خاص بالمجموعات المدرسية

مذكرات

التفوق

التفوق

في

الرياضيات

للصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

خاص بالمجموعات المدرسية

إعداد
Mr.MORAD
01221353139
moraddorgham@yahoo.com
http://moraddogham.yoo7.com

الحاصل الديكارتي لمجموعتين

الزوج المرتب : (أ ، ب) يسمى زوجا مرتبا ويسمى أ بالمسقط الاول ، ب بالمسقط الثاني .

- (أ ، ب) ≠ { أ ، ب } مثلا (٢ ، ٣) ≠ { ٢ ، ٣ }
- (أ ، ب) ≠ [أ ، ب] مثلا (٢ ، ٣) ≠ [٢ ، ٣]
- (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) مثلا (٢ ، ٣) ≠ (٣ ، ٢)

تساوي زوجين مرتبين :

اذا كان (أ ، ب) = (س ، ص) فإن أ = س ، ب = ص

مثال ١ اذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣) فإن أ = ٢ ، ب = ٣

مثال ٢ اذا كان (س − ١ ، ١٦) = (١ ، ص^{٢})

فأوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ س − ١ = ١	∵ ص^{٢} = ١٦
∴ س = ١ + ١	∴ ص = ± $\sqrt{١٦}$
∴ س = ٢	∴ ص = ± ٤

مثال ٣ اذا كان (س^{٢} − ١ ، ٨) = (٤٨ ، $\sqrt[٣]{ص}$)

الحل

∵ س^{٢} − ١ = ٤٨	∵ $\sqrt[٣]{ص}$ = ٨
∴ س^{٢} = ٤٨ + ١ = ٤٩	∴ ص = ٨^{٣}
∴ س = $\sqrt{٤٩}$ = ± ٧	∴ ص = ٥١٢

مثال ٤ اذا كان (٣٢ ، س + ص) = (ص^{٥} ، ٢)

الحل

∵ ص^{٥} = ٣٢	∵ س + ص = ٢
∴ ص^{٥} = ٣٢ = ٢^{٥}	∴ س + ٢ = ٢
∴ ص = ٢	∴ س = ٢ − ٢ = صفر

حاول بنفسك أوجد قيم كل من س ، ص فيما يلي :

- اذا كان (س + ١ ، ص^{٢}) = (٣ ، ٩)
- اذا كان (س^{٣} − ٥ ، ٨) = (٣ ، ٣ ص − ٧)
- اذا كان (س^{٢} − ٢ ، ٢ ص) = (ص ، $\sqrt[٣]{٦٤}$)

أبنائي الطلبة والطالبات

سلسلة التفوق في الرياضيات تقودك الى النجاح والتفوق بأبسط الطرق واسرعها والتي لا غنى عنها لأي طالب او طالبة مهما كان مستواه العلمي .

تشتمل سلسلة التفوق على اسئلة في جميع اجزاء المنهج بطريقة سهلة ومتدرجة ومتنوعة وخالية من التعقيدات .. تقيس مستوى التحصيل والذكاء الفطري . وتحصل منها على المعلومات التراكمية التي تقتنيها من بعض التمارين في نماذج الوزارة وكراسة التدريبات .

حاول

الحصول على نسخة من مذكرة التفوق التي تبهج روحك ونفسك وتسعدك . لأنها تقودك الى كليات القمة متمنيا لكم النجاح والتفوق .

Mr.Morad

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة س في المجموعة ص يرمز لها بالرمز س × ص وهي مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر في س ومسقطها الثاني عنصر في ص

أي أن س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

مثال ١ اذا كان س = {٢ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٧} فان

س × ص = {(٢،٣)،(٢،٤)،(٢،٧)،(٥،٣)،(٥،٤)،(٥،٧)}

مثال ٢ اذا كان أ = {٣ ، ٥ ، ٨} ، ب = {٢ ، ٤}

فأوجد أ × ب ، ب × أ وعدد عناصر كل منهما ماذا تلاحظ

الحل

أ × ب = {٣ ، ٥ ، ٨} × {٢ ، ٤}

= {(٣،٢)،(٣،٤)،(٥،٢)،(٥،٤)،(٨،٢)،(٨،٤)}

ب × أ = {٢ ، ٤} × {٣ ، ٥ ، ٨}

= {(٢،٣)،(٢،٥)،(٢،٨)،(٤،٣)،(٤،٥)،(٤،٨)}

لاحظ ان أ × ب ≠ ب × أ

ن(أ) = ٣ ، ن(ب) = ٢

ن(أ × ب) = ٣ × ٢ = ٦ ، ن(ب × أ) = ٢ × ٣ = ٦

لاحظ ان ن(أ × ب) = ن(ب × أ)

مثال ٣ اذا كان س = {١ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٢ ، ٧}

فأوجد ص × س ، ن(س × ص) ، ص^{٢} ،

ن(س^{٢}) ، ن(ص^{٢})

الحل

- ص × س = {٢ ، ٧} × {١ ، ٤ ، ٥}

= {(٢،١)،(٢،٤)،(٢،٥)،(٧،١)،(٧،٤)،(٧،٥)}

- ص^{٢} = {٢ ، ٧} × {٢ ، ٧}

= {(٢،٢)،(٢،٧)،(٧،٢)،(٧،٧)}

- ن(س × ص) = ن(س) × ن(ص) ٣ × ٢ = ٦
- ن(س^{٢}) = ن(س) × ن(س) ٣ × ٣ = ٩
- ن(ص^{٢}) = ن(ص) × ن(ص) ٢ × ٢ = ٤

مثال ٤ اذا كان أ = {١ ، ٤} ، ب = {٢ ، ٤} ، ج = {١ ، ٥}

اوجد (١) (أ × ب) ∩ (ب × ج) (٢) (أ ∪ ب) × (ب ∪ ج)

(٣) (أ − ب) × ج (٤) (أ ∩ ب) × (ب ∩ ج)

الحل

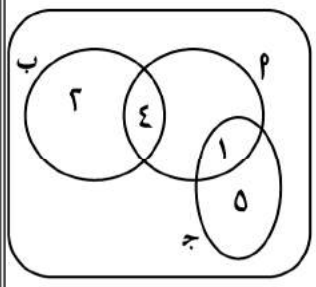
(١) (أ × ب) = {١ ، ٤} × {٢ ، ٤}

= {(١،٢)،(١،٤)،(٤،٢)،(٤،٤)}

(ب × ج) = {٢ ، ٤} × {١ ، ٥}

= {(٢،١)،(٢،٥)،(٤،١)،(٤،٥)}

∴ (أ × ب) ∩ (ب × ج) = ∅



(٢) (أ ∪ ب) = {١ ، ٢ ، ٤}

(ب ∪ ج) = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥}

∴ (أ ∪ ب) × (ب ∪ ج) = {١ ، ٢ ، ٤} × {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥}

= {(١،١)،(١،٢)،(١،٤)،(١،٥)،(٢،١)،(٢،٢)،(٢،٤)،(٢،٥)،(٤،١)،(٤،٢)،(٤،٤)،(٤،٥)}

(٣) (أ − ب) = {١}

∴ (أ − ب) × ج = {١} × {١ ، ٥} = {(١،١)،(١،٥)}

(٤) (أ ∩ ب) = {٤} ، (ب ∩ ج) = ∅

∴ (أ ∩ ب) × (ب ∩ ج) = {٤} × ∅ = ∅

ملحوظة هامة

س × ∅ = ∅ × س = ∅ لان ∅ مجموعة خالية

حاول بنفسك

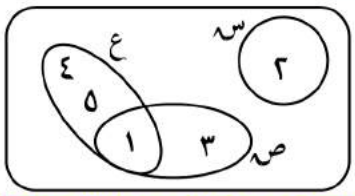
اذا كان س = {٢} ، ص = {١ ، ٣} ، ع = {١ ، ٤ ، ٥} فمثل المجموعات بشكل فن ثم أوجد

(١) س × ص (٢) ص × ع

(٣) س × ع (٤) س × (ص ∩ ع)

(٥) (س − ع) × (س ∪ ص) (٦) (س × ص) ∪ (ص × ع)

(٧) (س × ص) ∩ (س × ع) (٨) (س ∩ ص) × ع



Mr.Morad

التمثيل البياني للحاصل الديكارتي لمجموعتين

المخطط السهمي — **المخطط البياني**

مثال ١ اذا كان س = {١ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٥}

فأوجد ص × س ، س^{٢}

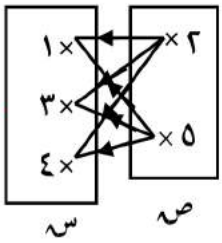
ومثل كل منهما بالمخطط السهمي مرة واخرى بالمخطط البياني

الحـــــل

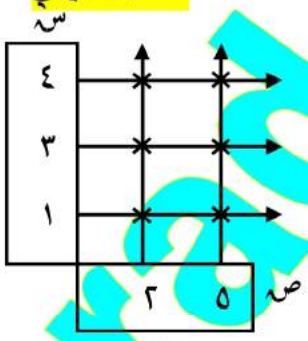
ص × س = {٢ ، ٥} × {١ ، ٣ ، ٤}

= {(٢،١) ، (٢،٣) ، (٢،٤) ، (٥،١) ، (٥،٣) ، (٥،٤)}

المخطط السهمي



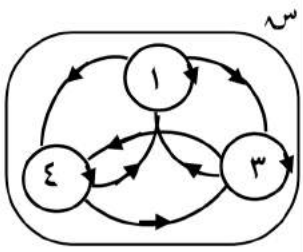
المخطط البياني



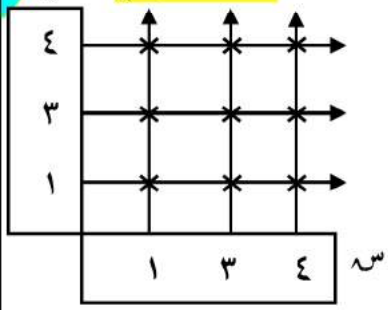
س^{٢} = {١ ، ٣ ، ٤} × {١ ، ٣ ، ٤}

= {(١،١) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (٣،١) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٤،١) ، (٤،٣) ، (٤،٤)}

المخطط السهمي



المخطط البياني



حاول بنفسك

اذا كان س = {٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٥ ، ٦} ، ع = {١ ، ٤}

اوجد

(١) س × ص ومثله بمخطط سهمي واخر بياني

(٢) س^{٢} ومثله بمخطط سهمي واخر بياني

(٣) ن (س × ع) (٤) ن (ص^{٢})

تمارين على الحاصل الديكارتي للمجموعات المنتهية

[١] في كل مما يأتي اوجد قيم أ ، ب اذا كان :

(١) (أ − ٢ ، ب + ١) = (٢ ، −٣) (٢) (٦ ، ب − ٣) = (٢ − أ ، −١)

(٣) (أ^{٢} ، ١) = (٣٦ ، ب^{٥}) (٤) (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٢ ، ب^{٢} − ٣)

(٥) (٢أ ، ٧) = (٢ب + ١ ، أ) (٦) (أ^{٥} ، ب + ١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

[٢] اذا كان س = {٢ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٣ ، ٤}

اوجد س × ص ، س^{٢} ، ص^{٢} ومثلها بمخطط سهمي واخر بياني

[٣] اذا كان س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

فأوجد س × ص ، ن (س × ص) ، ص^{٢} ،

ن (س^{٢}) ، ن (ص^{٢})

[٤] اذا كان س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٣ ، ٥}

فمثل المجموعات بشكل فن ثم اوجد

(١) (س ∩ ص) × (ص ∩ ع) (٢) (س ∪ ع) × ص

(٣) (س − ص) × (ص − ع) (٤) (س × ص) ∩ (ص × ع)

(٥) (ع − ص) × (س ∪ ص) (٦) (س ∩ ص) × ع

[٥] اذا كان س × ص = {(١،١) ، (١،٣) ، (١،٥)}

اوجد س ، ص ، ص × س ، ص^{٢}

[٦] اكمل ما يأتي :

(١) اذا كان س = {٢ ، ٥} ، ص = {٣} فان

س × ص = ... ، ن (س^{٢}) = ... ، ن (ص^{٢}) = ...

(٢) اذا كان ن (أ × ب) = ١٥ ، ن(ب) = ٣ فان ن (أ) = ...

(٣) اذا كان ن(س × ص) = ٨ ، س = {٣ ، ٤} فان ن(ص^{٢}) = ...

(٤) اذا كان ن(أ × ب) = ٣ ، ب = {٣ ، ٧ ، ٥} فان ن(أ^{٢}) = ...

(٥) {٣} × {٥} = ...

(٦) اذا كان س × ص = {(٢،٦) ، (٢،٩) ، (٢،١١)}

فان ن(س^{٢}) = ...

(٧) اذا كان (٢ ، ٥) ∈ أ × ب فان (٥ ، ٢) ∈ .....

(٨) اذا كان (٣$^{|س|}$ ، ٢^{ص} + ٢^{ص}) = (٩ ، ١)

فان س = ... ، ص = ...

(٩) اذا كان س^{٢} = {(١،١) ، (١،٢) ، (٢،١) ، (٢،٢)}

فان س = ...

Mr.Morad

(١٠) اذا كان(س−١، ١١)=(٨، ص+٣)

فان $\sqrt{\text{س}+٢\text{ص}}$ = ...

(١١) اذا كان ص ={٥ ، ٦} فان ص × ∅ = ...

[٧] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كان(أ+١، ٥)=(−٢، ب−٣) فان ٢أ + ب = ...

[−١٢ ، صفر ، ٢ ، ١٢]

(٢) س={٣} فان $\text{س}^{٢}$ = ...

[٩ ، (٣،٣) ، {٩} ، {(٣،٣)}]

(٣) اذا كان س={ ١ ، ٢} ، ص={٣،٤} فان(٣،٤) ∈ .....

[س×ص ، ص×س ، $\text{س}^{٢}$ ، $\text{ص}^{٢}$]

(٤) اذا كان ن (س)=٤، ن (ص)=٢ فان ن (س×ص)=.....

[٦ ، ٨ ، ٩ ، ١٠]

(٥) اذا كان ن (س)=٥، ص={٣ ، ٤} فان ن (س×ص)=.....

[٢٥ ، ٢٠ ، ٥ ، ١٠]

(٦) اذا كان س={ ١ ، ٢} فان ن (س× س)=.....

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٧) اذا كان ن (س)=٣ ، ن (س×ص)=١٢ فان ن(ص)=.....

[٤ ، ٩ ، ١٥ ، ٣٦]

(٨) اذا كان(٣،٥) ∈ { ١،٣}×{س،٨} فان س = ...

[٨ ، ٦ ، ٥ ، ٣]

(٩) اذا كان ن ($\text{س}^{٢}$)= ٩ ،ن(س×ص)=١٢ فان ن($\text{ص}^{٢}$)=.....

[١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤]

(١٠) اذا كان س={ ٣، ٤} فان ن (س× ∅)=.....

[١ ، ٢ ، صفر ، ∅]

(١١) اذا كان ن ($\text{س}^{٢}$)= ٩ فان ن(س)=.....

[٢ ، ٣ ، ٩ ، ٨١]

(١٢) اذا كان (س−ص)×ص= {(١،٢)،(١،٣)}،

ن (س × ص)= ٦ فان س = ...

[{١}، {١، ٢}، {١، ٣، ٦}، {١، ٣، ٢}]

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الغير منتهية

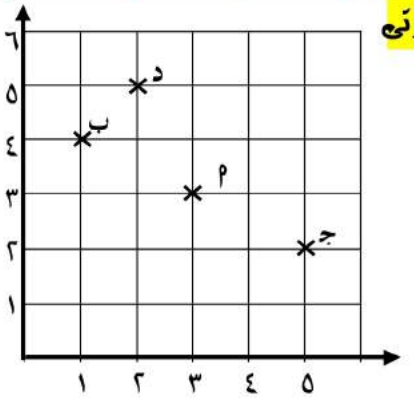
اولا حاصل الضرب الديكارتي

ط × ط = $\text{ط}^{٢}$

يمكن تمثيل النقط

أ(٣،٣) ، ب (١،٤)

، جـ (٥،٢) ، د (٢،٥)



ثانيا حاصل الضرب الديكارتي

ص × ص = $\text{ص}^{٢}$

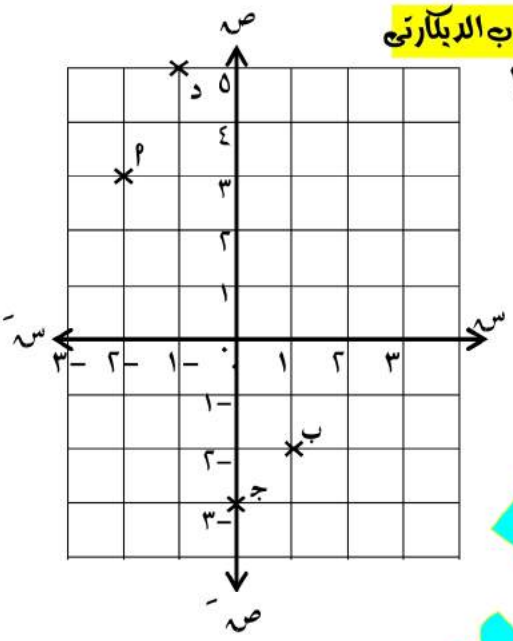
يمكن تمثيل النقط

أ(−٢،٣) ،

ب (١،−٢) ،

جـ (٠،−٣) ،

د (−١،٥)



ثالثا حاصل الضرب الديكارتي

ن × ن = $\text{ن}^{٢}$

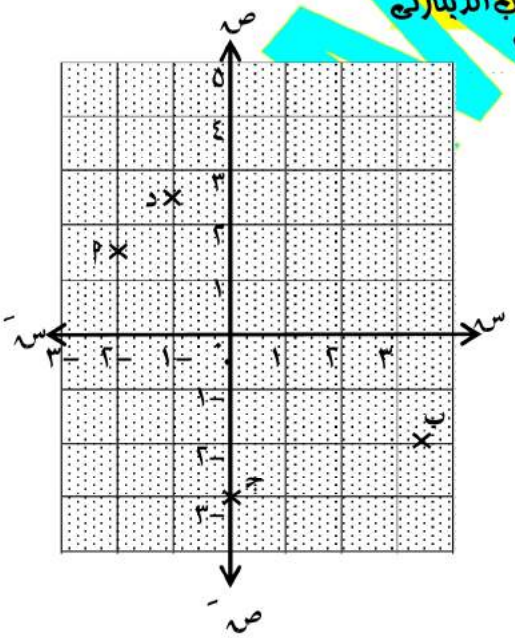
يمكن تمثيل النقط

أ(−٢، $\frac{٣}{٢}$) ،

ب ($\frac{٧}{٢}$ ،−٢) ،

جـ (٠،−٣) ،

د (−١، $\frac{٥}{٢}$)



Mr.Morad

ثالثا حاصل الضرب الديكارتي

ح × ح = ح^{٢}

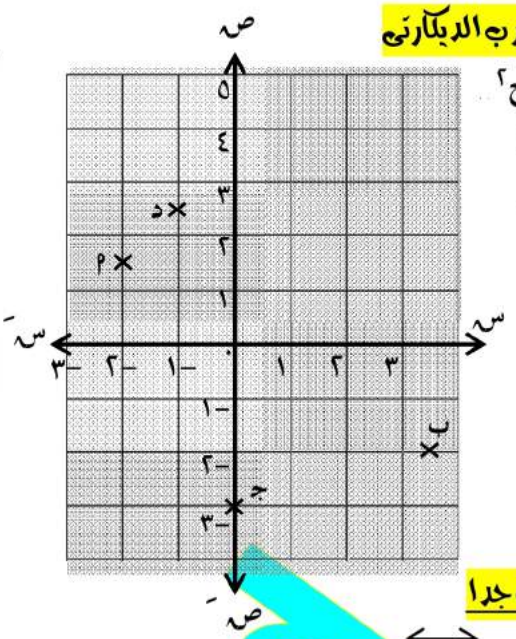
يمكن تمثيل النقط

أ (−٢، $\frac{٣}{٢}$) ،

ب ($\frac{٧}{٢}$ ، −٢) ،

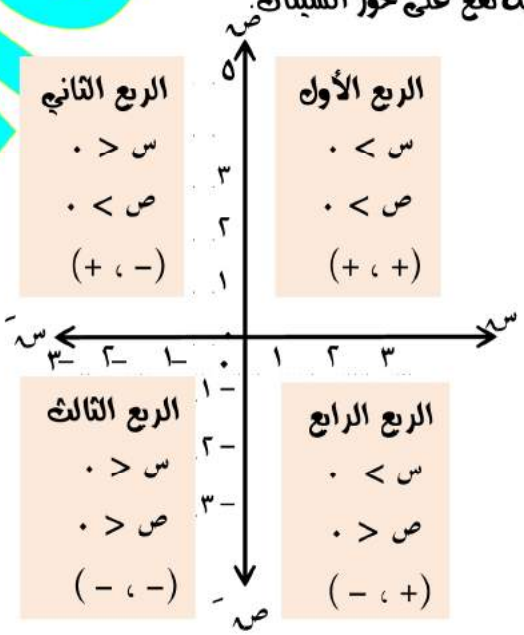
جـ (٠، −٣) ،

د (−١، $\frac{٥}{٢}$)



ملاحظات هامة جدا

- يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س س َ}}$ محور السينات أو المحور الأفقي .
- يسمى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ص ص َ}}$ محور الصادات أو المحور الرأسي .
- نقطة تقاطع المحورين تسمى بنقطة الاصل (٠، ٠) .
- اذا كان الإحداثي السيني (المسقط الاول) للنقطة = صفر فان النقطة تقع على محور الصادات .
- اذا كان الإحداثي الصادي (المسقط الثاني) للنقطة = صفر فان النقطة تقع على محور السينات .



مثال ١ اذكر الربع او المحور الذي تقع عليه النقط الاتية :

أ (−٢، ٣) ، ب (١، −٢) ، جـ (٠، −٣) ، د (−١، −٥) ، هـ (−٥، ٠)

الحل

أ (−٢، ٣) الربع الثاني ، ب (١، −٢) الربع الرابع

جـ (٠، −٣) محور الصادات ، د (−١، −٥) الربع الثالث

هـ (−٥، ٠) محور السينات

مثال ٢ اذا كانت النقطة (أ −٢، ٣) تقع على محور الصادات

فان أ = ...

الحل

حيث ان النقطة تقع على محور الصادات ∴ المسقط الاول = صفر

أ −٢ = صفر ∴ أ = ٢

مثال ٣ اذا كانت النقطة (٣ ، ب −٧) تقع على محور السينات

فان ب = ...

الحل

حيث ان النقطة تقع على محور السينات ∴ المسقط الثاني = صفر

ب −٧ = صفر ∴ ب = ٧

- اذا كانت النقطة (س ، س^{٢} −٤) تقع في الربع الثاني من الشبكة التربيعية ح × ح فان س يمكن تساوي .....

[−√٣ ، √٣ ، −√٥ ، √٥]

- اذا كانت النقطة (٣− س ، س−٥) تقع في الربع الثالث حيث س ∈ ص فان س = ...

[١ ، ٢ ، ٤ ، $\frac{١}{٣}$]

- اذا كانت النقطة (أ +٥، ٦) تقع على محور الصادات

فان أ = ...

[٥ ، ٦ ، −٥ ، ١]

- اذا كانت النقطة (٤ ، ب −١) تقع على محور السينات

فان ب = ...

[٤ ، −١ ، ٥ ، ١]

- اكمل الجدول الاتي :

النقطة	(−٥، ٣)	(٢، −١)	(−٤، ٠)	(٠، ٧)	(−٥، −٣)
الربع او المحور	.....	.....	.....	.....	.....

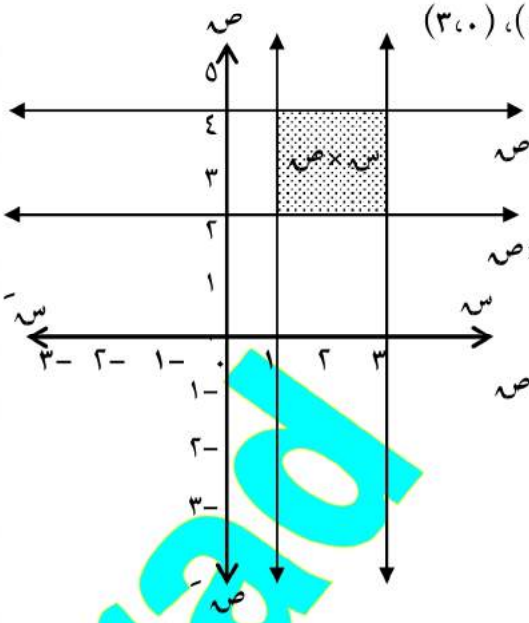
Mr.Morad

حاصل الضرب الديكارتي لفترتين

مثال ١ اذا كانت س = [١ ، ٣] ، ص = [٢ ، ٤]

اوجد س × ص موضحا اي من النقط التالية ∈ س × ص

(٢،٢) ، (٠،٠)، (٠،٣)



(٢،٢) ∈ س × ص

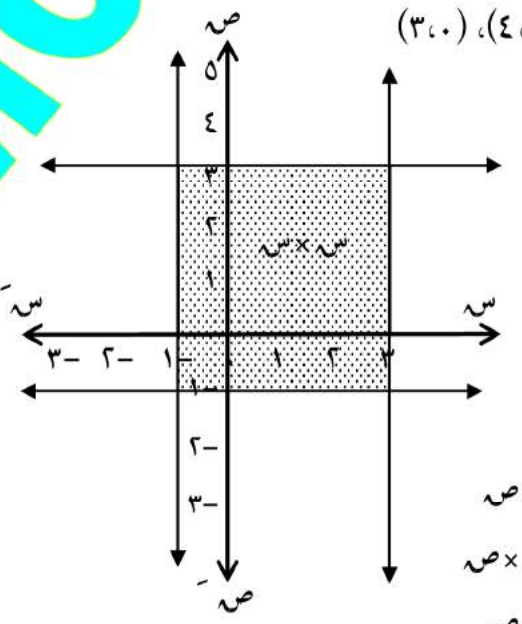
(٠،٠) ∉ س × ص

(٠،٣) ∉ س × ص

مثال ٢ اذا كانت س = [−١ ، ٣] ، اوجد س^{٢}

موضحا اي من النقط التالية ∈ الحاصل الديكارتي س^{٢}

(١،٢) ، (−١،٤)، (٠،٣)



(١،٢) ∈ س × ص

(−١،٤) ∉ س × ص

(٠،٣) ∈ س × ص

حاول بنفسك

اذا كانت س = [−٢ ، ٣]

اوجد س × س موضحا أي من النقط التالية ∈ س × س

(١،٢) ، (٣،−١)، (−١،٤) ،(−٢،٠)

تمارين على حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الغير منتهية

[١] على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتي ح × ح

عين النقط الآتية :

أ(٤،٣) ،ب(٥،−٢) ،جـ(٠،−٢) ،د(−٢،−٣)، هـ(−٤،٠)

ثم اذكر الربع او المحور الذي تقع عليه هذه النقاط

[٢] اذا كانت النقطة (−٣ ، ٥ب − ١٠) تقع على محور السينات

فما قيمة ب

[٣] اذا كانت النقطة (٢أ − ١، ٥) تقع على محور الصادات

فما قيمة أ

[٤] اذا كانت النقطة (−٢ ، ٣ أ − ١٢) تقع على محور السينات

فما قيمة أ

[٥] اذا كانت النقطة (س+٣، ٥) تقع على محور الصادات

فما قيمة س

[٦] اذا كانت س = [−٢ ، ٣] ، ص = [٠ ، ٤]

اوجد س × ص ، ص × س ، ص^{٢}

[٧] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) النقطة ..... تقع في الربع الثاني

[(٣،٢)،(−٢،٣)،(−٣،−٢)،(٢،−٣)]

(٢) اذا كانت النقطة (س ، ٥) تقع على محور الصادات

فان س = ... [صفر ، ٧ ، −٧ ، ٤٩]

(٣) اذا كانت النقطة (٥ ، ب −٧) تقع على محور السينات

فان ب = ... [٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢]

(٤) اذا كانت النقطة (−٤ ، ص) تقع على محور السينات

فان ٢ص−١ = ... [−١ ، ١ ، −٨ ، −٩]

(٥) اذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع في االربع الرابع

فان أ ب .....صفر [= ، > ، < ، ≥]

(٦) اذا كانت النقطة (٢أ، ٣ب) ∈ محور السينات

فان $\frac{ب}{أ}$ = ... [٠ ، ٢ ، ٣ ، $\frac{٢}{٣}$]

(٧) اذا كانت النقطة (س − ٢، س−٤) تقع في الربع الرابع

حيث س ∈ ص فان س = ... [٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٨) اذا كانت النقطة (س−٤،٢− س) تقع في الربع الثالث حيث

س ∈ ص فان س = ... [٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦]

Mr.Morad

العلاقة والدالة

اولا العلاقة :

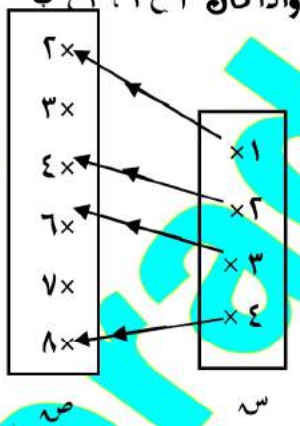
هي ارتباط يربط بعض او كل عناصر المجموعة الاولى ببعض او كل عناصر المجموعة الثانية . ويرمز لها بالرمز ع

حيث ان ع ⊂ الحاصل الديكارتي.

