بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات

للصف الاول الثانوى

ترم أول

الجــــبر

إعداد ذ/سعيد محمود

ت/ 01118312893

* حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

يوجد طريقتان لحل المعادلات

الطريقة الجبرية — الطريقة البيانية

أولاً: الطريقة الجبرية

بالتحليل — بالقانون العام

مثال: أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية

$\boxed{1}$ $س^{2} - ٥س + ٦ = ٠$

الحل

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

$س - ٢ = ٠$ ، $س = ٢$ | $س - ٣ = ٠$ ، $س = ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{٢ ، ٣\}$

$\boxed{2}$ $س^{3} - ٢٧ = ٠$

الحل

$س^{3} = ٢٧ \Leftarrow س = \sqrt[3]{٢٧}$

$س = ٣$ $\therefore$ م.ح $= \{٣\}$

$\boxed{3}$ $س^{2} - ٢٥ = ٠$

الحل

$س^{2} = ٢٥ \Leftarrow س = \pm\sqrt{٢٥}$

$س = \pm ٥$ $\therefore$ م.ح $= \{\pm ٥\}$

$\boxed{4}$ $س^{2} + ٩ = ٠$

الحل

$س^{2} = -٩ \Leftarrow س = \pm\sqrt{-٩} \notin ح$

$\therefore$ م.ح $= \emptyset$

$\boxed{5}$ $س + \frac{٥}{س} = ٤$

الحل

بالضرب × س $\therefore س^{2} + ٥ = ٤س$

$س^{2} - ٤س + ٥ = ٠$

نستخدم القانون لحل المعادلة

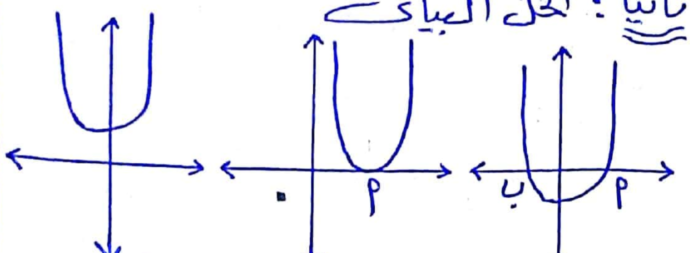
أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٥

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

$\because \sqrt{-٤} \notin ح$ $\therefore$ م.ح $= \emptyset$

ثانياً: الحل البياني



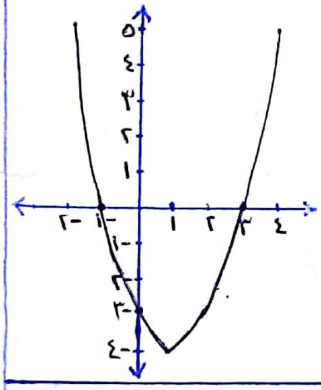
م.ح = {أ ، ب} — م.ح = {أ} — م.ح = $\emptyset$

