrt{٣})^٢ - (٢)^٢ + ١ + (٤ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢}) = ٣ - ٤ + ١ + ٢ = ٢$$

مثـــال

أثبت أن :

(أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = جا ٩٠°

(ب) ١ - ٢ جا² ٣٠° = ٢ جتا² ٣٠° - ١ = جتا ٦٠°

(جـ) $\frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{ جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{ جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°} = ١$

الحـــل

(أ) الطرف الأيمن = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

$$= (\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}) + (\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$$

الطرف الأيسر = جا ٩٠° = ١

∴ جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = جا ٩٠°

(ب) الطرف الأيمن = ١ - ٢ جا^{٢} ٣٠°

$= ١ - [٢ \times (\frac{١}{٢})^{٢}] = ١ - (٢ \times \frac{١}{٤}) = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

الطرف الأوسط = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

$= [٢ \times (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}] - ١ = (٢ \times \frac{٣}{٤}) - ١ = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = جتا ٦٠° $= \frac{١}{٢}$

∴ ١ - ٢ جا^{٢} ٣٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١ = جتا ٦٠°

(ج) الطرف الأيمن $= \frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{ جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{ جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{١}{٢}} = ١$

∴ $\frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{ جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{ جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°} = ١$

مثال

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

(١) س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥°

(٢) س^{٢} = ٣ جتا ٦٠° - ٤ جا^{٢} ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا^{٤} ٤٥°

الحل

(١) س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥

∴ س = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} \times (\frac{\sqrt{٣}}{٣})^{٢} \times (١)^{٢}$

∴ س = $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١$

∴ س = $\frac{١}{٤}$

(٢) س^{٢} = ٣ جتا ٦٠° - ٤ جا^{٢} ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا^{٤} ٤٥°

∴ س^{٢} = $٣ \times \frac{١}{٢} - ٤ \times (\frac{١}{٢})^{٢} + \frac{١}{٢} \times (١)^{٤}$

∴ س^{٢} = $\frac{٣}{٢} - ١ + \frac{١}{٢}$

∴ س^{٢} = ١

∴ س = ± ١

تمـــاريـــن

❶ أكمل العبارات الآتية :

① ظتا ٦٠° = ... ② جتا ١٨٠° = ...

③ قتا ٩٠° = ... ④ طا ٣٠° = ...

⑤ جا ٣٠° × جتا ٣٠° = ... ⑥ ظتا^{٢} ٣٠° + جا^{٢} ٤٥° = ...

⑦ طا ٩٠° = ... ⑧ جتا ٢٧٠° = ...

⑨ إذا كان : س جا ٣٠° + جتا ١٨٠° = ٠ فإن : س = ...

⑩ إذا كان : س^{٢} = ٢ جتا ٤٥° جا ٤٥° فإن : س = ...

❷ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

① ٤ جا ٣٠° ظا ٤٥° + ٢ قا^{٢} ٤٥° - ظا^{٢} ٦٠°

② ٢ جا ٣٠° + ٨ جتا^{٢} ٦٠° - ظا ٤٥° جتا ١٨٠°

③ قا ٦٠° - ٤ جا^{٢} ٤٥° + جا ٢٧٠°

④ جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا^{٢} ٤٥° جا ٣٠° - جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

⑤ جا ٩٠° جتا ٣٠° - جتا ٩٠° جا ٣٠°

⑥ جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا^{٢} ٤٥° جا ٣٠° - جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

❸ إثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن:

① جتا ٣٠° جتا ٦٠° - جا ٣٠° جا ٦٠° = جتا ٩٠°

② ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° = جا ٦٠°

③ جتا ٩٠° = جتا^{٢} ٤٥° - جا^{٢} ٤٥°

④ جا ٩٠° = ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° + ٣ جتا ٢٧٠°

⑤ قتا ٦٠° ظتا ٣٠° ظا ٦٠° = ٢ قا^{٢} ٤٥° جتا ٣٠°

⑥ جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° - ١

❹ أوجد قيمة س إذا كان :

① س جا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$

② س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = ظا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ - جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

الزوايا المنتسبة

الزاويتان المنتسبتان :

هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عدد صحيح من القوائم

أي أن : س ، ص زاويتان منتسبتان إذا وفقط إذا كان : س $\pm$ ص = ٩٠° ن

حيث ن عدد صحيح

فمثلا الزاويتان اللتان قياسيهما : ١٥° ، ٧٥° مجموعهما يساوي ٩٠° (قائمة)

والزاويتان اللتان قياسهما ٢٥٠° ، ٧٠° الفرق بينهما يساوي ١٨٠° (قائمتان)

أولاً : الدوال المثلثية للزاويتين (θ ، ٩٠° - θ)

① جتا (٩٠° - θ) = جا θ ② جا (٩٠° - θ)= جتا θ

③ قا (٩٠° - θ)= قتا θ ④ قتا (٩٠° - θ) = قا θ

⑤ ظا (٩٠° - θ) = ظتا θ ⑥ ظتا (٩٠° - θ) = ظا θ

ملاحظة هامة جداً

إذا كان : جا س = جتا ص أ، قا س = قتا ص أ، ظا س = ظتا ص

(حيث س ، ص زاويتين حادتين موجبتين) فإن : س + ص = ٩٠° والعكس صحيح

فمثلاً : جا ٣٢° = جتا ٥٨° ، ظتا ٢٠° = ظا ٧٠° ، قا ٦٥° = قتا ٢٥°

ثانيا: الدوال المثلثية للزاويتين (θ ، ٩٠° + θ)

① جتا (٩٠° + θ) = - جا θ ② جا (٩٠° + θ)= جتا θ

③ قا (٩٠° + θ)= - قتا θ ④ قتا (٩٠° + θ) = قا θ

⑤ ظا (٩٠° + θ) = - ظتا θ ⑥ ظتا (٩٠° + θ) = - ظا θ

ثالثاً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ ، ١٨٠° - θ)

① جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ ② جا (١٨٠° - θ)= جا θ

③ قا (١٨٠° - θ)= - قا θ ④ قتا (١٨٠° - θ)= قتا θ

⑤ ظا (١٨٠° - θ)= - ظا θ ⑥ ظتا (١٨٠° - θ)= - ظتا θ

رابعاً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ، $180^\circ + \theta$)

① جتا ($180^\circ + \theta$) = - جتا θ
② جا ($180^\circ + \theta$) = - جا θ
③ قا ($180^\circ + \theta$) = - قا θ
④ قتا ($180^\circ + \theta$) = - قتا θ
⑤ ظا ($180^\circ + \theta$) = ظا θ
⑥ ظتا ($180^\circ + \theta$) = ظتا θ

