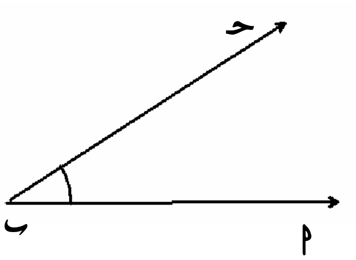
الدرس الأول

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

الزاويـة :



هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية ، يسمى الشعاعان ضلعا الزاوية وتسمى نقطة البداية رأس الزاوية

ففي الشكل المقابل:

يسمى $\overrightarrow{بٮ}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ "ضلعا الزاوية (ٮ ب حـ)" ، تسمى النقطة ب رأس الزاوية.

قيـاس الزاويـة : **هو العدد الدال على مقدار الإنفراج الحادث بين ضلعي الزاوية .**

القيـاس الستيني للزاويـة :

وفيه تقسم الدائرة إلى ٣٦٠ قطاعاً دائرياً كل منها قياس زاويته المركزية يساوي درجة واحدة (١ °)، وكل درجة تقسم إلى ٦٠ جزءً كل منها يسمى دقيقة (١ ′) ، وكل دقيقة تقسم إلى ٦٠ جزءً كل منها يسمى ثانية (١ ″).

أي أن وحدات القياس الستيني هى : الدرجة – الدقيقة – الثانية.

وعلى ذلك فإن : ١ درجة = ٦٠ دقيقة ،،، ١ دقيقة = ٦٠ ثانية

فمثلا: الزاوية التي قياسها : ١٠٠ درجة و ٣٠ دقيقة و ٢٥ ثانية تكتب على النحو التالي: ٢٥ ″ ٣٠ ′ ١٠٠ ° والتي تكتب على الآلة الحاسبة كالتالي :

إبـدأ	➤	❶	⓿	⓿	°′″	❸	⓿	°′″	❷	❺	°′″	=

مثـــال

اكتب كل من الزوايا الآتية بالدرجات :

① ٣٠ ″ ٢٢ ′ ٤٥ ° ② ٢٠ ′ ١١٠ °

الحــــل

①

إبـدأ	➤	❹	❺	°′″	❷	❷	°′″	❸	⓿	°′″	=	°′″

نجد أن الناتج هو : ٤٥,٣٧٥ °

٢	ووو	=	ووو	0	2	ووو	0	0	1	ابدأ

نجد أن الناتج هو : ١٠٠,٣٣٣°

مثال

اكتب كل من الزوايا الآتية بالدرجات و الدقائق والثواني:

① ٩٤,٢٥°   ② ٣٩,٨٧٥°

الحل

١	ووو	=	5	2	,	4	9	ابدأ

نجد أن الناتج هو : ١٥َ ٩٤°

٢	ووو	=	5	7	8	,	9	3	ابدأ

نجد أن الناتج هو : ٣٠ً ٥٢َ ٣٩°

مثال

إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥ فأوجد القياس الستيني لكل منهما .

الحل

نفرض أن قياسي الزاويتين : ٣س ، ٥س

∵ **الزاويتان متكاملتان**

∴ ٣س + ٥س = ١٨٠°

∴ ٨س = ١٨٠°

∴ $س = \frac{١٨٠}{٨} = (\frac{٤٥}{٢})°$

∴ **قياس الزاوية الأولى** $= ٣ \times \frac{٤٥}{٢} = $ ٣٠َ ٦٧°

∴ **قياس الزاوية الثانية** $= ٥ \times \frac{٤٥}{٢} = $ ٣٠َ ١١٢°

> **الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما = ٩٠°**
> **الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما = ١٨٠°**

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

النسبة المثلثية للزاوية الحادة هي:

النسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية .

ويوجد للزاوية الحادة ثلاث نسب مثلثية أساسية هي :

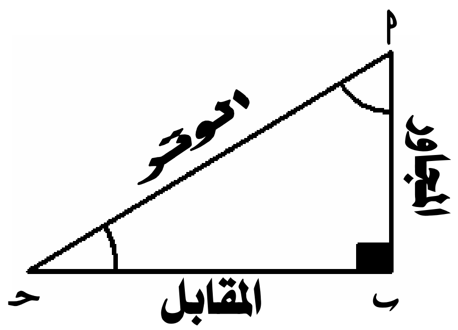
① **جيب الزاوية : ويرمز لها بالرمز : (جا) وتساوي** $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول وتر المثلث}}$

② **جيب تمام الزاوية : ويرمز لها بالرمز : (جتا) وتساوي** $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول وتر المثلث}}$