مثال: أوجد في ح مجموعة حل المعادلات الآتية بيانياً

$\boxed{1}$ $س^{2} - ٢س - ٣ = ٠$ $[-٢ ، ٤]$

الحل

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



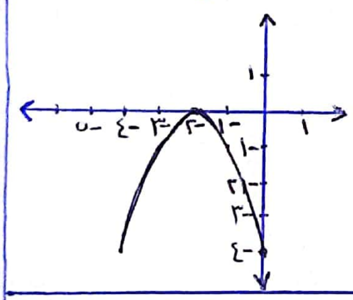
من الرسم نلاحظ أن

م.ح $= \{-١ ، ٣\}$

$\boxed{2}$ $-س^{2} - ٤س - ٤ = ٠$ $[-٤ ، ٠]$

الحل

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠
ص	−٤	−١	٠	−١	−٤



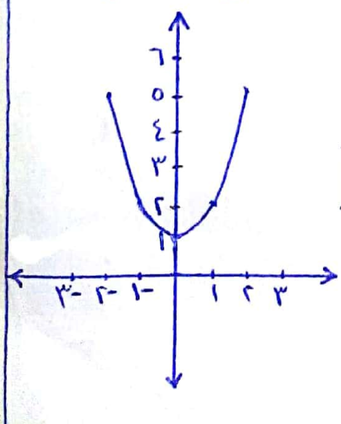
من الرسم نلاحظ أن

م.ح $= \{-٢\}$

$\boxed{3}$ $س^{2} + ١$ $[-٢ ، ٢]$

الحل

س	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٥	٢	١	٢	٥



من الرسم نلاحظ أن

م.ح $= \emptyset$

* مقدمة عن الأعداد المركبة *

* العدد التخيلي ت *

هو العدد الذي مربعه يساوي -١

أي أن $ت^{٢} = -١$

ملحوظة

$\sqrt{-أ} = \sqrt{أ} \times \sqrt{-١} = \sqrt{أ}\, ت$

فمثلاً: $\sqrt{-٧} = \sqrt{٧} \times \sqrt{-١} = \sqrt{٧}\, ت$

$\sqrt{-٤} = \sqrt{٤} \times \sqrt{-١} = ٢ت$

* قوى ت الصحيحة *

$ت^{٢} = -١$	$ت^{٤} = ١$	$ت^{٣} = -ت$

ملاحظات

① إذا كانت قوى ت عدد زوجي ويقبل القسمة على ٤ فإن قيمته = ١

فمثلاً: $ت^{٨} = (ت^{٤})^{٢} = ١$

$ت^{١٦} = (ت^{٤})^{٤} = ١$

② إذا كانت قوى ت عدد زوجي ويقبل القسمة على ٢ ولا يقبل القسمة على ٤ فإن قيمته = -١

فمثلاً: $ت^{٦} = (ت^{٢})^{٣} = -١$

$ت^{١٨} = (ت^{٢})^{٩} = -١$

③ إذا كانت قوى ت عدد فردي نفك الأس وننقص منه ١

فمثلاً: $ت^{٢٥} = ت^{٢٤} \times ت = ١ \times ت = ت$

$ت^{١٥} = ت^{١٤} \times ت = -١ \times ت = -ت$

* العدد المركب ع *

هو عدد يمكن كتابته على صورة (أ + ب ت)

حيث أ ∈ ح ، ب ت ∉ ح تخيلي

ويرمز له بالرمز ع فمثلاً ع = ٥ + ٢ت

العدد المركب يتكون من جزئين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي

ع = أ + ب ت

① إذا كان أ = صفر يبقى العدد تخيلي

② إذا كان ب = صفر يبقى العدد حقيقي

أوجد مجموعة الحل في ك لكل من المعادلات

١) $٣س^{٢} + ٢٧ = ٠$

الحل

$٣س^{٢} = -٢٧ \Leftarrow س^{٢} = \frac{-٢٧}{٣}$

$س^{٢} = -٩ \Leftarrow س = \pm\sqrt{-٩}$

$س = \pm ٣ت$ ∴ م.ح = {± ٣ت}

٢) $٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

الحل

$٤س^{٢} = ٧٥ - ١٠٠ \Leftarrow ٤س^{٢} = -٢٥$

$س^{٢} = \frac{-٢٥}{٤} \Leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{-٢٥}{٤}}$

$س = \pm \frac{٥}{٢} ت$ ∴ م.ح = {± $\frac{٥}{٢}$ ت}

* تساوي عددين مركبين *

إذا كان أ + ب ت = جـ + د ت

فإن أ = جـ | ب = د

أوجد قيمتي س ، ص فيما يلي

١) س + ص ت = ٤ - ٣ت

الحل

س = ٤ | ص = -٣

٢) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ - ١٢ت

الحل

٢س + ١ = ٥	٤ص = -١٢
٢س = ٤	ص = $\frac{-١٢}{٤}$
س = ٢	ص = -٣

٣) ٢س - ٣ + (٣ص + ١)ت = ٧ + ١٠ت

الحل

٢س - ٣ = ٧	٣ص + ١ = ١٠
٢س = ٧ + ٣	٣ص = ١٠ - ١
٢س = ١٠	٣ص = ٩
س = $\frac{١٠}{٢}$	ص = $\frac{٩}{٣}$
س = ٥	ص = ٣

