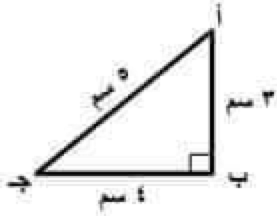
# قوانين حساب المثلثات

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$

جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$




لاحظ أن:

جا² جـ = $(\frac{٣}{٥})^٢ = \frac{٩}{٢٥}$    جتا² جـ = $(\frac{٤}{٥})^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$

| | | |
|---|---|---|
| جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ | جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ |
| جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$ | ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$ |
| جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | ظا ٤٥ = ١ |

لاحظ أن :

جا² ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^٢ = \frac{١}{٤}$    جتا² ٣٠ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{٣}{٤}$

ظا² ٣٠ = $(\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ = \frac{١}{٣}$    جا² ٤٥ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ = \frac{١}{٢}$

## قانون البعد بين نقطتين

البعد = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

## قانون إحداثي المنتصف

إحداثي المنتصف = $\left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$



## مسائل يتم اثباتها باستخدام البعد

**لإثبات أن : أ ب جـ مثلث قائم في ب**

نحسب: أ ب ، ب جـ ، أ جـ ثم نربع النواتج

فيكون : (أ جـ)² = (أ ب)² + (ب جـ)²

**لإثبات أن : أ ب جـ د مستطيل**

نحسب: أ ب ، ب جـ ، جـ د ، أ د و القطران أجـ ، ب د

فيكون : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د والقطران متساويان

**لإثبات أن: النقط أ ، ب ، جـ تمر بدائرة مركزها م**

نحسب: أ م ، ب م ، جـ م

فيكون: أ م = ب م = جـ م = نق

**لإثبات أن : أ ب جـ د مربع**

نحسب: أ ب ، ب جـ ، جـ د ، أ د و القطران أجـ ، ب د

فيكون : أ ب = ب جـ = جـ د = أ د والقطران متساويان

**لإثبات أن : أ ب جـ د متوازي أضلاع**

نحسب: أ ب ، ب جـ ، جـ د ، أ د (الأربع أضلاع)

فيكون : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د

**لإثبات أن : أ ب جـ د معين**

نحسب: أ ب ، ب جـ ، جـ د ، أ د

فيكون: أ ب = ب جـ = جـ د = أ د

# قوانين حساب الميل م

لو عندك زوجين مرتبين يمر بيهم المستقيم

$$م = \frac{فرق\ الصادات}{فرق\ السينات}$$

لو عندك زاوية قياسها هـ يصنعها المستقيم

$$م = ظا\ هـ$$

لو عندك معادلة بالشكل ده : ٣س – ٢ ص +٧ =٠
( السينات والصادات في نفس الطرف )

$$م = \frac{-\ معامل\ س}{معامل\ ص}$$

لو عندك معادلة بالشكل ده : ص = ٣ س - ٥
( الصاد في طرف والسين في طرف )

$$م = معامل\ س$$



# حساب طول الجزء المقطوع من محور الصادات

لو عندك معادلة بالشكل ده : ٢س – ٣ ص +٥ =٠

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{الحد\ المطلق}{معامل\ ص}\right|$

لو عندك معادلة بالشكل ده : ص = ٧ س - ٣

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = |الحد المطلق|

# المستقيمان المتوازيان والمتعامدان

لو قالك اثبت أن المستقيمان **متوازيان** :

نحسب: $م_1$ ، $م_2$ فنجد أن : $م_1 = م_2$

لو قالك اثبت أن المستقيمان **متعامدان** :

نحسب: $م_1$ ، $م_2$ فنجد أن : $م_1 \times م_2 = -1$

أو : $م_1$ = غير معرف ، $م_2$ = صفر

لو عطاك مستقيمين **متوازيين** وطلب قيمة مجهول ك:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : **الميل المجهول = الميل المعلوم**

لو عطاك مستقيمين **متعامدين** وطلب قيمة مجهول ك:

نحسب: $م_1$ ، $م_2$

ثم نساوى : **الميل المجهول = ـ شقلوب المعلوم**



**معادلة الخط المستقيم** هى : ص = م س + جـ حيث م : الميل ، جـ : الجزء المقطوع من محور الصادات

# مسائل يتم اثباتها باستخدام الميل

**لإثبات أن : أ ب جـ د شبه منحرف**

نحسب : ميل أ ب ، ميل ب جـ ، ميل جـ د ، ميل أ د

فيكون : ميل ب جـ = ميل أ د    ب جـ ، أ د متوازيان

ميل أ ب ≠ ميل جـ د    أ ب ، جـ د غير متوازيان

**لإثبات أن: النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة**

نحسب : ميل أ ب ، ميل ب جـ

فيكون : ميل أ ب = ميل ب جـ

**لإثبات أن : أ ب جـ د متوازى أضلاع**

نحسب : ميل أ ب ، ميل ب جـ ، ميل جـ د ، ميل أ د

فيكون : ميل أ ب = ميل جـ د    أ ب // جـ د

ميل ب جـ = ميل أ د    ب جـ // أ د

**لإثبات أن : أ ب جـ د معين**

نثبت أن : ميل أ ب = ميل جـ د ، ميل ب جـ = ميل أ د

، ميل أ جـ × ميل ب د = -١ ( القطران متعامدان)

**لإثبات أن : أ ب جـ د مستطيل**

نثبت أن: ميل أ ب = ميل جـ د ، ميل ب جـ = ميل أ د

، ميل أ ب × ميل ب جـ = -١

(ضلعان متجاوران متعامدان)

**لإثبات أن : أ ب جـ مثلث قائم في ب**

نثبت أن: ميل أ ب × ميل ب جـ = -١

# قوانين المساحات

| | |
|---|---|
| مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع | مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى القطرين |
| مساحة المربع = طول الضلع × نفسه | مساحة المستطيل = الطول × العرض |
| مساحة الدائرة = $\pi$ نق$^{٢}$ | محيط الدائرة = ٢ $\pi$ نق |

# ملاحظات هامة

- لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات : نعوض في المعادلة عن س = ٠
- لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات : نعوض في المعادلة عن ص = ٠

- لإثبات أن المثلث منفرج نثبت أن : (أ جـ)$^{٢}$ > (أ ب)$^{٢}$ + (ب جـ)$^{٢}$    حيث أ جـ الأكبر طولا
- لإثبات أن المثلث حـــاد نثبت أن : (أ جـ)$^{٢}$ < (أ ب)$^{٢}$ + (ب جـ)$^{٢}$    حيث أ جـ الأكبر طولا

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

# ملاحظات عامة

١) إذا كان المستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور الصادات فإن: السينات تكون متشابهة

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين ( ٣ ، ٥) ، ( س ، ٤) ويوازى محور الصادات فإن س = ٣

٢) إذا كان المسستقيم يمر بنقطتين ويوازى محور السينات فإن: الصادات تكون متشابهة

مثال: إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين ( ٢ ، -٤) ، ( ٦ ، ك) ويوازى محور السينات فإن ك = -٤

٣) معادلة المستقيم الذى ميله يساوى واحد ويمر بنقطة الأصل هى : ص = س

٤) المستقيم الموازى لمحور السينات ميله = صفر ، بينما الموازى لمحور الصادات ميله غير معرف

٥) لو معادلة المستقيم بالشكل ده : ٢ص = ٣س – ٦ لازم ننقل ال ٢ ونخليها كده ص = $\frac{٣}{٢}$ س – $\frac{٦}{٢}$

---

٦) بعد النقطة عن محور الصادات = قيمة س الموجبة ، بعد النقطة عن محور السينات = قيمة ص الموجبة

مثال : بعد النقطة (-٥ ، -٢ ) عن محور الصادات = ٥ ، بعد النقطة (-٣، ٤) عن محور السينات = ٤

٧) إذا أعطاك البعد معلوم فإن : (البعد)$^{٢}$ = (س$_{٢}$ – س$_{١}$)$^{٢}$ + (ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)$^{٢}$

مثال: إذا كان البعد بين النقطتين ( ٠ ، ١ ) ، ( أ ، ٠ ) هو ١ فإن : ١$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ١$^{٢}$ أ$^{٢}$ = ٠ أ= ٠

٨) لحساب قياس الزاوية بمعلومية الميل : قياس الزاوية = Shift tan الميل

٩) لإثبات أن القطران أجـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر نثبت أن: منتصف أ جـ = منتصف ب د

١٠) مجموع قياس الزاويتان المتتامتان = ٩٠° ، مجموع قياس الزاويتان المتكاملتان = ١٨٠°

---

١١) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : ص = ب

مثال: المستقيم الموازى لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢، ٥) معادلته هي : ص = ٥

١٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ ، ب) هي : س = أ

مثال: المستقيم الموازى لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٣، ٤) معادلته هي : س = ٣

---

١٣) إذا كان المستقيم يمر بنقطة الأصل فإن الجزء المقطوع من محور الصادات جـ = صفر

١٤) جا الزاوية = جتا المتمة لها فمثلا: جا ٢٠ = جتا ٧٠ ، جا ٥٠ = جتا ٤٠

١٥) ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ فمثلا : ظا ٣٠ = $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{جتا ٣٠}}$ ، $\frac{\text{جا ٥٠}}{\text{جتا ٥٠}}$ = ظا ٥٠

١٦) إذا كان جتا هـ = ٠,٧١٥٢ فإن ق (هـ) = shift cos 0.7152 = ٤٤,٢°

١٧) لو عرفت ميل مستقيم تقدر تعرف ميل العمودى عليه ( شقلب وغير الإشارة)

مثال : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ يكون ميل العمودى عليه = $\frac{٣}{٢}$

وإذا كان ميل مستقيم = ١ فإن ميل العمودى عليه = –١

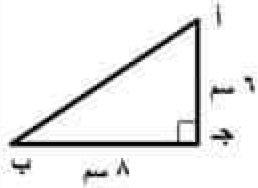
تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

**١** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى $\hat{جـ}$

فيه أ جـ = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد :

١) جتا أ جتا ب - جا أ جا ب ٢) ق ($\hat{ب}$)

**الحل**




(أ ب)$^{٢}$ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

∴ أ ب = ١٠ سم

١) جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{٨}{١٠} - \frac{٨}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٤٨}{١٠٠} - \frac{٤٨}{١٠٠} =$ صفر

٢) ∵ جا ب = $\frac{٦}{١٠}$ ∴ ق ($\hat{ب}$) = $\frac{٦}{١٠}$ = shift sin = °٦,٥

**٢** أوجد قيمة س التي تحقق

٢ جا س = ظا$^{٢}$ ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

حيث س زاوية حادة

**الحل**

٢ جا س = ظا$^{٢}$ ٦٠ ـ ٢ ظا ٤٥

٢ جا س = ($\sqrt{٣}$)$^{٢}$ ـ ٢ × ١

٢ جا س = ٣ ـ ٢

٢ جا س = ١

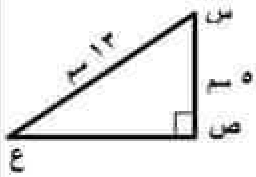
جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠

**٣** س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص

فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣ سم أوجد:

١) ظا س + ظا ع ٢) جتا س جتا ع ـ جا س جا ع

**الحل**




(ص ع)$^{٢}$ = ١٦٩ ـ ٢٥ = ١٤٤

ص ع = ١٢ سم

١) ظا س + ظا ع = $\frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٦٩}{٦٠}$

٢) جتا س جتا ع ـ جا س جا ع =

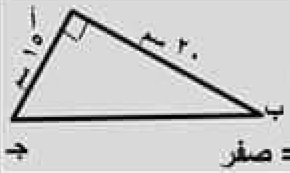
$\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} =$ صفر

**٤** فى الشكل المقابل :

أ جـ = ١٥ سم ، أب=٢٠ سم

اثبت أن :

جتا جـ جتا ب ـ جا جـ جا ب = صفر




**الحل**

(ب جـ)$^{٢}$= ١٥$^{٢}$+٢٠$^{٢}$= ٦٢٥ ب جـ =٢٥ سم

الأيمن = جتا جـ جتا ب ـ جا جـ جا ب

$= \frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$

$= \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥} =$ صفر

**٥** إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى

**الحل**

قياس الزاوية الأولى = ٣ م ، قياس الزاوية الثانية = ٥ م

∵ الزاويتان متكاملتان ∴ مجموع قياسهما = ١٨٠

∴ ٣م + ٥م = ١٨٠ ⬅ ٨م = ١٨٠ ⬅ م =٢٢,٥

الأولى = ٣م = ٣× ٢٢,٥ = ٦٧,٥ =

الثانية = ٥م = ٥× ٢٢,٥ = ١١٢,٥ =

**٦** أوجد قيمة المقدار التالى مبينا خطوات الحل :

جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ ـ جتا$^{٢}$ ٣٠

**الحل**

المقدار = $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} =$ صفر

**٧**

إذا كان بعد النقطة (س،٥) عن النقطة (٦،١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ فأوجد قيمة س