③ **ظل الزاوية : ويرمز لها بالرمز : (ظا) وتساوي** $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

أي أنه : في المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في (ب) يكون:

بالنسبة للزاوية الحادة (أ):

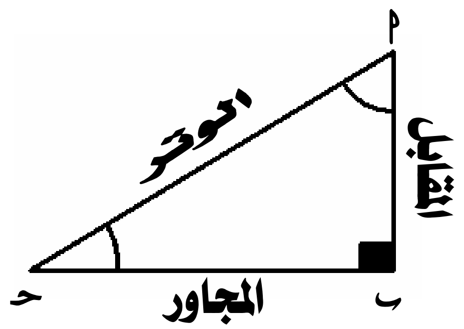


① جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

② جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

③ ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$

بالنسبة للزاوية الحادة (حـ):



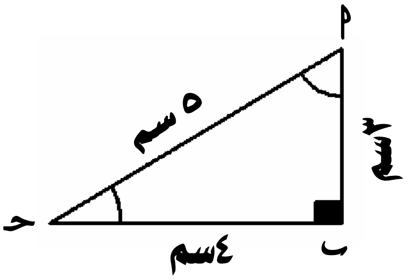
① جا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

② جتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

③ ظا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

مثال

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في (ب) فإذا كان :
أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٥ سم أوجد النسب المثلثية الأساسية لكل من الزاويتين (أ)، (حـ).



الحل

في المثلث : أ ب حـ

∵ ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ $(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ حـ})^2 - (\text{أ ب})^2$

∴ $(\text{ب حـ})^2 = ٢٥ - ٩ = ١٦$

∴ ب حـ = ٤ سم

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٣}$

جا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$

جتا حـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

ظا حـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$

ملاحظات هامة من المثال السابق:

① ∵ ق (∠أ) + ق (∠ب) + ق (∠ح) = ١٨٠°

∵ ق (∠ب) = ٩٠°

∴ ق (∠أ) + ق (∠ح) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

أي أن الزاويتان (أ)، (ح) متتامتان.

② جا أ = جتا ح = $\frac{٤}{٥}$ ،،، جتا أ = جا ح = $\frac{٣}{٥}$

أي أن : جيب أي زاوية = جيب تمام الزاوية المتممه لها .

③ ظا أ × ظا ح = ١

أي أن : ظل أي زاوية = المعكوس الضربي لظل الزاوية المتممه لها .

④ $\frac{\text{جاأ}}{\text{جتاأ}} = \frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣} =$ ظا أ ،،، $\frac{\text{جاح}}{\text{جتاح}} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤} =$ ظا ح

أي أن : ظل أي زاوية = $\frac{\text{جيب الزاوية}}{\text{جيب تمام الزاوية}}$

مثـــال

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في (ب) فإذا كان : ٢أ ب = √٣ أ ح .

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ح

الحـــل

∵ ٢أ ب = √٣ أ ح

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أح}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ أ ب = √٣ ل ،، أ ح = ٢ل

في المثلث أ ب ح القائم الزاوية في (ب)

∵ $(\text{ب ح})^2 = (\text{أ ح})^2 - (\text{أ ب})^2$

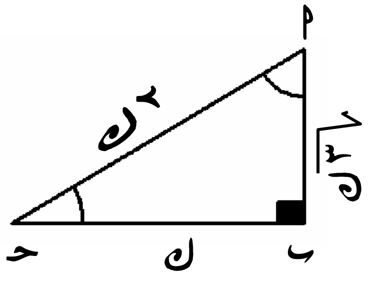
∴ $(\text{ب ح})^2 = ٤\text{ل}^2 - ٣\text{ل}^2 = \text{ل}^2$

∴ ب ح = ل

∴ جا أ = $\frac{\text{ل}}{\text{٢ل}} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا أ = $\frac{\sqrt{٣}\,\text{ل}}{\text{٢ل}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ظا أ = $\frac{\text{ل}}{\sqrt{٣}\,\text{ل}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$



مثـــال

أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه : $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ء = ٤ سم ، أ ب = ٥ سم

، ب جـ = ١٢ سم أثبت أن : $\dfrac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^{2}\text{ جـ} + \text{جتا}^{2}\text{ ب}} = \text{٣}$

الحـــــل

العــمل: نرسم $\overleftarrow{\text{أس}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ **يقطعه في** س

،، **نرسم** $\overleftarrow{\text{ءص}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ **يقطعه في** ص

من هندسة الشكل نـجد أن :