* العمليات على الأعداد المركبة *

أوجد في أبسط صورة ناتج كل من

[1] $(٧-٤ت) + (٢+ت)$

الحل

$(٧+٢) + (-٤ت+ت) = ٩-٣ت$

[2] $(٢+٣ت)(٣-٤ت)$

الحل

$= ٢(٣-٤ت) + ٣ت(٣-٤ت)$

$= ٦ - ٨ت + ٩ت - ١٢ت^{٢}$

$= ٦ + ت + ١٢ = ١٨ + ت$

[3] $(٣+٢ت)^{٢}$

الحل

$= ٩ + ٤ت^{٢} + ١٢ت$

$= ٩ - ٤ + ١٢ت = ٥ + ١٢ت$

* العددان المترافقان *

يسمى العددان $٤-٣ت$ ، $٤+٣ت$ مترافقان

(1) $(٤-٣ت)(٤+٣ت)$

= الأول × الأول - الثاني × الثاني

$= ١٦ - ٩ت^{٢} = ١٦+٩ = ٢٥$

(2) $٤ - \cancel{٣ت} + ٤ + \cancel{٣ت} = ٨$

ضع على صورة أ + ب ت

العدد $\frac{١٣}{٢-٣ت}$

الحل

$\frac{١٣}{(٢-٣ت)} \times \frac{(٢+٣ت)}{(٢+٣ت)}$

$= \frac{١٣(٢+٣ت)}{٤-٩ت^{٢}} = \frac{١٣(٢+٣ت)}{٤+٩}$

$= \frac{\cancel{١٣}(٢+٣ت)}{\cancel{١٣}} = ٢+٣ت$

أوجد قيمتي س ، ص فيما يلي

[1] $س + ت ص = \frac{(٢+ت)(٢-ت)}{٣+٤ت}$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{٤-ت^{٢}}{(٣+٤ت)} \times \frac{(٣-٤ت)}{(٣-٤ت)}$

$= \frac{(٤+١)(٣-٤ت)}{٩-١٦ت^{٢}} = \frac{٥(٣-٤ت)}{٩+١٦}$

$= \frac{\cancel{٥}(٣-٤ت)}{\cancel{٢٥}} = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

$\therefore س + ت ص = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

$س = \frac{٣}{٥}$ | $ص = -\frac{٤}{٥}$

[2] $\frac{٣-٢ت}{٢+٣ت} = س + ت ص$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{(٣-٢ت)}{(٢+٣ت)} \times \frac{(٢-٣ت)}{(٢-٣ت)}$

$= \frac{٦-٩ت-٤ت+٦ت^{٢}}{٤-٩ت^{٢}} = \frac{٦-١٣ت-٦}{٤+٩}$

$= \frac{-١٣ت}{١٣} = -ت$

$-ت = س + ت ص$

س = صفر | $ص = -١$

[3] $س + ص ت = \frac{٣-ت}{٢-ت}$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{(٣-ت)}{(٢-ت)} \times \frac{(٢+ت)}{(٢+ت)}$

$= \frac{٦+٣ت-٢ت-ت^{٢}}{٤-ت^{٢}} = \frac{٦+ت+١}{٤+١}$

$= \frac{٧+ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$

$س + ص ت = \frac{٧}{٥} + \frac{١}{٥}ت$

$س = \frac{٧}{٥}$ | $ص = \frac{١}{٥}$

* تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية *

المميز $\boxed{ب^{٢} - ٤ أ ح}$

- المميز > صفر (موجب) ∴ الجذران حقيقيان مختلفان
- المميز = صفر ∴ الجذران حقيقيان متساويان
- المميز < صفر (سالب) ∴ الجذران غير حقيقيان (مركبان)

حدد نوع جذري كل من المعادلات الآتية؟

$\boxed{١}$ س^{٢} − ١٠ س + ١٠ = ٠

الحل

أ = ١ ، ب = −١٠ ، ح = ١٠

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح

= (−١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ١٠ = ٦٠

∵ المميز موجب ∴ الجذران حقيقيان مختلفان

$\boxed{٢}$ س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

الحل

أ = ١ ، ب = −٦ ، ح = ٩

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح

= (−٦)^{٢} − ٤ × ١ × ٩ = صفر

∵ المميز = صفر ∴ الجذران حقيقيان متساويان

$\boxed{٣}$ س^{٢} − ٣ س + ٥ = ٠

الحل

أ = ١ ، ب = −٣ ، ح = ٥

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح

= (−٣)^{٢} − ٤ × ١ × ٥ = −١١

∵ المميز سالب

∴ الجذران غير حقيقيان (مركبان)

إثبت أن جذري المعادلة ٢ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

أ = ٢ ، ب = −٣ ، ح = ٢

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح

= (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٢ = −٧

∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين)