**الحل**

أهم حاجة انك تعوض في القانون عن قيمة البعد كالآتى

البعد = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^{٢} + (\text{فرق الصادات})^{٢}}$

٢ $\sqrt{٥}$ = $\sqrt{(س - ٦)^{٢} + (٥ - ١)^{٢}}$

٢ $\sqrt{٥}$ = $\sqrt{(س - ٦)^{٢} + ١٦}$ بتربيع الطرفين

٤ × ٥ = $(س - ٦)^{٢}$ + ١٦

٢٠ = $(س - ٦)^{٢}$ + ١٦ ننقل الـ ١٦ بإشارة مخالفة

٢٠ − ١٦ = $(س - ٦)^{٢}$

٤ = $(س - ٦)^{٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

س − ٦ = ٢ ∴ س = ٨

**٩**

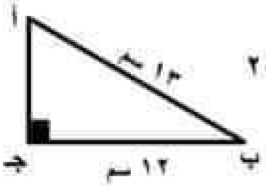
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ

أب = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم

١) اثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

٢) أوجد : ١ + ظا²أ

**الحل**




(أ جـ)$^{٢}$ = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

∴ أ جـ = ٥ سم

١) جا أ جتا ب + جتا أ جا ب =

$\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩}$

$= \frac{١٦٩}{١٦٩} = ١$

٢) ١ + ظا²أ = ١ + $(\frac{١٢}{٥})^{٢}$ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

**٨**

أوجد قيمة س التي تحقق :
ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠
حيث س زاوية حادة

**الحل**

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٤}$

ظا س = ١

∴ س = ٤٥

**١٠**

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة س حيث :

٢ جا س = جا٣٠ جتا٦٠ + جتا٣٠ جا٦٠

**الحل**

٢ جا س = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ جا س = $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}$

٢ جا س = ١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠



**١١**

اثبت أن : جا² ٣٠ = ٥ جتا² ٦٠ ـ ظا² ٤٥

**الحل**

الأيمن = جا² ٣٠ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

الأيسر = ٥ جتا² ٦٠ ـ ظا² ٤٥

= ٥ × $(\frac{١}{٢})^{٢}$ ـ $١^{٢}$

= ٥ × $\frac{١}{٤}$ ـ ١ = $\frac{٥}{٤}$ ـ ١ = $\frac{١}{٤}$

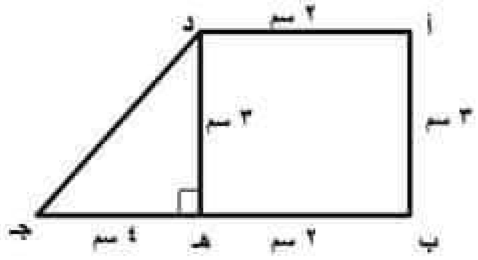
∴ الأيمن = الأيسر

مدرسة مصر الخير الإعدادية

إعداد / محمود عوض حسن

**١٢** أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ د // ب جـ ، ق (ب̂) = ٩٠° ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ د = ٢ سم
أوجد طول د جـ ثم أوجد قيمة جتا ب جـ̂ د

**الحل**




نرسم د هـ عمودى على ب جـ

∴ الشكل أ ب هـ د مستطيل

د هـ = ٣ سم ، هـ جـ = ٦-٢ = ٤ سم

في Δ د هـ جـ : من فيثاغورث

(د جـ)$^٢$ = ٣$^٢$ + ٤$^٢$ = ٢٥

∴ د جـ = ٥ سم

جتا ( ب جـ̂ د) = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

**١٥** بدون استخدام الآلة اثبت أن :
حتا ٦٠ = ٢ حتا$^٢$ ٣٠ – ١

**الحل**

الأيمن = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

الأيسر = ٢ × $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$ – ١ = ٢ × $\frac{٣}{٤}$ - ١ = $\frac{١}{٢}$

∴ الأيمن = الأيسر

**١٣** أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان:
جا هـ = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

**الحل**

الأيسر = جا ٦٠ جتا ٣٠ – جتا ٦٠ جا ٣٠

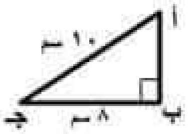
= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

**١٤** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فيه أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم
اثبت أن : جا$^٢$ أ + ١ = ٢ جتا$^٢$ جـ + جتا$^٢$ أ