الشكل أ س ص ء **مستطيل**

، **المثلثان** أ ب س ، ء جـ ص **متطابقان**

∴ أ ء = س ص = ٤ سم

، ب س = ص جـ = (١٢ - ٤) ÷ ٢ = ٤ سم

في المثلث أ ب س **ومن نظرية فيثاغورس**

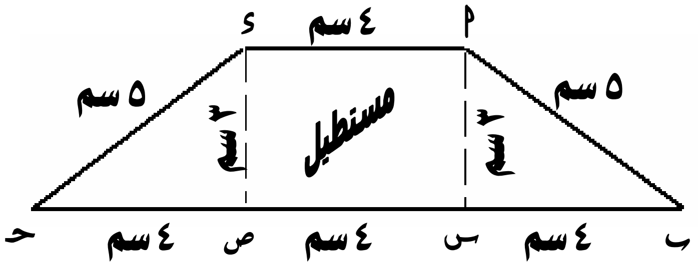
∴ $(\text{أس})^2 = (\text{أب})^2 - (\text{ب س})^2$

∴ $(\text{أس})^2 = (٥)^2 - (٤)^2$

∴ $(\text{أس})^2 = ٢٥ - ١٦ = ٩$

∴ أ س = ء ص = ٣ سم

∴ ظا ب = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{أ س}}{\text{ب س}} = \dfrac{٣}{٤}$



∴ جتا جـ = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ص جـ}}{\text{ء جـ}} = \dfrac{٤}{٥}$

،، جا جـ = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء جـ}} = \dfrac{٣}{٥}$

،، جتا ب = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ب س}}{\text{أ ب}} = \dfrac{٤}{٥}$

∴ **المقدار** = $\dfrac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}} = ٣$

مثـــال

أ ب جـ ء **شبه منحرف فيه** : $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب) = ٩٠° ، أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم

، ب جـ = ١٠ سم ، **أثبت أن** : جتا (∠ ء جـ ب) - ظا (∠ أ جـ ب) = $\dfrac{١}{٢}$

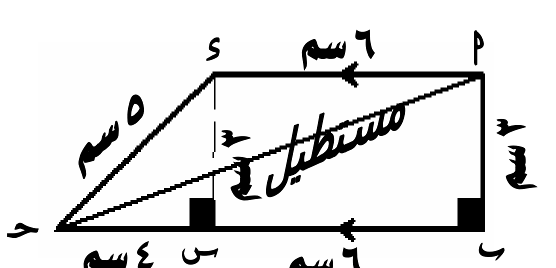
الحـــــل

العــمل: نرسم $\overleftarrow{\text{ءس}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ **يقطعه في** س

من هندسة الشكل نـجد أن :

الشكل أ ب س ء **مستطيل**

∴ أ ب = ء س = ٣ سم



، أ ء = ب س = ٦ سم

∴ س حـ = ١٠ - ٦ = ٤ سم

في المثلث ء س حـ **ومن نظرية فيثاغورس**

∵ $(\text{ء حـ})^{٢} = (\text{ء س})^{٢} + (\text{س حـ})^{٢}$

∴ $(\text{ء حـ})^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥$

∴ ء حـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ **سم**

∴ جتا (∠ ء حـ ب) = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{٤}{٥}$

، ظا (∠ أ حـ ب) = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{٣}{١٠}$

∴ جتا (∠ ء حـ ب) - ظا (∠ أ حـ ب)

$= \dfrac{٤}{٥} - \dfrac{٣}{١٠} = \dfrac{١}{٢}$

مثـــال

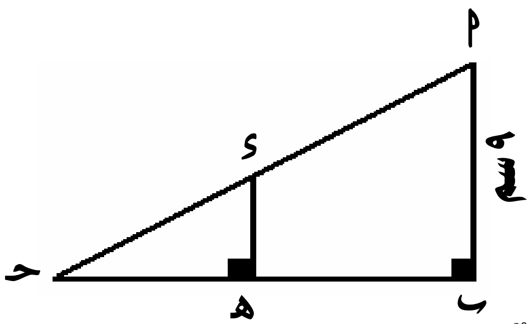
في الشكل المقابل :

أ ب حـ **مثلث قائم الزاوية في** ب **فيه :**

أ ب = ٩ **سم**، ء ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، ٤ ء هـ = ٣ هـ حـ

احسب : مساحة المثلث أ ب حـ .