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ}$ = $\frac{-(-٣) \pm \sqrt{-٧}}{٢ \times ٢}$

= $\frac{٣ \pm \sqrt{٧}\, ت}{٤}$ = $\frac{٣}{٤} \pm \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت

∴ جذرا المعادلة $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت ، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت

أوجد قيمة ك التي تجعل الجذران متساويان

٣ س^{٢} − ٦ س + ك = ٠

الحل

أ = ٣ ، ب = −٦ ، ح = ك

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح = صفر

(−٦)^{٢} − ٤ × ٣ × ك = ٠ ⟸ ٣٦ − ١٢ ك = ٠

−١٢ ك = −٣٦ ⟸ ك = $\frac{-٣٦}{-١٢}$ = ٣

أوجد قيمة ك التي تجعل جذري المعادلة س^{٢} + ٤ س + ك = ٠ حقيقيان مختلفان

الحل

أ = ١ ، ب = ٤ ، ح = ك

المميز = ب^{٢} − ٤ أ ح > صفر

(٤)^{٢} − ٤ × ١ × ك > ٠ ⟸ ١٦ − ٤ ك > ٠

−٤ ك > −١٦ ⟸ ك < $\frac{-١٦}{-٤}$

ك < ٤ ∴ ك ∈]−∞ ، ٤[

ملحوظة

إذا كانت أ ، ب ، ج أعداد نسبية والمميز مربع كامل فإن الجذران حقيقيان نسبيان

أوجد قيمة ك التي تجعل المعادلة ك س² − ٨ س + ١٦ = ٠ مركبين غير حقيقيين

الحل

أ = ك ، ب = −٨ ، جـ = ١٦

∵ المميز = ب² − ٤ أ جـ < ٠

(−٨)² − ٤ × ك × ١٦ < ٠

٦٤ − ٦٤ ك < ٠

−٦٤ ك < −٦٤ ∴ ك > −٦٤ / −٦٤

ك > ١ ∴ ك ∈]١ ، ∞[

إذا كان ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة ل س² + (ل − م) س − م = ٠ عددان نسبيان

الحل

أ = ل ، ب = ل − م ، جـ = −م

المميز = ب² − ٤ أ جـ

= (ل − م)² − ٤ × ل × −م

= ل² + م² − ٢ ل م + ٤ ل م

= ل² + ٢ ل م + م²

= (ل + م)² "مربع كامل"

∵ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل

∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان

إذا كان ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذري المعادلة ل س² + م س + م − ل = ٠ عددان نسبيان

الحل

أ = ل ، ب = م ، جـ = م − ل

المميز = ب² − ٤ أ جـ

= م² − ٤ × ل × (م − ل)

= م² − ٤ ل م + ٤ ل²

= (م − ٢ ل)² ∴ الجذران نسبيان

* العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

أ س² + ب س + جـ = ٠

[١] مجموع الجذرين = −معامل س / معامل س² = −ب / أ

[٢] حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق / معامل س² = جـ / أ

دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين

(١) س² + ٥ س + ٤ = ٠

الحل

أ = ١ ، ب = ٥ ، جـ = ٤

مجموع الجذرين = −ب / أ = −٥ / ١ = −٥

حاصل ضرب الجذرين = جـ / أ = ٤ / ١ = ٤

(٢) ٣ س² = ٢٣ س − ٣٠

الحل

٣ س² − ٢٣ س + ٣٠ = ٠

أ = ٣ ، ب = −٢٣ ، جـ = ٣٠

مجموع الجذرين = −ب / أ = ٢٣ / ٣

حاصل ضرب الجذرين = جـ / أ = ٣٠ / ٣ = ١٠

إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢ س² + ب س − ٥ = ٠ هو −٣/٢ فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة

الحل

أ = ٢ ، ب = ب ، جـ = −٥

مجموع الجذرين = −ب / أ = −ب / ٢ ⇐ −ب / ٢ = −٣ / ٢

∴ ب = ٣ ∴ ٢ س² + ٣ س − ٥ = ٠

أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٥

س = (−ب ± √(ب² − ٤ أ جـ)) / ٢ أ = (−٣ ± √(٩ − ٤ × −١٠)) / (٢ × ٢)