**الحل**




(أ ب)$^٢$ = ١٠٠ – ٦٤ = ٣٦

∴ أ ب = ٦ سم

الأيمن = $\left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢$ + ١ = $\frac{٦٤}{١٠٠}$ + ١ = $\boxed{\frac{١٦٤}{١٠٠}}$

الأيسر = ٢ × $\left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢$ + $\left(\frac{٦}{١٠}\right)^٢$ = ٢ × $\frac{٦٤}{١٠٠}$ + $\frac{٣٦}{١٠٠}$

= $\frac{١٢٨}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠}$ = $\boxed{\frac{١٦٤}{١٠٠}}$

∴ الأيمن = الأيسر

**١٦** أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويمر بالنقطة ( ١ ، ٠ )

ص = م س + جـ

من الزوج المرتب (١،٠) نعوض عن س = ١ ، ص = ٠

٠ = ٢ × ١ + جـ

٠ = ٢ + جـ

جـ = -٢ ∴ المعادلة هى: ص = ٢س – ٢

**١٧** اثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (٥، -٥) ، ب (-١، ٧) ، جـ (١٥، ١٥)
قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد مساحته

**الحل**

أ ب $= \sqrt{(-١-٥)^{٢} + (٧ - -٥)^{٢}} = \sqrt{(-٦)^{٢} + (١٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٨٠}$

ب جـ $= \sqrt{(١٥ - -١)^{٢} + (١٥ - ٧)^{٢}} = \sqrt{(١٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥٦ + ٦٤} = \sqrt{٣٢٠}$

أ جـ $= \sqrt{(١٥ - ٥)^{٢} + (١٥ - -٥)^{٢}} = \sqrt{(١٠)^{٢} + (٢٠)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠٠ + ٤٠٠} = \sqrt{٥٠٠}$

(أ جـ)$^{٢}$ = ٥٠٠

(أب)$^{٢}$+(ب جـ)$^{٢}$ = ١٨٠+ ٣٢٠ = ٥٠٠

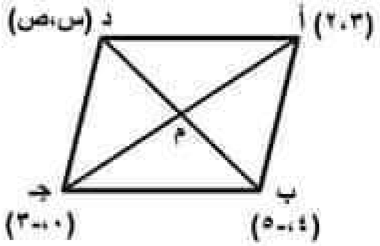
∵ (أ جـ)$^{٢}$ = (أب)$^{٢}$+(ب جـ)$^{٢}$ ∴ المثلث قائم فى ب

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × ع

$= \frac{\sqrt{١٨٠} \times \sqrt{٣٢٠}}{٢} = ١٢٠$

**١٨** أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه
أ (٣، ٢) ، ب (٤، -٥) ، جـ (٠، -٣) أوجد احداثى
نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثى نقطة د

**الحل**




نقطة تقاطع القطرين هى م منتصف أ جـ

م منتصف أ جـ = $\left( \frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{-٣ + ٢}{٢} \right) = \left( \frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right)$

نفرض أن النقطة د هى (س ، ص)

∵ منتصف أ جـ = منتصف ب د

$\left( \frac{٣}{٢} ، \frac{-١}{٢} \right) = \left( \frac{٤ + س}{٢} ، \frac{-٥ + ص}{٢} \right)$

| المسقط الأول = المسقط الأول | المسقط الثانى = المسقط الثانى |
|---|---|
| $\frac{٤ + س}{\cancel{٢}} = \frac{٣}{\cancel{٢}}$ | $\frac{-٥ + ص}{\cancel{٢}} = \frac{-١}{\cancel{٢}}$ |
| ٤ + س = ٣ | -٥ + ص = -١ |
| س = -١ | ص = ٤ |

إحداثى د = ( -١ ، ٤ )

**١٩** اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين ( -٣، ٤) ، (-٣، -٢)
عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (١، ٢) ، (-٣، ٢)

**الحل**

م$_{١}$ = $\frac{-٢ - ٤}{-٣ - -٣} = \frac{-٦}{٠}$ غير معرف

م$_{٢}$ = $\frac{٢ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٠}{-٤}$ = صفر