خامساً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ، $270^\circ - \theta$)

① جتا ($270^\circ - \theta$) = - جا θ
② جا ($270^\circ - \theta$) = - جتا θ
③ قا ($270^\circ - \theta$) = - قتا θ
④ قتا ($270^\circ - \theta$) = - قا θ
⑤ ظا ($270^\circ - \theta$) = ظتا θ
⑥ ظتا ($270^\circ - \theta$) = ظا θ

سادساً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ، $270^\circ + \theta$)

① جتا ($270^\circ + \theta$) = جا θ
② جا ($270^\circ + \theta$) = - جتا θ
③ قا ($270^\circ + \theta$) = قتا θ
④ قتا ($270^\circ + \theta$) = - قا θ
⑤ ظا ($270^\circ + \theta$) = - ظتا θ
⑥ ظتا ($270^\circ + \theta$) = - ظا θ

سابعاً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ، $360^\circ - \theta$)

① جتا ($360^\circ - \theta$) = جتا θ
② جا ($360^\circ - \theta$) = - جا θ
③ قا ($360^\circ - \theta$) = قا θ
④ قتا ($360^\circ - \theta$) = - قتا θ
⑤ ظا ($360^\circ - \theta$) = - ظا θ
⑥ ظتا ($360^\circ - \theta$) = - ظتا θ

ثامناً: الدوال المثلثية للزاويتين (θ، $-\theta$)

① جتا ($-\theta$) = جتا θ
② جا ($-\theta$) = - جا θ
③ قا ($-\theta$) = قا θ
④ قتا ($-\theta$) = - قتا θ
⑤ ظا ($-\theta$) = - ظا θ
⑥ ظتا ($-\theta$) = - ظتا θ

ملاحظات

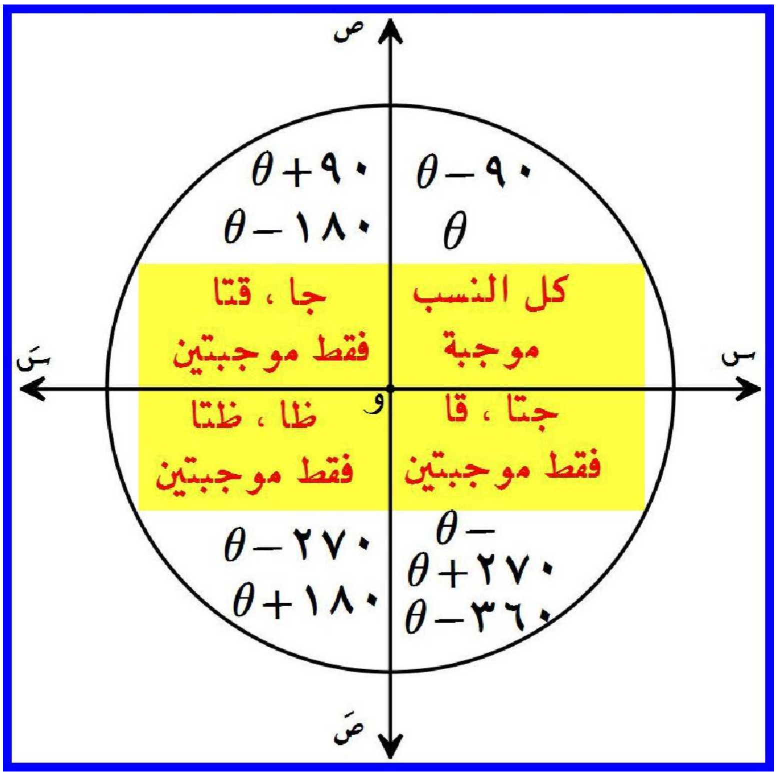
① الزوايا التي لها القياس: θ ، ($90^\circ - \theta$) تقع في الربع الأول
، والزوايا التي لها القياس : ($90^\circ + \theta$)، ($180^\circ - \theta$) تقع في الربع الثاني
، والزوايا التي لها القياس :($180^\circ + \theta$)، ($270^\circ - \theta$) تقع في الربع الثالث
، والزوايا التي لها القياس :($270^\circ + \theta$)،($360^\circ - \theta$)،($-\theta$) تقع في الربع الرابع.

② الزوايا التي قياسها: θ ، $(180^\circ - \theta)$ ، $(180^\circ + \theta)$ ، $(360^\circ - \theta)$ ، $(-\theta)$

تكون نفس الدالة المثلثية لها جميعاً متساوية من حيث القيمة العددية فقط وتختلف فقط في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه كل منها كما هو مبين في الشكل التالي.

③ الزوايا التي قياسها: $(90^\circ - \theta)$ ، $(90^\circ + \theta)$ ، $(270^\circ - \theta)$ ، $(270^\circ + \theta)$

تتغير فيها الدالة المثلثية للزاوية التي قياسها " θ " بوضع حرف (ت) في الدالة التي ليس بها حرف (ت) - أو بحذف حرف (ت) من الدالة التي بها حرف (ت)- فمثلا : (جتا) تصبح (جا)، (قتا) تصبح (قا) وتختلف في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية قبل تغيير الدالة المثلثية كما هو مبين في الشكل التالي.



مثال

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

① جتا 120° ظا 315° + جا 240° ظا 300°

② جتا 480° جا (-30°) ظا^2 225°

③ جتا (-150°) جا(600°) + جتا $\frac{2ط}{3}$ جا 330° - قا $(-\frac{5ط}{4})$ ظا 900°

الحـــل

① جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°

جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

ظا ٣١٥° = ظا (٣٦٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥° = − ١

جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٠٠° = ظا (٣٦٠° − ٦٠°) = − ظا ٦٠° = $-\sqrt{٣}$

∴ جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠° = ($-\frac{١}{٢} \times -١$) + ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times -\sqrt{٣}$) = $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = ٢$

---

② جتا ٤٨٠° جا (− ٣٠°) ظا² ٢٢٥°

جتا ٤٨٠° = جتا (٤٨٠° − ٣٦٠°) = جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا (− ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

∴ جتا ٤٨٠° جا (− ٣٠°) ظا² ٢٢٥° = $-\frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢} \times (١)^{٢} = \frac{١}{٤}$

---

③ جتا (− ١٥٠°) جا (٦٠٠°) + جتا $\frac{٢ط}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا ($-\frac{٥ط}{٤}$) ظا ٩٠٠°

جتا (− ١٥٠°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا (٦٠٠°) = جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) = جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا $\frac{٢ط}{٣}$ = جتا $\frac{٢ \times ١٨٠°}{٣}$ = جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا ٣٣٠° = جا (٣٦٠° − ٣٠°) = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