مثال ١ اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = $\frac{1}{2}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واذا كان أ ع ٢ ، ٣ ع ب فما قيمة أ ، ب

الحل



ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }

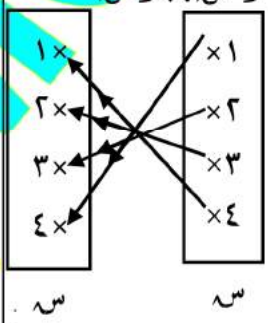
∵ أ ع ٢ ∴ أ = ١ ،

٣ ع ب ∴ ب = ٦

مثال ٢ اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني ان أ + ب = ٥ لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

الحل



أ + ب = ٥

ع = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) }

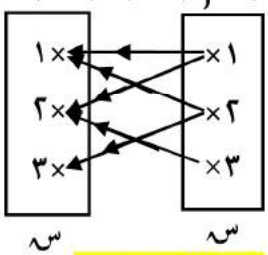
مثال ٣ اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني ان أ + ب = عدد اولي لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

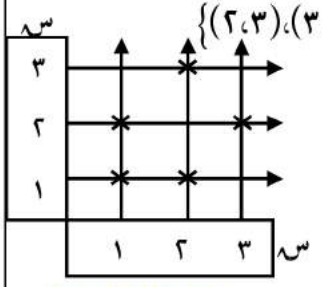
الحل

أ + ب = عدد اولي

ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) }



المخطط السهمي



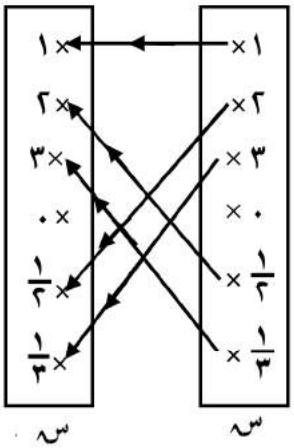
المخطط البياني

مثال ٤ اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ }

وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني ان أ معكوس ضربي لـ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

الحل



أ معكوس ضربي لـ ب

ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{1}{2}$) ، (٣ ، $\frac{1}{3}$) ، ($\frac{1}{2}$ ، ٢) ، ($\frac{1}{3}$ ، ٣) }

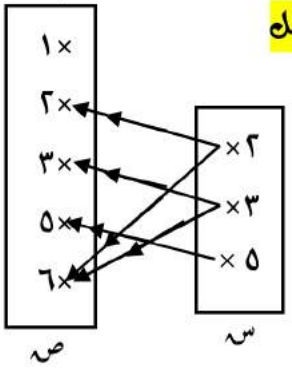
لاحظ ان العدد صفر ليس له معكوس ضربي

مثال ٥ اذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }

وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ عامل من عوامل ب (ب تقبل القسمة على أ) أو (أ تقسم ب)

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

الحل



أ عامل من عوامل ب

(ب تقبل القسمة على أ)

أو (أ تقسم ب)

ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٥) }

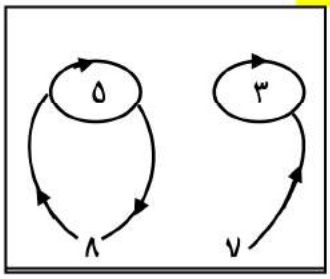
حاول بنفسك

(١) اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ،

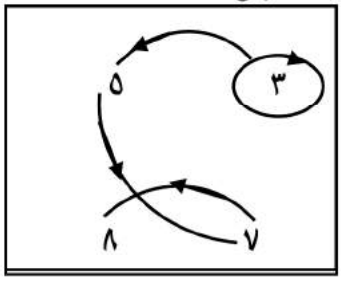
ص = { أ : أ ∈ ص ، ٣ ≤ أ ≤ ١٢ }

وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = $\frac{1}{3}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واذا كان ٢ ع ب ، أ ع ٩ فما قيمة أ ، ب

(٢) اكتب بيان ع١ ، ع٢ على صورة ازواج مرتبة



ع١



ع٢

Mr Morad

ثانيا الدالة :

يقال للعلاقة انها دالة في الحالات الاتية :

- في المخطط السهمي يجب ان يكون كل عنصر في المجموعة الاولى يخرج منه سهم واحد فقط .
- في بيان العلاقة يجب ان يكون كل عنصر من المجموعة الاولى يظهر كمسقط اول مرة واحدة فقط .
- في المخطط البياني يجب ان يكون كل عنصر من المجموعة الاولى له صورة واحدة فقط لا غير .

تعريف : اذا كانت ع علاقة من س الى ص فإن

المجال هو عناصر المجموعة الاولى س .

المجال المقابل هو عناصر المجموعة الثانية ص .

المدى هو مجموعة الصور المقابلة لعناصر س وهو جزء من المجال المقابل .

مثال ٦ اذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {١، ٣، ٥، ٦، ٩}

وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = $\frac{1}{3}$ ب

لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة ام لا واذا كانت دالة اذكر مداها

الحل

بيان ع = { (١، ٣) ، (٢، ٦) ، (٣، ٩) }

هذه العلاقة تمثل دالة لان كل عنصر من عناصر المجموعة س ظهر في المسقط الاول مرة واحدة فقط في بيان العلاقة .

أو لان كل عنصر من عناصر المجموعة س خرج منه سهم واحد فقط الى عنصر مرتبط معه في المجموعة ص بهذه العلاقة .

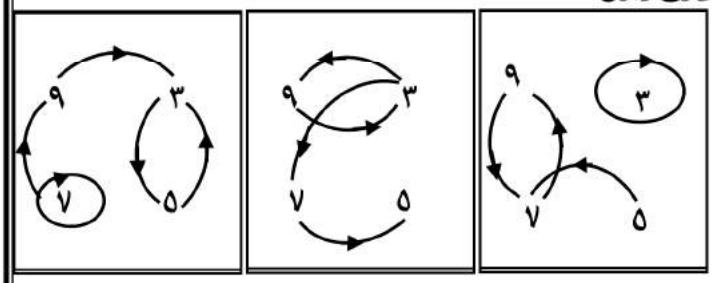
المدى = { ٣، ٦، ٩ }

حاول بنفسك

اذا كانت س = { ١، ٢، ٠، -١، -٢ }

وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني ان أ معكوس جمعي لـ ب لكل أ ∈ س، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة ام لا واذا كانت دالة اذكر مداها

مثال ٧ اذا كانت س = {٣، ٥، ٧، ٩} فبين أي المخططات السهمية التالية تمثل دالة من س الى س مع ذكر المدى اذا كانت دالة



ع ١ ع ٢ ع ٣

الحل

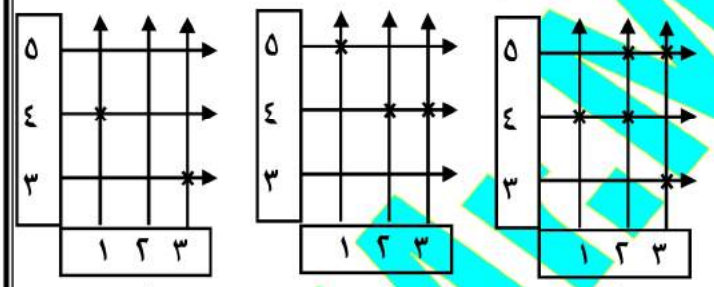
ع ١ تمثل دالة لان كل عنصر من عناصر المجموعة س خرج منه سهم واحد فقط الى عنصر مرتبط معه في المجموعة ص

المدى = { ٣، ٧، ٩ }

ع ٢ لا تمثل دالة لان العنصر ٥ ∈ س لم يخرج منه أي اسهم أو لان العنصر ٣ ∈ س خرج منه سهمان .

ع ٣ لا تمثل دالة لان العنصر ٧ ∈ س خرج منه سهمان

مثال ٨ اذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = {٣، ٤، ٥} فبين أي المخططات البيانية التالية تمثل دالة من س الى ص مع ذكر المدى اذا كانت دالة .



ع ١ ع ٢ ع ٣

الحل

ع ١ لا تمثل دالة لان العنصر ٢ ∈ س له صورتان على الخط الرأسي اطار بالعنصر ٢

ع ٢ تمثل دالة لان كل عنصر من عناصر المجموعة س له صورة واحدة فقط على الخط الرأسي . المدى = { ٤، ٥ }

ع ٣ لا تمثل دالة لان العنصر ٢ ∈ س ليس له أي صور على الخط الرأسي اطار بالعنصر ٢

حاول بنفسك اذا كانت س = {٣، ٢، ١} ، ص = {١، ٤، ٦، ٩}

وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = $\sqrt{\text{ب}}$

لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة ام لا واذا كانت دالة اذكر مداها

تمارين على العلاقة والدالة

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كانت د دالة من س الى ص فإن س تسمى .....

(أ) مدى الدالة د (ب) مجال الدالة د

(جـ) المجال المقابل الدالة د (د) قاعدة الدالة

(٢) اذا كانت د دالة من س الى ص فإن ص تسمى .....

(أ) مدى الدالة د (ب) مجال الدالة د

(جـ) المجال المقابل الدالة د (د) قاعدة الدالة

(٣) اذا كانت ع دالة بيانها { (١،٣) ، (٢،٥) ، (٤،٧) } فإن مداها = ...

(أ) { ١ ، ٢ ، ٤ } (ب) { ٣ ، ٥ ، ٧ }

(جـ) { ٢ ، ٤ ، ٧ } (د) { ١ ، ٣ ، ٥ }

(٤) الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها = ...

(أ) { أ } (ب) { أ ، ب ، جـ }

(جـ) { أ ، ب } (د) { ب ، جـ }

(٥) اذا كانت ع دالة من س الى ص حيث س = { ٥ ، ٤ ، ٢ } ، ص = { ٦ ، ٧ } وكانت ع = { (٢،٦) ، (أ،٦) ، (٥،٦) } فإن أ = ... [٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٢]

[٢] اذا كانت س = { ٤ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = $\frac{١}{٢}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة ام لا واذا كانت دالة اذكر مداها

[٣] اذا كانت س = { ٨ ، ٦ ، ٤ ، ١٠ } ، ص = { ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ = ٢ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

[٤] اذا كانت س = { ٤ ، ٣ ، ١ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٢ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ + ب = ٧ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واخر بياني . هل ع دالة ام لا وطاذا .

[٥] اذا كانت س = { ٥ ، ٤ ، ٢ ، ٧ } ، ص = { ٨ ، ١ ، ٠ ، ٤ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان $أ^٢$ = ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واخر بياني . هل ع دالة ام لا وطاذا .

[٦] اذا كانت س = { ٤ ، ٣ ، ٢ } ، ص = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ تقسم ب (ب تقبل القسمة على أ) (أ عامل من عوامل ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واخر بياني . هل ع دالة ام لا وطاذا .

[٧] اذا كانت س = { ٤ ، ٢ ، ١ } وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني ان أ ضعف ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين مع ذكر السبب هل ع دالة ام لا . وطاذا .

[٨] اذا كانت س = { ٥ ، ٣ ، ١ } وكانت ع دالة على س ، بيان ع = { (أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥) }

فأوجد القيم العددية لكل من أ ، ب

[٩] اذا كانت س = { ٣ ، ٢ ، ١ } ، ص = { ١٢ ، ٢١ ، ٤٧ ، ٥٢ } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان أ رقم من ارقام العدد ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

- اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي واخر بياني . هل ع دالة ام لا وطاذا .
- بين أي مما يأتي صواب مع ذكر السبب

١ ع ٥٢ ، ٢ ع ٢١ ، ٣ ع ٤٧

[١٠] اذا كانت س = { -٢ ، ٢ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٧ ، ك } وكانت ع علاقة من س الى ص حيث أ ع ب تعني ان ب = $أ^٢$ - ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

- اوجد قيمة ك
- مثل ع بمخطط سهمي واخر بياني .

Mr.Morad

دوال كثيرات الحدود

الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها (صورة س) هي حد او مقدار جبري ويتوفر فيها الشرطان الاتيان :

- كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية ح .
- قوة (أس) المتغير س في أي حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعي.

أي ان المتغير س اذا وجد بالصورة $\sqrt{س}$ أو $\frac{١}{س}$ فإن الدالة لا تسمى كثيرة حدود .

ملحوظة هامة

يجب التعرف على ما اذا كانت الدالة كثيرة حدود ام لا قبل وضع قاعدتها في ابسط صورة

فمثلا الدالة ت (س) = س(س + $\frac{١}{س}$) ليست كثيرة حدود لان مجال الدالة لا يساوي ح لأنه لا يمكن ايجاد صورة العدد صفر بواسطتها لوجود الحد $\frac{١}{س}$ لأنه لا يجوز القسمة على صفر .

درجة الدالة كثيرة الحدود

هي اكبر قوة (أس) للمتغير س في قاعدة الدالة .

ملحوظة درجة الدالة د(س) = أ حيث أ ∈ ح − {٠}

وفي حالة أ = ٠ أي عندما د(س) = ٠

فإن الدالة ليس لها درجة

مثال ١ أي من الدوال المعرفة بالقواعد الاتية كثيرة حدود وعين درجتها اذا كانت كثيرة حدود فيما يلي :

(١) د(س) = − ٥ (٢) د(س) = ٥ − ٣ س

(٣) د(س) = ٢س − س^{٢} (٤) د(س) = س(س^{٢} − ٣)

(٥) د(س)=٢س − ٤س^{٢} + س^{٣} (٦) د(س)=٢س − ٤س^{٥} + س^{٣}

(٧) د(س) = س^{٢} (س^{٢}+١)^{٢} (٨) د(س) = س^{٢} − $\sqrt{س}$+١

(٩) د(س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٤) (١٠) د(س) = س($\frac{٢}{س}$ + ٥)

الحـــــل

(١) د(س) = − ٥ كثيرة حدود من الدرجة الصفرية .

(٢) د(س) = ٥ − ٣ س كثيرة حدود من الدرجة الاولى .

(٣) د(س) = ٢س − س^{٢} كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

(٤) د(س) = س(س^{٢} − ٣) = س^{٣} − ٣ س

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

(٥) د(س)=٢س − ٤س^{٢} + س^{٣} كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

(٦) د(س)=٢س − ٤س^{٥} + س^{٣} كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

(٧) د(س) = س^{٢} (س^{٢}+١)^{٢} = س^{٢}(س^{٢}+٢ س +١)

= س^{٤}+٢ س^{٣} + س^{٢} كثيرة حدود من الدرجة الرابعة .

(٨) د(س) = س^{٢} − $\sqrt{س}$+١ ليست دالة كثيرة حدود .

(٩) د(س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٤) = س^{٢} − س^{٢} + ٤ = ٤

كثيرة حدود من الدرجة الصفرية .

(١٠) د(س) = س ($\frac{٢}{س}$ + ٥) ليست دالة كثيرة حدود .

مثال ٢ اذا كانت د(س) = ٢س + ب ، ر(س) = س^{٢} + ب حيث د ، ر من دوال كثيرات الحدود فإذا كان د(٢)+ ر(−٤)= ٣٠

فأوجد د(−٢)− ر(٢)

الحـــــل

د(٢)=٢×٢+ ب ، ر(−٤)=(−٤)^{٢} + ب = ١٦+ ب

∵ د(٢)+ ر(−٤) = ٣٠ ∴ ٤+ ب + ١٦+ ب = ٣٠

∴ ٢٠+ ٢ب = ٣٠ ∴ ٢ ب = ٣٠ − ٢٠ = ١٠ ∴ ب=٥

∴ د(س) = ٢س + ٥ ، ر(س) = س^{٢} +٥

∴ د(−٢) = ٢×−٢ + ٥ = −٤ + ٥ = ١ ،

ر(٢) = ٢ ^{٢} +٥ = ٤ + ٥ = ٩

∴ د(−٢)− ر(٢)= ١ − ٩ = −٨

حاول بنفسك

اذا كانت د(س) = ٢س + ٥ ، ر(س) = س − ٦ حيث د ، ر من دوال كثيرات الحدود فاثبت ان د(٢) +٣ ر(٣) = صفر

Mr.Morad

تمارين على التعبير الرمزي لدوال كثيرات الحدود

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الدالة د حيث د(س)= س^{٤} −٢س^{٣} + ٥ كثيرة حدود من الدرجة ..... [الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

(٢) الدالة د حيث د(س)=(س − ٥)^{٣} كثيرة حدود من الدرجة ..... [الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

(٣) الدالة د حيث د(س)= س (س − ٢س^{٢}) كثيرة حدود من الدرجة ..... [الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

(٤) الدالة د حيث د(س)= س^{٢} (س − ٣)^{٢} كثيرة حدود من الدرجة ..... [الاولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

(٥) اذا كانت د(س) = س^{٣} − ١ فإن د(١)=.....
[صفر ، ٢ ، −٢ ، ١]

(٦) اذا كانت د(س) = س^{٢} − س+٣ فإن د(٣)=.....
[٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢]

(٧) اذا كانت د(س) = س^{٢} − $\sqrt{٢}$ س فإن د($\sqrt{٢}$)=.....
[٤ ، ٢ ، ٦ ، صفر]

(٨) اذا كانت د(س) = أ س+ ٦، د(٢)=٢ فإن أ =.....
[٢ ، ٤ ، −٢ ، ٦]

(٩) اذا كانت د(س) = س− ٥ ، $\frac{١}{٢}$ د(أ)=٣ فإن أ =.....
[٢ ، ٨ ، ١١ ، ١٦]

(١٠) اذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت ن (ص) =٤ وكانت الدالة د : س ⟵ ص ، د(س) = س^{٢} − ١ فإن ص=.....

(أ) { ٣ ، ٧ ، ١٣ } (ب) { ٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٤٥ }
(ج) { ٣ ، ١٥ ، ٣٥ } (د) { ٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ }

[٢] اكمل ما يأتي :

(١) الدالة د حيث د(س)= ٥س^{٢} + ٧ من الدرجة .....

(٢) الدالة د حيث د(س)= س^{٥} (س + ٢) من الدرجة .....

(٣) الدالة د حيث د(س)= س^{٢} − (س^{٢} − ٣) من الدرجة .....

(٤) اذا كانت د(س) = س^{٢} − س+٣ فإن د(−٢)=.....

(٥) اذا كانت د(س) = س−٤ فإن د(٧)=..... ومجال د .....

(٦) اذا كانت الدالة د : ص ⟵ ص ، د(س) = س^{٢}
فإن د(٢) + د(−٢) =.....

(٧) اذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت الدالة د : ص ⟵ ح ، د(س) =٢س+٣ فإن مدى الدالة =.....

(٨) اذا كان (−١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د(س) = أ س+٢ فإن أ =...

(٩) اذا كان (٣، ص) ∈ بيان الدالة د(س) =س+٢ فإن ص=.....

(١٠) اذا كان (أ ،٤) ∈ بيان الدالة د(س) =٢س+٣ فإن أ=.....

[٣] أي من الدوال الاتية كثيرة حدود

(١) د(س) = ٢س − ٥ (٢) د(س) = ٥

(٣) د(س) = س + $\frac{١}{س}$ (٤) د(س)= س^{٣} + س^{٢} +٣

(٥) د(س)= س^{٢}+ $\sqrt{س}$ +٨ (٦) د(س)= س(س^{٢} + $\frac{١}{س}$ −٢)

(٧) د(س) = $\sqrt[٣]{س}$+ ٨ (٨) د(س)= س(س^{٢} +س$^{-٢}$ −٢)

[٤] اذا كانت د(س) =٢س^{٢} − ٥س+ ٢
اثبت ان د(٢) = د($\frac{١}{٢}$)

[٥] اذا كانت د(س) =٢س − ١
اثبت ان د(٢) − ٣ د(١) =صفر

[٦] اذا كانت د(س) = س^{٢} − ٣ س ، ر(س) = س − ٣
اثبت ان د(٣)= ر(٣)= صفر أوجد د($\sqrt{٢}$)+٣ر($\sqrt{٢}$)

Mr.Morad

بعض دوال كثيرات الحدود

اولا الدالة الثابتة :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د(س) = أ ، أ ∈ ح تسمى دالة كثيرة حدود ثابتة .وهى من الدرجة الصفرية .تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات ويبعد عنة أ وحدة طول ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠، أ) .

فإذا كانت د(س) = ٣ فان د(١) = ٣ ، د(٠) = ٣، د(−٥) = ٣

مثال ١ مثل بيانيا د(س) = ٣

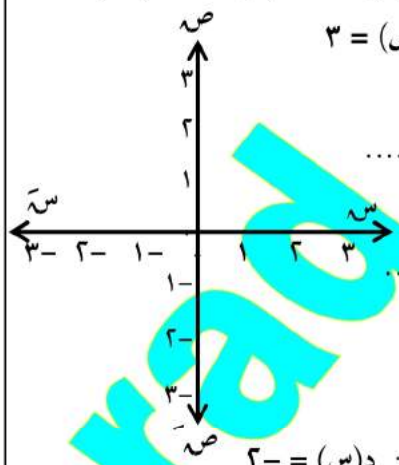
ثم اكمل ما يأتي :

(١) درجة الدالة د هى .....

(٢) د(−٢) = ...

(٣) د(− ٥) +د(٥) = ...

(٤) د(− س) =.....



مثال ٢ الدالة د : د(س) = −٢

تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور ..... ويبعد عنة.....

وحدة طول ويقطع محور ..... فى النقطة .....

مثال ٣ اذا كانت د(س) = ٤ فان

(١) درجة الدالة د هى ..... (٢) د(٣) + د(٢) =.....

(٣) د(√٥) = ... (٤) د(١) +٣ د(٢) =.....

(٥) ½ د(١٠) = ... (٦) د(٦) ÷د(٢) =.....

ثانيا الدالة الخطية :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د(س) = أس+ ب ، أ، ب ∈ ح، أ ≠ ٠ تسمى دالة خطية أو دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى وتمثل بيانيا بخط مستقيم مائل ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠، ب) ويقطع محور السينات فى النقطة (−ب/أ ، ٠) .

ولتمثيلها بيانيا يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان الى بيان الدالة ويفضل ايجاد زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة الحل .

امثلة للدالة الخطية :

(١) د(س) = س+ ١

(٢) د(س) = ٢س− ١

(٣) د(س) = ٣ − ½ س

(٤) د(س) = −٥ س

لاحظ فى كل من هذه الدوال أس المتغير س هو ١ لذلك تسمى دوال خطية من الدرجة الاولى

مثال ٤ مثل بيانيا كلا من الدوال الخطية الاتية :

(١) د(س) = ٢س− ١ (٢) د(س) = ٣ − ½ س

الحـــــل

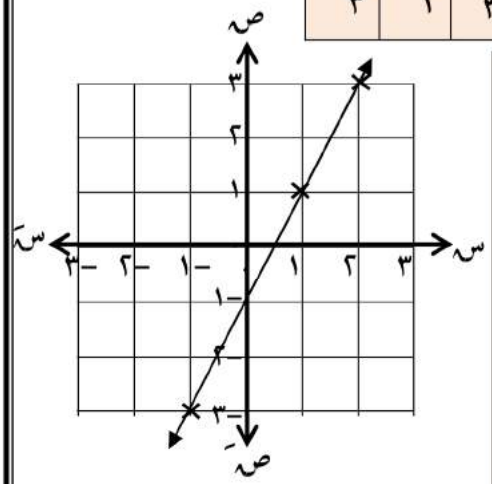
(١) د(س) = ٢س− ١ لتمثيل هذه الدالة بيانيا نعين ثلاثة ازواج مرتبة تنتمى الى بيانها أى نختار أى ثلاث قيم للمتغير س

د(−١) = ٢×− ١ −١ =− ٢ −١ = −٣ ∴ (−١، −٣) ∈ د

د(١) = ٢×١ −١ = ٢ −١ = ١ ∴ (١، ١) ∈ د

د(٢) = ٢×٢ −١ = ٤ −١ = ٣ ∴ (١، ٣) ∈ د

س	−١	١	٢
ص=د(س)	−٣	١	٣



لاحظ أن نقطة التقاطع مع محور الصادات هى (٠، ب) هى (٠،−١) ومع محور السينات هى (−ب/أ ، ٠) هى (½ ، ٠)

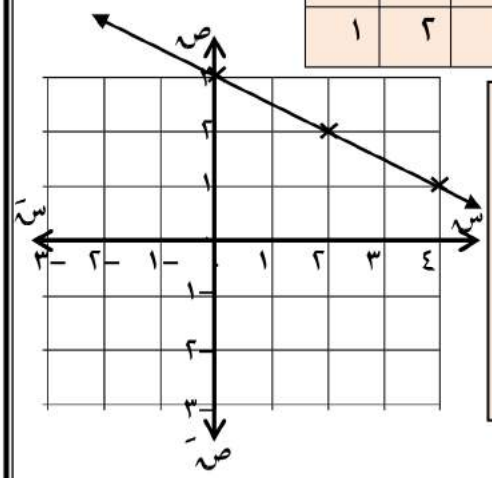
(١) د(س) = ٣ − ½ س لتمثيل هذه الدالة بيانيا نعين ثلاثة ازواج مرتبة تنتمى الى بيانها أى نختار أى ثلاث قيم للمتغير س

د(٠) = ٣ − ½ × ٠= ٣ − ٠ = ٣ ∴ (٠، ٣) ∈ د

د(٢) = ٣ − ½ × ٢= ٣ −١ = ٢ ∴ (٢، ٢) ∈ د

د(٤) = ٣ − ½ × ٤= ٣ −٢ = ١ ∴ (٤، ١) ∈ د

س	٠	٢	٤
ص=د(س)	٣	٢	١



نقطة التقاطع مع محور الصادات هى (٠،٣) ومع محور السينات هى (٦، ٠)

Mr.Morad

حاول بنفسك

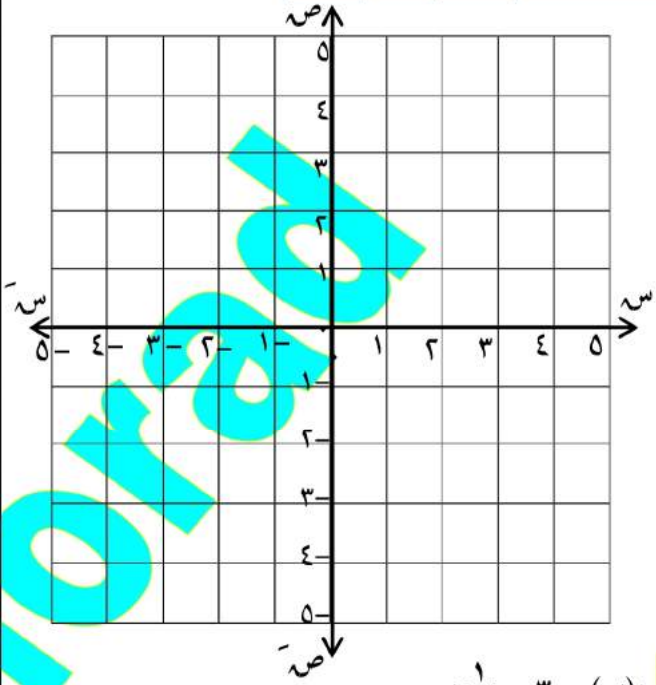
مثل بيانيا كلا من الدوال الخطية الآتية :

(١) د(س) = ٣ س − ٤ (٢) د(س) = ٣ − $\frac{١}{٣}$ س

الحـــــل

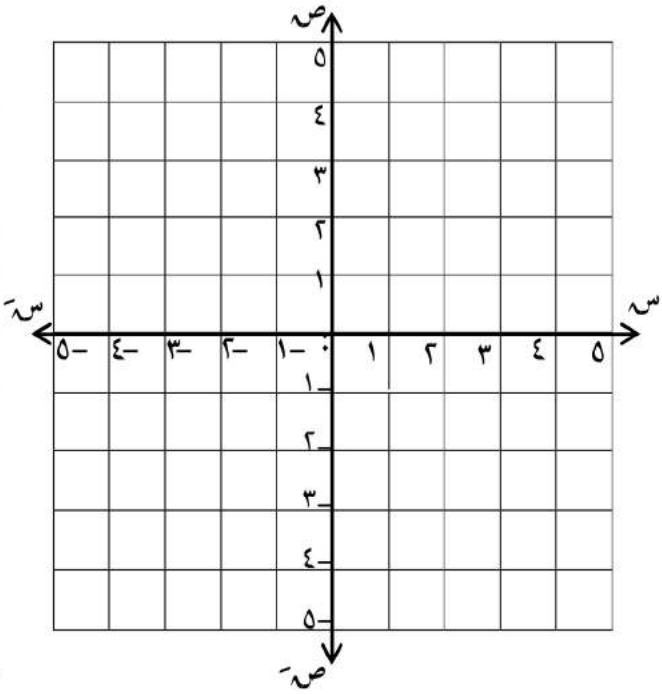
(١) د(س) = ٣ س − ٤

س			
ص=د(س)			



(٢) د(س) = ٣ − $\frac{١}{٣}$ س

س			
ص=د(س)			



تمارين على الدالة الخطية والدالة الثابتة

[١] اكمل ما يأتي :

(١) اذا كانت د(س) = س−٤ فإن د(٧)=.....

(٢) اذا كانت د(س) = أس+ ب تمر بنقطة الاصل فإن ب =.....

(٣) اذا كانت د(س) = ٢س−١ فإن د($\frac{١}{٢}$)=.....

(٤) اذا كانت د(س) = س فإن ٢د(٥) − ٥ د(٢)=.....

(٥) اذا كان(أ ، ٣) تقع المستقيم الممثل للدالة الدالة د(س) =٤س−٥ فإن أ =.....

(٦) الدالة د(س) = −٢ تمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة .....

(٧) الدالة د(س) = ٠ يمثلها .....

(٨) اذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د(س) = ٢س− ب يقطع محور السينات في النقطة (٢، ٠) فإن ب =.....

(٩) اذا كان(٣، ب) ∈ المستقيم د(س) =س+٣ فإن ب =.....

(١٠) الدالة د(س) =٢س − ١ تمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة .....

(١١) الدالة د(س) =٣ س +٦ تمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة .....

(١٢) اذا كانت المستقيم د(س) = أ س + ب يقطع محور الصادات في النقطة (٠،٣) ، د(٢)=٧ فإن أ =..... ،ب =.....

(١٣) اذا كانت المستقيم د(س) = ٥س − أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب،٣) فإن أ =..... ، ب =.....

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كانت د(س) = ٥ فإن د(٣) = ...

[١٥ ، $\frac{٣}{٥}$ ، ٥ ، ٨]

(٢) اذا كانت د(س) = ٧ فإن د(س−٧) = ...

[١٤ ، −١٤ ، صفر ، ٧]

(٣) اذا كانت د(٢س) = ٤ فإن د(− س) = ...

[−٢ ، −٤ ، ٢ ، ٤]

(٤) اذا كانت د(س) = ٢ فإن ٣ د (√٢) = ...

[٦ ، ٣ ، ٢ ، د (٣√٢)]

(٥) اذا كانت د(س) = ٢ فإن د (٣) − د (١) = ...

[صفر ، ١٠ ، ٢ ، د (٢)]

Mr.Morad

[٣] مثل بيانيا كلا من الدوال الخطية الآتية :

(١) د(س) = ٣ (٢) د(س) = −٢

(٣) د(س) = ٣ س (٤) د(س) = ٢ − س

(٥) د(س) = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س (٦) د(س) = − ٢ س +٣

ثالثا الدالة التربيعية :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ تسمى دالة تربيعية أو دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية .

لاحظ في كل من هذه الدوال اكبر أس للمتغير س هو ٢ لذلك تسمى دوال تربيعية من الدرجة الثانية

امثلة للدالة التربيعية :

(١) د(س) = س^{٢}

(٢) د(س) = س^{٢} − ٢

(٣) د(س) = ٣ س^{٢} − ٧س+٢

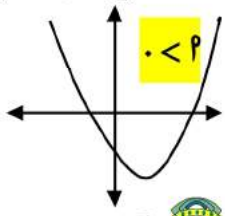
(٤) د(س) = ٦− س^{٢} + س

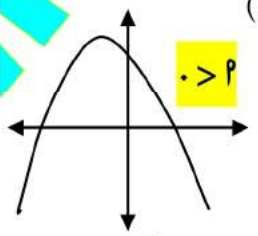
تمثل الدالة التربيعية بمنحنى يسمى قطع مكافئ يكون مفتوح لأعلى ورأسه في الاسفل (نهاية صغرى)

اذا كان أ > ٠ (معامل س^{٢} موجب)

أو يكون مفتوح لأسفل ورأسه في الاعلى (نهاية عظمى)

اذا كان أ < ٠ (معامل س^{٢} سالب)





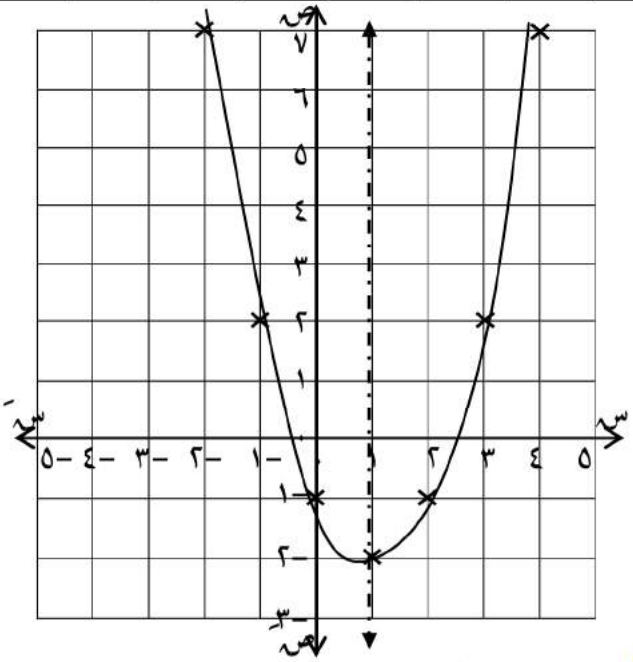
مثال ١ ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = س^{٢} − ٢س − ١ في الفترة [− ٢ ، ٤] ومن الرسم اوجد

(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى

(٣) معادلة خط التماثل (٤) جذري المعادلة

س	س^{٢} − ٢س − ١	ص	(س ، ص)
−٢	٤ + ٤ − ١	٧	(−٢ ، ٧)
−١	١ + ٢ − ١	٢	(−١ ، ٢)
٠	٠ − ٠ − ١	−١	(٠ ، −١)
١	١ − ٢ − ١	−٢	(١ ، −٢)
٢	٤ − ٤ − ١	−١	(٢ ، −١)
٣	٩ − ٦ − ١	٢	(٣ ، ٢)
٤	١٦ − ٨ − ١	٧	(٤ ، ٧)

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	٧	٢	−١	−٢	−١	٢	٧



(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى هي (١ ، −٢)

(٢) القيمة الصغرى = −٢ (٣) معادلة خط التماثل س = ١

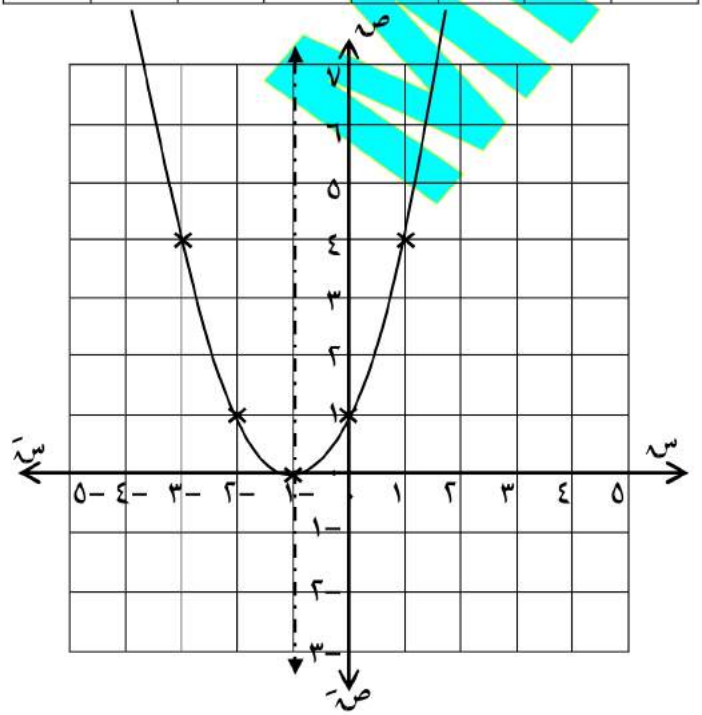
(٤) جذري المعادلة س^{٢} − ٢س−١ هما { ٢,٥ ، −٠,٥ } .

مثال ٢ ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = س^{٢} + ٢ س + ١ في الفترة [− ٤ ، ٢] ومن الرسم اوجد

(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى

(٣) معادلة خط التماثل (٤) جذري المعادلة

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



Mr.Morad

(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى هي (− ١ ، ٠)

(٢) القيمة الصغرى = ٠ (٣) معادلة خط التماثل س = −١

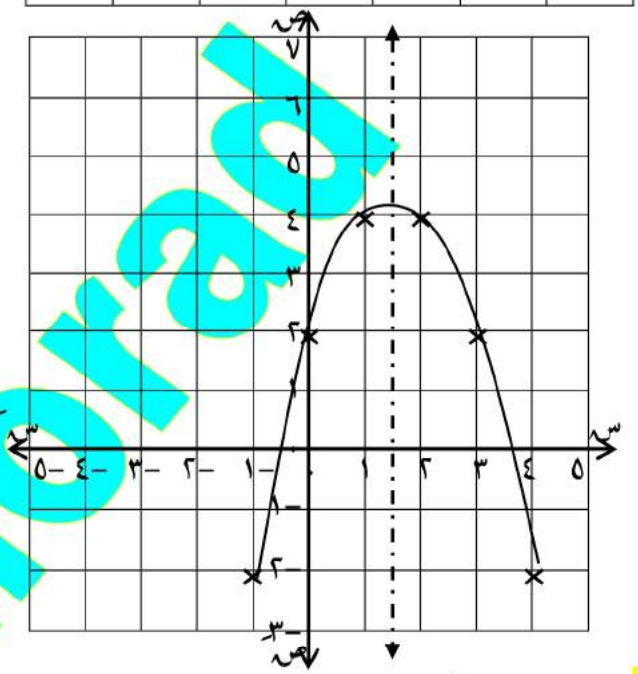
(٤) جذري المعادلة س^{٢} − ٢س−١ هو { − ١ } .

مثال ٣ ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = −س^{٢} + ٣ س + ٢ في الفترة [− ١ ، ٤] ومن الرسم اوجد

(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى

(٣) معادلة خط التماثل (٤) جذري المعادلة

س	−١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢



(١) إحداثي نقطة رأس المنحنى هي (١,٥ ، ٤,٢٥)

(٢) القيمة العظمى = ٤,٢٥ (٣) معادلة خط التماثل س = ١,٥

(٤) جذري المعادلة س^{٢} − ٢س−١ هما { ٣,٥ ، − ٠,٥ } .

ملحوظة هامة :

يمكن ايجاد نقطة رأس المنحنى بدون رسم حيث يكون الإحداثي السيني لها هو $\frac{-ب}{٢أ}$ والإحداثي الصادي لها هو د ($\frac{-ب}{٢أ}$)

حيث أ هو معامل س^{٢} ، ب هو معامل س

ففي المثال الاول د(س) = س^{٢} − ٢س−١

نقطة رأس المنحنى الإحداثي السيني لها هو $\frac{-(-٢)}{٢\times١}$ = ١

والإحداثي الصادي لها هو د (١) = ١ − ٢ − ١ = −٢

∴ نقطة رأس المنحنى هي (١ ، −٢)

حاول بنفسك

بدون رسم اوجد نقطة رأس المنحنى للدالة

د(س) = س^{٢} − ٤س−٥

تمارين على الدالة التربيعية

[١] اكمل ما يأتي :

(١) منحنى الدالة التربيعية يكون له قيمة عظمى اذا كانت اشارة معامل س^{٢} ... و يكون له قيمة صغرى اذا كانت اشارة معامل س^{٢} ...

(٢) اذا كان لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى فإنه يكون مفتوحا لـ .....

(٣) معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د(س) = س هي .....

(٤) عند تمثيل د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ∈ ح* فإن الإحداثي السيني لرأس المنحنى هو .....

(٥) إحداثي نقطة رأس المنحنى للدالة د(س) = ٢س^{٢} − ٤ س + ٥ هي .....

(٦) اذا كان منحنى الدالة د(س) = س^{٢} + جـ يمر بالنقطة (٠ ، ٢) فإن جـ = ...

(٧) اذا كانت (−٢ ، ص) ∈ لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢} + ١ فإن ص = ...

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كانت منحنى الدالة د(س) = س^{٢} − أ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ...

[±١ ، −١ ، صفر ، ١]

(٢) اذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية د فإن معادلة خط التماثل هي .....

[س = ٢ ، س = ٣ ، ص = ٣ ، ص = −٣]

(٣) اذا كانت د(س) = س^{٢} ، س ∈ [−٢ ، ٢]

فإن د(س) ∈ .....

( ]٠ ، ٤] ،]٠ ، ٤[، [٠ ، ٤] ، [−٤ ، ٤ [ )

[٣] ارسم الشكل البياني للدالة المعطاة ومن الرسم اوجد

- إحداثي نقطة رأس المنحنى
- القيمة الصغرى
- معادلة خط التماثل
- جذري المعادلة

(١) د(س) = س^{٢} − ١ في الفترة [−٢ ، ٢]

(٢) د(س) = س^{٢} − ٢ س في الفترة [−٢ ، ٤]

(٣) د(س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ في الفترة [٠ ، ٥]

(٤) د(س) = − س^{٢} − س + ٢ في الفترة [−٣ ، ٢]

(٥) د(س) = ٢ − س^{٢} في الفترة [−٣ ، ٣]

(٥) د(س) = (س − ٢)^{٢} في الفترة [−١ ، ٥]

Mr.Morad

الوحدة الثانية

النسبة والتناسب

أولاً النسبة :

النسبة :- علاقة بين كميتين من نفس النوع ولهما نفس الوحدات

اذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن النسبة بين أ ، ب تكتب على الصورة أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$ وتقرأ أ الى ب حيث يسمى أ مقدم النسبة ، يسمى ب تالي النسبة ويسمى أ ، ب معا حدي النسبة

خواص النسبة :

(١) إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فإن أ = ٣ م ، ب = ٤ م

ومن الخطأ القول أن أ = ٣ ، ب = ٤

(٢) إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فإن أ = $\frac{٣}{٤}$ ب ، ب = $\frac{٤}{٣}$ أ

(٣) النسبة تتغير إذا جمع أو طرح من حديها مقدار ثابت خلاف الصفر $\frac{س}{ص} \neq \frac{س+٢}{ص+٢}$ ،،،، $\frac{س}{ص} \neq \frac{س-٢}{ص-٢}$

(٤) النسبة لا تتغير إذا ضُرب أو قُسم كلاً من حديها على مقدار ثابت خلاف الصفر $\frac{س}{ص} = \frac{٣س}{٣ص}$ ،،،، $\frac{س}{ص} = \frac{س \div ٣}{ص \div ٣}$

(٥) إذا كان ٥ س = ٤ ص فإن $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$

مثال ١ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{٢س - ص}{س + ٣ص}$

الحل

∵ س = ٤ م ، ص = ٥ م

المقدار = $\frac{٢(٤م) - (٥م)}{٤م + ٣(٥م)} = \frac{٨م - ٥م}{٤م + ١٥م} = \frac{٣م}{١٩م} = \frac{٣}{١٩}$

مثال ٢ إذا كان $\frac{س}{ص} = ١\frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{س - ص}{ص + س}$

الحل

$\frac{س}{ص} = \frac{٨}{٥}$ ∴ س = ٨ م ، ص = ٥ م

المقدار = $\frac{٨م - ٥م}{٨م + ٥م} = \frac{٣م}{١٣م} = \frac{٣}{١٣}$

مثال ٣ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٧}$ أوجد قيمة $\frac{س^٢ - س ص + ص^٢}{٢ س ص}$

الحل

∵ س = ٤ م ، ص = ٧ م

المقدار = $\frac{(٤م)^٢ - ٤م \times ٧م + (٧م)^٢}{٢ \times ٤م \times ٧م} = \frac{١٦م^٢ - ٢٨م^٢ + ٤٩م^٢}{٥٦م^٢}$

$= \frac{٣٧م^٢}{٥٦م^٢} = \frac{٣٧}{٥٦}$

مثال ٤ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ ،،، $\frac{ج}{د} = \frac{٥}{٧}$ أوجد قيمة $\frac{٢أ ج - ب د}{أ د + ٢ب ج}$

الحل

∵ أ = ٣ م ، ب = ٤ م ،،، ج = ٥ ك ، د = ٧ ك

(لابد من تغير الرمز)

المقدار = $\frac{٢(٣م)(٥ك) - (٤م)(٧ك)}{(٣م)(٧ك) + ٢(٤م)(٥ك)} = \frac{٣٠م ك - ٢٨م ك}{٢١م ك + ٤٠م ك}$

$= \frac{٢م ك}{٦١م} = \frac{٢}{٦١}$

مثال ٥ أوجد النسبة س : ص في كلا من الحالات الآتية

(١) ٤ س − ٥ ص = ٠ (٢) ٧س − ٣ ص = ٢ص

(٣) ٣س + ٢ص = ٥ص − ٤ س (٤) $\frac{٢س - ص}{٣س + ٢ص} = \frac{٢}{٥}$

(٥) ٤ س^٢ − ٩ ص^٢ = ٠ (٦) ٢ س^٢ − ١١ س ص + ١٢ ص^٢ = ٠

الحل

(١) ٤ س − ٥ ص = ٠ ∴ ٤ س = ٥ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٤}$

(٢) ٧س − ٣ ص = ٢ ص ∴ ٧س = ٢ص + ٣ ص

∴ ٧ س = ٥ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٧}$

(٣) ٣س + ٢ص = ٥ص − ٤ س ∴ ٣ س + ٤ س = ٥ص − ٢ص

∴ ٧ س = ٣ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٧}$

(٤) $\frac{٢س - ص}{٣س + ٢ص} = \frac{٢}{٥}$

∴ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

∴ ٥ (٢س − ص) = ٢ (٣ س + ٢ص)

∴ ١٠س − ٥ص = ٦ س + ٤ص

∴ ١٠س − ٦ س = ٤ص + ٥ص

∴ ٤ س = ٩ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٩}{٤}$

(٥) ٤ س^٢ − ٩ ص^٢ = ٠ في هذه الحالة نستخدم التحليل

∴ (٢س − ٣ص)(٢س + ٣ص) = ٠

∴ (٢س − ٣ص) = ٠ ∴ ٢س = ٣ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

أو (٢س + ٣ص) = ٠ ∴ ٢س = −٣ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{-٣}{٢}$

(٦) (٢س − ٣ص)(س − ٤ص) = ٠

∴ (٢س − ٣ص) = ٠ ∴ ٢س = ٣ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

أو (س − ٤ص) = ٠ ∴ س = ٤ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{١} = ٤$

Mr.Morad

مثال ٦ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة ٢ : ٥ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحـــــل

نفرض أن العدد = س

∴ $\frac{٢ + س}{٥ + س} = \frac{٢}{٣}$

٣ (٢ + س) = ٢ (٥ + س) ∴ ٦ + ٣ س = ١٠ + ٢س

٣ س − ٢ س = ١٠ − ٦ ∴ س = ٤ ∴ العدد = ٤

مثال ٧ أوجد العدد الذي إذا طرح من حدي النسبة ١١ : ١٤ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحـــــل

نفرض أن العدد = س

∴ $\frac{١١ - س}{١٤ - س} = \frac{٢}{٣}$

٣ (١١ − س) = ٢ (١٤ − س) ∴ ٣٣ − ٣ س = ٢٨ − ٢س

−٣ س + ٢ س = ٢٨ − ٣٣ ∴ − س = −٥

∴ س = ٥ ∴ العدد = ٥

مثال ٨ أوجد العدد النسبي الموجب الذي إذا طرح مربعه من حدي النسبة ١٣ : ١٩ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحـــــل

نفرض أن العدد = س

∴ $\frac{١٣ - س^٢}{١٩ - س^٢} = \frac{٣}{٥}$

٥ (١٣ − س^٢) = ٣ (١٩ − س^٢) ∴ ٦٥ − ٥ س^٢ = ٥٧ − ٣س^٢

−٥ س^٢ + ٣ س^٢ = ٥٧ − ٦٥ ∴ −٢ س^٢ = −٨

∴ س^٢ = ٤ ∴ س^٢ = ± ٢ ∴ العدد = ٢

مثال ٩ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{٧}$ وكان أ + ب + ج = ٧٠ أوجد قيم أ ، ب ، ج

بمساواة قيم أ في النسبتين بضرب النسبة الاولى في ٣ وبضرب النسبة الثانية في ٢

$\frac{أ}{ب} = \frac{٦}{١٥}$ ،،،،،،،، $\frac{أ}{ج} = \frac{٦}{١٤}$

أ = ٦ م ، ب = ١٥م ، ب = ١٤م ∵ أ + ب + ب = ٧٠

∴ ٦م + ١٥ م + ١٤ م = ٧٠ ∴ ٣٥ م = ٧٠ ∴ م = ٢

∴ أ = ٦ م = ٦ × ٢ = ١٢

ب = ١٥م = ١٥ × ٢ = ٣٠

ج = ١٤م = ١٤ × ٢ = ٢٨

مثال ١٠ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{٧}$ أوجد النسبة ب : ج

الحـــــل

بمساواة قيم أ في النسبتين بضرب النسبة الاولى في ٣ وبضرب النسبة الثانية في ٥

$\frac{أ}{ب} = \frac{١٥}{٦}$ ،،،،،،،، $\frac{أ}{ج} = \frac{١٥}{٣٥}$

أ = ١٥م ، ب = ٦ م ، ج = ٣٥م

ب : ج = ٦ م : ٣٥ م ∴ ب : ج = ٦ : ٣٥

مثال ١١ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{ب}{ج} = \frac{٢}{٣}$ أوجد أ : ب : ج

الحـــــل

بمساواة قيم ب في النسبتين بضرب النسبة الاولى في ٢ وبضرب النسبة الثانية في ٥

$\frac{أ}{ب} = \frac{١٤}{١٠}$ ،،،،،،،، $\frac{ب}{ج} = \frac{١٠}{١٥}$

∴ أ = ١٤م ، ب = ١٠م ، ج = ١٥م

∴ أ : ب : ج = ١٤م : ١٠م : ١٥م

∴ أ : ب : ج = ١٤ : ١٠ : ١٥

تمـــارين على النســـبة

[١] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{٣ س - ص}{س + ٢ص}$

[٢] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٩}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{٥ س^٢ - ص^٢}{س ص}$

[٣] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٩}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{٥ س^٢ - ص^٢}{س ص}$

[٤] إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ،،، $\frac{ج}{د} = \frac{٧}{٢}$ أوجد $\frac{٢أ ج + ب د}{ب ج - ٣ أ د}$

[٥] أوجد قيمة س إذا كان

(١) (٢ س − ٣) : (س − ٥) = ١ : ٤ [س = ١]

(٢) (س − ٥) : (٥ س + ٣) = ٢ : ٣ [س = −٣]

(٣) (س^٢ − ٨) : (٢ س^٢ + ١) = ١ : ٣ [س = ± ٥]

[٦] أوجد النسبة س : ص في الحالات الآتية

(١) ٥ س + ٢ ص = ٦ ص (٢) ٣ س − ص = ٥ ص − ٢ س

(٣) س^٢ − ٣٦ ص^٢ = ٠ (٤) ١٦ س^٢ − ٤٠ س ص + ٢٥ ص^٢ = ٠

(٥) س^٢ − ٥ س ص + ٦ ص^٢ = ٠

(٦) $\frac{٢ س + ص}{٣ س + ٤ص} = \frac{٢}{٥}$

(٧) $\frac{س + ٥ص}{٢ س + ص} = ٣$

Mr.Morad

[٧] ما العدد الذي يُضاف إلى حدي النسبة ٥ : ٣٧ لتكون مساوية ١ : ٣ [١١]

[٨] أوجد العدد الذي إذا طرح من مقدم النسبة ١٥ : ١٣ وأضيف إلى تاليها فإنها تصبح ٣ : ٤ [٣]

[٩] أوجد العدد الحقيقي الذي إذا طرح من حدي النسبة ٥ : ٦ لا صبحت ٣ : ٢

[١٠] أوجد العدد الذي أذا أضيف إلى حدي النسبة ١٧ : ٢٢ فأننا نحصل على النسبة ٦ : ٧ [١٣]

[١١] أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة ١٦ : ٢١ فإنها تصبح ٤ : ٥ [٤]

[١٢] أوجد العدد الموجب إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ : ٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢

[١٣] عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ٣ : ٥ ومجموعهما = ٤٠ أوجد هذان العددان [١٥ ، ٢٥]

[١٤] عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٥ ومجموعهما = ٢٨ أوجد هذان العددان [٨ ، ٢٠]

[١٥] عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٤ واذا أضيف للعدد الاصغر ٤ وطرح من العدد الأكبر ٣ صارت النسبة بينهما ٨ : ٩ أوجد العددين [٣٦ ، ٤٨]

[١٦] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ وكان س + ص = ٥٦ أوجد س ، ص [١٦ ، ٤٠]

[١٧] إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٤}{٧}$ وكان س + ص + ع = ٢٠١ أوجد قيم س ، ص ، ع [٣٦ ، ٦٠ ، ١٠٥]

[١٨] إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{٤}$

أوجد (١) ب : ج (٢) أ : ب : ج

[١٩] إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{ب}{ج} = \frac{٣}{٤}$

أوجد (١) أ : ج (٢) أ : ب : ج

[٢٠] إذا كان $\frac{أ}{ج} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{ب}{ج} = \frac{٣}{٤}$

أوجد (١) أ : ب (٢) أ : ب : ج

التناسب

التناسب : هو تساوي نسبتين أو أكثر ($\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ = ...)

وتسمى الكميات أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

ملاحظة

إذا كان أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ ومنه نستنتج أن أ = ب م ، ج = د م

أو أ = ج م ،،،، ب = د م

يسمى أ (الأول المتناسب) ويسمى ب (الثاني المتناسب) ويسمى ج (الثالث المتناسب) ويسمى د (الرابع المتناسب)

كما يسمى أ ، د بطرفي التناسب ب ، ج بوسطي التناسب

خواص التناسب :

الخاصية الاولى إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ فإن أ × د = ب × ج

(حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

مثال (١) أوجد الثالث المتناسب لكلا من الكميات

(١) ٣ ، ٥ ، ..... ، ٢٠ (٢) $١٠أ^٥$ ، $٥أ^٢$ ، ..... ، ٣أ

(٣) $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ..... ، $\sqrt{٥}$

(٤) $س^٢ - ص^٢$ ، س + ص ، ..... ، س − ص

الحل

(١) نفرض أن الثالث المتناسب = س

٣ ، ٥ ، س ، ٢٠ كميات متناسبة ∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{س}{٢٠}$

∴ س = $\frac{٣ \times ٢٠}{٥}$ = ١٢

(٢) نفرض أن الثالث المتناسب = س

$١٠أ^٥$ ، $٥أ^٢$ ، ..... ، ٣أ ∴ $\frac{١٠أ^٥}{٥أ^٢} = \frac{س}{٣أ}$

∴ س = $\frac{١٠أ^٥ \times ٣أ}{٥أ^٢} = ٦أ^٤$

(٣) نفرض أن الثالث المتناسب = س

$\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ..... ، $\sqrt{٥}$ ∴ $\frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٣}} = \frac{س}{\sqrt{٥}}$

∴ س = $\frac{\sqrt{٦} \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{١٠}$

(٤) نفرض أن الثالث المتناسب = أ

$س^٢ - ص^٢$ ، س + ص ، ..... ، س − ص

∴ $\frac{س^٢ - ص^٢}{س + ص} = \frac{أ}{س - ص}$

∴ أ = $\frac{(س^٢ - ص^٢) \times (س - ص)}{س + ص}$

= $\frac{(س + ص) \times (س - ص) \times (س - ص)}{س + ص} = (س - ص)^٢$

M.Morad

مثال ٢ أوجد الرابع المتناسب لكلا من الكميات

(١) ٢ ، ٥ ، ٨ (٢) ٢ ، ٤ ، ٤

(٣) ٦ أ^{٥} ، ٣ أ^{٣} ، ١٠ أ^{٤} (٤) أ + ب ، أ^{٢} − ب^{٢} ، أ − ب

الحـــــل

(١) نفرض أن الرابع المتناسب = س

٢ ، ٥ ، ٨ ، س كميات متناسبة ∴ $\frac{٢}{٥} = \frac{٨}{س}$

∴ س = $\frac{٥ \times ٨}{٢}$ = ٢٠

(٢) نفرض أن الرابع المتناسب = س

٢ ، ٤ ، ٤ ، س كميات متناسبة ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{س}$

∴ س = $\frac{٤ \times ٤}{٢}$ = ٨

(٣) نفرض أن الرابع المتناسب = س

٦ أ^{٥} ، ٣ أ^{٣} ، ١٠ أ^{٤} ، س كميات متناسبة ∴ $\frac{٦ أ^{٥}}{٣ أ^{٣}} = \frac{١٠ أ^{٤}}{س}$

∴ س = $\frac{٣ أ^{٣} \times ١٠ أ^{٤}}{٦ أ^{٥}}$ = ٥ أ^{٢}

(٤) نفرض أن الثالث المتناسب = س

أ + ب ، أ^{٢} − ب^{٢} ، أ − ب ، س

∴ $\frac{أ + ب}{أ^{٢} - ب^{٢}} = \frac{أ - ب}{س}$

∴ س = $\frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) \times (أ - ب)}{أ + ب}$

= $\frac{(أ + ب) \times (أ - ب) \times (أ - ب)}{أ + ب}$ = (أ − ب)^{٢}

مثال ٣ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى الأعداد ١ ، ٥ ، ٢ ، ٧ أصبحت متناسبة

الحـــــل

نفرض أن العدد = س

١ + س ، ٥ + س ، ٢ + س ، ٧ + س متناسبة

∴ $\frac{١ + س}{٥ + س} = \frac{٢ + س}{٧ + س}$

(١ + س)(٧ + س) = (٢ + س)(٥ + س)

٧ + ٨ س + س^{٢} = ١٠ + ٧ س + س^{٢}

٨ س − ٧ س = ١٠ − ٧

س = ٣ ∴ العدد = ٣

حاول بنفسك

(١) أوجد الاول المتناسب للكميات ٢٣ ، ١٥ ، ٦٩

(٢) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ أصبحت متناسبة

الخاصية الثانية :

- إذا كان أ × د = ب × جـ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$
- إذا كان أ × د = ب × جـ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$
- إذا كان أ × د = ب × جـ فإن $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$
- إذا كان أ × د = ب × جـ فإن $\frac{جـ}{أ} = \frac{د}{ب}$

مثال ٤ اذا كان ٢ س^{٢} − ٦ ص^{٢} = س ص فأوجد س : ص

الحـــــل

∵ ٢ س^{٢} − ٦ ص^{٢} = س ص

∴ ٢ س^{٢} − س ص − ٦ ص^{٢} = ٠

(٢س + ٣ ص) (س − ٢ ص) = ٠

٢س + ٣ ص = ٠ ومنها ٢س = −٣ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{-٣}{٢}$

س − ٢ ص = ٠ ومنها س = ٢ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{١}$

الخاصية الثالثة :

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

أي ان $\frac{\text{مقدم النسبة الاولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالي النسبة الاولى}}{\text{تالي النسبة الثانية}}$

مثلا إذا كان $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$

الخاصية الرابعة :

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م حيث م ثابت ≠ ٠

، جـ = أ ك ، د = ب ك حيث ك ثابت ≠ ٠

مثلا إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن أ = ٣م ، ب = ٥م حيث م ثابت ≠ ٠

مثال ٥ إذا كان أ : ب = ٣ : ٥

فأوجد قيمة ٢٠ أ − ٧ ب : ١٥ أ + ب

الحـــــل

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ∴ أ = ٣م ، ب = ٥م حيث م ثابت ≠ ٠

بالتعويض عن أ ، ب بدلالة م

∴ $\frac{٢٠ أ - ٧ ب}{١٥ أ + ب} = \frac{٦٠ م - ٣٥ م}{٤٥ م + ٥ م} = \frac{٢٥ م}{٥٠ م} = \frac{١}{٢}$

ويمكن تعميم الخاصية لأي عدد من النسب

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$

فإن أ = ب م ، جـ = د م ، هـ = و م .....حيث م ثابت ≠ ٠

http://moraddorgham.yoo7.com ٠١٢٢١٣٥٣١٣٩
Mr Morad

مثال ٦ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{ب م - ب}{ب} = \frac{ب(م - ١)}{ب} = م - ١$

الطرف الأيسر = $\frac{د م - د}{د} = \frac{د(م - ١)}{د} = م - ١$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٧ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{جـ - د}{جـ}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{ب م - ب}{ب م} = \frac{ب(م - ١)}{ب م} = \frac{(م - ١)}{م}$

الطرف الأيسر = $\frac{د م - د}{د م} = \frac{د(م - ١)}{د م} = \frac{(م - ١)}{م}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٨ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{جـ - د}{جـ + د}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{ب م - ب}{ب م + ب} = \frac{ب(م - ١)}{ب(م + ١)} = \frac{م - ١}{م + ١}$

الطرف الأيسر = $\frac{د م - د}{د م + د} = \frac{د(م - ١)}{د(م + ١)} = \frac{م - ١}{م + ١}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٩ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{٣أ - ٥جـ}{٣ب - ٥د} = \frac{أ}{ب}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{٣ب م - ٥د م}{٣ب - ٥د} = \frac{م(٣ب - ٥د)}{٣ب - ٥د} = م$

الطرف الأيسر = $\frac{ب م}{ب} = م$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١٠ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{٢ب - ٣د}{٢أ - ٣جـ} = \frac{د}{جـ}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{٢ب - ٣د}{٢ب م - ٣د م} = \frac{٢ب - ٣د}{م(٢ب - ٣د)} = \frac{١}{م}$

الطرف الأيسر = $\frac{د}{د م} = \frac{١}{م}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١١ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{أ^٢ + ب^٢}{أ^٢} = \frac{جـ^٢ + د^٢}{جـ^٢}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{ب^٢م^٢ - ب^٢}{ب^٢م^٢} = \frac{ب^٢(م^٢ - ١)}{ب^٢م^٢} = \frac{م^٢ - ١}{م^٢}$

الطرف الأيسر = $\frac{د^٢م^٢ - د^٢}{د^٢م^٢} = \frac{د^٢(م^٢ - ١)}{د^٢م^٢} = \frac{م^٢ - ١}{م^٢}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١٢ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{أ^٢}{ب^٢} + \frac{جـ^٢}{د^٢} = \frac{٢أ^٢}{ب^٢}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ∴ أ = ب م ، جـ = د م

الطرف الأيمن = $\frac{ب^٢م^٢}{ب^٢} + \frac{د^٢م^٢}{د^٢} = م^٢ + م^٢ = ٢م^٢$

الطرف الأيسر = $\frac{٢ب^٢م^٢}{ب^٢} = ٢م^٢$

∴ الطرفان متساويان

حاول بنفسك

إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

أثبت أن $\frac{٣أ^٢ - جـ^٢}{٣ب^٢ - د^٢} = \frac{أجـ}{ب د}$

Mr.Morad

مثال ١٣ إذا كان $\frac{أ + ٢جـ}{ب + ٢د} = \frac{أ}{ب}$ اثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الحـــــل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

ب(أ + ٢ جـ) = أ (ب + ٢د)

أ ب + ٢ ب جـ = أ ب + ٢ أ د

∴ ٢ب جـ = ٢ أ د

∴ ب × جـ = أ × د

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

∴ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

مثال ١٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى الأعداد ١، ٥، ٢، ٧ أصبحت متناسبة

الحـــــل

نفرض أن العدد = س

١ + س ، ٥ + س ، ٢ + س ، ٧ + س متناسبة

$\frac{١ + س}{٥ + س} = \frac{٢ + س}{٧ + س}$

(١ + س)(٧ + س) = (٢ + س)(٥ + س)

٧ + ٨ س + س^{٢} = ١٠ + ٧ س + س^{٢}

٨ س − ٧ س = ١٠ − ٧

س = ٣

العدد = ٣

إذا كان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٨}$ أوجد قيمة $\frac{س - ص + ع}{س + ص}$

نفرض ان $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٨} = م$

∴ س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٨م

∴ $\frac{س - ص + ع}{س + ص} = \frac{٣م - ٤م + ٨م}{٣م + ٤م} = \frac{٧م}{٧م} = ١$

تمارين على التناسب

[١] أوجد الثالث المتناسب للكميات

(١) ٣ ، ٤ ، ..... ، ٢٠ (٢) ٢ ، ٣ ، ..... ، ١٢

(٣) ٥ ، ٦ ، ..... ، ٤٢ (٤) ٢$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$ ، ..... ، $\sqrt{٦}$

(٥) ١٠أ^{٦} ، ٥أ^{٣} ، .... ، ٣أ (٦) ٦ س^{١٠} ، ٢ س^{٦} ، ..... ، ٥س

(٧) س^{٢} − ص^{٢} ، س + ص ، ..... ، س − ص

(٨) س + ص ، س − ص ، ..... ، س^{٢} − ص^{٢}

[٢] أوجد الرابع المتناسب للكميات

(١) ٣ ، ٤ ، ١٢ (٢) ٢ ، ٣ ، ١٢

(٣) ٥ ، ٦ ، ٤٥ (٤) ٢$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٦}$

(٥) ١٠أ^{٦} ، ٥أ^{٣} ، ٦أ^{٤} (٦) ٦ س^{١٠} ، ٢ س^{٦} ، ١٥س^{٤}

[٣] إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن

(١) $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ (٢) $\frac{ب}{أ - ب} = \frac{د}{جـ - د}$

(٣) $\frac{أ + ٥جـ}{ب + ٥د} = \frac{أ}{ب}$ (٤) $\frac{٣ب - د}{٣أ - جـ} = \frac{د}{جـ}$

(٥) $\frac{أ - ٣ب}{أ} = \frac{جـ - ٣د}{جـ}$ (٦) $\frac{أ^{٢} - ٥جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٥جـ^{٢}} = \frac{أ جـ}{ب د}$

(٧) $\frac{٥ب^{٢} - ٣د^{٢}}{٥أ^{٢} - ٣جـ^{٢}} = \frac{ب د}{أ جـ}$ (٨) $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢}}{أب + جـ د} = \frac{أ}{ب}$

تمارين على النســـبة والتناسب

[١] اكمل ما يأتي :

(١) التناسب هو .....

(٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن جـ يسمى .....

(٣) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(٤) الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو .....

(٥) الثاني المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ هو .....

(٦) الثالث المتناسب للأعداد ٨ ، ٦ ، ١٢ هو .....

(٧) الاول المتناسب للأعداد ٥ ، ٢٧ ، ٤٥ هو .....

(٨) إذا كان ٣ ، ٤ ، س ، ١١ كميات متناسبة فإن س = ...

(٩) إذا كان ٣ ، أ − ١ ، أ + ١ ، ٥ كميات متناسبة فإن أ = ...

(١٠) قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فاذا كان نصيب الاول ٣٠ جنيها فإن نصيب الاخر = ... جنيها

(١١) إذا كان ٧ س = ٣ ص فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

(١٢) إذا كان ٥ أ − ٤ ب = ٠ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(١٣) إذا كان $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣}$ فإن $\frac{٢س}{٣ص}$ = ...

(١٤) إذا كان $\frac{٢أ - ٥ب}{٢أ + ١١ب} = ٠$ فإن $\frac{ب}{أ}$ = ...

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) نسبة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم الى مساحة منطقة مربعة اخرى طول ضلعها ٢ل سم كنسبة .....

[١ : ٢ ، ل : ٤ ، ١ : ٤ ، ٤ : ١]

(٢) إذا كان $\frac{٣أ}{٥ب} = \frac{١}{٢}$ فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

[$\frac{٦}{٥}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

Mr.Morad

(٣) إذا كان ٤س = ٥ص فإن $\frac{٥ص}{٤س}$ = ...

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٤) إذا كان ٣ أ = ٨ ب فإن $\frac{٢أ}{ب}$ = ...

[٢٤ ، ١٦ ، $\frac{١٦}{٣}$ ، $\frac{٣}{٨}$]

(٥) إذا كان ٢س = ٧ص فإن $(\frac{ص}{س})^{-١}$ = ...

[$\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٤٩}{٤}$ ، $\frac{٤}{٤٩}$]

(٦) إذا كان س ، ص ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

[٣ ، ٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

(٧) إذا كان أ ، س ، ب ، ٢س كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

[١ : ٢ ، ٢ : ١ ، ١ : ٤ ، ١ : ٣]

(٨) إذا كان ٥أ ، ٢ ، ٣ب ، ٧ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

[$\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{٣٥}$]

(٩) إذا كان $\frac{أ + ٢ب}{أ - ب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن $\frac{ب}{أ}$ = ...

[٨ ، −٨ ، $\frac{١}{٨}$ ، $-\frac{١}{٨}$]

(١٠) إذا كان ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٢ س ص فإن $\frac{س}{ص}$ = ...

[$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$]

خاصية هامة

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ = $\frac{هـ}{و}$ = م فإن

(١) $\frac{أ + جـ + هـ}{ب + د + و}$ = م

(٢) $\frac{١أ + ٢جـ + ٣هـ}{١ب + ٢د + ٣و}$ = م

أي أن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = احدى النسب

مثال ١

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ + جـ}{ب + د}$ = $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د}$ = $\frac{٣أ - ٥جـ}{٣ب - ٥د}$ = $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{جـ}{د}$

مثال ٢

إذا كان $\frac{س}{٢أ - ب}$ = $\frac{ص}{٢ب - جـ}$ = $\frac{ع}{٢جـ - أ}$ اثبت أن

$\frac{س + ٢ع}{٤جـ - ب}$ = $\frac{٤س + ٢ص + ع}{٧أ}$

الحـــــل

بضرب النسبة الثالثة في ٢ والجمع مع النسبة الاولى

$\frac{س}{٢أ - ب}$ + $\frac{٢ع}{٤جـ - ٢أ}$ = $\frac{س + ٢ع}{٢أ - ب + ٤جـ - ٢أ}$

$\frac{س + ٢ع}{٤جـ - ب}$ = م ..... (١)

بضرب النسبة الاولى × ٤ والثانية × ٢ والجمع مع الثالثة

$\frac{٤س}{٨أ - ٤ب}$ + $\frac{٢ص}{٤ب - ٢جـ}$ + $\frac{ع}{٢جـ - أ}$ =

$\frac{٤س + ٢ص + ع}{٨أ - ٤ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}$ = $\frac{٤س + ٢ص + ع}{٧أ}$ = م. (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن الطرفان متساويان

مثال ٣

إذا كانت $\frac{س + ع}{ص}$ = $\frac{ع}{س}$ = $\frac{س}{ع - ص}$

اثبت أن كل نسبة = ٢

الحـــــل

بجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاث

كل نسبة = $\frac{س + ع + ع + س}{ص + س + ع - ص}$ = $\frac{٢س + ٢ع}{س + ع}$ = $\frac{٢(س + ع)}{س + ع}$ = ٢

Mr.Morad

مثال ٤

إذا كان $\frac{س+ص}{١٩} = \frac{ص+ع}{٧}$

اثبت أن $\frac{س+٢ص+ع}{١٣} = \frac{س-ع}{٦}$

الحـــــل

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين

$\frac{س+ص+ص+ع}{١٩+٧} = \frac{س+٢ص+ع}{٢٦} = م$ (١)

بضرب النسبة الثانية × −١ والجمع مع الاولى

$\frac{س+ص-ص-ع}{١٩-٧} = \frac{س-ع}{١٢} = م$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن $\frac{س+٢ص+ع}{٢٦} = \frac{س-ع}{١٢}$

$\therefore \frac{س+٢ص+ع}{١٣} = \frac{س-ع}{٦}$

مثال ٥

إذا كانت $\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٣} = \frac{س+ع}{٦}$

اثبت أن $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = ع$

الحـــــل

بضرب النسبة الثانية × −١ والجمع مع النسبتين الاولى والثالثة

$\frac{س+ص-ص-ع+س+ع}{٧-٣+٦} = \frac{٢س}{١٠} = \frac{س}{٥} = م$ (١)

بضرب النسبة الثالثة × −١ والجمع مع النسبتين الاولى والثانية

$= \frac{٢ص}{٤} = \frac{ص}{٢} = م$ (٢)

بضرب النسبة الاولى × −١ والجمع مع النسبتين الثانية و الثالثة

$\frac{-س-ص+ص+ع+س+ع}{-٧+٣+٦} = \frac{٢ع}{٢} = ع = م$ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = ع$

مثال ٦

إذا كانت $\frac{س}{أ-ب+جـ} = \frac{ص}{ب-جـ+أ} = \frac{ع}{جـ-أ+ب}$

اثبت أن $\frac{س+ص}{أ} = \frac{ص+ع}{ب} = \frac{س+ع}{جـ}$

الحـــــل

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الأولى والثانية

$\frac{س+ص}{أ-ب+جـ+ب-جـ+أ} = \frac{س+ص}{٢أ} = م$ (١)

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الثانية والثالثة

$\frac{ص+ع}{ب-جـ+أ+جـ-أ+ب} = \frac{ص+ع}{٢ب} = م$ (٢)

بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الاولى والثالثة

$\frac{س+ع}{أ-ب+جـ+جـ-أ+ب} = \frac{س+ع}{٢جـ} = م$ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن $\frac{س+ص}{أ} = \frac{ص+ع}{ب} = \frac{س+ع}{جـ}$

تابع تمارين على التناسب

[١] اكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{س+ص}{ع}$ فإن ع = ...

(٢) إذا كانت $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{س-ص}{ع}$ فإن ع = ...

(٣) إذا كانت $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{س+٢ص}{ع}$ فإن ع = ...

(٤) إذا كانت $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{٢س-ص}{ع}$ فإن ع = ...

(٥) إذا كانت $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{٣س-٢ص}{ع}$ فإن ع = ...

(٦) إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{هـ} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{س+ع}{ص+هـ} = ...$

(٧) إذا كان $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٧} = \frac{أ+ب}{.....} = \frac{أ+جـ}{.....} = \frac{ب+جـ}{.....} = \frac{أ-ب}{.....}$

(٨) إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{س-أ}{ص-ب} = ...$

(٩) إذا كانت $\frac{س}{ص} = ٣$ فإن $\frac{س+٣}{ص+١} = ...$

(١٠) إذا كان $\frac{س}{٩} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٣} = \frac{.....}{١٣} = \frac{.....}{١٢} = \frac{.....}{٧}$

[٢] إذا كان $\frac{أ}{٤س+ص} = \frac{ب}{س-٤ص}$ اثبت أن $\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$

[٣] إذا كان $\frac{أ}{٢س-ص} = \frac{ب}{٢ص-س}$ اثبت أن $\frac{٢أ+ب}{أ+٢ب} = \frac{س}{ص}$

[٤] إذا كان $\frac{أ}{٢س+ص} = \frac{ب}{٣ص-س} = \frac{جـ}{٤س+٥ص}$

اثبت أن $\frac{أ+٢ب}{٤ب+جـ} = \frac{٧}{١٧}$

[٥] إذا كان $\frac{أ}{س+٣ص} = \frac{ب}{٢س-ص} = \frac{جـ}{٥س-٣ص}$

اثبت أن $\frac{أ+جـ}{٢أ-ب} = \frac{٦س}{٧ص}$

[٦] إذا كان $\frac{ص}{س-ع} = \frac{س+ص}{ع} = \frac{س}{ص}$ اثبت أن كل نسبة = ٢

[٧] إذا كانت $\frac{س+ص}{٧} = \frac{ص+ع}{٥} = \frac{س+ع}{٨}$

اثبت أن $\frac{س+ص+ع}{س-ع} = ٥$

Mr.Moraad

التناسب المتسلسل

إذا كانت أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

وتكون ب = جـ م ، أ = جـ $م^2$

وتسمى ب وسط متناسب بين أ ، جـ وتكون

$ب^2 = أ جـ$ ∴ $ب = \pm\sqrt{أ جـ}$

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل فإن

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

وتكون جـ = د م ، ب = د $م^2$ ، أ = د $م^3$

مثال ١ أوجد الوسط المتناسب للكميتين ٤ ، ٩

الوسط المتناسب = ± $\sqrt{\text{حاصل ضرب الكميتين}}$

= ± $\sqrt{٤ \times ٩}$ = ± $\sqrt{٣٦}$ = ±٦

مثال ٢ أوجد الوسط المتناسب للكميتين $٢ أ^3$ ، $٨ أ^7$

الوسط المتناسب = ± $\sqrt{\text{حاصل ضرب الكميتين}}$

= ± $\sqrt{٢ أ^3 \times ٨ أ^7}$ = ± $\sqrt{١٦ أ^{10}}$ = ± $٤ أ^5$

مثال ٣ أوجد الوسط المتناسب للكميتين $(س+ص)^2$ ، $(س-ص)^2$

الوسط المتناسب = ± $\sqrt{\text{حاصل ضرب الكميتين}}$

= ± $\sqrt{(س+ص)^2 (س-ص)^2}$

= ± (س + ص)(س − ص) = ± $(س^2 - ص^2)$

مثال ٤ أوجد الثالث المتناسب للكميتين ٢ ، ٤

الحل

نفرض أن الثالث المتناسب = س

∵ ٢ ، ٤ ، س كميات متناسبة

∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{س}$ ∴ س = $\frac{٤ \times ٤}{٢}$ = ٨

مثال ٥ أوجد الثالث المتناسب للكميتين $٢أ^2$ ، $٦أ^4$

الحل

نفرض أن الثالث المتناسب = س

∵ $٢أ^2$ ، $٦أ^4$ ، س كميات متناسبة

∴ $\frac{٢أ^2}{٦أ^4} = \frac{٦أ^4}{س}$ ∴ س = $\frac{٦أ^4 \times ٦أ^4}{٢أ^2}$ = $١٨أ^6$

حاول بنفسك

(١) أوجد الثالث المتناسب للكميتين ٥ ، ١٥

(٢) أوجد الاول المتناسب للكميتين ٦ ، ١٢

(٣) أوجد الوسط المتناسب للكميتين ٤ ، ١٦

مثال ٦ إذا كانت أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

اثبت أن $\frac{أ+ب}{أ} = \frac{ب+جـ}{ب}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^2$

الطرف الايمن = $\frac{جـ م^2 + جـ م}{جـ م^2} = \frac{جـ م (م+١)}{جـ م^2} = \frac{م+١}{م}$

الطرف الايسر = $\frac{جـ م + جـ}{جـ م} = \frac{جـ(م+١)}{جـ م} = \frac{م+١}{م}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٧ إذا كانت أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

اثبت أن $\frac{أ^2}{أ^2+ب^2} = \frac{ب^2}{ب^2+جـ^2}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^2$

الطرف الايمن = $\frac{(جـ م^2)^2}{(جـ م^2)^2 + (جـ م)^2} = \frac{جـ^2 م^4}{جـ^2 م^4 + جـ^2 م^2}$

= $\frac{جـ^2 م^4}{جـ^2 م^2 (م^2+١)} = \frac{م^2}{م^2+١}$

الطرف الايسر = $\frac{جـ^2 م^2}{جـ^2 م^2 + جـ^2} = \frac{جـ^2 م^2}{جـ^2 (م^2+١)} = \frac{م^2}{م^2+١}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ٨ إذا كانت أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

اثبت أن $\frac{أ^2 - ٥ب^2}{ب^2 - ٥جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$

الحل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $م^2$

الطرف الايمن = $\frac{(جـ^2 م^4 - ٥جـ^2 م^2)}{جـ^2 م^2 + ٥جـ^2} = \frac{جـ^2 م^2 (م^2 - ٥)}{جـ^2 (م^2 - ٥)} = م^2$

الطرف الايسر = $\frac{جـ م^2}{جـ} = م^2$

∴ الطرفان متساويان

Mr Morad

مثال ٩ إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ اثبت أن

$$\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{جـ^2} = \frac{2أ}{جـ}$$

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ ب = جـ م ،،،، أ = جـ م^2

الطرف الأيمن = $\frac{جـ^2 م^4}{جـ^2 م^2} + \frac{جـ^2 م^2}{جـ^2} = م^2 + م^2 = 2 م^2$

الطرف الأيسر = $\frac{2 جـ م^2}{جـ} = 2 م^2$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١٠ إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ اثبت أن

$$\frac{أ - جـ}{ب + جـ} = \frac{ب - جـ}{جـ}$$

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ ب = جـ م ،،،، أ = جـ م^2

الطرف الأيمن = $\frac{جـ م^2 - جـ}{جـ م + جـ} = \frac{جـ(م^2 - 1)}{جـ(م + 1)}$

$= \frac{جـ(م - 1)(م + 1)}{جـ(م + 1)} = (م - 1)$

الطرف الأيسر = $\frac{جـ م - جـ}{جـ} = \frac{جـ(م - 1)}{جـ} = (م - 1)$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١١ إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ اثبت أن

$$\left[\frac{ب - جـ}{أ - ب}\right]^2 = \frac{جـ}{أ}$$

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ ب = جـ م ،،،، أ = جـ م^2

الطرف الأيمن = $\left[\frac{جـ م - جـ}{جـ م^2 - جـ م}\right]^2 = \left[\frac{جـ(م - 1)}{جـ م(م - 1)}\right]^2$

$= \left[\frac{1}{م}\right]^2 = \frac{1}{م^2}$

الطرف الأيسر = $\frac{جـ}{جـ م^2} = \frac{1}{م^2}$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١٢ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{2أ + 3جـ}{2ب + 3د} = \frac{أ - جـ}{ب - د}$

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ ∴ جـ = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3

الطرف الأيمن = $\frac{2 د م^3 + 3 د م}{2 د م^2 + 3د} = \frac{د م(2م^2 + 3)}{د(2م^2 + 3)} = م$

الطرف الأيسر = $\frac{د م^3 - د م}{د م^2 - د} = \frac{د م(م^2 - 1)}{د(م^2 - 1)} = م$

∴ الطرفان متساويان

مثال ١٣ إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2} = \frac{جـ^2 + د^2}{د^2}$

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ ∴ جـ = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3

الطرف الأيمن = $\frac{د^2 م^6 + د^2 م^4}{د^2 م^4} = \frac{د^2 م^4(م^2 + 1)}{د^2 م^4} = (م^2 + 1)$

الطرف الأيسر = $\frac{د^2 م^2 + د^2}{د^2} = \frac{د^2(م^2 + 1)}{د^2} = (م^2 + 1)$

∴ الطرفان متساويان

(١) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{أ + ب + جـ}{أ - د} = \frac{أ - ب}{أ - 2ب + جـ}$

(٢) إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

اثبت أن $\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{أ - جـ}{ب - جـ}$

Mr.Morad

تمارين على التناسب المتسلسل

[١] أوجد الوسط المتناسب بين كلا من الكميات الآتية :

(١) ٨ ، ١٨ (٢) ١ ، ٩

(٣) ٢ ، ٨ (٤) ٤ ، ٢٥

(٥) $(أ+ب)^2$ ، $(أ-ب)^2$ (٦) $2أ^4$ ، $8أ^{10}$

(٧) $أ^2$ ، $(أ-ب)^2$ (٨) $2\sqrt{6}$ ، $3\sqrt{6}$

[٢] أوجد الثالث لكلا من الكميات الآتية :

(١) ٢ ، ٦ (٢) ٣ ، ٦

(٣) ٤ ، ١٠ (٤) ٥ ، ١٠

(٥) $3أ^2$ ، $6أ^3$ (٦) ٩ ، ١

(٧) ٤ ، $2\sqrt{5}$ (٨) $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}$

[٣] إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ اثبت أن

(١) $\frac{أ}{أ-2ب} = \frac{ب}{ب-2جـ}$ (٢) $\frac{أ-3ب}{أ} = \frac{ب-3جـ}{ب}$

(٣) $\frac{أ-ب}{ب-جـ} = \frac{أ+3ب}{3جـ+ب}$ (٤) $\frac{أ^2+ب^2}{ب^2} = \frac{ب^2+جـ^2}{جـ^2}$

(٥) $\frac{4أ^2-3ب^2}{4ب^2-3جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$ (٦) $\frac{أ-ب}{أ} = \frac{أ-جـ}{أ+ب}$

[٤] إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات في تناسب متسلسل

اثبت أن

(١) $\frac{أ^2-3جـ^2}{ب^2-3د^2} = \frac{ب}{د}$ (٢) $\frac{جـ^2-د^2}{أ-جـ} = \frac{ب د}{أ}$

(٣) $\frac{أب-جـ د}{أ+جـ} = \frac{ب^2-جـ^2}{ب}$ (٤) $\frac{ب}{ب+د} = \frac{جـ^2}{جـ^2+د^2}$

[٥] أوجد العدد الذي إذا أضيف لكلا من الاعداد ١ ، ٣ ، ٦ حتى تصبح في تناسب متسلسل [٣]

[٦] أوجد العدد الذي إذا أضيف لكلا من الاعداد ١ ، ٤ ، ١٠ حتى تصبح في تناسب متسلسل [٢]

[٧] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الثالث المتناسب للعددين ٩ ، − ١٢ هو .....

[−١٦ ، ٨ ، ١٦ ، ١٠٨]

(٢) الوسط المتناسب بين أ ، ب هو .....

[$أب$ ، $\sqrt{أب}$ ، $-\sqrt{أب}$ ، $\pm\sqrt{أب}$]

(٣) اذا كانت ك ، م ، ع في تناسب متسلسل فإن ك = ...

[$\frac{م^2}{ع}$ ، $\frac{م}{ع}$ ، $مع$ ، $\pm\sqrt{مع}$]

(٤) اذا كانت العدد ٦ هو الوسط المتناسب الموجب للعددين م ، ٢ فإن م = ... [١٨ ، ٨ ، ١٢ ، ٣٦]

(٥) اذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{5} = 2$ فإن أ = ...

[5×2^2 ، ٤٠ ، ١٠ ، 2×5^2]

(٦) اذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = 2$ فإن $\frac{أ}{د}$ = ...

[٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦]

(٧) اذا كانت $6أ^2ب^2$ ، $3أب$ ، جـ فإن جـ = ...

[−٣ ، $3أب$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{2}{3}$]

(٨) اذا كانت أ ، ٣ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل فإن أ + ب = ... [٨ ، ١ ، ٩ ، ٧]

(٩) الوسط المتناسب بين (س − ٢) ، (س + ٢) هو .....

[$\sqrt{س+2}$ ، $س^2-4$ ، $\pm\sqrt{س^2-4}$ ، $\sqrt{س^2-4}$]

(١٠) العدد الذي اذا اضيف الى كل من ١ ، ٣ ، ٦ تصبح في تناسب متسلسل هو .....

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

[٨] اذا كانت أ ، ٢ ، ٩ ، ب في تناسب متسلسل فأوجد قيمة أ ، ب [١ ، ٢٧]

[٩] اذا كانت ٣ ، ك ، ١٢ ، م في تناسب متسلسل فأوجد قيمة ك ، م [±٦ ، ±٢٤]

الشجاع يموت مرة واحدة
والجبان يموت مرات عديدة

Mr.Morad

التغير الطردي

إذا كانت ص تتغير طردياً مع س فإن (ص ∝ س) فإن

(١) ص = م س (٢) $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

مثال ١ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٧ عندما س = ٣

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦

الحل

∵ ص ∝ س

∴ ص = م س ∴ ٧ = ٣ م

∴ م = $\frac{٧}{٣}$

∴ ص = $\frac{٧}{٣}$ س

عندما س = ٦

∴ ص = $\frac{٧}{٣}$ × ٦ = ١٤

حل آخر

∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

∴ $\frac{٧}{ص_٢} = \frac{٣}{٦}$

∴ $ص_٢ = \frac{٦ \times ٧}{٣}$

∴ $ص_٢$ = ١٤

مثال ٢ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٣

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ١٠

الحل

∵ ص ∝ س

∴ ص = م س ∴ ٥ = ٣ م

∴ م = $\frac{٥}{٣}$

∴ ص = $\frac{٥}{٣}$ س

عندما ص = ١٠

∴ س = $\frac{٣}{٥}$ × ١٠ = ٦

حل آخر

∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_١}{س_٢}$

∴ $\frac{٥}{١١٠} = \frac{٣}{س_٢}$

∴ $س_٢ = \frac{١٠ \times ٣}{٥}$

∴ $س_٢$ = ٦

مثال ٣ إذا كانت ص ∝ $س^٢$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

الحل

∵ ص ∝ $س^٢$

∴ ص = م $س^٢$ ∴ ٥ = ١ م

∴ م = $\frac{٥}{١}$ = ٥

∴ ص = ٥ $س^٢$

عندما س = ٢

∴ ص = ٥ × ٤ = ٢٠

حل آخر

∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{(س_١)^٢}{(س_٢)^٢}$

∴ $\frac{٥}{ص_٢} = \frac{١}{٤}$

∴ $ص_٢$ = ٥ × ٤ = ٢٠

مثال ٤ إذا كانت ص ∝ $س^٢$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

∵ ص ∝ $س^٢$

∴ ص = م $س^٢$ ∴ ٥ = ١ م

∴ م = $\frac{٥}{١}$ = ٥

∴ ص = ٥ $س^٢$

عندما ص = ٢٠

∴ ٢٠ = ٥ $س^٢$

∴ $س^٢ = \frac{٢٠}{٥}$ = ٤

∴ س = ± $\sqrt{٤}$ = ± ٤

حل آخر

∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{(س_١)^٢}{(س_٢)^٢}$

∴ $\frac{٥}{ص_٢} = \frac{١}{٤}$

∴ $ص_٢$ = ٥ × ٤ = ٢٠

مثال ٥ إذا كانت ص ∝ $\sqrt{س}$ وكانت ص = ٧ عندما س = ٤

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٦

الحل

∵ ص ∝ $\sqrt{س}$

∴ ص = م $\sqrt{س}$ ∴ ٧ = ٢ م

∴ م = $\frac{٧}{٢}$

∴ ص = $\frac{٧}{٢}$ $\sqrt{س}$

عندما س = ١٦

∴ ص = $\frac{٧}{٢}$ × $\sqrt{١٦}$

= $\frac{٧}{٢}$ × ٤ = ١٤

حل آخر

∵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{\sqrt{س_١}}{\sqrt{س_٢}}$

∴ $\frac{٧}{ص_٢} = \frac{٢}{٤}$

∴ $ص_٢ = \frac{٧ \times ٤}{٢}$

∴ $ص_٢$ = ١٤

مثال ٦ إذا كانت ص = ٥ + ع حيث ع ∝ س وكانت ص = ١١ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحل

∵ ص = ٥ + ع ، ع ∝ س ∴ ع = م س

∴ ص = ٥ + م س ، ص = ١١ عندما س = ٢

١١ = ٥ + م (٢)

∴ ١١ − ٥ = ٢ م ∴ ٦ = ٢ م ∴ م = ٣

∴ ص = ٥ + ٣ س

عندما س = ٤ ∴ ص = ٥ + ٣ (٤) = ٥ + ١٢ = ١٧

مثال ٧ إذا كانت ص = ٧ + ع حيث ع ∝ س وكانت ص = ١٥ عندما س = ٤ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢٧

الحـــــل

∵ ص = ٧ + ع ، ع ∝ س ∴ ع = م س

∴ ص = ٧ + م س ، ص = ١٥ عندما س = ٤

١٥ = ٧ + م (٤)

∴ ١٥ − ٧ = ٤ م ∴ ٨ = ٤ م ∴ م = ٢

∴ ص = ٧ + ٢ س

عندما ص = ٢٧ ∴ ٢٧ = ٧ + ٢ س

∴ ٢ س = ٢٠ ∴ س = ١٠

مثال ٨ إذا كانت س ، ص متغيرين حيث ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{س^٣}$ واخذت ص القيمة ١٨ عندما اخذت س القيمة ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيم ص عندما س ∈ { ٠ ، ١ ، ٤ }

الحـــــل

∵ ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{س^٣}$ ∴ ص ∝ $س^٣$

∴ ص = م $س^٣$ ∴ ١٨ = م $(٢)^٣$ ∴ ١٨ = ٨ م

∴ م = $\frac{١٨}{٨}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$

س	٠	١	٤
ص	٠	$٢\frac{١}{٤}$	١٤٤

مثال ٩ إذا كانت $أ^٢$ + ٤ $ب^٢$ = ٤ أ ب فأثبت ان أ ∝ ب

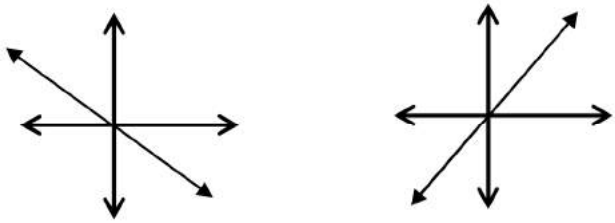
الحـــــل

∵ $أ^٢$ + ٤ $ب^٢$ = ٤ أ ب ∴ $أ^٢$ − ٤ أ ب + ٤ $ب^٢$ = ٠

∴ $(أ − ٢ب)^٢$ = ٠ ∴ أ − ٢ب = ٠ ∴ أ ∝ ب

ملحوظة هامة جدا :

العلاقة الطردية تمثل بيانيا بخط مستقيم يمر بنقطة الاصل (٠ ، ٠)



تمارين على التغير الطـــردي

[١] اكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت س ∝ ص فإن س = ...

(٢) إذا كانت أ = $\frac{٣}{٥}$ ب فإن أ ∝ .....

(٣) إذا كانت س − ٥ص = ٠ فإن س ∝ .....

(٤) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ... عندما س = ١٢

(٥) إذا كانت ص $س^٢$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١ فإن ثابت التغير = ...