= (−٣ ± √٤٩) / ٤ = (−٣ ± ٧) / ٤

∴ م.ح = {١ ، −٥/٢}

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٢س² − ٤س + ل = ٠ هو ٩/٢ أوجد قيمة ل ثم حل المعادلة

الحل

أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ل

حاصل ضرب الجذرين = جـ/أ = ل/٢

ل/٢ = ٩/٢ ⇐ ل = ٩

∴ المعادلة هي ٢س² − ٤س + ٩ = ٠

أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ٩

س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) / ٢أ = (٤ ± √(١٦ − ٧٢)) / (٢×٢)

= (٤ ± √−٥٦) / ٤ = (٤ ± √٥٦ ت) / ٤

م.ح = {١ + (√١٤/٢) ت ، ١ − (√١٤/٢) ت}

إذا كان س = −١ أحد جذري المعادلة س² − ٢س + أ = ٠ فأوجد قيمة أ والجذر الآخر

الحل

بالتعويض عن س = −١

(−١)² − ٢ × −١ + أ = ٠

١ + ٢ + أ = ٠ ⇐ أ + ٣ = ٠

أ = −٣ ∴ س² − ٢س − ٣ = ٠

مجموع الجذرين = −ب/أ = ٢/١

−١ + الجذر الآخر = ٢

الجذر الآخر = ٢ + ١ = ٣

إذا كان ٢ ، ٥ جذري المعادلة س² + أس + ب = ٠ فأوجد قيمة أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = −ب/أ = ٧

−أ/١ = ٧ ⇐ −أ = ٧ ∴ $\boxed{\text{أ} = -٧}$

حاصل ضرب الجذرين = جـ/أ = ب = ١٠

∴ $\boxed{\text{ب} = ١٠}$

إذا كان √٣ ت ، −√٣ ت جذري المعادلة س² + أس + ب = ٠ فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = √٣ ت − √٣ ت = صفر

مجموع الجذرين = −ب/أ = −أ/١ ⇐ $\boxed{\text{أ} = \text{صفر}}$

حاصل ضرب الجذرين = √٣ ت × −√٣ ت

= −٣ × ت² = ٣

حاصل ضرب الجذرين = جـ/أ = ب/١ ∴ $\boxed{\text{ب} = ٣}$

ملحوظة: أس² + بس + جـ = ٠

① أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر عندما ب = صفر

② أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر عندما أ = جـ

أوجد قيمة ل إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

① س² + (ل − ٥)س + ٣ = ٠

الحل

ل − ٥ = ٠ ⇐ ل = ٥

② س² + لس − ١ = ٠

الحل

ل = صفر

أوجد قيمة ل التي تجعل أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

① ٢س² − ٥س + ل = ٠

الحل

ل = ٢

② (ل − ٤)س² − ٥س − ٣ = ٠

الحل

ل − ٤ = −٣ ⇐ ل = −٣ + ٤ ⇐ ل = ١

ملحوظة:

إذا كان أحد جذري المعادلة هو عدد مركب فإن الجذر الآخر يكون مرافقه

إذا كان $(٢+ت)$ هو أحد جذور المعادلة $س^{٢} - ٤س + ب = ٠$ حيث ب ∈ ح فأوجد

① الجذر الآخر ② قيمة ب

الحل

① ∵ $٢+ت$ هو أحد جذري المعادلة

∴ الجذر الآخر $= ٢ - ت$

② حاصل ضرب الجذرين = ب

$(٢+ت)(٢-ت) = ب$

$٤ - ت^{٢} = ب \Leftarrow ٤+١ = ب$

∴ $ب = ٥$

* تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها.

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

مجموع الجذرين = ل + م

حاصل ضرب الجذرين = ل م

والمعادلة هي

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل الجذرين = ٠

كون المعادلة التربيعية التي جذراها

① $٥ + \sqrt{٢}$ ، $٥ - \sqrt{٢}$

الحل

مجموع الجذرين $= ٥ + \cancel{\sqrt{٢}} + ٥ - \cancel{\sqrt{٢}} = ١٠$

حاصل ضرب الجذرين $= (٥+\sqrt{٢})(٥-\sqrt{٢})$

$= ٢٥ - ٢ = ٢٣$

المعادلة هي

$س^{٢} - ١٠س + ٢٣ = ٠$

② $-٩ت$ ، $٩ت$

الحل

مجموع الجذرين $= -٩ت + ٩ت =$ صفر

حاصل ضرب الجذرين $= -٩ت \times ٩ت$

$= -٨١ \times ت^{٢} = ٨١$

المعادلة هي $س^{٢} + ٨١ = ٠$

③ ٤ ، −٣

الحل

مجموع الجذرين $= ٤ - ٣ = ١$

حاصل ضرب الجذرين $= ٤ \times -٣ = -١٢$

المعادلة هي $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

إذا علمت أن ل ، م هما جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$ فكون المعادلة التي جذراها ل+٢ ، م+٢