∴ المستقيمان متعامدان

**٢٠** اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين ( -١ ، ٣ ) ،
( ٢ ، ٤ ) يوازى المستقيم ٣ص – س – ١ = ٠

**الحل**

م$_{١}$ = $\frac{٤ - ٣}{٢ - -١} = \frac{١}{٣}$

م$_{٢}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ∴ المستقيمان متوازيان

**٢١** إذا كانت جـ ( ٦ ، -٤) هى منتصف أ ب حيث أ ( ٥ ، -٣ ) فأوجد إحداثى نقطة ب

**الحل**

نفرض أن : ب ( س ، ص )

$$\text{إحداثى المنتصف} = \left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$$

$$(٦ ، -٤) = \left( \frac{٥ + \text{س}}{٢} ، \frac{-٣ + \text{ص}}{٢} \right)$$

$$\frac{٥ + \text{س}}{٢} = ٦ \qquad \frac{-٣ + \text{ص}}{٢} = -٤$$

$$٥ + \text{س} = ١٢ \qquad -٣ + \text{ص} = -٨$$

$$\boxed{\text{س} = ٧} \qquad \boxed{\text{ص} = -٥}$$

∴ إحداثى ب = ( ٧ ، -٥)

**٢٢** اثبت أن النقط أ (٣،-١) ، ب (-٤،٦) ، جـ (٢،-٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها النقطة م (-١،٢) ثم أوجد محيط الدائرة

**الحل**

$$\text{أ م} = \sqrt{(٣ - -١)^٢ + (-١ - ٢)^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢}$$
$$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

$$\text{ب م} = \sqrt{(-٤ - -١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$$
$$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

$$\text{جـ م} = \sqrt{(٢ - -١)^٢ + (-٢ - ٢)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$$
$$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

∵ أ م = ب م = جـ م ∴ النقط تمر بها دائرة واحدة

محيط الدائرة = ٢ط نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤

**٢٣** إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢،ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان $ل_١ // ل_٢$

**الحل**

$$م_١ = \frac{\text{ك} - ١}{٢ - ٣} = \frac{\text{ك} - ١}{-١} \qquad م_٢ = \text{ظا } ٤٥ = ١$$

∵ المستقيمان متوازيان المجهول = المعلوم

$$\frac{\text{ك} - ١}{-١} = ١ \ \text{(مقص)} \qquad \text{ك} - ١ = -١$$

$$\text{ك} = -١ + ١ \qquad \text{ك} = \text{صفر}$$

**٢٤** إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٢،ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان متعامدان

**الحل**

$$م_١ = \frac{\text{ك} - ١}{٢ - ٣} = \frac{\text{ك} - ١}{-١} \qquad م_٢ = \text{ظا } ٤٥ = ١$$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ المجهول = - شقلوب المعلوم

$$\frac{\text{ك} - ١}{-١} = -١ \Leftarrow \text{ك} - ١ = ١$$

$$\text{ك} = ١ + ١ \qquad \boxed{\text{ك} = ٢}$$

**٢٥** اثبت أن النقط أ (-٣،-١) ، ب (٦،٥) ، جـ (٣،٣) تقع على استقامة واحدة

**الحل**

$$\text{ميل أ ب} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - -١}{٦ - -٣} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ميل ب جـ} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣ - ٥}{٣ - ٦} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$$

∵ ميل أ ب = ميل ب جـ

∴ النقط تقع على استقامة واحدة

**أكثر من الصلاة على سيدنا**

**رسول الله ﷺ تحظى بالبركة**

**فى سائر أمورك**

**٢٦** أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،-٥) ويوازى المستقيم س + ٢ص − ٧ = ٠

**الحل**

ص = م س + جـ

$م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢}$ ∴ $م_١ = \frac{-١}{٢}$

بالتعويض عن س = ٣ ، ص = -٥ ، $م = \frac{-١}{٢}$

$-٥ = \frac{-١}{٢} \times ٣ + جـ$ ⟸ $-٥ = \frac{-٣}{٢} + جـ$

$جـ = -٥ + \frac{٣}{٢} = \frac{-٧}{٢}$ ∴ المعادلة هى: $ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{-٧}{٢}$

**٢٧** إذا كانت أ (-٣،٤) ، ب (٥،-١) ، جـ (٣،٥) فأوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ وبنصف ب جـ

**الحل**

منتصف ب جـ = $\left(\frac{٥ + ٣}{٢} ، \frac{-١ + ٥}{٢}\right) = \left(\frac{٨}{٢} ، \frac{٤}{٢}\right) = (٤،٢)$

المستقيم يمر بالنقطة أ (-٣،٤) وبمنتصف ب جـ (٤،٢)