الحـــــل

∵ ٤ ء هـ = ٣ هـ حـ

∴ $\dfrac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \dfrac{٣}{٤}$

في المثلث : ء هـ حـ **القائم الزاوية في (هـ).**

∵ ظا حـ = $\dfrac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}}$

∴ ظا حـ = $\dfrac{٣}{٤}$

في المثلث : أ ب حـ **القائم الزاوية في (ب).**

∵ ظا حـ = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

∴ $\dfrac{٣}{٤} = \dfrac{٩}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ = $\dfrac{٤ \times ٩}{٣}$ = ١٢ **سم**

∵ **مساحة المثلث**

= $\dfrac{١}{٢}$ **طول القاعدة × الإرتفاع المناظر لها.**

∴ **مساحة المثلث** = $\dfrac{١}{٢}$ ب حـ × أ ب

∴ **مساحة المثلث** = $\dfrac{١}{٢} \times ١٢ \times ٩ = ٥٤$ **سم**^{٢}

تمارين على الدرس الأول

❶ أكمل العبارات الآتية لتصبح صحيحة

① جتا ١٨° = جا ....°

② **إذا كانت** أ **زاوية حادة وكان** : جا أ = جتا ٥٠° **فإن:** أ = ...°

③ **إذا كان** ق (∠أ) + ق (∠ب) = ٩٠° **وكان** : ظاأ = ٠,٥ **فإن:** ظا ب =.........

④ **إذا كانت** س ، ص **زاويتان متتامتان و كان** : جتاس = $\frac{٢}{٧}$ **فإن** : جاص = ...

⑤ **إذا كان** جا س = جتا س **فإن** : ق (∠س) = ...°

⑥ $\frac{\text{٥ جتا ٣٣°}}{\text{٩ جا ٥٧°}}$ = ...

⑦ **لأي زاوية** أ **يكون** ظا أ = $\frac{\text{............}}{\text{............}}$

⑧ ظا ٦٢° = $\frac{\text{جا..........°}}{\text{جتا..........°}}$

⑨ ظا ٧٠° = $\frac{\text{جا..........°}}{\text{جا..........°}}$

⑩ **إذا كان** جتاس = $\frac{٣}{٥}$ **فإن** : جا (.......) = $\frac{٣}{٥}$

❷ اكتب كل من الزوايا الآتية بالدرجات :

① ١٥° ٣٣′ ٣٦″ ② ٤٥° ٤٥′ ٤٥″ ③ ١٢٠° ٢٢′ ٣٠″

❸ اكتب كل من الزوايا الآتية بالدرجات و الدقائق والثواني:

① ٤٥,٢٨° ② ٧٣,١٥° ③ ١٠٠,٢٥٥°

❹ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٧ : ٩ فأوجد القياس الستيني لكل منهما .

❺ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٥ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل منهما .

❻ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث ٥ : ٧ : ١٢ فأوجد القياس الستيني لكل منهما .

❼ أ ب حـ **مثلث قائم الزاوية في (ب) فإذا كان** : أ ب = ٩ **سم** ، ب حـ = ١٢ **سم**

أوجد النسب المثلثية الأساسية لكل من الزاويتين (أ)،(حـ).

❽ أ ب حـ **مثلث قائم الزاوية في (ب) فإذا كان** : أ حـ = $\sqrt{5}$ أ ب .

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ

❾ س ص ع **مثلث قائم الزاوية في (ص) فإذا كان** : س ص = ص ع

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية س

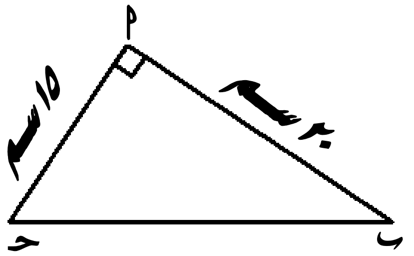
❿ س ص ع **مثلث قائم الزاوية في (ع)** ، س ع = ٧ **سم** ، س ص = ٢٥ **سم أوجد قيمة كل من** :

① ظا س × ظا ص ② جا^{٢} س + جا^{٢} ص

⓫ أ ب حـ **مثلث قائم الزاوية في (ب)** ، جا حـ = ٠,٨

أوجد قيمة : جا أ جتا حـ + جتا أ جا حـ .