الحل

من المعادلة المعطاه يكون

$ل+م = ٥$ ، $ل م = -٦$

مجموع الجذرين $= ل+٢ + م+٢$

$= ل+م + ٤ = ٥ + ٤ = ٩$

حاصل ضرب الجذرين $= (ل+٢)(م+٢)$

$= ل م + ٢ل + ٢م + ٤ = ل م + ٢(ل+م) + ٤$

$= -٦ + ٢ \times ٥ + ٤ = ٨$

المعادلة هي $س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠$

ملحوظة:

$\boxed{١}$ $ل^{٢} + م^{٢} = (ل+م)^{٢} - ٢ل م$

$\boxed{٢}$ $ل^{٣} + م^{٣} = (ل+م)[(ل+م)^{٢} - ٣ل م]$

$\boxed{٣}$ $ل^{٣} - م^{٣} = (ل-م)[(ل+م)^{٢} - ل م]$

$\boxed{٤}$ $(ل-م)^{٢} = (ل+م)^{٢} - ٤ل م$

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٥س + ٣ = ٠$ فأوجد المعادلة التي جذورها ٢ل ، ٢م

الحل

$ل + م = ٥$ ، $ل م = ٣$

مجموع الجذرين $= ٢ل + ٢م = ٢(ل + م)$
$= ٢ \times ٥ = ١٠$

حاصل ضرب الجذرين $= ٢ل \times ٢م$
$= ٤ ل م = ٤ \times ٣ = ١٢$

المعادلة هي $س^٢ - ١٠س + ١٢ = ٠$

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ + ٣س - ٥ = ٠$ فكون المعادلة التربيعية التي جذراها $ل^٢$ ، $م^٢$

الحل

$ل + م = -٣$ ، $ل م = -٥$

مجموع الجذرين $= ل^٢ + م^٢$
$= (ل + م)^٢ - ٢ ل م = (-٣)^٢ - ٢ \times -٥$
$= ٩ + ١٠ = ١٩$

حاصل ضرب الجذرين $= ل^٢ \times م^٢$
$= (ل م)^٢ = (-٥)^٢ = ٢٥$

المعادلة هي $س^٢ - ١٩س + ٢٥ = ٠$

ملاحظات لحل المسائل اللفظية

1. مربع نظيره $\Leftarrow ل^٢ ، م^٢$
2. مكعب نظيره $\Leftarrow ل^٣ ، م^٣$
3. ضعف نظيره $\Leftarrow ٢ل ، ٢م$
4. نصف نظيره $\Leftarrow \frac{ل}{٢} ، \frac{م}{٢}$
5. يزيد عن مثيله بمقدار ١ $\Leftarrow ل + ١ ، م + ١$
6. ثلاثة أمثال نظيره $\Leftarrow ٣ل ، ٣م$
7. ينقص عن نظيره بمقدار ٢ $\Leftarrow ل - ٢ ، م - ٢$

أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة $س^٢ - ٧س - ٩ = ٠$

الحل

$ل + م = ٧$ ، $ل م = -٩$

بفرض أن جذور المعادلة المطلوبة هي $ل + ١$ ، $م + ١$

مجموع الجذرين $= ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢$
$= ٧ + ٢ = ٩$

حاصل ضرب الجذرين $= (ل + ١)(م + ١)$
$= ل م + ل + م + ١ = -٩ + ٧ + ١$
$= -١$

المعادلة هي $س^٢ - ٩س - ١ = ٠$

أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة $س^٢ - ٧س + ٣ = ٠$

الحل

$ل + م = ٧$ ، $ل م = ٣$

بفرض أن جذور المعادلة المطلوبة هي $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$