$م = \frac{٢ - ٤}{٤ - -٣} = \frac{-٢}{٧}$

∵المستقيم يمر بالنقطة (٤،٢) ⟸ س = ٤ ، ص = ٢

$٢ = \frac{-٢}{٧} \times ٤ + جـ$ ⟸ $٢ = \frac{-٨}{٧} + جـ$ ⟸ $جـ = ٢ + \frac{٨}{٧}$

$جـ = \frac{٢٢}{٧}$ ∴ **المعادلة هى** : $ص = \frac{-٢}{٧} س + \frac{٢٢}{٧}$

**٢٨** أوجد معادلة المستقيم العمودى على أ ب من نقطة منتصفها حيث أ(١،٣) ، ب (٣،٥)

**الحل**

$م_٢ = \frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$ ⟸ $م_١ = -١$ (لأن المستقيمان متعامدان)

منتصف أ ب = $\left(\frac{١ + ٣}{٢} ، \frac{٣ + ٥}{٢}\right) = \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{٨}{٢}\right) = (٢،٤)$

∵المستقيم يمر بالنقطة (٢،٤) نأخذ س=٢ ، ص=٤

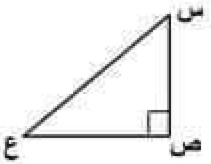
ص= م س + جـ ⟸ ٤ = -١× ٢ + جـ ⟸ ٤= -٢+جـ

جـ = ٦ ∴ المعادلة هى: $\boxed{ص = - س + ٦}$

**٢٩** إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ص (٤،٢) ، س (٣،٥) ، ع (-٥،أ) قائم الزاوية فى ص فأوجد قيمة أ

**الحل**

∵ Δ قائم فى ص ∴ س ص ، ص ع متعامدان




ميل س ص = $\frac{٢ - ٥}{٤ - ٣} = -٣$

ميل ص ع = $\frac{أ - ٢}{-٥ - ٤} = \frac{أ - ٢}{-٩}$

∵ س ص ، ص ع متعامدان ∴ المجهول = - شقلوب المعلوم

$\frac{أ - ٢}{-٩} = \frac{١}{٣}$ أ - ٢ = -٣ ∴ $\boxed{أ = -١}$

**٣٠** أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طوليهما ٤ ، ٩

**الحل**

المستقيم يمر بالنقطتين (٤،٠) ، (٠،٩)

$م = \frac{٩ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{٩}{-٤}$ ، جـ = ٩

∴ المعادلة هى: $\boxed{ص = -\frac{٩}{٤} س + ٩}$

**٣١** أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١،٣) ،(-١،-٣) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل

**الحل**

ص = م س + جـ

$م = \frac{-٣ - ٣}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

من الزوج (١،٣) بالتعويض عن : س = ١ ، ص = ٣

٣ = ٣ × ١ + جـ ٣ = ٣ + جـ $\boxed{جـ = ٠}$

∴ المعادلة هى : $\boxed{ص = ٣س}$

لإثبات أنه يمر بنقطة الأصل نعوض عن س = ٠

∴ ص = ٣×٠ = ٠ ∴ يمر بنقطة الأصل

**٣٢** بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ $(٣ ، ٣)$ ، ب $(١ ، ٥)$ ، جـ $(١ ، ٣)$ بالنسبة لأضلاعه

**الحل**

$\text{أ ب} = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٥-٣)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(١-١)^٢ + (٣-٥)^٢} = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٠ + ٤} = \sqrt{٤} = ٢$

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١-٣)^٢ + (٣-٣)^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{٤ + ٠} = \sqrt{٤} = ٢$

∵ ب جـ = أ جـ ∴ $\Delta$ متساوى الساقين

**٣٣** أ ب جـ د شكل رباعى حيث
أ $(٥ ، ٣)$ ، ب $(٦ ، -٢)$ ، جـ $(١ ، -١)$ ، د $(٠ ، ٤)$
اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين واوجد مساحته

**الحل**

$\text{أ ب} = \sqrt{(٦-٥)^٢ + (-٢-٣)^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (-٥)^٢} = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$

$\text{ب جـ} = \sqrt{(١-٦)^٢ + (-١ - -٢)^٢} = \sqrt{(-٥)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$

$\text{جـ د} = \sqrt{(٠-١)^٢ + (٤ - -١)^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (٥)^٢} = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$

$\text{أ د} = \sqrt{(٠-٥)^٢ + (٤-٣)^٢} = \sqrt{(-٥)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$

نحسب القطران أ جـ ، ب د

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١-٥)^٢ + (-١-٣)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$