⓬ **في الشكل المقابل** :



أ ب حـ **مثلث فيه** : ق (∠ أ) = ٩٠°

، أ حـ = ١٥ **سم** ، أ ب = ٢٠ **سم**

أثبت أن : جتا حـ جتا ب - جا حـ جا ب = **صفر**

⓭ أ ب حـ **مثلث ، رسم** $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ **يقطعها في** ء ، **فإذا كان** : أ ب = ١٣ **سم**

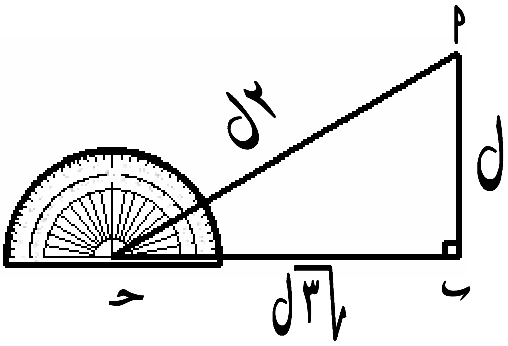
، أ حـ = ١٥ **سم** ، ء حـ = ٩ **سم .أوجد قيمة كل من** :

① جا ب ② جتا حـ ③ جتا (∠ ب أ ء) ④ ظا (∠ ء أ حـ)

الدرس الثاني

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا الخاصة

D



أولا : النسب المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠°

في الشكل المقابل :

المثلث : أ ب حـ **فيه** ق (∠ ب) = ٩٠°

، ق (∠ حـ) = ٣٠° **فيكون** ق (∠ أ) = ٦٠°

ويسمى المثلث أ ب حـ (**مثلث ثلاثيني ستيني**)

وفيه يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

فإذا فرضنا أن طول ($\overline{\text{أ حـ}}$) **الوتر** = ٢ ل **فيكون طول** ($\overline{\text{أ ب}}$) **الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠°** = ل **ويمكن حساب طول الضلع الثالث من نظرية فيثاغورس كما يلي :**

(ب حـ)^{٢} = (أ حـ)^{٢} - (أ ب)^{٢}

∴ (ب حـ)^{٢} = (٢ل)^{٢} - (ل)^{٢}

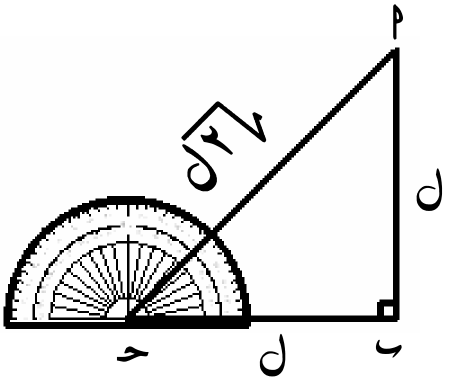
∴ (ب حـ)^{٢} = ٤ ل^{٢} - ل^{٢} = ٣ ل^{٢}

∴ ب حـ = $\sqrt{٣}$ ل

وعلى ذلك يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزاويتين : ٣٠° ، ٦٠° كالتالي :

جا ٣٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{١}{٢}$	جتا ٣٠° = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	ظا ٣٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جا ٦٠° = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{١}{٢}$	ظا ٦٠° = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$ = $\sqrt{٣}$

D (٢) :



ثانيا : النسب المثلثية للزاوية ٤٥°

في الشكل المقابل :

المثلث : أ ب حـ **فيه** ق (∠ ب) = ٩٠°

، أ ب = ب حـ **فيكون :** ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) = ٤٥°

فإذا فرضنا أن : أ ب = ب حـ = ل

ويمكن حساب طول الضلع الثالث من نظرية فيثاغورس : أ حـ = $\sqrt{٢}$ ل

وعلى ذلك يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزاوية : ٤٥° كالتالي :

جا ٤٥° $= \frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$	جتا ٤٥° $= \frac{ب حـ}{أ حـ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$	ظا ٤٥° $= \frac{أ ب}{ب حـ} = ١$

والجدول التالي يلخص لنا النسب المثلثية للزوايا الخاصة : ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°

أ/ وليد زوال	جا	جتا	ظا	
٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	هام جداً جداً ويحفظ جيداً
٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	
٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١	

مثال

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت أن :

① جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

② ظا ٦٠° $= \frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠°}$

③ جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = ١

الحل

① **الطرف الأيمن** = جا ٦٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الطرف الأيسر = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

② **الطرف الأيمن** = ظا ٦٠° $= \sqrt{٣}$

الطرف الأيسر $= \frac{٢ \text{ ظا } ٣٠°}{١ - \text{ظا}^٢ ٣٠°}$

$= \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{٢} = \sqrt{٣}$

③ **الطرف الأيمن** =

جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

مثال

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $٢ \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٤٥^\circ - ٤ \text{ جتا}^٢ ٣٠^\circ - \text{ظا}^٢ ٦٠^\circ$

(٢) $٥ \text{ جتا } ٤٥^\circ \text{ جا } ٤٥^\circ - \sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٠^\circ + \text{ظا}^٢ ٦٠^\circ - \text{ظا } ٤٥^\circ$