مجموع الجذرين $= \frac{ل}{٢} + \frac{م}{٢} = \frac{ل + م}{٢}$
$= \frac{٧}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ل}{٢} \times \frac{م}{٢}$
$= \frac{ل م}{٤} = \frac{٣}{٤}$

المعادلة هي

$$س^٢ - \frac{٧}{٢} س + \frac{٣}{٤} = ٠$$

بالضرب × ٤

$$٤س^٢ - ١٤س + ٣ = ٠$$

* إشارة الدالة *

أولاً: الدالة الثابتة

د: د(س) = حـ ، حـ ∈ ح*

هي نفس إشارة حـ ويعني هنا إذا كان الثابت موجب تكون الدالة موجبة وإذا كان الثابت سالب فإن الدالة تكون سالبة

عين إشارة الدوال الآتية

① د(س) = ٧ ⇐ موجبة دائماً

② د(س) = -٥ ⇐ سالبة دائماً

ثانياً: الدالة الخطية

نحل المعادلة أولاً ثم نحدد قيمة س على خط الأعداد وعلى اليمين مثل معامل س وعلى اليسار عكس معامل س

عين إشارة كلاً من الدوال الآتية

[1] د(س) = ٢س + ٦

الحل

٢س + ٦ = ٠ ⇐ ٢س = -٦

س = -٦/٢ ⇐ س = -٣

إشارة د(س): + + + (-٣) - - -

س: ∞ ، صفر ، -∞

① د(س) موجبة عندما س > -٣

س ∈]-٣ ، ∞[

② د(س) سالبة عندما س < -٣

س ∈]-∞ ، -٣[

③ د(س) = صفر عندما س = صفر

[2] د(س) = -٢س - ٤

الحل

-٢س - ٤ = ٠ ⇐ -٢س = ٤

س = ٤/-٢ ⇐ س = -٢

إشارة د(س): - - - (-٢) + + +

س: ∞ ، صفر ، -∞

① د(س) موجبة عندما س < -٢

س ∈]-∞ ، -٢[

② د(س) سالبة عندما س > -٢

س ∈]-٢ ، ∞[

③ د(س) = صفر عندما س = -٢

[3] د(س) = ٢س

الحل

٢س = ٠ ⇐ س = صفر

إشارة د(س): + + + (٠) - - -

س: -∞

① د(س) موجبة عندما س > صفر

س ∈]٠ ، ∞[

② د(س) سالبة عندما س < صفر

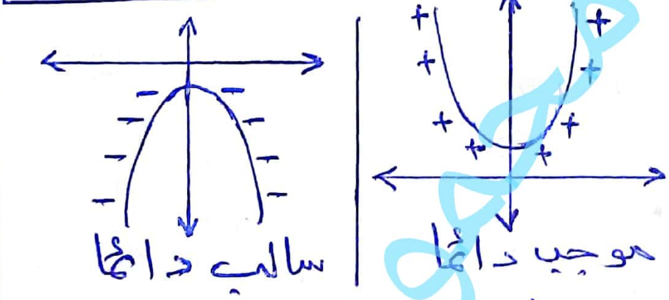
س ∈]-∞ ، ٠[

③ د(س) = صفر عندما س = صفر

ثالثاً: الدالة التربيعية

يوجد ثلاث حالات من خلال المميز

[1] إذا كان المميز سالب $\boxed{ب^2 - ٤ أ حـ < ٠}$



نلاحظ أن ! حسب إشارة معامل س²

عين إشارة الدوال الآتية

① د(س) = س² + ٢س + ٥

الحل

أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٥

المميز = ب² - ٤ أ حـ = ٤ - ٤ × ١ × ٥ = -١٦

المميز سالب ∴ د(س) موجبة > ٠

② د(س) = -س² + ٢س - ٦

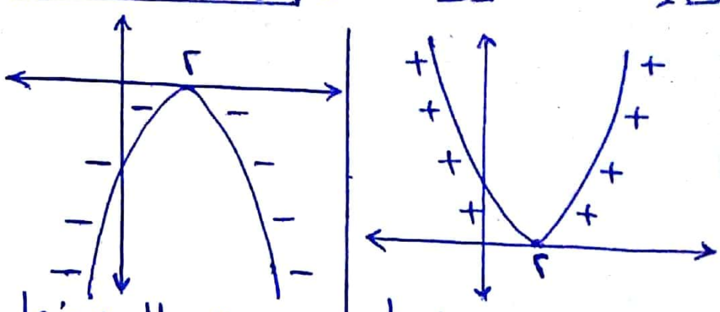
الحل

أ = -١ ، ب = ٢ ، حـ = -٦