$\text{ب د} = \sqrt{(٠-٦)^٢ + (٤ - -٢)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + (٦)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٣٦} = \sqrt{٧٢}$

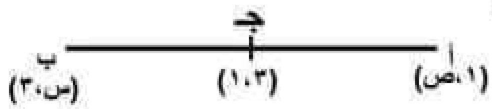
∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ ≠ ب د
∴ الشكل معين

مساحة المعين $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣٢} \times \sqrt{٧٢} = ٢٤$

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

**٣٤** إذا كانت النقطة $(٣ ، ١)$ في منتصف البعد بين النقطتين $(١ ، \text{ص})$ ، $(\text{س} ، ٣)$ فأوجد النقطة $(\text{س} ، \text{ص})$

**الحل**




إحداثى المنتصف = $\left( \frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

$\therefore (٣ ، ١) = \left( \frac{١ + \text{س}}{٢} ، \frac{\text{ص} + ٣}{٢} \right)$

$\frac{١ + \text{س}}{٢} = ٣$ ، $١ + \text{س} = ٦$ ، $\text{س} = ٥$

$\frac{\text{ص} + ٣}{٢} = ١$ ، $\text{ص} + ٣ = ٢$ ، $\text{ص} = -١$

$\therefore (\text{س} ، \text{ص}) = (٥ ، -١)$

**٣٥** اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين $(٢ ، -١)$ ، $(٦ ، ٣)$ يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها $٤٥^\circ$

**الحل**

$م_١ = \frac{٣ - -١}{٦ - ٢} = \frac{٤}{٤} = ١$

$م_٢ = \text{ظا } ٤٥ = ١$

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع من محور الصادات جزءا طوله وحدتان أوجد :
١) معادلة المستقيم ٢) نقطة تقاطعه مع محور السينات

**الحل**

ص = م س + جـ      م = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = ٢

∴ المعادلة هي: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات
نعوض في المعادلة عن ص = ٠

٠ = $\frac{١}{٢}$ س + ٢

$\frac{١}{٢}$ س = −٢ ⟸ س = −٢×٢ = −٤

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات هي (−٤،٠)

أوجد ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٢) ، (٥ ، ١)

**الحل**

م٢ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{١ - -٢}{٥ - ٢} = \frac{٣}{٣} = ١$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م١ × م٢ = −١

م١ = −١

أ ب جـ د شكل رباعى حيث أ (٢،٤) ، ب (−٣،٠) ، جـ (−٧،٥) ، د (−٢،٩)
اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع وأوجد مساحته

**الحل**

أ ب = $\sqrt{(-٢-٣)^٢ + (٤-٠)^٢} = \sqrt{(٥)^٢ + (٤)^٢}$
= $\sqrt{٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤١}$

ب جـ = $\sqrt{(-٧-(-٣))^٢ + (٥-٠)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٥)^٢}$
= $\sqrt{١٦ + ٢٥} = \sqrt{٤١}$

جـ د = $\sqrt{(-٢-(-٧))^٢ + (٩-٥)^٢} = \sqrt{(-٥)^٢ + (٤)^٢}$
= $\sqrt{٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤١}$

أ د = $\sqrt{(-٢-٢)^٢ + (٩-٤)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٥)^٢}$
= $\sqrt{١٦ + ٢٥} = \sqrt{٤١}$

نحسب القطران أ جـ ، ب د

أ جـ = $\sqrt{(-٧-٢)^٢ + (٥-٤)^٢} = \sqrt{(-٩)^٢ + (١)^٢}$
= $\sqrt{٨١ + ١} = \sqrt{٨٢}$

ب د = $\sqrt{(-٢-(-٣))^٢ + (٩-٠)^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (٩)^٢}$
= $\sqrt{١ + ٨١} = \sqrt{٨٢}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = أ د ، أ جـ = ب د
∴ الشكل مربع

مساحة المربع = $\sqrt{٤١} \times \sqrt{٤١} = ٤١$

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣) ، (٠،٠)
يوازى المستقيم المار بالنقطتين (−١،٤) ، (١،٧)

**الحل**

أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

**الحل**

لاحظ أن : معامل س = $\frac{١}{٢}$ ، معامل ص = $\frac{١}{٣}$

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = -\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٣} = -\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١} = \boxed{\frac{-٣}{٢}}$

طول الجزء المقطوع = $\left|\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right| = ١ \div \frac{١}{٣} = \boxed{٣}$