قا ($-\frac{٥ط}{٤}$) = قا ($\frac{٥ \times ١٨٠°}{٤}$) = قا ٢٢٥° = قا (١٨٠° + ٤٥°) = قا ٤٥° = $-\sqrt{٢}$

ظا ٩٠٠° = ظا (٩٠٠° − ٧٢٠°) ظا ١٨٠° = ٠

∴ جتا (− ١٥٠°) جا (٦٠٠°) + جتا $\frac{٢ط}{٣}$ جا ٣٣٠° − قا ($-\frac{٥ط}{٤}$) ظا ٩٠٠°

= ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) + ($-\frac{١}{٢}$) × ($-\frac{١}{٢}$) − ($\sqrt{٢}$) × (صفر) = ١

مثـــال

إذا كان الزاوية الموجهه θ في الوضع القياسـي ، وكان ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب $\left(-\frac{٣}{٥} ، \text{ص}\right)$ حيث $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$ فأوجد قيمة كل من :

① جا $(١٨٠^\circ - \theta)$ ② جتا $(-\theta)$

③ قا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ ④ -)°

الحـــل

معادلة دائرة الوحدة :

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$

$\frac{٩}{٢٥} + \text{ص}^{٢} = ١$

$\text{ص}^{٢} = ١ - \frac{٩}{٢٥}$

$\text{ص}^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$

$٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$\therefore$ ص > صفر

$\text{ص} = \frac{٤}{٥}$

النقطة هي $\left(-\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

① جا $(١٨٠^\circ - \theta)$ = جا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$

② جتا $(-\theta)$ = جتا θ = س = $-\frac{٣}{٥}$

③ قا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ = قتا θ = $\frac{١}{\text{ص}}$ = $\frac{٥}{٤}$

④ ظتا $(\theta - ٩٠^\circ)$ = $-$ظتا$(٩٠^\circ - \theta)$

= $-$ ظا θ = $-\left(-\frac{٤}{٣}\right)$ = $\frac{٤}{٣}$

الحل العام للمعادلات المثلثية البسيطة :

إذا كان : جا α = جتا β فإن : $\alpha \pm \beta = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

إذا كان : قتا α = قا β فإن : $\alpha \pm \beta = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

إذا كان : ظا α = ظتا β فإن : $\alpha + \beta = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ$ ن أ، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

مثال

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية ، ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

① $\text{جتا}\,٤\theta = \text{جا}\,٢\theta$ ② $\text{قتا}\,٥\theta = \text{قا}\,(\theta + ٣٠^\circ)$

③ $\text{ظا}\,(٢\theta - ١٠^\circ) = \text{ظتا}\,(٣\theta + ٢٠^\circ)$

الحل

① $\text{جتا}\,٤\theta = \text{جا}\,٢\theta$

$$٢\theta \pm ٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$$

$$٢\theta + ٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$$

$$٦\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$$

$$\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}\text{ن}$$

$$\text{ن} = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{١٢} = ١٥^\circ$$

$$\text{ن} = ١ \Leftarrow \theta = \frac{٥\pi}{١٢} = ٧٥^\circ$$

$$\text{ن} = ٢ \Leftarrow \theta = \frac{٣\pi}{٤} = ١٣٥^\circ$$

$$٢\theta - ٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$$

$$-٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi\text{ن}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{٤} - \pi\text{ن}$$

$$\text{ن} = ٠ \Leftarrow \theta = -\frac{\pi}{٤} = -٤٥^\circ$$

$\therefore$ $\theta = ١٥^\circ$ أ، ٧٥°

② $\text{قتا}\,٥\theta = \text{قا}\,(\theta + ٣٠^\circ)$

$$٥\theta \pm (\theta + ٣٠^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$٥\theta + (\theta + ٣٠^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$٦\theta + ٣٠^\circ = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$٦\theta = ٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$\theta = ١٠^\circ + ٦٠^\circ\text{ن}$$

$$\text{ن} = ٠ \Leftarrow \theta = ١٠^\circ$$

$$\text{ن} = ١ \Leftarrow \theta = ٧٠^\circ$$

$$\text{ن} = ٢ \Leftarrow \theta = ١٣٠^\circ$$

$$٥\theta - (\theta + ٣٠^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$٤\theta - ٣٠^\circ = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$٤\theta = ١٢٠^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ن}$$

$$\theta = ٣٠^\circ + ٩٠^\circ\text{ن}$$

$$\text{ن} = ٠ \Leftarrow \theta = ٣٠^\circ$$

$$\text{ن} = ١ \Leftarrow \theta = ١٢٠^\circ$$

$\therefore$ $\theta = ١٠^\circ$ أ، ٣٠° أ، ٧٠°

③ ظا (٢θ - ١٠°) = ظتا (٣θ + ٢٠°)

(٢θ - ١٠°) + (٣θ + ٢٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن

٥θ + ١٠° = ٩٠° + ١٨٠° ن

٥θ = ٨٠° + ١٨٠ ن

θ = ١٦° + ٣٦° ن

ن = ٠ $\Leftarrow$ θ = ١٦°

ن = ١ $\Leftarrow$ θ = ٥٢°

ن = ٢ $\Leftarrow$ θ = ٨٨°

ن = ٣ $\Leftarrow$ θ = ١٢٤°

$\therefore$ θ = ١٦° أ، ٥٢° أ، ٨٨°

مثال

أوجد إحدى قيم الزاوية الحادة الموجبة المجهولة التي تحقق كلاً مما يأتي:

① ظتا (٣μ + ٢٠°) = ظا(μ - ١٠°) ② قا٢λ = قتا (٣λ - ٦٠°)

③ جا(φ + ٢٥°) = جتا(٢φ - ١٠°)

الحل

① ظتا (٣μ + ٢٠°) = ظا(μ - ١٠°)

٣μ + ٢٠° + μ - ١٠° = ٩٠° + ١٨٠° ن

٤ μ + ١٠° = ٩٠° + ١٨٠° ن

٤ μ = ٨٠° + ١٨٠ ن

μ = ٢٠° + ٤٥° ن

ن = ١ $\Leftarrow$ μ = ٢٠°

إحدى قيم " μ " هي ٢٠°

---

② قا٢λ = قتا (٣λ - ٦٠°)

(٣λ - ٦٠°) ± ٢λ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

(٣λ - ٦٠°) + ٢λ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

٥ λ = ١٥٠° + ٣٦٠° ن

λ = ٣٠° + ٧٢° ن

ن = ١ $\Leftarrow$ λ = ٧٢°

(٣λ - ٦٠°) - ٢λ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

λ = ١٥٠° + ٣٦٠° ن

إحدى قيم " λ " هي ٧٢°

③ جا(φ + ٢٥°) = جتا(٢φ − ١٠°)