[٢] إذا كانت أ ∝ ب وكانت أ = ١٢ عندما ب = ٤ اوجد أ عندما ب = ٥

[٣] إذا كانت س ∝ ص وكانت س = ٥ عندما ص = ٦ اوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد ص عندما س = ٣٠

[٤] إذا كانت أ ∝ ب وكانت أ = ١٤ عندما ب = ٤٢ اوجد العلاقة بين أ ، ب ثم أوجد أ عندما ب = ٦٠

[٥] إذا كانت ص ∝ $س^٣$ وكانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ أوجد ص عندما س = $\frac{١}{٢}$

[٦] إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٤ اوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد ص عندما س = ١٢

[٧] إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٦ اوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد س عندما ص = ١٥

[٨] إذا كانت ص ∝ $س^٢$ وكانت ص = ٣ عندما س = ١ اوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد س عندما ص = ١٢

[٩] إذا كانت ص = ٣ + ع حيث ع ∝ س وكانت ص = ١٣ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

[١٠] إذا كانت ص = ٣ + ع حيث ع ∝ $س^٢$ وكانت ص = ١١ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

[١١] إذا كانت $س^٢$ = ٤ س ص + ٥ $ص^٢$ فأثبت ان أ ∝ ب

Mr Morad

التغـــير العكســـي

إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فان ص تتغير طرديا مع $\frac{١}{س}$ ويكون

(١) ص = $\frac{م}{س}$ (٢) $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

مثال ١ إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٨ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحـــل

∵ ص تتغير عكسياً مع س ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$

∴ ٨ = $\frac{م}{٥}$ ∴ م = ٤٠

∴ ص = $\frac{٤٠}{س}$ وعندما س = ٤

∴ ص = $\frac{٤٠}{٤}$ = ١٠

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٦ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢

الحـــل

∵ ص تتغير عكسياً مع س ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$

∴ ٦ = $\frac{م}{٥}$ ∴ م = ٣٠

∴ ص = $\frac{٣٠}{س}$ وعندما ص = ٢

∴ ٢ = $\frac{٣٠}{س}$ ∴ ٢ س = ٣٠ ∴ س = ١٥

مثال ٣ إذا كانت ص تتغير عكسياً مع $س^٢$ وكانت ص = ٥ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحـــل

∵ ص تتغير عكسياً مع $س^٢$ ∴ ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ ص = $\frac{م}{س^٢}$

∴ ٥ = $\frac{م}{٤}$ ∴ م = ٢٠

∴ ص = $\frac{٢٠}{س^٢}$ وعندما س = ٣

∴ ص = $\frac{٢٠}{٩}$

حاول بنفسك

(١) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٥ عندما س = ٦ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٣

[ص = $\frac{٣٠}{س}$ ، ١٠]

(٢) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٣

[ص = $\frac{٢٤}{س}$ ، ٨]

مثال ٤ إذا كانت ص = ٥ + ع حيث ع تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٧ عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

الحـــل

∵ ص = ٥ + ع ، ع تتغير عكسياً مع س

∴ ع ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ع = $\frac{م}{س}$

∴ ص = ٥ + $\frac{م}{س}$

∵ ص = ٧ عندما س = ٣ ∴ ٧ = ٥ + $\frac{م}{٣}$

∴ ٧ − ٥ = $\frac{م}{٣}$ ∴ ٢ = $\frac{م}{٣}$ ∴ م = ٦

∴ ص = ٥ + $\frac{٦}{س}$

عندما س = ٢ ∴ ص = ٥ + $\frac{٦}{٢}$ ∴ ص = ٨

مثال ٥ إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س ، ع وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ ، ع = ٥ أوجد العلاقة بين ص، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥ ، ع = ٦

الحـــل

∵ ص تتغير عكسياً مع س ، ع ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص ∝ $\frac{١}{ع}$

∴ ص = $\frac{م}{س ع}$ ∵ ص = ٣ عندما س = ٢ ، ع = ٥

٣ = $\frac{م}{٢ \times ٥}$ ∴ م = ٣ × ١٠ = ٣٠

∴ ص = $\frac{٣٠}{س ع}$ وعندما س = ٥ ، ع = ٦

∴ ص = $\frac{٣٠}{٥ \times ٦}$ = $\frac{٣٠}{٣٠}$ = ١

مثال ٦ إذا كانت $س^٢ ص^٢$ + ٢٥ = ١٠ س ص فأثبت ان ص تتغير عكسياً مع س

الحـــل

∵ $س^٢ ص^٢$ + ٢٥ = ١٠ س ص

∴ $س^٢ ص^٢$ − ١٠ س ص + ٢٥ = ٠

∴ (س ص − ٥)^٢ = ٠ ∴ س ص − ٥ = ٠

∴ ص = $\frac{٥}{س}$ ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$

حاول بنفسك

(١) إذا كانت $س^٢ ص^٢$ − ٦ س ص + ٩ = ٠ فأثبت ان ص تتغير عكسياً مع س

(٢) إذا كانت $س^٤ ص^٢$ − ٨ $س^٢$ ص + ١٦ = ٠ فأثبت ان ص تتغير عكسياً مع $س^٢$

Mr.Morad

ملاحظة

إذا كانت ص تتغير طرديا مع س عند ثبوت ع و عكسيا مع ع عند ثبوت س أي ان

ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{1}{ع}$ فإن ص ∝ $\frac{س}{ع}$ ويكون

(١) ص = $\frac{م\ س}{ع}$ (٢) $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2} \times \frac{ع_2}{ع_1}$

مثال (٧) إذا كانت ص تتغير طرديا مع س ، عكسياً مع ع وكانت ص = ١٠ عندما س = ٤ ، ع = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ، ع ثم أوجد قيمة ص عندما س=٦، ع=٣

الحل

∵ ص تتغير طرديا مع س ، عكسياً مع ع

∴ ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{1}{ع}$ ∴ ص ∝ $\frac{س}{ع}$

∴ ص = $\frac{م\ س}{ع}$ ∵ ص = ١٠ عندما س = ٤ ، ع = ٢

∴ ١٠ = $\frac{٤م}{٢}$ ∴ ٢٠ = ٤ م ∴ م = ٥

∴ ص = $\frac{٥\ س}{ع}$ وعندما س=٦، ع=٣

∴ ص = $\frac{٥ \times ٦}{٣}$ = ١٠

تمارين على التغير العكسي

[١] اكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت ع = $\frac{م}{س^2}$ فإن ع ∝ .....

(٢) إذا كانت ص = $\frac{٣}{٥}$ فإن ص ∝ .....

(٣) إذا كانت ٢س ص = ٥ فإن س ∝ .....

(٤) إذا كانت ص ∝ $\frac{٣}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فإن عندما س = ١٢ ص= .....

[٢] إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٥ عندما س = ٨ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س= ٢ [ص = $\frac{٤٠}{س}$ ، ٢٠]

[٣] إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٥ عندما س = ٧ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س= ١٤ [ص = $\frac{٣٥}{س}$ ، ٢,٥]

[٤] إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٨ عندما س = ٦ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص= ٤ [ص = $\frac{٤٨}{س}$ ، ١٢]

[٥] إذا كانت ص تتغير عكسيا مع $س^2$ وكانت ص = ٥ عندما س = ٤ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢ [ص = $\frac{٨٠}{س^2}$ ، ٢٠]

[٦] إذا كانت ص=٥+ ع وكانت ع تتغير عكسياً مع س وكانت ص= ٩ عندما س=٢ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س=٤ [ص = ٥+ $\frac{٨}{س}$ ، ٧]

[٧] إذا كانت ص=٧+ ع وكانت ع تتغير عكسياً مع س وكانت ص= ٩ عندما س=٥ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س=٢ [ص = ٧+ $\frac{١٠}{س}$ ، ١٢]

[٨] إذا كانت $س^2 ص^2$ − ٨س ص + ١٦ = ٠

فاثبت ان ص تتغير عكسياً مع س

[٩] إذا كانت $س^2 ص^2$ − ١٢ $س^2$ص + ٣٦ = ٠

فاثبت ان ص تتغير عكسياً مع س

[١٠] إذا كانت $س^4 ص^2$ − ١٤ $س^2$ص + ٤٩ = ٠

فاثبت ان ص تتغير عكسياً مع $س^2$

[١١] بين أيا من الجداول الآتية يمثل تغيرا طرديا وايها يمثل تغيرا عكسيا وايها لا يمثل تغيرا طرديا او عكسيا مع ذكر السبب في كل حالة :

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
−٢	−٩
−١٨	١
٩	−٢

[١٢] من بيانات الجدول الآتي اجب عن الاسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

(١) بين نوع التغير بين ص ، س

(٢) اوجد ثابت التناسب

(٣) اوجد قيمة ص عندما س= ٣

(٤) اوجد قيمة س عندما ص= ٢$\frac{٢}{٥}$

[١٣] من الجدول المقابل :

س	١	٢	ب	٤	٦
ص	١٢	م	٣٦	٤٨	٧٢

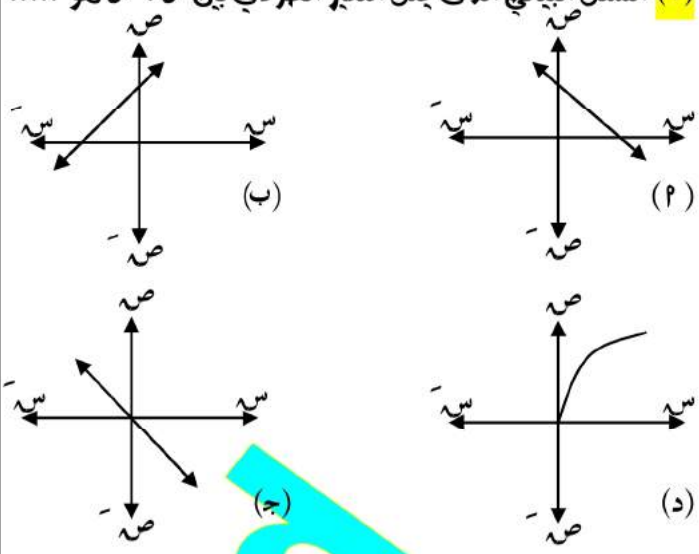
(١) بين نوع التغير بين ص ، س

(٢) اوجد قيمتي م ، ب

Mr.Moraad

[١٤] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الشكل البياني الذي يمثل التغير الطردي بين س ، ص هو .....



(٢) العلاقة التي تمثل تغيرا طرديا بين ص ، س هي .....

[ص= س+٣ ، س ص = ٥ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{س}$ ، $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$]

(٣) العلاقة التي تمثل تغيرا عكسيا بين ص ، س هي .....

[ص= س+٥ ، ص = ٤س ، $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٧}$ ، س ص = ١١]

(٤) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع $س^٢$ ، ك ثابت التناسب فان .....

[ص= ك− $س^٢$ ، ص = ك $س^٢$ ، ص = $\frac{ك}{س}$ ، ص = $\frac{ك}{س^٢}$]

(٥) إذا كانت س ،ص كميتين متغيرتين وكان $\frac{س_١ ص_١}{س_٢ ص_٢} = ١$

فان ص ∝ ..... [س ، $س^٢$ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^٢}$]

(٦) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص =٥ عندما س =٣

فإن ثابت التغير = ... [٣ ، ٥ ، ١٥ ، $\frac{٥}{٣}$]

(٧) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما

ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن ثابت التغير = ...

[٢ ، ٦ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

(٨) إذا كانت س $ص^٥$ = ثابت فإن س تتغير عكسيا مع .....

[ص ، $ص^٥$ ، $ص^٢$ ، $\frac{١}{٥}$]

(٩) إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن س تتناسب .....

[طرديا مع $ص^٢$ ، عكسيا مع $ص^٢$ ، عكسيا مع ص، عكسيا مع $\sqrt{ص}$]

(١٠) إذا كانت $ص^٢$ − ٤ س ص + ٤ $س^٢$ = ٠ فإن .....

[ص ∝ س ، ص ∝ $س^٢$ ، ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$]

(١١) إذا كانت ص=٣ س− ٦ فإن ص ∝ .....

[س ، ٣ س ، س−٢ ، ٣ س−٦]

الإحصاء

جمع البيانات

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التي يعتمد عليها البحث الإحصائي كما أن جمع البيانات بأسلوب علمي صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة حتى يتم اتخاذ القرارات السليمة

مصادر جمع البيانات

(١) مصادر أولية (مصادر ميدانية) :-

وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر عن طريق المقابلة الشخصية

أو الاستبيان (استطلاع الرأي)

مميزاته :- الدقة

عيوبه :- تحتاج وقت ومجهود كبير ومكلفة جداً

(٢) مصادر ثانوية (مصادر تاريخية) :-

وهي المصادر التي يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والإحصاء والأنترنت ووسائل الأعلام

مميزاته :- توفير الوقت والجهد والمال

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف وحجم المجتمع الإحصائي محل البحث ويعرف المجتمع الإحصائي بأنه جميع المفردات التي يجمعها خصائص عامة واحدة

أولا أسلوب الحصر الشامل :-

ويعني جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائي

مميزاته :- الشمول وعدم التحيز ودقة النتائج .

عيوبه :- الحاجة إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة

ثانيا أسلوب العينات :-

ويقوم على فكرة اختيار عينة من المجتمع الإحصائي الذي تمثله ويجرى البحث على العينة وتعمم النتائج على المجتمع كله .

مزايا أسلوب العينات :-

(١) توفير الوقت والجهد والمال

(٢) الطريقة الوحيدة لجمع البيانات في المجتمعات الكبيرة (مجتمع الاسماك مثلا)

(٣) الأسلوب الوحيد لبعض المجتمعات المحدودة

عيوبه :- عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا (صادقاً) وتسمى بالعينة المتحيزة .

Mr.Morad

كيفية اختيار العينات والشروط الواجب توافرها في العينة

أولا الاختيار المتحيز (العينات الغير عشوائية) :-

وهو اختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث وتعرف بالعينة العمدية

ثانيا الاختيار العشوائي (العينات العشوائية) :-

وهو اختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أي من مفردات المجتمع متساوية

ومن أهم أنواع العينات العشوائية

العينة العشوائية البسيطة :- وهي أبسط أنواع العينات ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة ويتوقف اختيارها على حجم وعدد وحدات المجتمع

العينة العشوائية الطبقية :- عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس أي يتكون من مجموعات نوعية تختلف في الصفات فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعا للصفات المكونة له وتسمى كل مجموعة بطبقة .

عدد مفردات العينة العشوائية الطبقية

$$= \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلي}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلي}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

مثال ١ قام احد المصانع بإنتاج ٢٠٠ جهاز تليفزيون من النوع أ ، ٣٠٠ من النوع ب ، ٥٠٠ من النوع جـ اردنا سحب عينة طبقية مكونة من ٥٠ جهاز بحيث يمثل فيها كل نوع . احسب عدد مفردات كل طبقة في العينة

الحـــــل

العدد الإجمالي للمفردات = ٢٠٠ + ٣٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠

$$\text{عدد مفردات النوع أ} = \frac{\text{عدد مفردات أ}}{\text{عدد المفردات الكلي}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

$$\text{عدد مفردات النوع أ} = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} \times ٥٠ = ١٠$$

$$\text{عدد مفردات النوع ب} = \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} \times ٥٠ = ١٥$$

$$\text{عدد مفردات النوع جـ} = \frac{٥٠٠}{١٠٠٠} \times ٥٠ = ٢٥$$

حاول بنفسك

مدرسة بها ٣٠٠ طالب ، ٥٠٠ طالبة ارادت عمل استبيان على عينة عددها ٢٤ طالب وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها . احسب عدد مفردات كل طبقة في العينة

تمارين على جمع البيانات

[١] اكمل ما يأتي :

(١) من مصادر جمع البيانات .....،.....

(٢) تعتبر المقابلة الشخصية من المصادر .....للبيانات

(٣) بيانات الطلاب المسجلة في شئون الطلاب من المصادر .....

(٤) نشرات الجهاز المركزي للتعبئة والاحصاء من المصادر .....

(٥) الملاحظة المباشرة من المصادر ..... للبيانات

(٦) الاسلوب المناسب لفحص دم مريض هو اسلوب .....

(٧) الاسلوب المناسب لفحص انتاج مصنع هو اسلوب .....

(٨) الاسلوب المناسب لمعرفة تعداد السكان هو اسلوب .....

(٩) الاسلوب المناسب لمعرفة نسبة الغياب في احدى المدارس هو اسلوب .....

(١٠) اذا كان المجتمع محل البحث مقسما الى اميين ويقرأون ويكتبون وحاملي المؤهلات المتوسطة وحاملي فوق المؤهلات المتوسطة وحاملي فوق المؤهلات العليا فإن العينة المختارة لإجراء بحث ما تسمى بالعينة .....

[٤] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) من المصادر الثانوية لجمع البيانات.....

♣ المقابلة الشخصية ♣ الاستبيان

♣ قاعدة بيانات الموظفين ♣ الملاحظة والقياس

(٢) من المصادر الاولية لجمع البيانات.....

♣ نشرات مراكز الاحصاء ♣ بيان طلاب المدرسة

♣ سجلات بيانات الموظفين ♣ الاستبيانات

(٣) يعتبر اسلوب الحصر الشامل مناسبا لـ .....

♣ بحث مكونات رمال الصحراء الغربية .

♣ فحص نسبة العذوبة لمياه احد الابار .

♣ بحث نسبة وجود احد المعادن في مناطق التعدين .

♣ معرفة عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة النهائية.

(٤) اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائي تسمى بالعينة .....

♣ العشوائية ♣ الطبقية

♣ العمدية ♣ العنقودية

Mr.Morad

التشتت

التشتت :- لأي مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها وهو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات من مقاييس التشتت المدى والانحراف المعياري

المدى :- هو أبسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة أي أن

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

مثال ١ أوجد المدى للقيم ١ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٧

الحل

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة = ٢٠ − ١ = ١٩

عيوب المدى :-

(١) يتأثر المدى تأثيراً كبيراً بالقيم المتطرفة

(٢) لا يعطي صورة صادقة لتشتت المجموعة نظراً لاعتماده على قيمتين فقط

مميزاته :- أسهل وأبسط طرق قياس التشتت

الانحراف المعياري

الانحراف المعياري :- هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

وهو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها .

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

مثال ٢ أوجد الانحراف المعياري للقيم ١ ، ٤ ، ١٠

الحل

(١) نوجد أولا الوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$

$$\text{الوسط الحسابي } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{١ + ٤ + ١٠}{٣} = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

(٢) نوجد (س − $\bar{\text{س}}$) ثم (س − $\bar{\text{س}}$)^2

س	$\bar{\text{س}}$	س − $\bar{\text{س}}$	(س − $\bar{\text{س}}$)^2
١	٥	−٤	١٦
٤	٥	−١	١
١٠	٥	٥	٢٥
المجموع			٤٢

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٢}{٣}} = \sqrt{١٤}$$

$$= ٣,٧$$

مثال ٣ أوجد الانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٧

الحل

(١) نوجد أولا الوسط الحسابي $\bar{\text{س}}$

$$\text{الوسط الحسابي } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{٥٢}{٥} = ١٠,٤$$

$$(٢)\ \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٩١,٢}{٥}}$$

$$= \sqrt{١٨,٢٤}$$

$$= ٤,٣$$

س	$\bar{\text{س}}$	س − $\bar{\text{س}}$	(س − $\bar{\text{س}}$)^2
٥	١٠,٤	−٥,٤	٢٩,١٦
٧	١٠,٤	−٣,٤	١١,٥٦
١٠	١٠,٤	−٠,٤	٠,١٦
١٣	١٠,٤	٢,٦	٦,٧٦
١٧	١٠,٤	٦,٦	٤٣,٥٦
المجموع			٩١,٢

الانحراف المعياري لتوزيع تكراري :-

مثال ٤ الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٢٠ تلميذ في أحد الاختبارات

الدرجة	٤	٥	٧	٩	١٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٦	٥	٢	٢٠

أوجد الانحراف المعياري لدرجات التلاميذ

(١) نكون الجدول المقابل

(٢) نوجد الوسط الحسابي

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}} = \frac{١٣٩}{٢٠} = ٦,٩٥$$

$$(٣)\ \text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\sum \text{ك}}} = \sqrt{\frac{٨٠.٩٥}{٢٠}}$$

$$= \sqrt{٤,٠٤٧٥} = ٢,٠١$$

س	ك	س× ك	س− $\bar{\text{س}}$	(س − $\bar{\text{س}}$)^2	(س− $\bar{\text{س}}$)^2× ك
٤	٣	١٢	−٢,٩٥	٨,٧٠٢٥	٢٦,١٠٧٥
٥	٤	٢٠	−١,٩٥	٣,٨٠٢٥	١٥,٢١
٧	٦	٤٢	٠,٠٥	٠,٠٠٢٥	٠,٠١٥
٩	٥	٤٥	٢,٠٥	٤,٢٠٢٥	٢١,٠١٢٥
١٠	٢	٢٠	٣,٠٥	٩,٣٠٢٥	١٨,٦٠٥
	٢٠	١٣٩			٨٠,٩٥

Mr.Morad

مثال ٥ الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق في الوحدات المصنعة

الدرجة	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩	١٠٠

أوجد الانحراف المعياري لعدد الوحدات التالفة

الحـــــل

(١) نكون الجدول المقابل

(٢) نوجد الوسط الحسابي

$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

س	ك	س× ك	س− س̄	(س − س̄)²	(س− س̄)² × ك
٠	٣	٠	٣-	٩	٢٧
١	١٦	١٦	٢-	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	١-	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	صفر	صفر	صفر
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
	١٠٠	٣٠٠			٢٠٤

(٣) الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}}$

$= \sqrt{٢,٠٤} = ١,٤٢٨$

حاول بنفسك

أحسب الانحراف المعياري لكلا من القيم الآتية

(١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

فيما يلي توزيع تكراري يبين أعمار ١٠ أطفال

أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

ملحوظة : اذا كان الجدول التكراري يتكون من مجموعات فإن جدول الانحراف المعياري يزيد عمود هو مركز المجموعة س

$س = \frac{\text{الحد الادنى + الحد الاعلى}}{٢}$

المجموعات	س	ك	س× ك	س− س̄	(س− س̄)²	(س− س̄)² × ك

مثال ٦ الجدول التالي يمثل الاجر اليومي لمجموعة من العمال بأحد المصانع

فئات الدخل	٠−	٤−	٨−	١٢−	١٦−	٢٠−	المجموع
عدد العمال	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

أوجد الانحراف المعياري لدرجات التلاميذ

الحـــــل

مركز المجموعة $س = \frac{\text{الحد الادنى + الحد الاعلى}}{٢}$

م	س	ك	س× ك	س− س̄	(س − س̄)²	(س− س̄)² × ك
٠−	٢	١٠	٢٠	٦,٣−	٣٩,٦٩	٣٩٦,٩
٤−	٦	١٢	٧٢	٢,٣−	٥,٥٩	٦٣,٤٨
٨−	١٠	٨	٨٠	١,٧	٢,٨٩	٢٨,٩
١٢−	١٤	٦	٨٤	٥,٧	٣٢,٤٩	١٩٤,٩٤
١٦−	١٨	٣	٥٤	٩,٧	٩٤,٠٩	٢٨٢,٢٧
٢٠−	٢٢	١	٢٢	١٣,٧	١٨٧,٦٩	١٨٧,٦٩
٢٤−		٤٠	٣٣٢			١١٢٧,١٨

(١) نكون الجدول السابق

(٢) نوجد الوسط الحسابي

$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} = \frac{٣٣٢}{٤٠} = ٨,٣$

(٣) الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{١١٢٧,١٨}{٤٠}}$

$= \sqrt{٢٨,١٧٩٥} = ٥,٣٠٨٤٣٦٦٨١$

حاول بنفسك

أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

(١)

المجموع	١٠−	٢٠−	٣٠−	٤٠−	٥٠−	المجموع
التكرار	١	٢	٤	٢	١	١٠

(٢)

المجموع	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

Mr Morad

تمارين على التشتت و الانحراف المعياري

[١] أحسب المدى لكلا من القيم الآتية

(١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

(٣) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

[٢] أحسب الانحراف المعياري لكلا من القيم الآتية

(١) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٢) ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

(٣) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨

[٣] اكمل ما يأتي :

(١) من مقاييس التشتت .....

(٢) ابسط مقاييس التشتت هو .....

(٣) الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة لمجموعة من المفردات يسمى .....

(٤) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى .....

(٥) لأي مجموعة من القيم اذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت يساوي .....

(٦) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو .....

(٧) الوسط الحسابي لمجموعة القيم ٧ ، ٩ ، ٥ ، ١١ ، ٣ هو .....

(٨) المدى لمجموعة من القيم هو .....

(٩) المدى لمجموعة القيم ٦ ، ٩ ، ٥ ، ٤ ، ١٢ هو .....

(١٠) اذا كان الانحراف المعياري لتسعة من القيم هو ٣ فإن مجـ (س − س̄)^{٢} لهذه القيم هو .....

[٤] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الوسط الحسابي لمجموعة القيم ٧ ، ٩ ، ٥ ، ٣ هو .....

[٨ ، ٩ ، ٦ ، ٣]

(٢) المدى لمجموعة القيم ١٧ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ١٥ هو .....

[١٣ ، ٣٢ ، ٦ ، ١٩]

(٣) القيمة الأكثر تكرارا لمجموعة من البيانات هي .....

[الوسيط ، المدى ، المنوال ، المتوسط الحسابي]

(٤) اذا كان الوسط الحسابي للأعداد

٣ ك − ٣ ، ٣ ك − ١ ، ٢ك + ١ ، ٢ك + ٣ ، ٢ك + ٥ هو ١٣

فإن ك = ... [٥ ، ١٠ ، −٥ ، $\frac{١}{٥}$]

(٥) اذا كان المدى لمجموعة القيم ٢ ، ٧ ، م ، ٦ هو ٨

حيث م > صفر فإن م = ...

[٤ ، ٩ ، −١ ، ١٠]

(٦) $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$ = ...

[الانحراف المعياري ، المدى ، المنوال ، الوسط الحسابي]

(٧) اكثر مقاييس التشتت انتشارا وادقها .....

[الانحراف المعياري ، المدى ، الوسيط ، الوسط الحسابي]

(٨) اذا كانت جميع المفردات متساوية في القيمة فإن .....

[س̄ = ٠ ، σ = ٠ ، س − س̄ > ٠ ، س − س̄ < ٠]

(٩) اذا كان مجـ (س − س̄)^{٢} = ٢٨ لسبعة من القيم فإن الانحراف المعياري σ = ...

[١٤ ، ٧ ، ٤ ، ٢]

[٥] الجدول التالي يبين عدد اطفال بعض الاسر في أحدى المدن الجديدة

عدد الاطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الاسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الاطفال [١,٢]

[٦] فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق في الوحدات المصنعة :

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٢	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

اوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة . [١,٤]

[٧] فيما يلي التوزيع التكراري يبين اعمار ١٠ اطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الاطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

اوجد الانحراف المعياري للعمر بالسنوات . [١,٧]

[٨] فيما يلي توزيع تكراري

المجموعات	صفر −	−٤	−٨	−١٢	−١٦	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري [١١,٦ ، ٥,٧]

[٩] فيما يلي توزيع تكراري

المجموعات	−٥	−١٥	−٢٥	−٣٥	−٤٥
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري [٣١,٦ ، ١٣,٩]

Mr.Morad

الهندسة

الصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس السيني للزاوية : القياس السيني نوع من أنواع القياس وحداته الدرجة والدقيقة والثانية

١° = ٦٠′ (الدرجة = ٦٠ دقيقة)

١′ = ٦٠″ (الدقيقة = ٦٠ ثانية)

وقد تتكون الزاوية من درجات فقط أو درجات ودقائق أو درجات ودقائق وثواني فمثلا

ق∠(أ) = ١٠٠° أو ق∠(ب) = ١٥٠° ٤٠′

أو ق∠(جـ) = ٧٠° ٣٥′ ١٥″

ويمكن تحويل الدقائق والثواني إلى درجات بإحدى طريقتين

مثال (١) أكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات فقط

(١) ١٠٠° ٢٥′ (٢) ١٢٠° ٣٠′ ١٥″

الحل

(١) الطريقة الأولى

١٠٠° ٢٥′ = ١٠٠ + ٢٥/٦٠ = ١٠٠ + ٠,٤١٦٦٦٦٦٧

= ١٠٠,٤١٦٦٦٦٦٧

الطريقة الثانية (بالألة الحاسبة)

١٠٠,٤١٦٦٦٦٦	=	...	٢٥	...	١٠٠

(٢) الطريقة الأولى

١٢٠° ٣٠′ ١٥″ = ١٢٠ + ٣٠/٦٠ + ١٥/(٦٠×٦٠)

= ١٢٠ + ٠,٥ + ٠,٠٠٤١٦٦٦٧ = ١٢٠,٥٠٤١٦٦٧

الطريقة الثانية (بالألة الحاسبة)

=	...	١٥	...	٣٠	١٢٠

١٢٠,٥٠٤١٦٦٧

حاول بنفسك

أكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات فقط

(١) ١٣٠° ٤٠′ (٢) ١١٠° ٤٥′ ٣٠″

الحل

Mr.Morad

مثال ٢ أكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات والدقائق والثواني

(١) ٥٤.٣٦° (٢) ١٠٠.٥°

الحل

(١) ٥٤.٣٦° باستخدام الآلة الحاسبة ←

٥٤° ٢١َ ٣٦″	=	...	shif	=	٥٤.٣٦

∴ ٥٤.٣٦° = ٥٤° ٢١َ ٣٦″

(٢) ١٠٠.٥° باستخدام الآلة الحاسبة ←

١٠٠° ٣٠َ	=	...	shif	=	١٠٠.٥

النسب المثلثية للزاوية الحادة

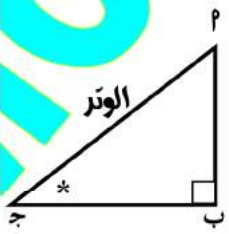
أي زاوية حادة تقع في مثلث قائم الزاوية يمكن إيجاد جميع النسب المثلثية لها بمعلومية أضلاع المثلث القائم الزاوية

توجد ثلاث نسب مثلثية لأي زاوية حادة وهي

(١) جيب الزاوية ويرمز له بالرمز (جا) وبالإنجليزية بالرمز (Sin)

(٢) جيب تمام الزاوية ويرمز له بالرمز (جتا) وبالإنجليزية بالرمز (Cos)

(٣) ظل الزاوية ويرمز له بالرمز (ظا) وبالإنجليزية بالرمز (tan)



جا جـ = المقابل / الوتر = أب / أجـ

جتا جـ = المجاور / الوتر = ب جـ / أجـ

ظا جـ = المقابل / المجاور = أب / ب جـ

جا أ = المقابل / الوتر = ب جـ / أجـ

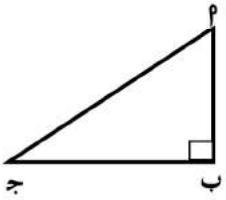
جتا أ = المجاور / الوتر = أب / أجـ

ظا أ = المقابل / المجاور = ب جـ / أ ب

لاحظ أن

بالنسبة لزاوية أ يتغير وضع المقابل والمجاور فيكون المقابل (ب جـ) والمجاور (أ ب)

لاحظ أن



(أجـ)² = (أب)² + (ب جـ)²

(أب)² = (أجـ)² − (ب جـ)²

(ب جـ)² = (أجـ)² − (أب)²

مثال ٣ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية أ ثم أثبت أن جا² أ + جتا² أ = ١

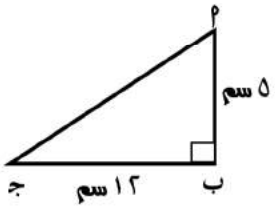
الحل

∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

∴ (أجـ)² = (أب)² + (ب جـ)²

= (٥)² + (١٢)² = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ أ جـ = √١٦٩ = ١٣ سم



جا أ = ب جـ / أجـ = ١٢ / ١٣

جتا أ = أب / أجـ = ٥ / ١٣

ظا أ = ب جـ / أ ب = ١٢ / ٥

∴ جا² أ + جتا² أ = ١٤٤/١٦٩ + ٢٥/١٦٩ = ١٦٩/١٦٩ = ١

مثال ٤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان ٢ أب = √٣ أجـ فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

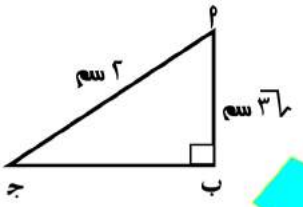
الحل

∵ ٢ أب = √٣ أجـ

∴ أب / أجـ = √٣ / ٢

(ب جـ)² = (٢)² − (√٣)² = ٤ − ٣ = ١

∴ ب جـ = ١



جا جـ = √٣ / ٢

جتا جـ = ١ / ٢

ظا جـ = √٣ / ١ = √٣

حاول بنفسك

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية أ ثم

(١) أثبت أن جا² أ + جتا² أ = ١

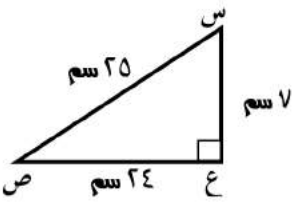
(٢) اوجد جا² أ + جا² جـ

Mr.Morad

مثال ٥ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كلا من

(١) ظا س × ظا ص (٢) جا^{٢} س + جا^{٢} ص

الحـــــل



(ع ص)^{٢} = (س ص)^{٢} − (س ع)^{٢}

= (٢٥)^{٢} − (٧)^{٢}

= ٦٢٥ − ٤٩ = ٥٧٦

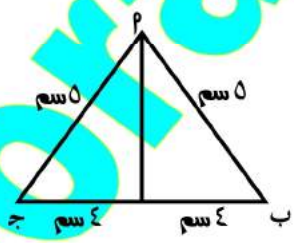
ع ص = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

(١) ظا س × ظا ص = $\frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٤}$ = ١

(٢) جا^{٢} س + جا^{٢} ص = $\frac{٥٧٦}{٦٢٥} + \frac{٤٩}{٦٢٥} = \frac{٦٢٥}{٦٢٥}$ = ١

مثال ٦ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم أوجد جميع الدوال المثلثية الأساسية لزاوية جـ

الحـــــل



نرسم $\overline{أ د}$ عمودي على $\overline{ب جـ}$ فينصف $\overline{ب جـ}$ ثم نوجد $\overline{أ د}$

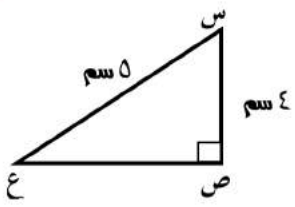
(أ د)^{٢} = (أ ب)^{٢} − (ب د)^{٢}

= ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ أ د = $\sqrt{٩}$ = ٣

جا جـ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا جـ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$

حاول بنفسك



[١] من الشكل المقابل

- أوجد طول ص ع
- أوجد ٢ جا س جتا س
- أثبت أن جا^{٢} ع + جتا^{٢} ع = ١

[٢] أكمل ما يأتي :

(١) ١٧″ ٣٥′ ٤٥° = ... °

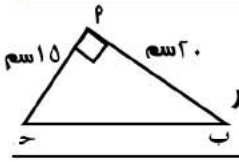
(٢) ٣٨″ ٢٢′ ١١٠° = ... °

(٣) ٧٥,١٣٦° = ... ″ ..... ′ ..... °

(٤) ٤٧,٢٢° = ... ″ ..... ′ ..... °

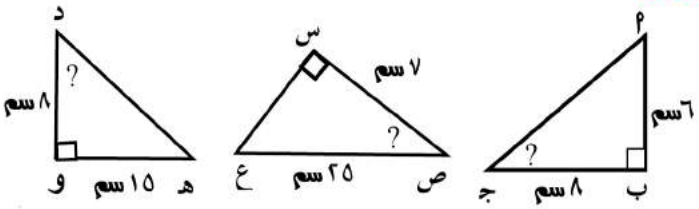
تمارين على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

[١] في الشكل المقابل



أثبت أن جتا جـ جتا ب − جا جـ جا ب = صفر

[٢] أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية المطلوبة



[٣] إذا كانت النسبة بين زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما [٦٧° ٣٠′ ، ١١٢° ٣٠′]

[٤] إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤ فأوجد القياس الستيني للزاوية الكبرى [٥١° ٢٥′ ٤٣″]

[٥] إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

[١٧″ ٣٤′ ٣٨° ، ٤٣″ ٢٥′ ٥١° ، ٩٠°]

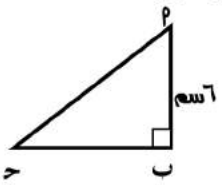
[٦] أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ، جا أ = ٠,٦

أوجد قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ [١]

[٧] أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ، أ ب : أ جـ = ٣ : ٥

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ

[٨] في الشكل المقابل أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ،



أ ب = ٦ سم ، ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$

أوجد (١) طول كل من : $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$

(٢) جا أ + جتا أ

[٩] أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

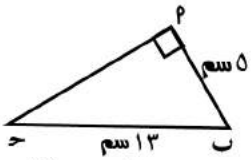
[١٠] أ ب جـ △ قائم الزاوية في ب ، ب جـ = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم استنتج أن :

جا^{٢} أ − جتا^{٢} أ = ٢ جا^{٢} أ − ١

Mr.Morad

[١١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل أ ب جـ △ قائم الزاوية في أ ، أب = ٥ سم ، ب جـ = ١٣ سم فإن ظا ب = ...