الحل

(١) $٢ \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٤٥^\circ - ٤ \text{ جتا}^٢ ٣٠^\circ + \text{ظا}^٢ ٦٠^\circ$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ١ - ٤ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + \left(\sqrt{٣}\right)^٢$$

$$= ١ - ٤ \times \frac{٣}{٤} + ٣$$

$$= ١ - ٣ + ٣ = ١$$

(٢) $٥ \text{ جتا } ٤٥^\circ \text{ جا } ٤٥^\circ - \sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٠^\circ + \text{ظا}^٢ ٦٠^\circ - \text{ظا } ٤٥^\circ$

$$= ٥ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \left(\sqrt{٣}\right)^٢ - ١$$

$$= \frac{٥}{٢} - \frac{٣}{٢} + ٣ - ١ = ٣$$

مثال

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

(١) $٤\text{س} = \text{جتا}^٢ ٣٠^\circ \text{ ظا}^٢ ٣٠^\circ \text{ ظا}^٢ ٤٥^\circ$

(٢) $\text{س}^٢ = ٣ \text{ جتا } ٦٠^\circ - ٤ \text{ جا}^٢ ٣٠^\circ + \frac{١}{٢} \text{ ظا}^٤ ٤٥^\circ$

الحل

(١) $٤\text{س} = \text{جتا}^٢ ٣٠^\circ \text{ ظا}^٢ ٣٠^\circ \text{ ظا}^٢ ٤٥^\circ$

$$\therefore ٤\text{س} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢ \times (١)^٢$$

$$\therefore ٤\text{س} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١$$

$$\therefore ٤\text{س} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{١}{١٦}$$

(٢) $\text{س}^٢ = ٣ \text{ جتا } ٦٠^\circ - ٤ \text{ جا}^٢ ٣٠^\circ + \frac{١}{٢} \text{ ظا}^٤ ٤٥^\circ$

$$\therefore \text{س}^٢ = ٣ \times \frac{١}{٢} - ٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \frac{١}{٢} \times (١)^٤$$

$$\therefore \text{س}^٢ = \frac{٣}{٢} - ١ + \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{س}^٢ = ١$$

$$\therefore \text{س} = \pm ١$$

استخدام حاسبة الجيب :

أولا : إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية معلومة .

تحتوي حاسبة الجيب على ثلاثة مفاتيح :

(١)مفتاح : sin يعني جيب الزاوية (جا)

(٢)مفتاح : cos يعني جيب تمام الزاوية (جتا)

(٣)مفتاح : tan يعني ظا الزاوية (ظا)

مثـــال

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية :

① جا ٢٨° ② جتا ١٥ ٣٢° ③ ظا ١٧ ٤٩ ٥٣°

الحـــل

① باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبــدأ	➤	sin	2	8	=

نـجد أن : جا ٢٨° ≃ ٠,٤٦٩٥

② باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبــدا	➤	cos	3	2	°' ''	1	5	°' ''	=

نـجد أن : جتا ١٥ ٣٢° ≃ ٠,٨٤٥٧

③ باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبــدا	➤	tan	5	3	°' ''	4	9	°' ''	1	7	°' ''	=

نـجد أن : ظا ١٧ ٤٩ ٥٣° ≃ ١,٣٦٧٤

أولا : إيجاد زاوية معلوم احدى نسبها المثلثية.

بعض مفاتيح الآلة الحاسبة له أكثر من وظيفة ، احـدى هـذه الوظـائف يكـون مكتوبـاً مباشرة على المفتاح ولإجراء هذه الوظيفة نقوم بالضغط مباشرة على المفتاح ، أما الوظيفـة الآخرى تكون مكتوبة أعلى المفتاح ولإجراء هذه الوظيفـة نقـوم بالـضغط علـى مفتـاح shift قبل المفتاح .

مثال

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س الحادة كل مما يأتي :

① جاس = ٠,٥٦٧٨   ② جتاس = ٠,٤١٠١   ③ ظا س = ٢,٣١٤٣

الحل

① باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبدأ	➤	shift	sin	0	.	5	6	7	8	=	,,,

نجد أن : س ≃ ٤٩″ ٣٥′ ٣٤°

② باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبدأ	➤	shift	cos	0	.	4	1	0	1	=	,,,