(φ + ٢٥°) ± (٢φ − ١٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

(φ + ٢٥°) + (٢φ − ١٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

٣ φ = ٧٥° + ٣٦٠° ن

φ = ٢٥° + ١٢٠° ن

ن = ٠ ⟸ φ = ٢٥°

(φ + ٢٥°) − (٢φ − ١٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

−φ = ٦٥° + ٣٦٠° ن

φ = −٦٥° − ٣٦٠° ن

إحدى قيم " φ " هي ٢٥°

مثال

إذا كانت ظا (س + ٢٠°) = ظتا (س − ٢٠°) حيث س ∈]٠°، ٩٠°[

فأوجد قيمة س ثم أوجد قيمة المقدار :

$$\frac{\text{جا}\ 65^\circ}{\text{جتا}\ 25^\circ} + \frac{\text{قا}^2(180^\circ - \text{س})}{\text{ظا}\ 135^\circ}$$

الحل

ظا (س + ٢٠°) = ظتا (س − ٢٠°)

س + ٢٠° + س − ٢٠° = ٩٠°

٢س = ٩٠°

س = ٤٥°

جا ٦٥° = جتا ٢٥° لأن مجموعهما ٩٠°

$$\frac{\text{جا}\ 65^\circ}{\text{جتا}\ 25^\circ} = 1$$

قا(١٨٠° − س) = − قا س = − قا ٤٥ = $-\sqrt{2}$

ظا ١٣٥° = ظا(١٨٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥° = − ١

$$\frac{\text{جا}\ 65^\circ}{\text{جتا}\ 25^\circ} + \frac{\text{قا}^2(180^\circ - \text{س})}{\text{ظا}\ 135^\circ}$$

$$= 1 + \frac{(-\sqrt{2})^2}{-1} = -1$$

مثـــال

أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ ط]

① $\sqrt{٣}$ ظا $\theta = ١$

② ٢ جا θ - ١ = صفر

③ جا θ جتا θ = صفر

④ ٢جتا θ + ١ = صفر

⑤ جا (٢θ + ١٠°) = ١

⑥ ٢جا^٢ θ + جا θ - ١ = ٠

الحـــل

① $\sqrt{٣}$ ظا $\theta = ١$

ظا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٣} >$ صفر

θ تقع في الربع الأول او الثالث

$\theta = ٣٠^\circ$ | $\theta = ١٨٠^\circ + ٣٠^\circ = ٢١٠^\circ$

م.ح = { ٣٠° ، ٢١٠° }

② ٢ جا θ - ١ = صفر

جا $\theta = \frac{١}{٢} >$ صفر

θ تقع في الربع الأول او الثاني

$\theta = ٣٠^\circ$ | $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

م.ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

③ جا θ جتا θ = صفر

جا θ = صفر | جتا θ = صفر

$\theta = ٠^\circ$ أ، ١٨٠° | $\theta = ٩٠^\circ$ أ، ٢٧٠°

م.ح = { ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° }

④ ٢جتا θ + ١ = صفر

جتا $\theta = -\frac{١}{٢} <$ صفر

θ تقع في الربع الثاني او الثالث

$\theta = ١٨٠^\circ - ٦٠^\circ$ | $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ$

$= ١٢٠^\circ$ | $= ٢٤٠^\circ$

م.ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠° }

⑤ جا (٢θ + ١٠°) = ١

٢س + $١٠^\circ = ٩٠^\circ$

$٢\theta = ٨٠^\circ$

$\theta = ٤٠^\circ$

م.ح = { ٤٠° }

⑥ ٢جا^٢ θ + جا θ - ١ = ٠

(٢جا θ - ١)(جا θ + ١) = ٠

جا $\theta = \frac{١}{٢}$ | جا $\theta = -١$

$\theta = ٣٠^\circ$ | $\theta = ٢٧٠^\circ$

$\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ$

$= ١٥٠^\circ$

م.ح = { ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٧٠° }

تمـــاريـــن

❶ أكمل العبارات الآتية :

(١) ظا ٤٢° = ظتا ....°

(٢) قتا ١٣° = قا ....°

(٣) جا ٢٥° = جتا ....°

(٤) جتا ٦٧° = جا ....°

(٥) جتا (٩٠° − θ) = ...

(٦) ظتا (٩٠° + θ) = ...

(٧) قتا (٣٦٠° − θ) = ...

(٨) ظا (١٨٠° − θ) = ...

(٩) قا (٢٧٠° − θ) = ...

(١٠) جا (− θ) = ...

(١١) جتا (θ − ٩٠°) = ...

(١٢) قتا (θ − ٢٧٠°) = ...

(١٣) $\frac{\text{قا ١٠٥°}}{\text{قتا ١٥°}}$ = ...

(١٤) $\frac{\text{جا ١٥°}}{\text{ظا ٢٠°}} \times \frac{\text{ظتا ٧٠°}}{\text{جتا ٧٥°}}$ = ...

(١٥) ظا ١٢٠° = ظا (٩٠° + ...) = − ظتا ....° = ...

(١٦) جا ٣٠٠° = جا (٣٦٠° − ....) = − جا ....° = ...

(١٧) جتا θ + جتا (١٨٠° − θ) = ...

(١٨) جا θ + جتا (٢٧٠° + θ) = ...

(١٩) إذا كان : α ، β هما قياسا زاويتين متتامتين وكان جا α = $\frac{٣}{٥}$

فإن : جتا β = ...

(٢٠) إذا كان : جا ٢ θ = جتا ٣ θ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : θ = ...°

(٢١) إذا كان : ظا ٢ θ = ظتا ٣ θ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فإن : θ = ...°

(٢٢) إذا كان : جتا θ = جا ٢ θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : جا ٣ θ = ...

(٢٣) إذا كان : جا θ = جا (٩٠° − θ) فإن : ظا θ = ...

(٢٤) إذا كان : قتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$[فإن : θ = ...° أ، ....°

(٢٥) إذا كان : ظتا ٢ θ − ظا θ = ٠ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة

فإن : θ = ...°

❷ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : حا θ = حتا ٢ θ ، $\theta \in]\cdot ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن : حا ٣ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

② إذا كان : ظا θ = ظتا ٢ θ ، $°\cdot < \theta < °٩\cdot$ فإن : حا θ + حتا ٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) ١− (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٤}$

③ إذا كان : حا α = حتا β فإن : ظا $(\alpha + \beta)$ = ...

(أ) ١ (ب) ١− (جـ) غير معرف (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

④ إذا كان : حا ٢ θ = حتا ٤ θ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن : ظا $(°٩\cdot - ٣\theta)$ = ...