[$\frac{٥}{١٣}$ ، ٢,٤ ، $\frac{١٣}{٥}$ ، $\frac{٢٥}{١٣}$]

(٢) لأي زاوية حادة أ يكون ظا أ = ...

[$\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}}$ ، جا أ جتا أ ، $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ ، جا أ + جتا أ]

(٣) لأي زاويتين حادتين أ ، ب اذا كان جا أ = جتا ب فإن ق∠(أ) + ق∠(ب) = ...

[٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠°]

(٤) اذا كان ق∠(أ) = ٧٥° ، جا ب = جتا أ حيث ب زاوية حادة فإن ق∠(ب) = ...

[٤٥° ، ٧٥° ، ١٥° ، ١٠٥°]

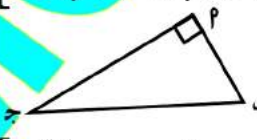
(٥) في △ أ ب جـ اذا كان ق∠(أ) = ٦٠° ، جا جـ = جتا جـ فإن ق∠(ب) = ...

[٦٠° ، ٧٥° ، ٣٠° ، ٤٥°]

(٦) في △ أ ب جـ اذا كان ق∠(ب) = ٩٠° يكون جا أ + جتا جـ = ...

[٢ جا أ ، ٢ جا جـ ، ٢ جا ب ، ٢ جتا أ]

(٧) في الشكل المقابل أي مما يأتي له نفس قيمة جا جـ

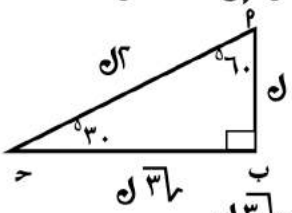


[جا ب ، جتا ب ، ظا جـ ، جتا جـ]

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

هناك بعض الزوايا يمكن إيجاد الدوال المثلثية لها بدون استخدام الالة الحاسبة ولهذا تسمى هذه الزوايا بالزوايا الخاصة

لإيجاد الدوال المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° نقوم برسم مثلث ثلاثيني ستيني من المعروف أن الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر وإذا فرض أن أب = ل فإن أجـ = ٢ل



وإذا قمنا بإيجاد ب جـ

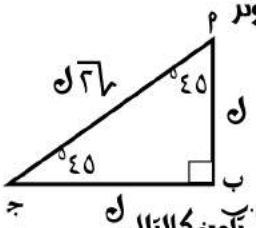
(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

= (٢ل)^{٢} − (ل)^{٢}

= ٤ل^{٢} − ل^{٢} = ٣ل^{٢} فيكون ب جـ = √٣ ل

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$	جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$	ظا ٦٠° = √٣

لإيجاد الدوال المثلثية للزاوية ٤٥° نفرض وجود مثلث قائم الزاوية أحدى زواياه ٤٥° فتكون الزاوية الثالثة ٤٥° أيضا أي أن المثلث سيكون مثلث متساوي الساقين نفرض أن ساقيه طولهما ل ، ل نوجد الضلع الثالث وهو الوتر



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= (ل)^{٢} + (ل)^{٢} = ٢ل^{٢}

∴ أ ب = √٢ ل

وبالتالي تكون الدوال المثلثية للزاوية ٤٥° تكون كالتالي

جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = ١

مثال (١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية

(١) جا ٦٠° جتا ٣٠° + جتا ٦٠° جا ٣٠°

الحـــــل

المقدار = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$

(٢) جا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٤٥° − جتا^{٢} ٦٠°

الحـــــل

المقدار = $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

كيف يحزن من عنده رب يقدر
ويغفر ويستر ويرزق ويرى
ويسمع ويبدء مقاليد الأمور

Mr.Morad

(٣) جا^{٢} ٦٠° + ظا^{٢} ٦٠° + جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل

المقدار = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٣}{٤} + ٣ + \frac{١}{٢} = \frac{٣ + ١٢ + ٢}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

---

(٤) جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

الحل

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$

$= \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ملاحظات

(١) جيب الزاوية يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها

(فمثلا جا ٣٠° = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$)

(٢) ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ (لأي زاوية)

مثال ٢ بدون استخدام الحاسبة أثبت أن :

(١) ظا ٤٥° = ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل

الطرف الايمن = ١

الطرف الايسر = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ الطرفان متساويان

---

(٢) جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° − ١

الحل

الطرف الايمن = $\frac{١}{٢}$

الطرف الايسر = ٢ × $\frac{٣}{٤}$ − ١ = $\frac{٣}{٢}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

---

(٣) جتا ٦٠° = ١ − ٢ جا^{٢} ٣٠°

الحل

الطرف الايمن = $\frac{١}{٢}$

الطرف الايسر = ١ − ٢ × $\frac{١}{٤}$ = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

---

(٤) جا^{٣} ٣٠° = ٩ جتا^{٣} ٦٠° − ظا^{٢} ٤٥°

الحل

الطرف الايمن = $(\frac{١}{٢})^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$

الطرف الايسر = ٩ × $(\frac{١}{٢})^{٣}$ − ١ = $\frac{٩}{٨}$ − ١ = $\frac{١}{٨}$

∴ الطرفان متساويان

---

(٥) جتا ٦٠° جتا ٣٠° − جا ٦٠° جا ٣٠° = صفر

الحل

الطرف الايمن = $\frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = صفر = الطرف الايسر

مثال ٣ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س

حيث ٠° < س < ٩٠° التي تحقق ان :

(١) ظا س = ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل

ظا س = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ ظا س = ١ ∴ س = ٤٥°

---

(٢) ٣ ظا س = ٢ جا ٦٠°

الحل

٣ ظا س = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ س = ٣٠°

---

(٣) ظا س = ٤ جا ٣٠° جا ٦٠°

الحل

ظا س = ٤ × $\frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ظا س = $\sqrt{٣}$ ∴ س = ٦٠°

---

(٤) جتا س = جا ٣٠° ظا ٦٠°

الحل

جتا س = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

Mr.Morad

تلخيص الدوال المثلثية للزوايا ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°

	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

إيجاد الدوال المثلثية الاساسية لزاوية باستخدام الالة الحاسبة

مثال ٤ أوجد قيمة كلا من

(١) جا ٥٠° (٢) جتا ١٢٠° (٣) ظا ٢٠٠°

الحل

(١) باستخدام الالة الحاسبة

Sin 50 = 0.766044443

∴ جا ٥٠° = ٠,٧٦٦٠٤٤٤٤٣

(٢) باستخدام الالة الحاسبة

Cos 120 = - 0.5

∴ جتا ١٢٠° = - ٠,٥

(٣) باستخدام الالة الحاسبة

Tan 200 = 0.363970234

∴ ظا ٢٠٠° = ٠,٣٦٣٩٧٠٢٣٤

إيجاد زاوية إذا علمت أحدى الدوال المثلثية لها

مثال ٥ أوجد قيمة س التي تحقق أن

(١) جا س = ٠,٤٥

(٢) جتا س = ٠,١٢٥

(٣) ظا س = ٠,٦١٢٤

الحل

(١) لإيجاد الزاوية التي جيبها = ٠,٤٥ باستخدام الالة الحاسبة

Shift > sin > 0.45 > 26° 44' 37"

(٢) لإيجاد الزاوية التي جيب تمامها = ٠,١٢٥ باستخدام الحاسبة

Shift > cos > 0.125 > 82° 79' 9"

(٣) لإيجاد الزاوية التي ظلها = ٠,٦١٢٤ باستخدام الحاسبة

Shift > tan > 0.6124 > 31° 28' 59"

مثال ٦ أكمل ما يأتي :

(١) اذا كان جاس = $\frac{1}{2}$ فإن ق∠(س) = ...

Shift sin $\frac{1}{2}$ = 30

(٢) اذا كان جتاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن ق∠(س) = ...

Shift cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 30

(٣) اذا كان ظاس = $\sqrt{3}$ فإن ق∠(س) = ...

Shift tan $\sqrt{3}$ = 60

(٤) اذا كان ظاس = - ٢,٣٨٧٥ فإن ق∠(س) = ...

Shift tan 2.3875 = ''' =

∴ ق∠(س) = ١٨٠° - ٢٥″ ١٦′ ٦٧° = ١١٢° ٤٣′ ٣٥″

مثال ٧ اذا كان جا (٢س - ٨) = $\frac{1}{2}$ فما قيمة س

الحل

Shift sin $\frac{1}{2}$ = 30

∴ ٢س - ٨ = ٣٠ ∴ ٢س = ٣٠ + ٨

∴ ٢س = ٣٨ ∴ س = ١٩°

مثال ٨ اذا كان جتا ($\frac{س}{2}$) = $\frac{1}{2}$ فما قيمة س

الحل

Shift cos $\frac{1}{2}$ = 60

∴ $\frac{س}{2}$ = ٦٠ ∴ س = ١٢٠°

مثال ٩ اذا كان جتا (٧س - ٥) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فما قيمة س

الحل

Shift cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 30

∴ ٧س - ٥ = ٣٠ ∴ ٧س = ٣٠ + ٥

∴ ٧س = ٣٥ ∴ س = ٥°

مثال ١٠ اذا كان ٢جا س = ١ فما قيمة س

الحل

∵ ٢جا س = ١ ∴ جا س = $\frac{1}{2}$

Shift sin $\frac{1}{2}$ = 30

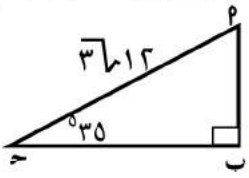
∴ ق∠(س) = ٣٠°

Mr.Morad

مثال (١١) △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ق∠(جـ) = ٣٥°

أ جـ = ١٢√٣ سم

اوجد طول $\overline{ب جـ}$



الحـــــل

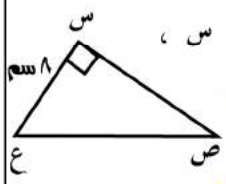
نبحث عن اى نسبة مثلثية للزاوية جـ التى تجمع الضلعين $\overline{ب جـ}$ المطلوب ، $\overline{أ جـ}$ المعلوم فنجد هذه النسبة هى

جتا جـ = $\frac{ب جـ}{أ جـ}$ ∴ جتا ٣٥° = $\frac{ب جـ}{١٢√٣}$

∴ ب جـ = ١٢√٣ × جتا ٣٥° ∴ ب جـ = ١٧,٠٢٥ سم

مثال (١٢) △ س ص ع قائم الزاوية في س ، ق∠(ص) = ٤٢° ٢٨َ ،

س ع = ٨ سم اوجد طول $\overline{ص ع}$



الحـــــل

∵ جا ص = $\frac{س ع}{ص ع}$

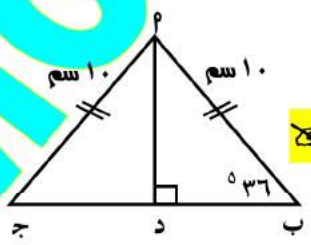
∴ جا ٤٢° ٢٨َ = $\frac{٨}{ص ع}$

∴ ص ع = $\frac{٨}{جا ٤٢° ٢٨َ}$ ≈ ١١,٨٥ سم

مثال (١٣) △ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، ق∠(ب) = ٣٦° ،

احسب مساحة المثلث أ ب جـ

علما بأن أ ب = ١٠ سم



الحـــــل

العمل نسقط $\overline{أ د}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∴ ب د = د جـ

في △ أ ب د جا ب = $\frac{أ د}{أ ب}$

جا ٣٦° = $\frac{أ د}{١٠}$ ∴ أ د = ١٠ جا ٣٦° = ٥,٩ سم

(ب د)² = (أ ب)² − (أ د)²

(ب د)² = ١٠٠ − ٣٤,٨١ = ٦٥,٢٩

∴ ب د = √٦٥,٢٩ ≈ ٨ سم ∴ ب جـ = ١٦ سم

∴ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٥,٩ = ٤٧,٢ سم²

تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

[١] اكمل ما يأتي :

(١) جا ٤٥° − جتا ٤٥° = ...

(٢) جتا ٦٠° + جا ٣٠° = ...

(٣) جا ٣٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ...

(٤) جا ٦٠° + جتا ٣٠° − ظا ٦٠° = ...

(٥) جا² ٤٥° + جتا² ٤٥° = ...

(٦) ظا² ٦٠° + جتا ٦٠° − ظا ٤٥° = ...

(٧) ظا ٤٥° × جا ٣٠° = ...

(٨) ٤ جتا ٣٠° ظا ٦٠° = ...

(٩) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جا² ٦٠° = ...

(١٠) جا ٣٠° = جتا .... °

---

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كانت جتا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٩٠° ، ٦٠° ، ٤٥° ، ٣٠°]

(٢) اذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٩٠° ، ٦٠° ، ٤٥° ، ٣٠°]

(٣) اذا كانت ظا س = $\frac{١}{√٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ظا ٢س = ...

[$\frac{٢}{√٣}$ ، √٣ ، ٢√٣ ، ٣]

(٤) اذا كان س قياس زاوية حادة وكان جا س = $\frac{١}{٢}$

فإن جا ٢س = ... [$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{√٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١]

(٥) اذا كانت ٢ جا س = ظا ٦٠° س زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٤٠° ، ٦٠° ، ٤٥° ، ٣٠°]

(٦) اذا كانت ظا ٣ س = √٣ حيث ٣ س زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٤٠° ، ٦٠° ، ١٠° ، ٢٠°]

(٧) اذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٤٥° ، ٦٠° ، ٣٠° ، ١٢٠°]

(٨) اذا كان جا ٢س = $\frac{√٣}{٢}$ حيث ٢س زاوية حادة فإن

ق∠(س) = ... [٤٥° ، ٦٠° ، ٣٠° ، ٢٠°]

(٩) اذا كان جتا(س + ١٠°) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س + ١٠°) زاوية حادة

فإن س = ... [٥٠° ، ٧٠° ، ٣٠° ، ٤٠°]

(١٠) اذا كان ظا(س − ٥°) = $\frac{١}{√٣}$ حيث (س − ٥°) زاوية حادة

فإن س = ... [٣٥° ، ٦٥° ، ٣٠° ، ٦٠°]

Mr.Morad

(١١) اذا كان جا(س +٥°) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س+٥°) زاوية حادة

فإن ظا(س+٣٠°)=..... [$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١]

(١٢) ظا ٧٥° = ...

[$\frac{\text{جتا ٧٥°}}{\text{جا ٧٥°}}$ ، $\frac{\text{جا ٧٥°}}{\text{جتا ٧٥°}}$ ، ٢ ظا ٢٥° ، ٢ جا ٢٥° جتا ٢٥°]

[٣] بدون استخدام الالة الحاسبة اثبت كلا مما يأتي :

(١) جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

(٢) جتا ٦٠° = ٢ جتا^{٢} ٣٠° − ١

(٣) جتا^{٢} ٦٠° = ٥ جا^{٢} ٣٠° − ظا^{٢} ٤٥°

(٤) ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$

(٥) جتا ٦٠° = جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠°

[٤] اوجد قيمة التي تحقق الآتي حيث ٠ < ٩٠° < ١٨٠°

(١) ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠°

(٢) جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠°

(٣) ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

(٤) جتا س = $\frac{\text{جا ٦٠° جا ٣٠}}{\text{ظا ٤٥° جا}^{٢}\text{ ٤٥°}}$

(٥) ٣ جا س = جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

[٥] اوجد قيمة س التي تحقق الآتي :

(١) س جا^{٢} ٤٥° = ظا^{٢} ٦٠° (٦)

(٢) س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جتا^{٢} ٣٠° (٣)

(٣) س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^{٢} ٤٥° − جتا^{٢} ٦٠°

(٤) ٤ س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥° ($\frac{١}{١٦}$)

[٦] اوجد ق∠(هـ) حيث هـ زاوية حادة في كل مما يأتي :

(١) جا^{٢} ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠° (٣٠°)

(٢) جا هـ جا^{٢} ٦٠° = ٣ جا^{٢} ٤٥° جتا^{٢} ٤٥° جتا ٦٠° (٣٠°)

(٣) ٣ ظا هـ − ٤ جا^{٢} ٣٠° = ٨ جتا^{٢} ٦٠° (٤٥°)

[٧] أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ١٥ سم، أ جـ = ٢٥ سم

اوجد (١) ق∠(أ ب جـ) (٢) مساحة المستطيل أ ب جـ د

[٨] أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه :

أ ب = أ د = د جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم ،

اوجد (١) ق∠(ب) ، ق∠(أ)

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

البعد بين نقطتين

إذا كانت أ = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب = (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يتعين من العلاقة

أ ب = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

= $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال ١ إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٦)

أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(٤ - ١)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}} = \sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$

= $\sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات

مثال ٢ إذا كانت أ = (− ١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٦)

أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(٤ + ١)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}} = \sqrt{(٥)^{٢} + (٤)^{٢}}$

= $\sqrt{٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة

مثال ٣ إذا كانت أ = (− ٢ ، ٢) ، ب = (٤ ، − ٦)

أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(٤ + ٢)^{٢} + (-٦ - ٢)^{٢}} = \sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$

= $\sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات

مثال ٤ إذا كانت أ = (− ١ ، ٠) ، ب = (− ٤ ، ٦)

أوجد البعد بين أ ، ب

الحل

أ ب = $\sqrt{(-٤ + ١)^{٢} + (٦ - ٠)^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢} + (٦)^{٢}}$

= $\sqrt{٩ + ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ وحدات

حاول بنفسك

(١) إذا كانت أ = (− ٢ ، ٣) ، ب = (٥ ، − ٧)

أوجد البعد بين أ ، ب

(٢) إذا كانت أ = (− ٣ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٠)

أوجد البعد بين أ ، ب

Mr.Morad

مثال ٥ إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (س ، ٦)
وكان طول أ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحل

∵ أ ب = ٥

∴ $\sqrt{(س - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٥$ بالتربيع

∴ $(س - ١)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$

∴ $س^٢ - ٢س + ١ + ١٦ - ٢٥ = ٠$

∴ $س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$

∴ (س − ٤)(س + ٢) = ٠ ∴ س = ٤ أو س = −٢

مثال ٦ إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (س ، س)
وكان طول أ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحل

∵ أ ب = ٥

∴ $\sqrt{(س - ١)^٢ + (س - ٢)^٢} = ٥$ بالتربيع

∴ $(س - ١)^٢ + (س - ٢)^٢ = ٢٥$

∴ $س^٢ - ٢س + ١ + س^٢ - ٤س + ٤ - ٢٥ = ٠$

∴ $٢س^٢ - ٦س - ٢٠ = ٠$ ÷ ٢

$س^٢ - ٣س - ١٠ = ٠$

∴ (س − ٥)(س + ٢) = ٠ ∴ س = ٥ أو س = −٢

ملاحظة لإثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة نوجد أ ب ، ب جـ ، أ جـ
نجد أن مجموع أصغر بعدين = البعد الأكبر

مثال ٧ اثبت أن النقط أ = (١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤) ، جـ = (٤ ، ٨) تقع على استقامة واحدة

الحل

أ ب = $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٤ - ٢)^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢}$

= $\sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

أ جـ = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٨ - ٢)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (٦)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

ب جـ = $\sqrt{(٤ - ٣)^٢ + (٨ - ٤)^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (٤)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

∵ أ ب + ب جـ = أ جـ ∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

ملاحظة لإثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة مركزها م نثبت أن م أ = م ب = م جـ = نق

مثال ٨ اثبت أن النقط أ = (−١ ، ١) ، ب = (٠ ، ٤) ، جـ = (٣ ، ١) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م (١ ، ٢) وأوجد طول نصف قطرها ومحيطها ومساحتها .

الحل

م أ = $\sqrt{(١ + ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

م ب = $\sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٤ - ٢)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

م جـ = $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

∵ م أ = م ب = م جـ

∴ أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة واحدة ويكون نق = $\sqrt{٥}$

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × π × $\sqrt{٥}$ = ١٤ اسم^٢

مساحة الدائرة = π نق^٢ = π ($\sqrt{٥}$)^٢ = π × ٥ = ١٥,٧ اسم^٢

ملاحظة لمعرفة نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه نوجد أضلاعه الثلاثة فإذا كان

(١) أ ب = ب جـ = أ جـ يكون المثلث متساوي الاضلاع

(٢) أ ب = ب جـ ≠ أ جـ يكون المثلث متساوي الساقين

(٣) أ ب ≠ ب جـ ≠ أ جـ يكون المثلث مختلف الاضلاع

مثال ٩ بين نوع المثلث أ ب جـ الذي فيه
أ = (٥ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، جـ = (١ ، ١)
متساوي الاضلاع أم متساوي الساقين

الحل

أ ب = $\sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (٥ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

ب جـ = $\sqrt{(٥ - ١)^٢ + (١ - ١)^٢} = \sqrt{١٦ + ٠} = \sqrt{١٦} = ٤$

أ جـ = $\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٥ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١٦} = \sqrt{٢٠}$

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

حاول بنفسك

(١) اذا كانت أ = (٥ ، ٢) ، ب = (−١ ، ١) فأوجد طول أ ب

(٢) اثبت أن النقط أ = (٤ ، ٣) ، ب = (١ ، ١) ، جـ = (−٥ ، −٣) تقع على استقامة واحدة

Mr.Morad

ملاحظة لمعرفة نوع المثلث بالنسبة لزواياه

نوجد أضلاعه الثلاثة أ ب ، ب جـ ، أ جـ فاذا كان

(١) مربع الأكبر = مجموع مربعي الضلعين الاخرين

[يكون المثلث قائم الزاوية]

(٢) مربع الأكبر > مجموع مربعي الضلعين الاخرين

[يكون المثلث منفرج الزاوية]

(٣) مربع الأكبر < مجموع مربعي الضلعين الاخرين

[يكون المثلث حاد الزوايا]

مثال ١٠ اثبت أن المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = (٤، ٥) ، ب = (٣، ٢) ، جـ = (−٣، ٤) قائم الزاوية واوجد مساحته

الحـــــل

أ ب = $\sqrt{(٤-٣)^٢ + (٥-٢)^٢} = \sqrt{١+٩} = \sqrt{١٠}$

∴ $(أ ب)^٢ = ١٠$

ب جـ = $\sqrt{(٣+٣)^٢ + (٤-٢)^٢} = \sqrt{٣٦+٤} = \sqrt{٤٠}$

∴ $(ب جـ)^٢ = ٤٠$

أ جـ = $\sqrt{(٤+٣)^٢ + (٥-٤)^٢} = \sqrt{٤٩+١} = \sqrt{٥٠}$

∴ $(أ جـ)^٢ = ٥٠$

∵ $(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$ ∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية

مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times \sqrt{٤٠} = ١٠$ سم^٢

مثال ١١ اثبت أن المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = (٥، ٤) ، ب = (٣، ٢) ، جـ = (١، ٣) منفرج الزاوية

الحـــــل

أ ب = $\sqrt{(٥-٣)^٢ + (٤-٢)^٢} = \sqrt{٤+٤} = \sqrt{٨}$ ∴ $(أ ب)^٢ = ٨$

ب جـ = $\sqrt{(٣-١)^٢ + (٣-٢)^٢} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$ ∴ $(ب جـ)^٢ = ٥$

أ جـ = $\sqrt{(٥-١)^٢ + (٤-٣)^٢} = \sqrt{١٦+١} = \sqrt{١٧}$ ∴ $(أ جـ)^٢ = ١٧$

∵ $(أ جـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

∴ المثلث أ ب جـ منفرج الزاوية

حاول بنفسك

اثبت أن المثلث أ ب جـ الذي فيه أ = (٣، ٢) ، ب = (−٤، ١) ، جـ = (٢، −١) قائم الزاوية واوجد مساحته

ملاحظة لإثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د

(١) مستطيل نثبت أن أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د ، أ جـ = ب د

(٢) مربع نثبت أن أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ، أ جـ = ب د

(٣) معين نثبت أن أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ، أ جـ ≠ ب د

(٤) متوازي أضلاع نثبت أن أ ب = جـ د ،، ب جـ = أ د

(٥) شبه منحرف نثبت أن

(أ) $\overline{أ ب}$ يوازي $\overline{جـ د}$ ، $\overline{ب جـ}$ لا يوازي $\overline{أ د}$

(ب) $\overline{ب جـ}$ يوازي $\overline{أ د}$ ، $\overline{أ ب}$ لا يوازي $\overline{جـ د}$

وذلك باستخدام الميل فإذا كان

ميل $\overline{أ ب}$ = ميل $\overline{جـ د}$ فان $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ د}$

مثال ١٢ اثبت أن النقط أ (١، ٤) ، ب (٤، ٩) ، جـ (−١، ١٢) ، د (−٤، ٧) هي رؤوس مربع وأوجد مساحته

الحـــــل

أ ب = $\sqrt{(١-٤)^٢ + (٩-٤)^٢} = \sqrt{٩+٢٥} = \sqrt{٣٤}$

ب جـ = $\sqrt{(٤+١)^٢ + (١٢-٩)^٢} = \sqrt{٢٥+٩} = \sqrt{٣٤}$

جـ د = $\sqrt{(-١+٤)^٢ + (١٢-٧)^٢} = \sqrt{٩+٢٥} = \sqrt{٣٤}$

د أ = $\sqrt{(١+٤)^٢ + (٧-٤)^٢} = \sqrt{٢٥+٩٩} = \sqrt{٣٤}$

القطران

أ جـ = $(١+١)^٢ + (١٢-٤)^٢ = ٤+٦٤ = \sqrt{٦٨}$

ب د = $(٤+٤)^٢ + (٩-٧)^٢ = ٦٤+٤ = \sqrt{٦٨}$

∵ أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ، أ جـ = ب د

∴ الشكل أ ب جـ د مربع

مساحته = مربع طول ضلعه = $(\sqrt{٣٤})^٢ = ٣٤$

مثال ١٣ اثبت أن النقط أ (٣، −٢) ، ب (−٥، ٠) ، جـ (٠، −٧) ، د (٨، −٩) هي رؤوس متوازي اضلاع

الحـــــل

أ ب = $\sqrt{(٣+٥)^٢ + (-٣-٠)^٢} = \sqrt{٦٤+٤} = \sqrt{٦٨}$

جـ د = $\sqrt{(٠-٨)^٢ + (-٧+٩)^٢} = \sqrt{٦٤+٤} = \sqrt{٦٨}$

ب جـ = $\sqrt{(-٥-٠)^٢ + (٠+٧)^٢} = \sqrt{٢٥+٤٩} = \sqrt{٦٤}$

د أ = $\sqrt{(٨-٣)^٢ + (-٩+٢)^٢} = \sqrt{٢٥+٤٩} = \sqrt{٦٤}$

∵ أ ب = جـ د ، ب جـ = د أ

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع

Mr.Morad

مثال ١٤ اثبت أن النقط أ (−١، ٤) ، ب (١، ١) ، جـ (−١، −٢)، د (−٣، ١) هي رؤوس معين وأوجد مساحته

الحل

أ ب = √( )² + ( )² = √ + = √

ب جـ = √( )² + ( )² = √ + = √

جـ د = √( )² + ( )² = √ + = √

د أ = √( )² + ( )² = √ + = √

القطران

أ جـ = √( )² + ( )² = √ + = √

ب د = √( )² + ( )² = √ + = √

∵ = = = ، ≠

∴ الشكل أ ب جـ د

مساحته = × × =

مثال ١٥ إذا كانت النقطة أ = (س، ١) على بعد ين متساويين من النقطتين ب = (٤، ٢) ، جـ = (٣، ٣) أحسب قيمة س

الحل

∵ أ ب = أ جـ

∴ √(س−٤)² + (٢ − ١)² = √(س−٣)² + (٣ − ١)² بالتربيع

∴ (س−٤)² + (٢ − ١)² = (س−٣)² + (٣ − ١)²

س² −٨ س +١٦ +١ = س² − ٦س +٩ +٤

− ٨ س +١٧ = − ٦ س +١٣

− ٨ س + ٦ س = +١٣−١٧

− ٢ س =−٤

∴ س = ٢

تمارين على البعد بين نقطتين

[١] اكمل ما يأتي :

(١) البعد بين النقطتين (١٥، ٠) ، (٦، ٠) يساوي .....

(٢) البعد بين النقطتين أ(٦، ٠) ، ب (٠، ٨) يساوي .....

(٣) البعد بين النقطة أ(−٣، ٤) ، نقطة الاصل يساوي .....

(٤) اذا كان أ(٢، −٣) ، ب (−١، ١) فإن أ ب = ...

(٥) اذا كان البعد بين النقطتين (أ، ٠) ، (٠، ١) هو وحدة طول واحدة فإن أ = ...

(٦) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٧، ٤) وتمر بالنقطة (٣، ١) يساوي .....

(٧) في المربع أ ب جـ د اذا كان أ(٣، ٥) ، ب (٤، ٢) فإن مساحة المربع .....وحدة مساحة .

(٨) في المعين أ ب جـ د اذا كان أ(−١، ٧) ، ب (−٣، ١) فإن محيط المعين .....وحدة طول .