المميز = ب² - ٤ أ حـ = ٤ - ٤ × -١ × -٦

= -٢٠ < ٠ ∴ د(س) سالبة

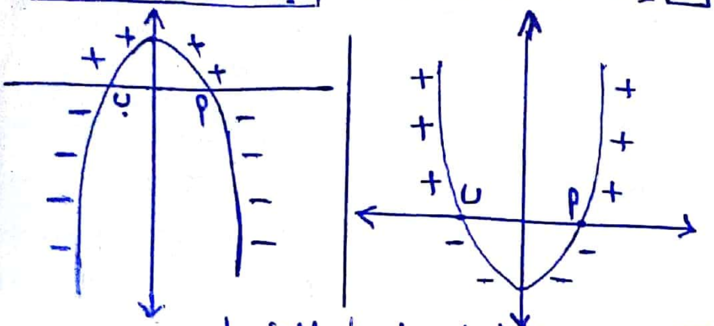
[٢] إذا كان المميز = صفر $ب^2 - ٤ أ جـ = ٠$



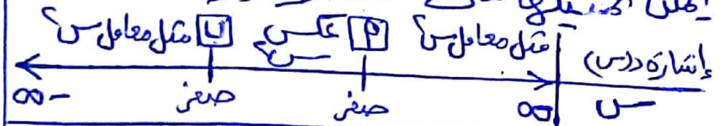
د(س) موجبة عندما س ∈ ح − {٢}

د(س) سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

[٣] إذا كان المميز موجب $ب^2 - ٤ أ جـ > ٠$



يمكن تمثيلها على خط الأعداد



ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = $س^2 - ٦س + ٩$

الحل

أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٩

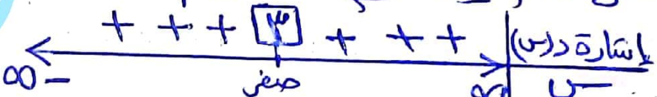
المميز = $ب^2 - ٤ أ جـ$ = ٣٦ − ٤×١×٩

= صفر نقوم بحل المعادلة

$س^2 - ٦س + ٩ = ٠$

(س − ٣)(س − ٣) = ٠

س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣



(١) د(س) موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

(٢) د(س) = صفر عندما س = ٣

(٢) د(س) = $-س^2 + ٤س - ٤$

الحل

أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٤

المميز = $ب^2 - ٤ أ جـ$ = ١٦ − ٤×−١×−٤

= صفر نقوم بحل المعادلة

$-س^2 + ٤س - ٤ = ٠$ ← ×−١

$س^2 - ٤س + ٤ = ٠$

(س − ٢)(س − ٢) = ٠

س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

(١) د(س) سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

(٢) د(س) = صفر عندما س = ٢

ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = $س^2 - ٧س + ١٢$

الحل

أ = ١ ، ب = −٧ ، جـ = ١٢

المميز = $ب^2 - ٤ أ جـ$ = ٤٩ − ٤×١×١٢

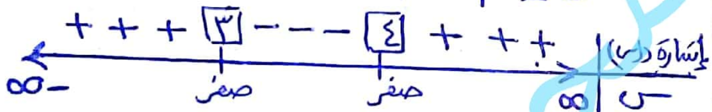
= ١ > صفر نقوم بحل المعادلة

$س^2 - ٧س + ١٢ = ٠$

(س − ٣)(س − ٤) = ٠

س − ٣ = ٠ | س − ٤ = ٠

س = ٣ | س = ٤



* د(س) موجبة عندما س ∈ ح − [٣ ، ٤]
* د(س) سالبة عندما س ∈]٣ ، ٤[
* د(س) = صفر عندما س ∈ {٣ ، ٤}

(٢) د(س) = $-س^2 + ٤س - ٣$

الحل

أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = −٣

المميز = $ب^2 - ٤ أ جـ$ = ١٦ − ٤×−١×−٣

= ٤ > صفر نقوم بحل المعادلة

$-س^2 + ٤س - ٣ = ٠$ ← ×−١

$س^2 - ٤س + ٣ = ٠$

(س − ١)(س − ٣) = ٠

س − ١ = ٠ | س − ٣ = ٠