(أ) ١− (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٣}$

⑤ إذا كان : ٥ حتا $(°٩\cdot - \theta)$ = ٤ ، $°\cdot < \theta < °٩\cdot$ فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

⑥ إذا كانت : ظتا $(°٩\cdot + \theta)$ + ١ = ٠ حيث $°\cdot < \theta < °٩\cdot$ فإن : حتا ٤ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١−

⑦ إذا كان : حتا $(°٩\cdot + \theta)$ + حا $(°٩\cdot - ٢\theta)$ = ٠ حيث $\theta \in]\cdot ، \frac{\pi}{٤}[$

فإن : حا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑧ إذا كان : حتا $(°٢٧\cdot - \theta)$ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : θ = ...

(أ) °٣٠ (ب) °١٥٠ (جـ) °٢١٠ (د) °٣٣٠

⑨ إذا كان : ظا θ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، حتا θ > ٠ فإن : قتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

⑩ إذا كان : حا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، ظا θ > ٠ فإن : θ = ...

(أ) °٣٠ (ب) °١٥٠ (جـ) °٢١٠ (د) °٣٣٠

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

(١) حا ١٥٠°
(٢) قا ٢١٠°
(٣) قتا ١٣٥°
(٤) طا ٢٤٠°
(٥) حتا (−١٥٠°)
(٦) طا ٢٢٥°
(٧) قتا $\frac{١١\pi}{٦}$
(٨) ظتا ٧٨٠°
(٩) حتا ٦٣٠°
(١٠) طا ٩٦٠°
(١١) حتا (−٩٠٠°)
(١٢) حا $\left(\frac{-٤\pi}{٣}\right)$
(١٣) قا $\left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)$
(١٤) قا (−٤٨٠°)
(١٥) طا (−٦٠°)
(١٦) حا $\left(\frac{-٧\pi}{٤}\right)$

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

(١) حا ١٢٠° + طا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + حتا ٤٢٠°
(٢) حا ٤٢٠° طا ٣٣٠° + حتا (−١٢٠°) قتا ٢١٠°
(٣) حا ٣٩٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠° حا ١٢٠°
(٤) حا ٦٩٠° حتا (−٢٤٠°) + حا ٥١٠° طا ٨٥٥°
(٥) حا ١٥٠ حتا (−٣٠٠°) + حتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°
(٦) حا ١٥٠° حتا (− ٦٠°) + حا ٣٠٠° حا (− ١٢٠°)
(٧) طا $\frac{٢\pi}{٣}$ قا $\frac{١١\pi}{٣}$ + ظتا $\frac{١١\pi}{٦}$ قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$ + طا $\frac{٢٥\pi}{٦}$ قتا $\left(\frac{-١٩\pi}{٣}\right)$

٥ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت صحة كل مما يأتي:

(١) حتا (−٣٠٠°) حا ٤٢٠° − حتا ٧٥٠° حتا ٦٦٠° = صفر
(٢) حا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + حا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°) = −١
(٣) حا ٤٨٠° حتا (−٦٠°) + حتا ٣٠٠° حا (−١٢٠°) = صفر
(٤) حا ١٥٠° طا ٢٢٥° + حتا ٣١٥° قا (−١٢٠°) + حا (−١٣٥°) قتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

٦ إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (−٠,٦ ، ٠,٨) أوجد:

(١) حا $(١٨٠° + \theta)$
(٢) حتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$
(٣) طا $(٣٦٠° - \theta)$
(٤) قتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right)$
(٥) قا $(\pi + \theta)$
(٦) حا $(\pi - \theta)$

٧ إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$ أوجد

① جا $(٢٧٠ + \theta)$ ② قا $(٢٧٠^\circ + \theta)$ ③ قتا $\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$

④ طا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ ⑤ طتا $(١٨٠^\circ - \theta)$ ⑥ قتا $(-\theta)$

---

٨ أوجد إحدى قيم θ حيث $\theta \in]٠، \frac{\pi}{٢}[$ التي تحقق كلاً مما يأتي :

① جا $(٣\theta + ١٥^\circ)$ = جتا $(٢\theta - ٥^\circ)$

② قا $(\theta + ٢٥^\circ)$ = قتا $(\theta + ١٥^\circ)$

③ طا $(\theta + ٢٠^\circ)$ = طتا $(٣\theta + ٣٠^\circ)$

④ جتا $\left(\frac{\theta + ٢٠^\circ}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{\theta + ٤٠^\circ}{٢}\right)$

⑤ طا $(\theta + ١٨^\circ\ ٢٤')$ = طتا $(\theta + ٥٢^\circ\ ١٠')$

⑥ جا $(\theta + ٣٠^\circ)$ = جتا θ

⑦ قتا $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$ = قا θ

⑧ قتا $(\theta + ١٥^\circ)$ = قا ٤٢°

⑨ جا θ − جتا θ = ٠

---

٩ أوجد قيمة س في كل مما يأتي حيث س $\in]٠^\circ، ٩٠^\circ[$

① قتا (٢س − ١٠°) = قا (س + ٢٥°)

② جا (س + ٢٠°) = جتا (٣س + ٣٠°)

③ ظتا (س − ٣٠°) = ظا (٩٠° + س)

④ قتا ٨س = قا ٢س

⑤ قا س = قتا (٣س − ٩٠°)

⑥ جا (٤س + ٤٨°) = جتا (س − ٣٣°)

⑦ جا س = جتا (٣س + ٣٠°)

⑧ جا (س + ٢٠°) = جتا (٣س + ٣٠°)

⑨ جا $\left(\frac{\text{س} + ١٥^\circ}{٢}\right)$ = جتا $\left(\frac{\text{س} - ١٥^\circ}{٢}\right)$

⑩ $\frac{\text{جا ٣س}}{\text{جتا}(٢\text{س} - ١٠^\circ)} = ١$

⑪ ظا (س + $١٨^\circ\ ٢٤'$) = ظتا (س + $٥٢^\circ\ ١٠'$)

---

١٠ إذا كان : طا $(\theta - ١٥^\circ)$ = طتا $(٢\theta + ١٥^\circ)$ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

فأوجد قيمة θ ثم أثبت أن : $\frac{١ + \text{جا}(٢٧٠^\circ + ٢\theta)}{١ + \text{جا}(٩٠^\circ + ٢\theta)} = \frac{١}{٣}$

---

١١ إذا كان : $\frac{\text{جا}(٣\theta - ٢٥^\circ)}{\text{جتا}(٢\theta - ٣٥^\circ)} = ١$ **فأوجد قيمة :** θ حيث $\theta \in]٠^\circ ، \frac{\pi}{٤}[$

ثم أوجد قيمة : $\frac{\text{جا } ١٨^\circ}{\text{جتا } ٧٢^\circ}$ + جا $(١٨٠^\circ - \theta)$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