نجد أن : س ≃ ٢٠″ ٤٧′ ٦٥°

③ باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

إبدأ	➤	shift	tan	2	.	3	1	4	3	=	,,,

نجد أن : س ≃ ٥٢″ ٣٧′ ٦٦°

مثال

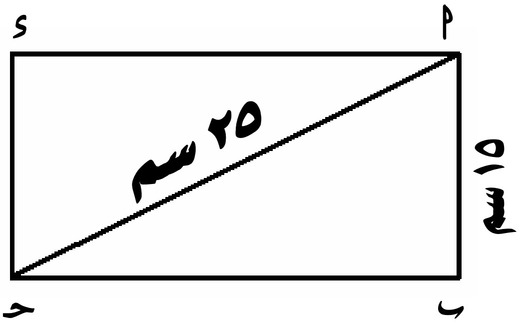
في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء **مستطيل فيه :**

أ ب = ١٥ **سم** ، أ حـ = ٢٥ **سم**

أوجد : ① ق (∠ أ حـ ب)

② **مساحة المستطيل** أ ب حـ ء



الحل

∵ **الشكل** أ ب حـ ء **مستطيل**

∴ ق (∠ ب) = ٩٠°

في المثلث أ ب حـ :

∴ جا (∠ أ حـ ب) = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ = $\frac{١٥}{٢٥}$

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ١٢″ ٥٢′ ٣٦°

∵ جتا (∠ أ حـ ب) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

∴ جتا (١٢″ ٥٢′ ٣٦°) = $\frac{\text{ب حـ}}{٢٥}$

∴ ب حـ = ٢٥ × جتا (١٢″ ٥٢′ ٣٦°)

∴ ب حـ = ٢٠ **سم**

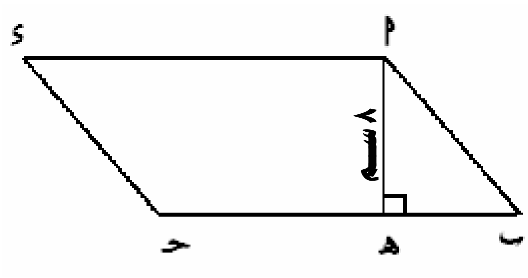
∴ **مساحة المستطيل** أ ب حـ ء

= ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ **سم**^{2}

"يمكن حساب طول $\overline{\text{ب حـ}}$ من نظرية فيثاغورس"

مثـــال

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع مساحته ٩٦ سم^{٢}

أ هـ ⊥ ب حـ حيث ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣

أ هـ = ٨ سم أوجد :

① **طول** أ ء

② ق (∠ ب)

③ **طول** أ ب **لأقرب رقم عشري واحد .**

الحـــــل

∵ **مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الإرتفاع**

∴ ٩٦ = ب حـ × ٨

∴ ب حـ = ٩٦ ÷ ٨ = ١٢ **سم**

∴ أ ء = ١٢ **سم**

∵ ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣

∴ ب هـ = $١ \times \frac{١٢}{٤}$ = ٣ **سم**

∴ هـ حـ = $٣ \times \frac{١٢}{٤}$ = ٩ **سم**

∵ ظا ب = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{٨}{٣}$

∴ ق (∠ ب) = ٣٨ً ٢٦َ ٦٩°

في المثلث أ هـ ب :

∴ ق (∠ أ هـ ب) = ٩٠°

∴ (أ ب)^{٢} = (أ هـ)^{٢} + (هـ ب)^{٢}

∴ (أ ب)^{٢} = (٨)^{٢} + (٣)^{٢}

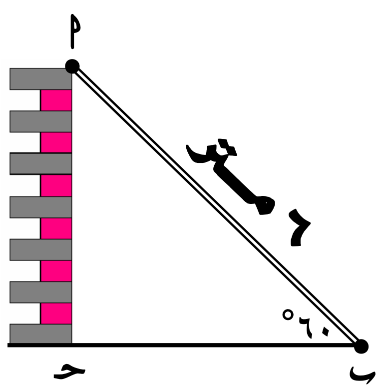
= ٦٤ + ٩ = ٧٣

∴ أ ب = $\sqrt{٧٣}$ ≃ ٨,٥ **سم**

مثـــال

سلم أ ب طوله ٦ أمتار يستند بطرفه العلوي أ على حائط رأسي ، وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت حـ هي مسقط أ على سطح الأرض وكان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض يساوي ٦٠° . أوجد طول أ حـ .