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) اذا كان أ(س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) فإن أ ب = ...

♣ س١ س٢ + ص١ ص٢ ♣ √س١ س٢ + ص١ ص٢

♣ س٢− س١، ص٢− ص١ ♣ √(س٢− س١)² +(ص٢− ص١)

(٢) البعد بين النقطتين (٢، ٢) ، (−١، ٦) = ... وحدة طول

[٢ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٥]

(٣) اذا كان أ(٠، ٠) ، ب (٢، ٣) فإن أ ب = ... وحدة طول

[√٧ ، √٥ ، √١١ ، √١٣]

(٤) النقطة التي تبعد عن نقطة الاصل مسافة ٢ وحدة طول يمكن ان تكون .....

[(١، ٢) ، (٢، ١) ، (٠، ٢) ، (−٢، ٥)]

(٥) بعد النقطة (٣، −٥) عن محور السينات = ...وحدة طول

[−٥ ، ٥ ، ٣ ، ٤]

(٦) بعد النقطة (٢، −٣) عن محور الصادات = ...وحدة طول

[−٣ ، ٢ ، √٥ ، √١٢]

(٧) دائرة مركزها نقطة الاصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة .

[(١، ٢) ، (−٢، ١) ، (√٣، ١) ، (١، √٢)]

Mr.Morad

[٣] أوجد البعد بين كل زوج من النقاط الآتية

(١) أ(−٤، ١) ، ب(٤، ٧) (٢) أ(−١، ٢) ، ب(٣، ٥)

(٣) أ(١، −٣) ، ب(٥، ٣) (٤) أ(٠، −٢) ، ب(٣، ٤)

---

[٤] إذا كان أ = (س ، −١) ب = (٢، ٣)

وكان طول أ ب = ٥ أوجد قيمة س

---

[٥] إذا كان أ = (١ ، ٢) ب = (٣، ص)

وكان طول أ ب = $\sqrt{١٣}$ أوجد قيمة ص

---

[٦] اثبت أن النقط أ = (١، ٤)، ب = (٣، −٢)، جـ = (−٣ ، ١٦)

تقع على استقامة واحدة

---

[٧] اثبت أن النقط أ = (٤، ٣)، ب = (١ ، ١)، جـ = (− ٥ ، −٣)

تقع على استقامة واحدة

---

[٨] اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ = (٧، −١)،

ب = (١، −٣)، جـ = (٣ ، ٣) متساوي الساقين

---

[٩] اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط

أ = (٥، −٥)، ب = (−١، ٧)، جـ = (١٥ ، ١٥)

قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته باستخدام قانون البعد

---

[١٠] اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط

أ = (−١، −١)، ب = (٢، ٣)، جـ = (٦ ، ٠)

قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته باستخدام قانون البعد

---

[١١] اثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازي اضلاع حيث

(١) أ = (−١، −١)، ب = (٠، ٥)، جـ = (٥ ، ٦)، د = (٤ ، ٢)

(٢) أ = (−٢، ٤)، ب = (٥، −٣)، جـ = (٧ ، ١)، د = (٠ ، ٨)

---

[١٢] اثبت أن الشكل أ ب جـ د معين واحسب مساحته حيث

أ = (٥، ٣)، ب = (٦، −٢)، جـ = (١ ، −١)، د = (٠ ، ٤)

---

[١٣] اثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع واحسب مساحته حيث

أ = (٣، ٣)، ب = (٠، ٣)، جـ = (٠ ، ٠)، د = (٣ ، ٠)

---

[١٤] اثبت أن النقط أ = (٣، −١)، ب = (−٤، ٦)، جـ = (٢، −٢)،

تقع على دائرة واحدة مركزها م = (−١ ، ٢) ثم اوجد محيط

الدائرة حيث π = ٣,١٤

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت إحداثيات أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢ ، ص٢) فإن

إحداثيات منتصف أ ب = ($\frac{س١ + س٢}{٢}$ ، $\frac{ص١ + ص٢}{٢}$)

مثال ١ إذا كانت أ = (١، ٢)، ب = (٣، ٦)، أوجد منتصف $\overline{أ ب}$

الحل

منتصف أ ب = ($\frac{١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{٢ + ٦}{٢}$) = (٢، ٤)

مثال ٢ إذا كانت أ = (١، −٥)، ب = (٣، ٣)، أوجد منتصف $\overline{أ ب}$

الحل

منتصف أ ب = ($\frac{١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-٥ + ٣}{٢}$) = (٢، −١)

مثال ٣ إذا كانت أ = (٢، ٤)، جـ = (١، ٣)، وكانت جـ منتصف

$\overline{أ ب}$ أوجد احداثيات النقطة ب

الحل

نفرض أن ب = (س ، ص)

(١ ، ٣) = ($\frac{٢ + س}{٢}$ ، $\frac{٤ + ص}{٢}$)

١ = $\frac{٢ + س}{٢}$ ∴ ٢ + س = ٢ ∴ س = ٢ − ٢ = صفر

٣ = $\frac{٤ + ص}{٢}$ ∴ ٤ + ص = ٦ ∴ ص = ٦ − ٤ = ٢

∴ احداثيات النقطة ب = (٠ ، ٢)

مثال ٤ إذا كانت أ = (س، ١)، ب = (−٣ ، ص)، وكانت

جـ = (١، ٢) هي منتصف $\overline{أ ب}$ أوجد قيمتي س ، ص

الحل

(١ ، ٢) = ($\frac{س − ٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ص}{٢}$)

١ = $\frac{س − ٣}{٢}$ ∴ س − ٣ = ٢ ∴ س = ٢ + ٣ = ٥

٢ = $\frac{١ + ص}{٢}$ ∴ ١ + ص = ٤ ∴ ص = ٤ − ١ = ٣

مثال ٥ إذا كانت أ = (٢ ، ١)، ب = (٥ ، −١)، جـ = (٦، ٥)،

د = (٣، ٧) اثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل

منتصف أ جـ = ($\frac{٢ + ٦}{٢}$ ، $\frac{١ + ٥}{٢}$) = (٤، ٣)

منتصف ب د = ($\frac{٥ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-١ + ٧}{٢}$) = (٤، ٣)

منتصف أ جـ = منتصف ب د

∴ القطران ينصف كلا منهما الاخر

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

Mr.Morad

مثال ١ إذا كانت أ = (٣، −١)، ب = (−٥، ٢)، جـ = (−٢، ٤)، هي رؤوس متوازي الأضلاع أ ب جـ د أوجد إحداثيات الراس د

الحـــــل

نفرض أن د = (س ، ص)

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ، قطرا متوازي الاضلاع ينصف كلا منهما الاخر ∴ منتصف أ جـ = منتصف ب د

$$\left(\frac{٣-٢}{٢} ، \frac{-١+٤}{٢}\right) = \left(\frac{-٥+س}{٢} ، \frac{٢+ص}{٢}\right)$$

$$\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right) = \left(\frac{-٥+س}{٢} ، \frac{٢+ص}{٢}\right)$$

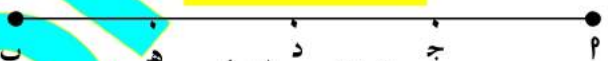
∴ $\frac{١}{٢} = \frac{-٥+س}{٢}$ ∴ −٥ + س = ١ ∴ س = ١ + ٥ = ٦

∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٢+ص}{٢}$ ∴ ٢ + ص = ٣ ∴ ص = ٣ − ٢ = ١

∴ احداثيات النقطة د = (٦ ، ١)

مثال ٢ إذا كانت أ = (−٣ ، ١)، ب = (٥ ، ٥)، أوجد إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{أب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية

الحـــــل



د منتصف أ ب = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{١+٥}{٢}\right) = (١ ، ٣)$

جـ منتصف أ د = $\left(\frac{-٣+١}{٢} ، \frac{١+٣}{٢}\right) = (-١ ، ٢)$

هـ منتصف د ب = $\left(\frac{١+٥}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢}\right) = (٣ ، ٤)$

مثال ٣ إذا كانت أ = (١ ، ٢)، ب = (−٥ ، ٤)، أوجد مركز الدائرة التي $\overline{أب}$ قطر فيها

الحـــــل

مركز الدائرة = منتصف القطر $\overline{أب}$

= $\left(\frac{١-٥}{٢} ، \frac{٢+٤}{٢}\right) = (-٢ ، ٣)$

حاول بنفسك

♣ اذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ أوجد قيمتي س ،ص فيما يلي :

(١) أ = (٢ ، ٦)، ب = (−٢ ، −٣)، جـ = (س ، ص)

(٢) أ = (س ، ٤)، ب = (−١ ، −٦)، جـ = (−٢ ، ص)

♣♣ اذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ = (٢، ٣) ،ب = (٤ ، −٧)، وكانت جـ منتصف $\overline{دهـ}$ حيث د = (−٣، ٥) فأوجد أحداثي نقطة هـ

مثال ٤ إذا كانت أ = (٤ ، −١)، ب = (−٢ ، ٧)، حيث $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م اوجد إحداثي النقطة م ثم اوجد محيط الدائرة ومساحتها.

الحـــــل

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{أب}$

∴ نقطة م = $\left(\frac{٤-٢}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢}\right) = (١ ، ٣)$

∵ نق = أ م = $\sqrt{(١-٤)^٢ + (٣+١)^٢} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

، مساحة الدائرة = π نق^٢ = π × ٢٥ = ٢٥ π وحدة مساحة

ملحوظة :يمكن ايجاد طول $\overline{أب}$ عن طريق قانون البعد بين نقطتين ويكون نق = $\frac{١}{٢}$ أ ب ويكمل الحل

مثال ٥ اثبت ان المثلث الذي رؤوسه أ = (−١، ٤)، ب = (٣، ١)، جـ = (−٥، ١)، متساوي الساقين واوجد مساحته

الحـــــل

∵ أ ب = $\sqrt{(٣+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

، أ جـ = $\sqrt{(-٥+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ أ ب = أ جـ ∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

∵ د منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{أ د} \perp \overline{ب جـ}$

د منتصف $\overline{ب جـ}$ = $\left(\frac{٣+٥}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right) = (٤ ، ١)$

∵ أ د = $\sqrt{(-١+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

، ب جـ = $\sqrt{(٣+٥)^٢ + (١-١)^٢} = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول

∴ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

= $\frac{١}{٢} \times ٨ \times ٣ = ١٢$ وحدة مربعة

Mr.Morad

تمارين على إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

[١] أكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢ ، ص٢) ، م منتصف $\overline{أب}$ فإن م = (..... ، .....)

(٢) منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٥، ٢) ،(−١، −٤) هي .....

(٣) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ١)،ب (١، −٥) هي .....

(٤) $\overline{أب}$ قطر في الدائرة حيث أ (−١ ، ٤)،ب = (٧، ٦) فيكون احداثيات نقطة مركز الدائرة .....

(٥) اذا كانت نقطة الاصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ،−٢) فإن إحداثي النقطة ب هي .....

(٦) إذا كانت أ =(٢ ، ص)،ب = (٥، −٢) ، جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ = (س، ٢) فإن س = ... ، ص = ...

(٧) إذا كانت ب ∈ $\overline{أجـ}$ حيث أ ب = ب جـ وكانت أ (٠ ، ٥)، جـ = (−٤، −١) فإن ب هي .....

(٨) إذا كانت أ ،ب ، جـ ، د اربع نقط على استقامة واحدة وكان أ ب = ب جـ = جـ د ، أ (١ ، ٣)، جـ = (٥، ١) فإن إحداثي النقطة ب = (.... ، ....) ، النقطة د = (.... ، ....)

(٩) $\overline{أد}$ متوسط في △ أ ب جـ ، م منتصف $\overline{أد}$ حيث أ (٠ ، ٨) ، ب = (٣، ٢)، جـ = (−٣، ٦) فإن إحداثي النقطة د = (.... ، ....) ، النقطة م = (.... ، ....)

---

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كانت أ = (١، ٣)، ب = (٣، −٥) فإن منتصف $\overline{أب}$ هي ....

[(٢، ١) ، (٢، ٤) ، (٢، −١) ، (−٢، ١)]

(٢) إذا كانت أ = (٧، −٤)،ب = (−١، ٠) فإن منتصف $\overline{أب}$ هي ...

[(−٣، ٢) ، (٣، ٢) ، (٣، −٢) ، (−٣، −٢)]

(٣) إذا كانت جـ= (٢، ١) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث ب (٣ ، ٠) فإن أ هي ..... [(١، ٢) ، (٢، ١) ، (٥، ١) ، (١، ٥)]

(٤) إذا كانت النقطة (٣، −١) هي منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (س، ٢) ،(١٠، ص) فإن س+ ص = ...

[١٢ ، −٨ ، ٢ ، −٢]

(٥) إذا كانت م (١، ٢) هي نقطة تقاطع قطري متوازي الاضلاع أ ب جـ د حيث أ (٢، ٥) فإن جـ هي .....

[(٠، ٢) ، (٠، −١) ، (−٤، ١) ، (−١، ٠)]

---

[٣] أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ في كلا مما يأتي:

(١) أ (١ ، ٠)،ب (٣، ٦) (٢) أ (−٣ ، ٥)،ب (١، ٣)

(٣) أ (٢ ، ٤)،ب (٦، ٠) (٤) أ (٧ ، −٦)،ب (−١، ٠)

---

[٤] إذا كانت جـ (٦، −٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، −٣)، أوجد إحداثي نقطة ب

---

[٥] إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س ، ص فيما يأتي:

(١) أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، جـ (٤ ، ٦)

(٢) أ (−٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، جـ (س ، −٣)

---

[٦] أوجد إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل إلى أربعة أجزاء متساوية حيث أ (١ ، −٦)،ب (٩، ٢)

---

[٧] أوجد مركز الدائرة التي $\overline{أب}$ قطراً فيها حيث أ (−١ ، ٤)،ب (٣، ٦)

---

[٨] اثبت أن النقط أ = (٣، −٢)، ب = (−٥، ٠)، جـ = (٠، −٧)، د = (٨، −٩) هي رؤوس متوازي أضلاع (باستخدام التنصيف)

---

[٩] أ ب جـ د متوازي الأضلاع فيه أ = (٣، ٤)، ب = (٢، −١)، جـ = (−٤، −٣)، أوجد إحداثيات الراس د

---

[١٠] إذا كانت أ (٥، ٣) ،ب (−١،ص) ، جـ (س،١)، د (١، ٣) رؤوس متوازي الاضلاع أ ب جـ د أوجد قيمتي س ، ص

---

[١١] أ ب جـ د مربع فيه أ(٣، ٤)، ب(٢، −١)، جـ (−٤، −٣)، د(س، ص) أوجد إحداثيات الراس د

---

[١٢] اثبت أن النقط أ(٦، ٠)، ب(٢، −٤)، جـ (−٤، ٢)، هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ثم اوجد إحداثي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلا .

---

[١٣] اثبت أن النقط أ(−٣، ٠)، ب(٣، ٤)، جـ (١، −٦)، هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ثم اوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{بجـ}$ التي تجعل الشكل أ ب جـ د مستطيلا .

Mr.Morad

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

ميل مستقيم بمعلومية نقطتين

ميل المستقيم المار بالنقطتين أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢ ، ص٢)

يتعين من العلاقة م = $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$

ملاحظات هامة :

(١) ميل المستقيم يكون عدد حقيقي موجب أو سالب أو صفر

(٢) ميل أي مستقيم أفقي (يوازي محور السينات) = صفر وهو المستقيم الذي معادلته (ص = ثابت)

(٣) ميل أي مستقيم رأسي (يوازي محور الصادات) = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف) وهو المستقيم الذي معادلته (س = ثابت)

(٤) إذا كان ميل المستقيم موجب يكون شكله (↗) أما إذا كان الميل سالب يكون شكله (↖) أما إذا كان ميله = ٠ يكون شكله (↔) وإذا كان ميله غير معرف يكون شكله (↕)

(٥) يمكن إيجاد ميل مستقيم بيانيا عن طريق القانون

م = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

(٦) يمكن استخدام فكرة الميل لإثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة تثبت أن الميل باستخدام النقطتين أ ، ب يساوي الميل باستخدام النقطتين ب ، جـ

مثال ١ إذا كانت أ = (٢ ، −٥)، ب = (−٣ ، ٤)، أوجد ميل المستقيم $\overline{\text{أ ب}}$

الحل

ميل المستقيم $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$ = $\frac{٤ + ٥}{-٣ - ٢}$ = $\frac{٩}{-٥}$

= $\frac{-٩}{٥}$

مثال ٢ أوجد ميل المستقيم المار بالنقطة أ = (−٣ ، ٤) ونقطة الاصل

الحل

ميل المستقيم = $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$ = $\frac{٤ - ٠}{٠ + ٣}$ = $\frac{-٤}{٣}$

مثال ٣ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٢) ، (٣ ، ك) يساوي ٢ فما قيمة ك

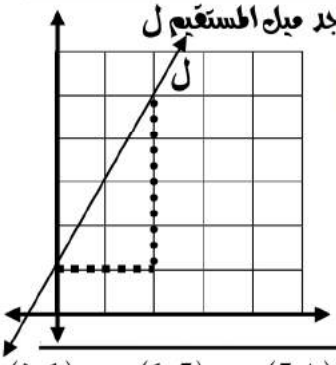
الحل

∵ م = ٢

∴ $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$ = ٢ ∴ $\frac{\text{ك − ٢}}{٣ + ١}$ = ٢

∴ $\frac{\text{ك − ٢}}{٤}$ = ٢ ∴ ك − ٢ = ٨ ∴ ك = ٨ + ٢ = ١٠

مثال ٤ من الشكل المقابل اوجد ميل المستقيم ل



الحل

الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

= $\frac{٤}{٢}$ = ٢

مثال ٥ اثبت أن النقط أ(١،٢) ، ب(٢،٤) ، جـ(٤،٨) تقع على أستقامة واحدة

الحل

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$ = $\frac{٤ - ٢}{٢ - ١}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{\text{ص٢ − ص١}}{\text{س٢ − س١}}$ = $\frac{٨ - ٤}{٤ - ٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ميل $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ النقط أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

مثال ٦ إذا كانت النقط أ(٤،١) ، ب(−٢،٧) ، جـ(٣، ص) تنتمي لمستقيم واحد أوجد ميل المستقيم ثم أوجد قيمة ص

الحل

∵ النقط أ ، ب ، جـ تنتمي لمستقيم واحد

∴ ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ميل $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{٧ - ١}{-٢ - ٤}$ = $\frac{\text{ص − ٧}}{٣ + ٢}$ ∴ $\frac{٦}{-٦}$ = $\frac{\text{ص − ٧}}{٥}$

∴ −١ = $\frac{\text{ص − ٧}}{٥}$ ∴ ص − ٧ = −٥ ∴ ص = −٥ + ٧ = ٢

حاول بنفسك

هل النقطة جـ (٨، ١) تنتمي للمستقيم المار بالنقطتين أ(−١،٣) ، ب(٢،٥)

إذا كانت النقط أ(٠،٨) ، ب(٥،٥) ، جـ (−٥، ص) تنتمي لمستقيم واحد أوجد ميل المستقيم ثم أوجد قيمة ص

Mr.Morad

ميل الخط المستقيم = هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أي ان الميل = ظا هـ

مثال ٧ اوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

(١) ٤٥° (٢) ١٣٥° (٣) ٢٤° ١٥َ ١٢ً

الحـــــل

(١) ميل المستقيم = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١

(٢) ميل المستقيم = ظا هـ = ظا ١٣٥° = −١

(٣) ميل المستقيم = ظا هـ = ظا ٢٤° ١٥َ ١٢ً = ٠,٤٥٠٥

مثال ٨ اوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان ميله ١,٤٨٦

الحـــــل

∵ الميل = ظا هـ ∴ ظا هـ = ١,٤٨٦

Shift | tan | 1.486 | 56° 3′ 41″

∴ ق∠ (هـ) = ٥٦° ٣َ ٤١ً

مثال ٩ اوجد القياس الموجب للزاوية هـ التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين

(١) (−٢، √٣) ، (١، ٤√٣)

(٢) (−٥، ٤) ، (−٩، ٨)

الحـــــل

(١) ∵ الميل = ظا هـ = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (٤√٣ − √٣) / (١ + ٢)

= ٣√٣ / ٣ = √٣

∵ الميل موجب ∴ الزاوية حادة

Shift | tan | √3 | 60° ′ ″

∴ ق∠ (هـ) = ٦٠°

(٢) ∵ الميل = ظا هـ = (ص٢ − ص١) / (س٢ − س١) = (٨ − ٤) / (−٩ + ٥) = ٤ / −٤ = −١

∵ الميل موجب ∴ الزاوية منفرجة

ملحوظة :في حالة الميل السالب نهمل الاشارة السالبة ونوجد قياس الزاوية الحادة اولا وهي ٤٥° ثم نوجد مكملتها

Shift | tan | 1 | 45° ′ ″

∴ ق∠ (هـ) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

حاول بنفسك

اوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

(١) ٣٠° (٢) ١٢٠° (٣) ٥٤° ٣٠َ ٦ً

اوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان ميله ٢,٦

اوجد القياس الموجب للزاوية هـ التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، −١) ، (٥ ، −٣)

تمارين على ميل الخط المستقيم

[١] اوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

(١) صفر° (٢) ٣٠° (٣) ٩٠°

(١) ٤٥° (٢) ٦٠° (٣) ٨٦° ٤٢َ

[٢] باستخدام الالة الحاسبة اوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله م مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في كل من الحالات الاتية :

(١) م = ٠,٣ (٢) م = ٠,٣٦٧٣ (٣) م = ١,٠٢٤٦ (١) م = ٤/٥

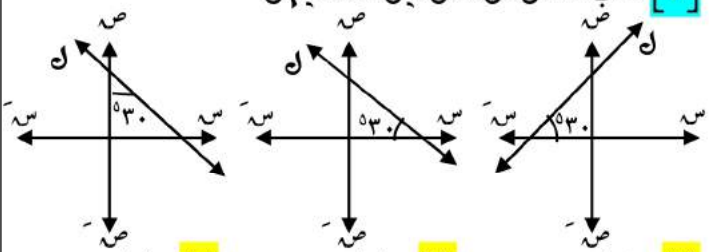
[٣] اوجد القياس الموجب للزاوية هـ التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٤، ٣) ، (٢، −٥)

[٤] اوجد القياس الموجب للزاوية هـ التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين (٠، ٠) ، (٢، −٢)

[٥] اثبت أن النقط أ(١، ١) ، ب(٢، ٣) ، جـ(٠، −١) تقع على أستقامة واحدة

[٦] إذا كانت النقط أ(٠، ١) ، ب(س، ٣) ، جـ(٢، ٥) تنتمي لمستقيم واحد أوجد ميل المستقيم ثم أوجد قيمة س

[٧] اكتب اسفل كل شكل ميل المستقيم ل



(١) ميل ل = (٢) ميل ل = (٣) ميل ل =

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

- اذا كان ل١ // ل٢ فإن م١ = م٢

أي انه اذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويين والعكس صحيح

- اذا كان م١ = م٢ فإن ل١ // ل٢

أي انه اذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين

مثال ١ اثبت ان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢،٣)،(−١،٦) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥°

الحل

ميل المستقيم الاول م١ = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٦ - ٣}{-١ - ٢}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = −١

ميل المستقيم الثاني م٢ = ظا ١٣٥° = −١

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال ٢ إذا كانت أ(−١،٢)،ب(٢،٣)، جـ(−٤،١)،د(س،٢) اربع نقاط في مستوى إحداثي متعامد وكان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ فأوجد قيمة س

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـد}$

∴ $\frac{٣ - ٢}{٢ + ١}$ = $\frac{٢ - ١}{س + ٤}$ ∴ $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{س + ٤}$

∴ س + ٤ = ٣ ∴ س + ٤ = ٣ − ٤ = −١

مثال ٣ في المستوى الإحداثي المتعامد اثبت أن النقط أ(−١،٦) ، ب(٣،−٤) ، جـ(٢،−٥,١) تقع على أستقامة واحدة

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-٤ - ٦}{٣ + ١}$ = $\frac{-١٠}{٤}$ = $\frac{-٥}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{-١,٥ + ٤}{٢ - ٣}$ = $\frac{٢,٥}{-١}$ = $\frac{-٥}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

حاول بنفسك

- اثبت ان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١،٥) ، (−٢،−١) يوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٠،−١) ، (٥،٩)

ملاحظة

لإثبات أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

نثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيين

مثال ٤ اثبت أن النقط أ=(٣،−٢)،ب=(−٥،٠)، جـ = (٠،−٧)، د = (٨،−٩) هي رؤوس متوازي أضلاع (باستخدام الميل)

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-١ - ٣}{٠ - ١}$ = $\frac{-٤}{-١}$ = ٤

، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{٥ + ١}{٣ - ٠}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

، ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = $\frac{٩ - ٥}{٤ - ٣}$ = $\frac{٤}{١}$ = ٤

، ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = $\frac{٩ - ٣}{٤ - ١}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{أد}$ ∴ $\overleftrightarrow{بجـ}$ // $\overleftrightarrow{أد}$

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

مثال ٥ إذا كانت المستقيم المار بالنقطتين أ(٥،−٤)،ب(−٢،ص) يوازي محور السينات فأوجد قيمة ص

الحل

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور السينات

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = صفر

∴ $\frac{ص + ٤}{-٢ - ٥}$ = صفر ∴ ص + ٤ = صفر ∴ ص = −٤

ملاحظة

لإثبات أن أ ب جـ د شبه منحرف نثبت توازي ضلعين وعدم توازي الضلعين الاخرين

ملاحظة

- اذا كانت معادلة المستقيم على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$
- اذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ص = م س + جـ فإن الميل = م

Mr.Morad

مثال ٦ اذا كانت أ(−١، ٦) ، ب(٣، −٤) فأثبت ان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي المستقيم ل الذي معادلته س− ٢ص+ ٦ = ٠

الحـــــل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٤-٢}{٣+١}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

لإيجاد ميل المستقيم ل فإننا نضع معادلته على الصورة

ص = م س+ جـ ∴ −٢ص = −٦ − س

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ∴ ميل المستقيم ل = $\frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل المستقيم ل ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // ل

ملحوظة: يمكن ايجاد ميل المستقيم ل بالقانون م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

بشرط ان س ، ص في طرف واحد

مثال ٧ اثبت أن النقط أ = (١، ٤)، ب = (−١، ٣)، جـ = (−١، ٠)، د = (٣، ٢) هي رؤوس شبه منحرف

الحـــــل

∵ ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٤-٣}{١+١}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overline{جـد}$ = $\frac{٢-٠}{٣+١}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overline{أد}$ = $\frac{٤-٢}{١-٣}$ = $\frac{٢}{-٢}$ = −١

∵ ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٣-٠}{-١+١}$ = $\frac{٣}{٠}$ = غير معرف

أي ان $\overline{بجـ}$ // محور الصادات

∵ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{جـد}$ ∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

∵ ميل $\overline{أد}$ ≠ ميل $\overline{بجـ}$ ∴ $\overline{أد}$ لا توازي $\overline{بجـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

حاول بنفسك

اذا كانت أ(١، ٢) ، ب(−٣، ٠) فأثبت ان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي المستقيم ل الذي معادلته س− ٢ص+ ٤ = ٠

اثبت ان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣، ٤) ، (٢، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥°

إذا كانت أ (٣، ٥) ، ب (٠، −١) ، جـ (٢، ١)، د (٥، ص) اربع نقاط في مستوى إحداثي متعامد وكان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ فأوجد قيمة ص

تمارين على العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

[١] اكمل ما يأتي :

(١) شرط توازي المستقيمين الذين ميلاهما م١ ، م٢ هو .....

(٢) ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = ...

(٣) ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات = ...

(٤) اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$

فإن ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = ...

(٥) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (−٢، ٣) = ...

(٦) أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث أ = (−١، ٤)، ب = (٠، ١)

فإن ميل $\overleftrightarrow{دجـ}$ = ...

(٧) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي محور السينات

حيث أ = (٨، ٣)، ب = (٢، ك) فإن ك= .....

(٨) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـد}$ يوازي محور الصادات

حيث جـ = (م ، ٤)، د = (−٥، ٧) فإن م = ...

(٩) ميل المستقيم ٤س− ص+ ٥ = ٠ يساوي .....

(١٠) ميل المستقيم ٢ ص= ٦ س+ ١ يساوي .....

(١١) ميل المستقيم س = ص يساوي .....

(١٢) اذا كان المستقيم ص= $\frac{٢}{٧}$ س+ ٣ يوازي المستقيم ص= م س+ ٤ فإن م = ...

(١٣) اذا كان المستقيم ص= $\frac{١}{م}$ س+ ٢ يوازي المستقيم ٥ص= س+ ٢٠ فإن م = ...

(١٤) اذا كان المستقيمان الذين ميلاهما $\frac{-٢}{٧}$ ، $\frac{٦}{س}$ متوازيان فإن س = ...

(١٥) اذا كان المستقيمان ٢س+ب ص+٣ = ٠ ، ٣ س− ص+٢ = ٠ متوازيان فإن ب = ...

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٠) ، (٠، ٤) هو .....

[$\frac{-٤}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-٥}{٤}$]

(٢) ميل المستقيم ص= $\frac{٣س}{٤}$ + ٥ هو .....

[٣ ، ٥ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$]

(٣) ميل المستقيم الذي معادلته س− ٤ص+ ١٠ = ٠ هو .....

[٤ ، −٤ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{٤}$]

Mr.Morad

(٤) إذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = ٠ متوازيين فإن ك = ...

[-٢ ، -١ ، ١ ، ٢]

(٥) النقطة (٤ ، جـ) تقع على المستقيم ٢س + ص - ٦ = ٠ عندما جـ = ...

[صفر ، -١ ، -٢ ، $\frac{١}{٣}$]

(٦) إذا كان أ (٢ ، ٤) ، ب (-٦ ، ٤) فإن $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي .....

[محور السينات ، محور الصادات ، المستقيم ص = ٤ س ، غير ذلك]

(٧) إذا كان أ (٢ ، ٣) ، ب (٢ ، -٣) فإن $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي .....

[محور السينات ، محور الصادات ، المستقيم ص = ٦ س ، غير ذلك]

(٨) إذا كان م١ ، م٢ ميلي مستقيمين متوازيين فإن .....

[م١ - م٢ = ٠ ، م١ + م٢ = ٠ ، م١ م٢ = -١ ، م١ - م٢ ≠ ٠]

(٩) إذا كان المستقيم ص = أ س + جـ يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، ٥) ، (٣ ، ٢) فإن أ = ...

[$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{٢}{٥}$]

(١٠) النقطة ..... تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (-٣ ، ٢) ، ب (٣ ، -٢)

[(٣ ، ٢) ، (-٣ ، -٢) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٣)]

(١١) إذا كان المستقيم ص = ك س + ١ يوازي المستقيم ٢ص - س = ٥ فإن ك = ...

[١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، -٢]

(١٢) إذا كان المستقيم ص = (أ - ١) س + ٥ يوازي المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ٨) فإن أ = ...