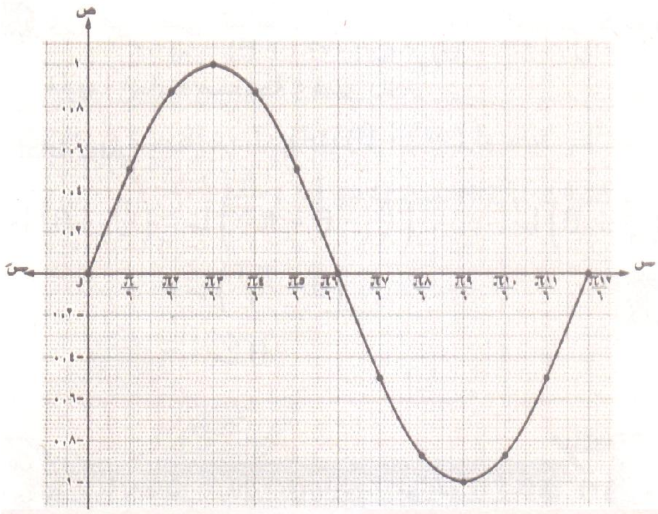
أولاً : دالة الجيب

لتمثيل الدالة د(θ)=جا θ بيانياً

نكون جدول لبعض قيم " θ " الخاصة وقيم جا θ المناظرة لها حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢π]

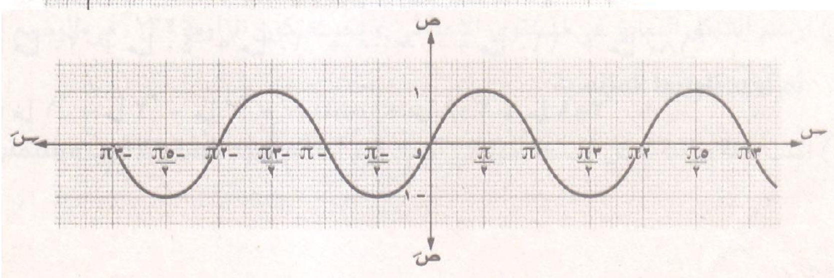
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جا θ	٠	٠.٥	٠.٨٧	١	٠.٨٧	٠.٥	٠	-٠.٥	-٠.٨٧	-١	-٠.٨٧	-٠.٥	٠

و بتعيين جميع النقط التي حصلنا عليها نجد أن المنحنى يكون كما هو مبين بالشكل المقابل ونلاحظ أن :



الدالة د(θ)=جاθ دورية ودورتها = ٢ π أي أن منحنى الدالة يتكرر على الفترات [٠ ، ٢π]، [٢π،٤π]،وكذلك على الفترات[- ٢π ، ٠] ، [- ٤π ، - ٢π]

ويكون الشكل العام للمنحنى عندما $\theta \in$ ع كما هو مبين بالشكل المقابل



خواص دالة الجيب

① مجالة الدالة هو ع

② القيمة العظمى للدالة = ١ وتبلغها عند $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$

القيمة الصغرى للدالة = - ١ وتبلغها عند $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$

مدى الدالة = [- ١، ١]

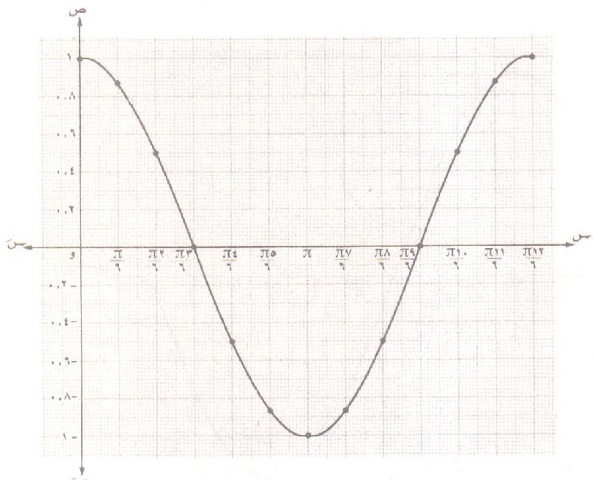
③ الدالة دورية و دورتها ٢π

ثانياً : دالة جيب التمام

لتمثيل الدالة د(θ)=جتا θ بيانياً

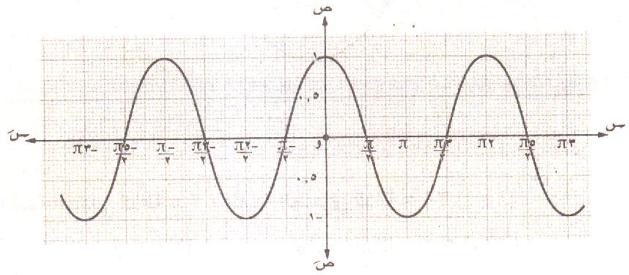
نكون جدول لبعض قيم " θ " الخاصة وقيم جتا θ المناظرة لها حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢π]

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جا θ	١	٠.٨٧	٠.٥	٠	-٠.٥	-٠.٨٧	-١	-٠.٨٧	-٠.٥	٠	٠.٥	٠.٨٧	١



و بتعيين جميع النقط التي حصلنا عليها نجد أن المنحنى يكون كما هو مبين بالشكل المقابل ونلاحظ أن :

الدالة د(θ)=جتاθ دورية ودورتها = ٢ π أي أن منحنى الدالة يتكرر على الفترات [٠ ، ٢π]، [٢π، ٤π]، وكذلك على الفترات[-٢ π ، ٠]، [-٤ π ، -٢π]



ويكون الشكل العام للمنحنى عندما $\theta \in$ ح كما هو مبين بالشكل المقابل

خواص دالة التمام

① مجالة الدالة هو ح

② القيمة العظمى للدالة = ١ وتبلغها عند θ= ٢πن

القيمة الصغرى للدالة = - ١ وتبلغها عند θ= π+٢πن

مدى الدالة = [- ١ ، ١]

③ الدالة دورية و دورتها ٢π

ملاحظات على دالتي الجيب وجيب التمام

كلاً من الدالتين : د(θ)= اجا بθ ، د(θ)= اجتا بθ دالة دورية

الدورة = $\frac{2\pi}{|ب|}$ ،، المدى = [- ا ، ا]

مثـــال

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى والدورة لكل من الدوال الآتية:

(١) ص=جا θ (٢) ص=٣جتا θ (٣) ص=$\frac{1}{4}$جتا θ

(٤) ص=جا٤θ (٥) ص = ٥ جا ٣ θ (٦) ص = ٦ جتا ٧θ

الحـــل

(١) ص = جا θ

ا=١ ، ب = ١

القيمة العظمى = ا=١

القيمة الصغرى = - ا= - ١

المدى =[-ا،ا]=[- ١،١]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=2π

(٢) ص=٣جتا θ

ا=٣ ، ب = ١

القيمة العظمى = ا=٣

القيمة الصغرى = - ا= - ٣

المدى =[-ا،ا]=[- ٣،٣]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=2π

(٣) ص=$\frac{1}{4}$جتا θ

ا=$\frac{1}{4}$ ، ب = ١

القيمة العظمى = ا=$\frac{1}{4}$

القيمة الصغرى = - ا= -$\frac{1}{4}$

المدى =[-ا،ا]=[- $\frac{1}{4}$،$\frac{1}{4}$]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=2π

(٤) ص=جا٤θ

ا=١ ، ب = ٤

القيمة العظمى = ا=١

القيمة الصغرى = - ا= - ١

المدى =[-ا،ا]=[- ١،١]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=$\frac{\pi}{2}$

(٥) ص = ٥ جا ٣ θ

ا=٥ ، ب = ٣

القيمة العظمى = ا=٥

القيمة الصغرى = - ا= - ٥

المدى =[-ا،ا]=[- ٥،٥]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=$\frac{2\pi}{3}$

(٦) ص = ٦ جتا ٧θ

ا=٦ ، ب = ٧

القيمة العظمى = ا=٦

القيمة الصغرى = - ا= - ٦

المدى =[-ا،ا]=[- ٦،٦]

الدورة=$\frac{2\pi}{|ب|}$=$\frac{2\pi}{7}$

تمـــاريـــن

❶ أكمل العبارات الآتية:

① مدى الدالة د حيث د(θ)= جاθ هو ....

② مدى الدالة ن حيث ن (θ)=٢ جاθ هو ....

③ مدى الدالة ع حيث ع(θ)= ٤جتاθ هو ....

④ القيمة الصغرى للدالة ت حيث ت(θ)=٥ جتا θ هي ....

⑤ دورة الدالة هـ(θ)حيث هـ(θ)=جا ٨θ هي ....

⑥ القيمة العظمى للدالة م حيث م(θ)= -٣جتا θ هي ....

---

❷ أوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د وأكتب المدى في كل مما يأتي:

① د (θ)= ٨جا θ

② د (θ)= - جا θ

③ د (θ)= ٣جتاθ

④ د (θ)=٦ جتا θ

⑤ د (θ)=٤جتا θ

⑥ د (θ)= -٢جا θ

---

❸ أوجد المدى والدورة للدالة د في كل مما يأتي:

① د (θ)= ٢جتا٤θ

② د (θ)=٩ جتا ٩θ

③ د (θ)= ٥جا٦ θ

④ د (θ)=٦ جا ٥θ

⑤ د (θ)=٤جتا٢ θ

⑥ د (θ)= -٢جتا π θ

إيجاد قياس زاوية معلوم إحدى نسبها المثلثية

نحن نعلم أن : جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ أي أن جيب الزاوية التي قياسها 30° يساوي $\frac{1}{2}$

أو يمكن القول أن : الزاوية التي جيبها $\frac{1}{2}$ هي زاوية قياسها يساوي 30°

وتكتب جا$^{-1}$ $(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

بالمثل يمكن أن نقول : جتا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 30^\circ$ لأن : جتا $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وكذلك : ظا$^{-1}$ $(1) = 45^\circ$ لأن : ظا $45^\circ = 1$

مثال

أوجد " θ " حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق أن :

① $\theta =$ جتا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ② $\theta =$ جا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2})$

③ $\theta =$ قتا$^{-1}$ (-2) ④ $\theta =$ ظتا$^{-1}$ $(\sqrt{3})$

⑤ $\theta =$ قا$^{-1}$ $(\frac{2}{\sqrt{3}})$ ⑥ $\theta =$ ظا$^{-1}$ (-1)

الحل

① $\theta =$ جتا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{2}}{2}) <$ صفر

θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\theta = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

② $\theta =$ جا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}) <$ صفر

θ تقع في الربع الأول أو الثاني

$\theta = 60^\circ$

$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

③ $\theta =$ قتا$^{-1}$ (-2)

$\theta =$ جا$^{-1}$ $(-\frac{1}{2}) >$ صفر

θ تقع في الربع الثالث أو الرابع

$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

④ $\theta =$ ظتا$^{-1}$ $(\sqrt{3})$

$\theta =$ ظا$^{-1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{3}) <$ صفر

θ تقع في الربع الأول أو الثالث

$\theta = 30^\circ$

$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

⑤ θ = قا$^{-1}$ $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)$

θ = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ > صفر

θ تقع في الربع الأول أو الرابع

θ = ٣٠°

θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

⑥ θ = ظا$^{-1}$ (−١) < صفر

θ تقع في الربع الثاني أو الرابع

θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣١٥°

مثال

أوجد " θ " حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتي تحقق أن :

① θ = جتا$^{-1}$ (٠,٩٢٣٥)

② θ = جا$^{-1}$ (−٠,٦٨٧٤)

③ θ = قا$^{-1}$ (−١,٣٠٥٤)

④ θ = ظتا$^{-1}$ (٢,١٦٧)

الحل

① θ = جتا$^{-1}$ (٠,٩٢٣٥) > صفر

θ تقع في الربع الأول أو الرابع

θ = ٢٢° ٣٣′ ٢٤″

θ = ٣٦٠° − ٢٢° ٣٣′ ٢٤″ = ٣٣٧° ٢٦′ ٣٦″

② θ = جا$^{-1}$ (−٠,٦٨٧٤) < صفر

θ تقع في الربع الثالث أو الرابع

θ = ١٨٠° + ٤٣° ٢٥′ ٢٩″ = ٢٢٣° ٢٥′ ٢٩″

θ = ٣٦٠° − ٤٣° ٢٥′ ٢٩″ = ٣١٦° ٣٤′ ٣١″

③ θ = قا$^{-1}$ (−١,٣٠٥٤)

θ = جتا$^{-1}$ (−٠,٧٦٦٠) < صفر

θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

θ = ١٨٠° − ٣٩° ٥٩′ ٥٩″ = ١٤٠° ٠′ ١″

θ = ١٨٠° + ٣٩° ٥٩′ ٥٩″ = ٢١٩° ٥٩′ ٥٩″

④ θ = ظتا$^{-1}$ (٢,١٦٧)