الحـــــل



في المثلث : أ ب حـ

∵ ق (∠ حـ) = ٩٠°

∴ جا ب = $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$

∴ جا ٦٠° = $\frac{\text{أ حـ}}{٦}$

∴ أ حـ = ٦ × جا ٦٠°

∴ ب حـ = ٣ $\sqrt{٣}$ **متر**

تمارين على الدرس الثاني

❶ أكمل العبارات الآتية :

① **إذا كانت** : جا س = $\frac{١}{٢}$ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : ق (∠ س) = ...°

② **إذا كان** : جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : ق (∠ س) = ...°

③ **إذا كان** : ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : ق (∠ س) = ...°

④ **إذا كان** : ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : ق (∠ س) = ...°

⑤ **إذا كان** : جتا هـ = ٠,٦٢١٧ **فإن** : ق (∠ هـ) = ...° ......َ ......ً

⑥ **إذا كان** : ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : ق (∠ س) = ...°

⑦ **إذا كان** : جا (س + ٥) = $\frac{١}{٢}$ **حيث** (س + ٥) **زاوية حادة فإن** : ظا (س + ٢٠°) = ...

⑧ **إذا كان** : جتا هـ × ظا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ **حيث** هـ **زاوية حادة فإن** : هـ = ...°

⑨ **إذا كان** : $\sqrt{٣}$ ظا س = ٣ **حيث** س **زاوية حادة فإن** : س = ...°

⑩ جتا ٥٤ً ٣٦َ ٦٣° = ... **لأقرب أربعة أرقام عشرية**

⑪ ظا ٢٠ً ٤٦َ ٦٥° = ... **لأقرب أربعة أرقام عشرية**

⑫ جا ٤٣ً ٤٤َ ٣٣° = ... **لأقرب أربعة أرقام عشرية**

❷ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت أن :

① ١ - ٢ جا^{٢} ٣٠° = جتا ٦٠°

② جا^{٢} ٦٠° + جا^{٢} ٣٠° = ١

③ ٨ جا ٣٠° جتا ٦٠° + ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° - ظا ٤٥° = ٢

④ $\sqrt{٣}$ ظا ٦٠° - ٤ جا ٣٠° + ٤ جتا^{٢} ٣٠° = ٤

⑤ $\frac{\text{ظا ٦٠° - ظا ٣٠°}}{\text{١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°}}$ = ظا ٣٠°

③ بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة ما يأتي :

① جتا ٣٠° جتا ٦٠° - جا ٣٠° جا ٦٠°

② $\frac{\text{جا ٤٥°}}{\text{جتا ٦٠°}}$ + ٨ جتا ٤٥°

③ ٨ جتا^{٢} ٦٠° - ٣ ظا ٤٥° + ٤ جا^{٢} ٣٠°

④ جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠° - ١٠ جتا^{٢} ٤٥° + ٥ ظا ٤٥°

④ بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

① ٤ س = ٣ ظا ٦٠° + ٤ جتا ٣٠° جتا ٦٠°

② س^{٢} = $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° ظا ٤٥° + ٣ جا ٣٠° + $\sqrt{٣}$ جا ٦٠°

③ س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جتا^{٢} ٣٠°

④ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^{٢} ٤٥ - جتا^{٢} ٦٠°

⑤ بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س الحادة إذا كان :

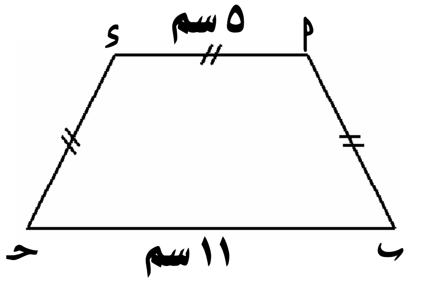
① ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠°

② جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

③ ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

④ ٣ جا س = جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا^{٢} ٣٠°

⑥ في الشكل المقابل :



أ ب ج د **شبه منحرف فيه :**

أ ب = أ د = د ج = ٥ **سم** ، ب ج = ١١ **سم .**

أوجد : ① ق (∠ ب) ، ق (∠ أ)

② **مساحة شبه المنحرف** أ ب ج د .

⑦ أ ب ج **مثلث فيه :** أ ب = أ ج = ١٢,٦ **سم** ، ق (ج) = ٢٤َ ٨٤°

أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول $\overline{\text{ب ج}}$

⑧ أ ب ج **مثلث فيه :** أ ب = أ ج = ٨ **سم** ، ب ج = ١٢ **سم**

أوجد : ① ق (∠ ب) ② **مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين .**

⑨ سلم $\overline{\text{أ ب}}$ **طوله** ٦ $\sqrt{٣}$ **متر يستند بطرفه العلوي** أ **على حائط رأسي ، وطرفه** ب **على أرض أفقية ، فإذا كانت** ج **هي مسقط** أ **على سطح الأرض وكان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض يساوي** ٦٠° **أوجد طول** $\overline{\text{أ ج}}$. **(الدقهلية ٢٠١١)**