[٣ ، ٤ ، -٤ ، ٧]

[٣] إذا كانت المستقيم المار بالنقطتين أ (٤ ، ٢) ، ب (-٥ ، ص) يوازي محور السينات فأوجد قيمة ص

[٤] إذا كانت المستقيم المار بالنقطتين أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) يوازي محور الصادات فأوجد قيمة س

[٥] أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢ ، $\sqrt{٣}$) ، (١ ، ٠) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٦٠° $\frac{١}{٢}$

[٦] أثبت أن النقط أ = (-١ ، ١) ، ب = (٠ ، ٥) ، جـ = (٥ ، ٦) ، د = (٤ ، ٢) هي رؤوس متوازي أضلاع (باستخدام الميل)

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

- إذا كان ل١ ⊥ ل٢ فإن م١ × م٢ = -١
  أي أنه حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = -١ والعكس صحيح
- إذا كان م١ × م٢ = -١ فإن ل١ ⊥ ل٢
  أي أنه إذا كان حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = -١ كان المستقيمان متعامدين

مثال ١ أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-١ ، ٤) ، (٣ ، ٧) عمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٤ ، -٣)

الحل

∵ ميل ل١ = $\frac{٧ - ٤}{٣ + ١}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، ∵ ميل ل٢ = $\frac{-٣ - ١}{٤ - ١}$ = $\frac{-٤}{٣}$

∵ ميل ل١ × ميل ل٢ = $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{-٤}{٣}$ = -١ ∴ ل١ ⊥ ل٢

مثال ٢ إذا كان أ (-٢ ، ٥) ، ب (١ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٤) أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـب}$

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢ - ٥}{١ + ٢}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = -١

، ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{٤ - ٢}{٣ - ١}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = -١ × ١ = -١ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـب}$

مثال ٣ أثبت أن المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٧ ، -١) ، (-٥ ، -٣) عمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥°

الحل

∵ ميل ل١ = $\frac{-٣ + ١}{-٥ + ٧}$ = $\frac{-٢}{٢}$ = -١

، ∵ ميل ل٢ = ظا ٤٥° = ١

∵ ميل ل١ × ميل ل٢ = -١ × ١ = -١ ∴ ل١ ⊥ ل٢

ملاحظة

إذا كان ل١ ⊥ ل٢ وكان ميل ل١ هو م١ ، ميل ل٢ هو م٢ حيث م١ ∈ ح* ، م٢ ∈ ح* فإن

م١ = $\frac{١}{م٢}$ ، م٢ = $\frac{١}{م١}$

Mr.Morad

فمثلا

- اذا كان ميل المستقيم ل هو ٢ فإن ميل المستقيم العمودي عليه هو $\frac{-١}{٢}$
- اذا كان ميل المستقيم ل هو $\frac{-٢}{٣}$ فإن ميل المستقيم العمودي عليه هو $\frac{٣}{٢}$

حاول بنفسك

- اثبت ان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٧، −١) ، (٥، −٣) عمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ١٣٥°

ملاحظات هامة لحل مسائل الاشكال الرباعية

- لإثبات ان الشكل الرباعي شبه منحرف نثبت ان ضلعين متقابلين فيه متوازيان و الاخران غير متوازيان
- لإثبات ان الشكل الرباعي متوازي اضلاع نثبت احدى الخواص الاتية :

(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان.

(٢) كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول .

(٣) ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول .

(٤) القطران ينصف كل منهما الاخر .

- لإثبات ان الشكل الرباعي مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت اولا ان هذا الشكل متوازي اضلاع كما سبق ثم

♣ لإثبات ان متوازي الاضلاع هو مستطيل نثبت ان :

(١) ضلعان متجاوران فيه متعامدان .

(٢) القطران متساويان في الطول .

♣ لإثبات ان متوازي الاضلاع هو معين نثبت ان :

(١) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول.

(٢) القطران متعامدان .

♣ لإثبات ان متوازي الاضلاع هو مربع نثبت ان :

(١) ضلعان متجاوران فيه متعامدان و متساويان في الطول.

(٢) ضلعان متجاوران فيه متعامدان و القطران متعامدان.

(٣) القطران متساويان في الطول و متعامدان.

(٤) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول و القطران متساويان في الطول.

مثال ٤ اثبت أن النقط أ = (٢، −٢)، ب = (٨، ٤)، جـ = (٥، ٧)، د = (−١، ١) هي رؤوس مستطيل .

الحـــــل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٤+٢}{٨-٢} = \frac{٦}{٦} = ١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = $\frac{١-٧}{-١-٥} = \frac{-٦}{-٦} = ١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ ..... (١)

∵ ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = $\frac{-٢-١}{٢+١} = \frac{-٣}{٣} = -١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{٤-٧}{٨-٥} = \frac{-٣}{٣} = -١$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أد}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ ∴ $\overleftrightarrow{أد}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ ..... (٢)

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ١ × −١ = −١

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$ ..... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج ان الشكل أ ب جـ د مستطيل

مثال ٥ اذا كان أ = (−٢، ٥)، ب = (١، ٢)، جـ = (٣، ص) وكان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$ فما قيمة ص

الحـــــل

∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بجـ}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = −١

$\frac{٢-٥}{١+٢} \times \frac{ص-٢}{٣-٢} = -١$ ∴ $\frac{-٣}{٣} \times \frac{ص-٢}{١} = -١$

−١ (ص − ٢) = −١ ∴ ص − ٢ = ١

∴ ص = ١ + ٢ = ٣

مثال ٦ اذا كان أ = (١، ٧)، ب = (٢، ٤)، جـ = (٥، ص) ثلاث نقط تمثل رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب فما قيمة ص

الحـــــل

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = −١

$\frac{ص-٤}{٥-٢} \times \frac{٤-٧}{٢-١} = -١$ ∴ $\frac{ص-٤}{٣} \times -٣ = -١$

∴ ص − ٤ = ١ ∴ ص = ٥

Mr.Morad

مثال ٧ اذا كان المستقيم الذى معادلته ك س −ص = ٤ عمودي على المستقيم الذى معادلته س = ٧ − ٤ص فما قيمة ك

الحـــــل

المعادلتان فى الصورة العامة ك س−ص−٤ = ٠ ، س+٤ص−٧=٠

∵ ميل ل١ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-ك}{-١}$

∵ ميل ل٢ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-١}{٤}$

∵ ل١ ⊥ ل٢ ∴ ميل ل١ × ميل ل٢ = −١

$\frac{-ك}{-١} \times \frac{-١}{٤} = -١$ ∴ $\frac{ك}{-٤} = -١$ ∴ ك = ٤

مثال ٨ اذا كان المستقيم الذى معادلته ك س −٣ص = ٤ عمودي على المستقيم الذى معادلته ٣ س+٢ص + ٥= ٠ فما قيمة ك

الحـــــل

المعادلتان فى الصورة العامة

ك س−٣ص−٤=٠ ، ٣ س+٤ص+٢=٠

∵ ميل ل١ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-ك}{-٣}$

∵ ميل ل٢ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∵ ل١ ⊥ ل٢ ∴ ميل ل١ × ميل ل٢ = −١

$\frac{-ك}{-٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$ ∴ $\frac{-ك}{٢} = -١$ ∴ ك = ٢

حاول بنفسك

- اذا كان أ = (٦، ٤)، ب = (٥، ١)، جـ = (−١، ٣) فأثبت ان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بجـ}$
- اذا كان أ = (٤، ١)، ب = (٠، ٣) فأثبت ان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ عمودي على المستقيم الذى معادلته ٤ س−٢ص + ٣= ٠
- اذا كان أ = (٣، ٤)، ب = (−١، ٠)، جـ = (١، −٢) فأثبت ان △ أ ب جـ قائم الزاوية وحدد الزاوية القائمة
- اكمل ما يأتي :

(١) ميل المستقيم العمودي على المستقيم ٣ س+٤ص = ٧ هو .....

(٢) المستقيم ص = ٣ س+١ عمودي على المستقيم الذى ميله يساوى .....

(٣) المستقيم الذى ميله $\frac{-٣}{٤}$ يكون عموديا على المستقيم الذى ميله يساوى .....

تمارين على العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

[١] اكمل ما يأتي :

(١) شرط تعامد المستقيمين الذين ميلاهما م١ ، م٢ هو .....

(٢) ميل المستقيم العمودي لمحور السينات = ...

(٣) ميل المستقيم العمودي لمحور الصادات = ...

(٤) اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـد}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-١}{٤}$

فإن ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = ...

(٥) ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٣) ، (−٢، ٣) = ...

(٦) ميل المستقيم العمودي على المستقيم ص = $\frac{٢}{٥}$ س +٤ هو .....

(٧) △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فيه أ = (١، ٥)، ب = (٠، ١)

فإن ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ...

(٨) اذا كان أ ب جـ د مربعا قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بد}$

حيث أ = (٣ ، ٥)، جـ = (٥، −١) فإن ميل $\overleftrightarrow{بد}$ =.....

(٩) اذا كان المستقيمان ٢س+ب ص+٣= ٠ ، ٣ س− ص+٢=٠

متعامدان فإن ب =.....

(١٠) ميل المستقيم العمودي على المستقيم ٤س− ص+ ٥= ٠ يساوى .....

(١١) ميل المستقيم العمودي على المستقيم ٢ ص= ٦ س+ ١ يساوى .....

(١٢) ميل المستقيم العمودي على المستقيم س= ص يساوى.....

(١٣) اذا كان المستقيمان ٢س+ب ص+٣= ٠ ، ٣ س− ص+٢=٠

متعامدان فإن ب =.....

(١٤) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ ، ٠)، (٠، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ =.....

(١٥) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٠)، (٢، ك) والمستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن ك =.....

ملاحظة

الزاوية بين المستقيمين س = ثابت ، ص = ثابت تساوى ٩٠°

فمثلا الزاوية بين المستقيمين س= ٣، ص = ٤ تساوى ٩٠°

الزاوية بين المستقيمين س −١= ٠، ص+٣ = ٠ تساوى ٩٠°

Mr.Morad

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان م١ ، م٢ ميلي مستقيمين متعامدين فإن .....

[م١ = م٢ ، م١ = − م٢ ، م١ م٢ = − ١ ، م١ م٢ = ١]

(٢) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (−١، ٢)، (٠، ٥) عمودي على المستقيم ل فإن ميل المستقيم ل = ...

[٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$]

(٣) إذا كان م١ ، م٢ ميلي مستقيمين متعامدين ، م١ = ٠,٧٥ فإن م٢ = ... [$\frac{-٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{-٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$]

(٤) اذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متعامدين فإن ك = ... [٢ ، −٣ ، −٢ ، ٣]

(٥) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ك ، ٠)، (٠، ٤) والمستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن ك = ...

[٤ ، −٤ ، −١ ، ١]

(٦) ميل المستقيم العمودي على المستقيم ٢ س − ٣ ص = ٥ يساوي ..... [$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$]

(٧) اذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-١}{٢}$ ، ٦ ك متعامدين فإن ك = ... [٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$]

(٨) المستقيمان س + ٢ ص = ٥ ، ٢ ص = ٣ + ٤ س .....

[متوازيان ، متعامدان ، متقاطعان وغير متعامدان ، غير ذلك]

(٩) اذا كان المستقيمان ك س + ٢ ص = ٤، س − ٣ ص = ٥ متعامدان فإن ك = ... [٩ ، −٦ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{-١}{٦}$]

(١٠) المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ يكونان .....

[متوازيان ، متعامدان ، متقاطعان ، منطبقان]

---

[٣] اثبت ان المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٤)، (−١، −٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين(١ ، ١)، (−٣، ١) .

---

[٤] اثبت ان المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٤)، (−٣، −٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين(١ ، ٢)، (−٣، ٢) .

---

[٥] اثبت ان المستقيم المار بالنقطتين (−١، −٧)، (٢، −٤) عمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

---

[٦] اثبت ان المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٤ $\sqrt{٣}$)، (٣، ٣ $\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

---

[٧] اذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−٢، ٣) ، (٤، ٥) عمودي على المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−١، ٢)، (٣، ص) فما قيمة ص.

---

[٨] اذا كانت النقط أ = (٥، ٧)، ب = (س، ٣)، جـ = (١، ٨) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في أ فما قيمة س

---

[٩] اذا كان أ = (−١، −١)، ب = (٢، ٣)، جـ = (٦، ٠) فاثبت ان △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

---

[١٠] اذا كان أ = (٢، −٣)، ب = (٤، ٥)، جـ = (٧، ص) وكان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فما قيمة ص

---

[١١] اثبت أن النقط أ = (٥، ١)، ب = (١، ٥)، جـ = (−١، ٣)، د = (٣، −١) هي رؤوس مستطيل .

---

[١٢] اثبت أن النقط أ = (−١، −١)، ب = (٢، ٣)، جـ = (٦، ٠)، د = (٣، −٤) هي رؤوس مربع .

---

[١٣] اثبت أن النقط أ = (٤، ٣)، ب = (٧، ٠)، جـ = (١، −٢)، د = (١، ٢) هي رؤوس شبه منحرف .

---

[١٤] اثبت أن النقط أ = (−١، ١)، ب = (٠، ٥)، جـ = (٤، ٢)، د = (٥، ٦) هي رؤوس متوازي اضلاع .

Mr.Morad

معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات

المستقيم الذي ميله م ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، جـ)
(يقطع جـ من محور الصادات)
تتعين معادلته من العلاقة ص = م س + جـ

ملاحظات

- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الاصل و (٠ ، ٠) وميله م هي ص = م س
- معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ) هي ص = أ
- معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ب ، ٠) هي س = ب
- معادلة محور السينات هي ص = ٠
- معادلة محور الصادات هي س = ٠

مثال ١ اوجد معادلة المستقيم الذي ميله = −٤ ويقطع جزءا طوله ٥ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

الحل

∵ معادلة المستقيم هي ص = م س + جـ حيث م الميل ، جـ الجزء المقطوع من محور صـ ∵ م = −٤ ، جـ = ٥

∴ معادلة المستقيم هي ص = −٤ س + ٥

مثال ٢ اوجد معادلة المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويقطع جزءا طوله ٥ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

الحل

∵ ميل المستقيم = ظا ٤٥° = ١ ، جـ = ٥

∴ معادلة المستقيم هي ص = م س + جـ ∴ ص = س + ٥

مثال ٣ اذا كانت معادلة المستقيم ٣ص = ٦ س − ٩ فأوجد ميل المستقيم ونقط مقاطعة مع محور صـ ، محور سـ

الحل

∵ ٣ص = ٦ س − ٩ بالقسمة على ٣ ∴ ص = ٢ س − ٣

∴ ميل المستقيم = ٢

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور صـ نضع س = ٠

∴ ص = − ٣ ∴ نقطة التقاطع مع محور صـ هي (٠ ، − ٣)

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور سـ نضع ص = ٠

∴ ٠ = ٢ س − ٣ ∴ ٢ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ نقطة التقاطع مع محور صـ هي ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

مثال ٤ اذا كان المستقيم أ س + ٢ص − ٤ = ٠ يمر بالنقطة (٢ ، −٢) فأوجد قيمة أ ثم اوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات بهذا المستقيم

الحل

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، −٢) ∴ النقطة تحقق معادلته

∴ نعوض عن س = ٢ ، ص = −٢ في معادلة المستقيم

∴ أ × ٢ + ٢ × −٢ − ٤ = ٠ ∴ ٢أ − ٤ − ٤ = ٠

∴ ٢أ = ٨ ∴ أ = ٤

∴ معادلة المستقيم هي ٤ س + ٢ص − ٤ = ٠

لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات نضع المعادلة على الصورة

ص = م س + جـ ∴ ٢ص = −٤ س + ٤ ∴ ص = −٢س + ٢

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢ وحدة طول

حل اخر

لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات نضع المعادلة على الصورة

أ س + ب ص = جـ ∴ ٤ س + ٢ص − ٤ = ٠

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$ وحدة طول

= $\frac{٤}{٢}$ = ٢ وحدة طول

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}}$ وحدة طول

= $\frac{٤}{٤}$ = ١ وحدة طول

مثال ٥ اذا كان المستقيم ٢س = ٢ص + ٦ يقطع محوري الاحداثيات فأوجد طول الجزء المقطوع من كلا من محوري الاحداثيات

الحل

نجعل س ، ص في الطرف الايمن كما يلي ٢ س − ٣ص = ٦

∴ طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٦}{-٣}$ = −٢ وحدة طول

∴ المستقيم يقطع من محور الصادات جزءا سالبا طوله ٢ وحدة طول

∴ طول الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ وحدة طول

∴ المستقيم يقطع من محور السينات جزءا موجبا طوله ٣ وحدة طول

مثال ٦ اوجد معادلة المستقيم ل الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله ٣ وحدة طول ويوازى المستقيم المار بالنقطتين

أ = (١، ٣)، ب = (٤، ٥)

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٥ - ٣}{٤ - ١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ل // $\overleftrightarrow{أب}$

∴ ميل ل = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى ص = م س + جـ

∴ معادلة المستقيم ل هى ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٣ بالضرب × ٣

٣ ص = ٢ س + ٩ ∴ ٣ ص − ٢ س − ٩ = ٠

مثال ٧ اوجد معادلة المستقيم ل المار بالنقطة (١، ٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين أ = (٠، ١)، ب = (٢، ٥)

الحل

∵ ل // $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ ميل ل = ميل $\overleftrightarrow{أب}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٥ - ١}{٢ - ٠}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٢ س + جـ

∵ المستقيم ل يمر بالنقطة (١، ٤) ∴ النقطة تحقق معادلته

∴ ٤ = ٢ × ١ + جـ ∴ ٤ − ٢ = جـ ∴ جـ = ٢

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٢ س + ٢

مثال ٨ اوجد معادلة المستقيم ل المار بالنقطة (٢، −١) وعمودي على المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ ص = ٥

الحل

∵ ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{٣}{٢}$ س + جـ

∵ المستقيم ل يمر بالنقطة (٢، −١) ∴ النقطة تحقق معادلته

∴ −١ = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ + جـ ∴ −١ = ٣ + جـ ∴ جـ = −٤

∴ معادلة المستقيم المطلوب ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٤ بالضرب × ٢

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى ٢ ص = ٣ س − ٨

حاول بنفسك

اوجد معادلة المستقيم ل الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله ٥ وحدة طول ويوازى المستقيم المار بالنقطتين

أ = (−٢، ٣)، ب = (−١، −٦)

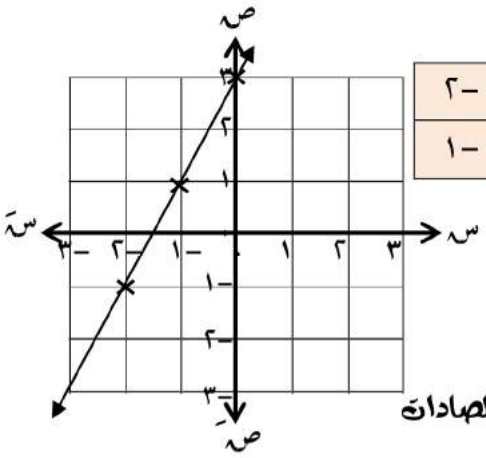
مثال ٩ مثل بيانيا العلاقة ٢س − ص + ٣ = ٠ ثم اوجد من الرسم ميل المستقيم الممثل لهذه العلاقة وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات .

الحل

∵ ٢س − ص + ٣ = ٠ ∴ −ص = −٢س − ٣

∴ ص = ٢س + ٣

س	٠	−١	−٢
ص	٣	١	−١



من الرسم نجد ان

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٣ - ١}{٠ + ١}$ = ٢

المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ٣)

∴ الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣

∴ معادلة المستقيم هى ص = ٢ س + ٣

حاول بنفسك

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) ميل المستقيم الذى معادلته ٢ص = ٦ س + ١ هو .....

[٣ ، −٣ ، −٦ ، ٦]

(٢) اذا كان المستقيمان ٣ ص + س − ٧ = ٠، ص = ك س + ٥ متعامدين فإن ك = ... [٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$]

(٣) المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٢ ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة قياسها ..... مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°]

(٤) المستقيم الذى معادلته ٢ ص = ٣ س + ١٢ يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله ..... وحدة طولية

[٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢]

اوجد معادلة المستقيم ل المار بالنقطة (٣، ٤) وعمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ = (٢، −٣)، ب = (٥، ٤)

Mr.Morad

مثال (١٠) اذا كان △ أ ب جـ حيث أ = (١، ٢)، ب = (−٢، ٣)، جـ = (−٤، −٣)، $\overline{أ د}$ متوسط فيه فأوجد معادلة المستقيم المار بالمتوسط $\overline{أ د}$.

الحـــــل

∵ $\overline{أ د}$ متوسط في △ أ ب جـ ∴ د منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ د = ($\frac{-٢+٤}{٢}$ ، $\frac{٣-٣}{٢}$) = (−٣، ٠)

∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ، د = $\frac{٢-٠}{١+٣}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هي ص = $\frac{١}{٢}$ س + جـ

∵ المستقيم لـ يمر بالنقطة (١، ٢) ∴ النقطة تحقق معادلته

∴ ٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ + جـ ∴ ٢ − $\frac{١}{٢}$ = جـ ∴ جـ = $\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هي ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

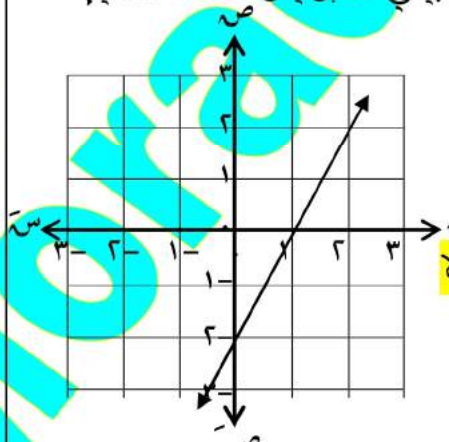
مثال (١١) الشكل البياني المقابل يمثل معادلة المستقيم

(١) ص = ٢س − ٢

(٢) ص = ٢ − ٢ س

(٣) ص = ٢س + ٢

(٤) ص = −٢س − ٢



الحـــــل

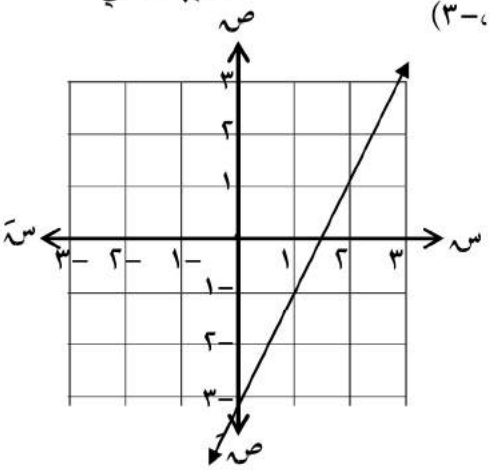
حيث الميل موجب لان الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات موجبة والجزء المقطوع من محور الصادات يساوي −٢ ∴ معادلة المستقيم المطلوبة هي ص = ٢س − ٢

مثال (١٢) باستخدام الميل والجزء المقطوع من محور الصادات مثل بيانيا المستقيم الذي معادلته ص = ٢س − ٣

الحـــــل

∴ ميل المستقيم = معامل س = ٢ = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

ويمر بالنقطة (٠، −٣)



تمارين على معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات

[١] اكمل ما يأتي :

(١) ميل المستقيم ص = ٢س − ٣ هو .....

(٢) ميل المستقيم ٤س + ٥ = ص هو .....

(٣) ميل المستقيم ٢ص = ٦س − ٥ هو .....

(٤) المستقيم ص = ٣ يوازي محور .....

(٥) نقطة تقاطع المستقيم ٢ص+٤ = ٠ مع محور الصادات هي.....

(٦) ميل المستقيم ٣ س − ٤ص − ١٥ = ٠ هو .....

وميل العمودي عليه هو .....

(٧) المستقيم الذي معادلته ٢ س + ٣ص − ٦ = ٠ يقطع محور الصادات في النقطة .....

(٨) المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع محور الصادات في النقطة (٠، ٣) معادلته هي .....

(٩) معادله محور السينات هي ..... بينما معادلته محور الصادات هي .....

(١٠) معادله المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويوازي محور السينات هي .....

(١١) معادله المستقيم الذي يمر بالنقطة (−٣، ٢) ويوازي محور الصادات هي .....

(١٢) معادله المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، −٥) وميله صفر هي .....

(١٣) معادله المستقيم الذي يوازي المستقيم ص = ٢س − ٣ ويمر بنقطة الاصل هي .....

(١٤) اذا كان المستقيمان ٢ س + ب ص + ٦ = ٠ ، ٢ س + ب ص + ٦ = ٠ متوازيين فإن ب = ...

(١٥) اذا كان المستقيم الذي معادلته ٢ س + ك ص = ٣ عموديا على المستقيم ص + ٣ س + ٢ = ٠ فإن ك = ...

(١٦) في الشكل المقابل :

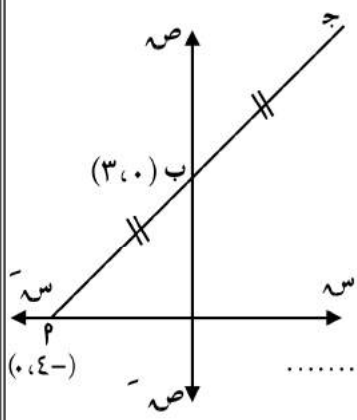
ب ∈ $\overline{أ جـ}$ ، أ = (−٤، ٠)،

ب = (٠، ٣) ، أ ب = ب جـ

- نقطة جـ = (..... ، .....)
- في △ و أ ب يكون

ظا أ = ...

- معادله المستقيم $\overleftrightarrow{أ جـ}$ هي .....



Mr.Morad

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) ميل المستقيم الذى معادلته ٣ص = ٢س − ٥ هو .....

[٢ ، ٣ ، −٥ ، $\frac{٣}{٢}$]

(٢) المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٢ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .....

[٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°]

(٣) المستقيم الذى معادلته ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله .....

[−٦ ، −٢ ، ٢ ، $\frac{٢}{٣}$]

(٤) المستقيم الذى معادلته ٢س + ٥ص − ١٠ = ٠ يقطع من محور السينات جزءا موجبا طوله .....

[$\frac{٢}{٥}$ ، ٢ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٢]

(٥) معادله المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله ٤ وحدات ويوازى المستقيم ص = ٣ س + ٥ هى .....

- ص = ٣ س + ٤
- ص = ٤ س + ٣
- ص = ٣ س − ٤
- ص = −٣ س + ٤

(٦) المستقيمان ص = ٣ س − ٥ ، ٢ص = ٦ س + ٥ هما .....

[متوازيان ، متعامدان ، متقاطعان وغير متعامدان ، متطابقان]

(٧) اذا كان المستقيمان ٣ س − ٤ ص − ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س − ٨ = ٠ متعامدين فإن ك = ...

[−٤ ، −٣ ، ٣ ، ٤]

(٨) اذا كان المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيين فإن ك = ...

[٢ ، −٢ ، ١ ، −١]

(٩) المستقيمان ص = أ س + ب ، ص = جـ س + د متعامدان فإن ..... × ..... = −١

[أ × د ، ب × جـ ، أ × جـ ، ب × د]

(١٠) المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٤) ، (١ ، ٥) عمودى على المستقيم

- ٤ س = ٣ − ٤ ص
- ٥ص + س = ٤
- ص = ٤ س
- س + ٢ ص = ٤

(١١) المستقيم الذى معادلته ص = (أ − ١) س + ٥ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ٨) فإن أ = ...

(١٢) مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣ س − ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوى .....

[٦ ، ٧ ، ١٢ ، −٦]

[٣] اوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم

(١) ٣ س − ٢ص + ٥ = ٠ (٢) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{٢} = ١$

[٤] اوجد معادلة المستقيم اذا علم ان :

(١) ميله ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات .

(٢) ميله $٢\frac{١}{٢}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدتان.

(٣) ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٠ ، −٣) .

(٤) ميله −٢ ويمر بنقطة الاصل .

[٥] اوجد معادلة المستقيم :

(١) المار بالنقطة ويصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥° .

(٢) الذى يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءا طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم الذى معادلته ٢ س − ٣ص = ٦

(٣) المار بالنقطة (٢ ، −١) وميله يساوى ٢ .

(٤) المار بالنقطة (−٢ ، ٣) عموديا على المستقيم الذى معادلته ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٥

(٥) المار بالنقطة (٢ ، −٥) ويوازى المستقيم الذى معادلته س + ٢ص − ٧ = ٠

(٦) المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويوازى المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، ٦) ، (−١ ، ٢)

(٧) المار بالنقطة (١ ، ٢) عموديا على المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢ ، −٣) ، (٥ ، −٤)

(٨) المار بالنقطة (٢ ، −٢) عموديا على المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥°

(٩) المار بالنقطتين (٢ ، −١) ، (١ ، ١) .

(١٠) المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (−٢ ، −١) ثم اثبت انه يمر بنقطة الاصل .

(١١) العمودى على $\overline{أب}$ من منتصفها حيث أ = (−٣ ، ٦) ، ب = (٢ ، ١)

(١٢) الذى يمر بمنتصف القطعة $\overline{أب}$ حيث أ = (−٣ ، ٦) ، ب = (٢ ، ١) ويوازى المستقيم الذى معادلته ٢ص = ٤ س − ٥

[٦] اوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة $\overline{س ص}$ حيث س = (٣ ، −٢) ، ص = (−٥ ، ٦)

[٧] △ أ ب جـ فيه أ = (٠ ، ٦) ، ب = (٥ ، −١) ، جـ = (−٢ ، ١) اوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديا على $\overline{ب جـ}$.

Mr.Morad

[٧] اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الاحداثيات السيني والصادي جزئيين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب .

[٨] △ أ ب جـ فيه أ = (١، ٢) ، ب = (٥، −٢) ، جـ = (٣، ٤) ، د منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overline{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ في هـ اوجد :

(١) طول $\overline{دهـ}$ (٢) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{دهـ}$

[٩] أ ب جـ د مربع فيه أ = (٥، ٤) ، جـ = (−١، ٦)

فأوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بد}$

[١٠] أ ب جـ د معين فيه أ = (١، ٣) ، جـ = (٦، ٠)

فأوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{بد}$

[١١] ارسم الخط المستقيم في كل من الحالات الآتية :

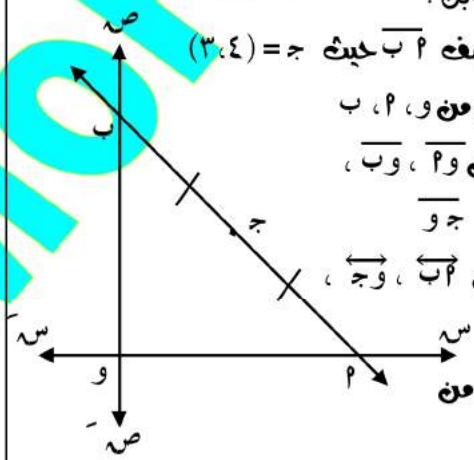
(١) ميله ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات .

(٢) ميله $\frac{-١}{٢}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدتان.

(٣) يقطع من الجزئين الموجبين للمحورين السيني والصادي جزئيين طولاهما ٢ ، ٣ من الوحدات على الترتيب .

[١٢] في الشكل المقابل :

النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ = (٤، ٣)



(١) اوجد إحداثي كل من و ، أ ، ب

(٢) اوجد طول كل من $\overline{وأ}$ ، $\overline{وب}$ ، $\overline{جـأ}$ ، $\overline{جـب}$ ، $\overline{جـو}$

(٣) اوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{وجـ}$ ، $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$

(٤) اوجد معادلة كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـو}$

Mr.Morad

عزيزي المعلم عزيزتي المعلمة

للأمانة العلمية والاخلاقية والدينية

يحذر تماما أي تعديل او تغيير بيانات المذكرة

اما اذا اردت الحصول على هذه المذكرة بجميع بياناتك الشخصية الخاصة بك من بدج خاص باسمك ورقم تليفونك واي بيانات انت تطلبها فعليك تحمل تكلفة المذكرة كتابة وطباعة وتعديل وهى

٢٥٠ ج

ومراسلتي على

٠١٢٢١٣٥٣١٣٩