θ = ظا$^{-1}$ (٠,٤٦١٥) > صفر

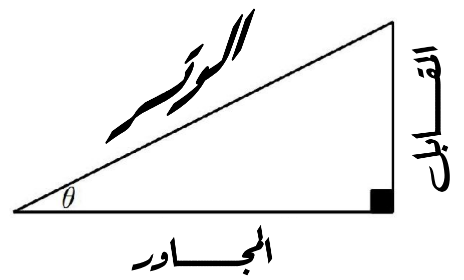
θ تقع في الربع الأول أو الثالث

θ = ٢٤° ٤٦′ ١٨″

θ = ١٨٠° + ٢٤° ٤٦′ ١٨″ = ٢٠٤° ٤٦′ ١٨″

تذكر أن:

جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ | جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ | ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



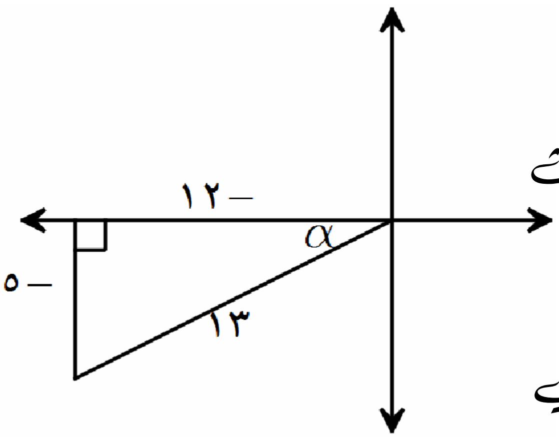
مثال

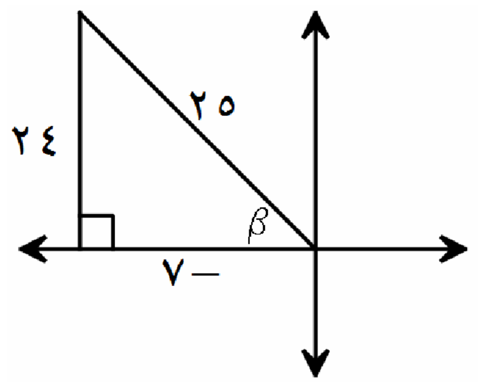
إذا كانت: ١٢ ظا α − ٥ = ٠ حيث α أكبر زاوية موجبة ، ٢٥ جا β − ٢٤ = ٠

حيث $\beta \ni$] ٩٠° ، ١٨٠° [فأوجد قيمة المقدار:

قتا (١٨٠° + α) + جتا (١٨٠° − β)

الحل





١٢ ظا α − ٥ = صفر   ظا α = $\frac{٥}{١٢}$

حيث α أكبر زاوية موجبة α تقع في الربع الثالث

٢٥ جا β − ٢٤ = ٠   جا β = $\frac{٢٤}{٢٥}$

$\beta \ni$] ٩٠° ، ١٨٠° [حيث β تقع في الربع الثاني

قتا (١٨٠° + α) = − قتا α = −(− $\frac{١٣}{٥}$) = $\frac{١٣}{٥}$

جتا (١٨٠° − β) = − جتا β = −(−) = $\frac{٧}{٢٥}$

قتا (١٨٠° + α) + جتا (١٨٠° − β)

= $\frac{١٣}{٥}$ + $\frac{٧}{٢٥}$ = $\frac{٧٢}{٢٥}$

تمـــاريـــن

❶ أوجد " θ " حيث $°٠ < \theta < °٣٦٠$ والتي تحقق أن :

① θ = جتا$^{-١}$ $(\frac{١}{٢})$ ② θ = جا$^{-١}$ $(\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

③ θ = قتا$^{-١}$ $(-\frac{٢}{\sqrt{٣}})$ ④ θ = ظتا$^{-١}$ (١)

⑤ θ = قا$^{-١}$ (٢) ⑥ θ = ظا$^{-١}$ $(-\sqrt{٣})$

---

❷ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث $°٠ < \theta < °٣٦٠$

① جا θ = ٠,٨٦٦٠٣ ② جتا θ = - ٠,٤٧٥٢

③ طا θ = ١,٥٤١٧ ④ قتا θ = - ١,٢٥٧٦

⑤ قتا θ = - ١,٨٧١٥ ⑥ قا θ = ٢,٠٥١٥

⑦ طا θ = - ١,٠٨٩٩ ⑧ جتا θ = - ٠,٧٣٤٩

---

❸ إذا كانت ١٢ ظا هـ = ٥ حيث هـ زاوية حادة فأوجد قيمة كلاً من :

① جتا^{٢} هـ - جا^{٢} هـ ② جتا °١٢٠ جا (°١٨٠ - هـ) + جا °٥١٠ جتا هـ

---

❹ إذا كانت: ٣ ظا هـ = ٤ حيث هـ ∋] °٠ ، °١٨٠ [

فأوجد قيمة المقدار : ٥ جتا هـ + ظا (°١٨٠ - هـ) + جتا °١٢٠ - ظا °٣١٥

---

❺ إذا كانت جا س = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث س أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة المقدار: قتا(°١٨٠ - س) طا س - جتا (°١٨٠ + س)

---

❻ إذا كانت ٤ ظا س = ٣ حيث س ∋] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [

، ١٣ جا ص - ١٢ = ٠ حيث ص ∋] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [

فأوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{ظا}(°٩٠ - \text{ص})\ \text{جا}(-\text{س}) + \text{جا}\ °٣٠}{\text{جتا}^{٢}\ °٤٥ - ٢\ \text{جا}\ °٦٠\ \text{ظا}\ °٦٠}$

❼ إذا كان: ٢٥ جتا حـ + ٧ = ٠ حيث حـ أصغر زاوية موجبة

، ٤ ظا ب - ٣ = ٠ حيث ب أكبر زاوية موجبة

أوجد قيمة: جتا ب جتا حـ + جا ب جا حـ

---

❽ إذا كان ١٧ جا ب = ٨ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

، ٤ ظا حـ = ٣ حيث ١٨٠° < حـ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة المقدار:

ظتا (١٨٠° - ب) × قتا (-٣٣٠°) + قا (١٨٠° - حـ) × جتا (-٤٨٠°)

---

❾ إذا كان: أ ، ب قياسا زاويتين حادتين موجبتين ، وكان:

جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ١٣ جتا ب = ٥ أوجد قيمة المقدار:

٤ ظا أ ظا (-٣١٥°) + ٥ قا ب قتا² ٥٨٥°

---

❿ إذا كان: ٢ قتا س = ٣ ، ظتا² ص = ٤ حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين

موجبتين أوجد قيمة المقدار:

$$\frac{\text{قا س قا}(٩٠° - \text{ص})}{\text{ظا}^٢(٩٠° - \text{س}) + \text{ظا}^٢(١٨٠° - \text{ص})}$$

مع أطيب أمنياتي للجميع بدوام التفوق،،

Mr. Waleed Zawal