حل نماذج تدريب الوزارة
٢٠١٨
الجبر والهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى شعبة الرياضيات

منتدى توجيه الرياضيات

أ / عادل إدوار

تعليمات مهمة

- عدد أسئلة كراسة الامتحان (١٩) سؤالاً.
- عدد صفحات كراسة الامتحان (٢٨) صفحة.
- تأكد من ترقيم الأسئلة، ومن عدد صفحات كراسة الامتحان، فهي مسئوليتك.
- زمن الاختبار (ساعتان).
- الدرجة الكلية للاختبار (٣٠) درجة.

عزيزي الطالب .. اقرأ هذه التعليمات بعناية :

١ اقرأ التعليمات جيدًا سواء في مقدمة كراسة الامتحان أو مقدمة الأسئلة، وفي ضوئها أجب عن الأسئلة.

٢ اقرأ السؤال بعناية، وفكر فيه جيداً قبل البدء في إجابته.

٣ استخدم القلم الجاف الأزرق للإجابة ، والقلم الرصاص في الرسومات، وعدم استخدام مزيل الكتابة .

٤ عند إجابتك للأسئلة المقالية، أجب في المساحة المخصصة للإجابة وفي حالة الحاجة لمساحة أخرى يمكن استكمال الإجابة في صفحات المسودة مع الإشارة إليها ، وإن إجابتك بأكثر من إجابة سوف يتم تقديرها .

مثال:

....

....

....

٥ عند إجابتك عن الأسئلة المقالية الاختيارية أجب عن **(أ) أو (ب) فقط** .

٦ **عند إجابتك عن أسئلة الاختيار من متعدد إن وجدت:**

ظلل الدائرة ذات الرمز الدال على الإجابة الصحيحة تظليلاً كاملاً لكل سؤال.

مثال: الإجابة الصحيحة (جـ) مثلا

ⓐ أ	
ب	**الإجابة الصحيحة مثلاً**
● جـ	
د	

- في حالة ما إذا أجبت إجابة خطأ، ثم قمت بالشطب وأجبت إجابة صحيحة تحسب الإجابة صحيحة .
- وفي حالة ما إذا أجبت إجابة صحيحة ، ثم قمت بالشطب وأجبت إجابة خطأ تحسب الإجابة خطأ .

ملحوظة :

في حالة الأسئلة الموضوعية (الاختيار من متعدد) إذا تم التظليل على أكثر من رمز أو تم تكرار الإجابة ؛ تعتبر الإجابة خطأً.

٧ يسمح باستخدام الآلة الحاسبة.

٨ $ت^٢ = -١$، $(١ ، \omega ، \omega^٢)$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

٩ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ هي مجموعة يمينية من متجهات الوحدة.

إجابة نموذج التدريب الأول ٢٠١٨

(١) إذا كان $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$

فإن ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٩ (ج) ١٧ (د) ١٩

$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ ∴ $\frac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{ن - ٥ + ١}{٥} = \frac{٣}{١}$

ن − ٤ = ١٥ ∴ ن = ١٩

(٢) الحد الرابع فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٤}$

حسب قوى س التنازلية يساوي ....

(أ) $٤ س^{٢}$ (ب) $(\frac{١}{س})^{٤}$ (ج) $\frac{٤}{س^{٢}}$ (د) $\frac{١}{س^{٢}}$

$ح_{٤} = {}^{٤}ق_{٣} (\frac{١}{س})^{٣} \times (س)^{١} = ٤ \times \frac{١}{س^{٣}} \times س = \frac{٤}{س^{٢}}$

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢، -٤، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٧، ٢، ١)$ فإن $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$ يساوي :..................

(أ) -٩ (ب) ٢٣ (ج) -٧ (د) ٧

$\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} = ٢\times٧ - ٤\times٢ + ١\times١ = ١٤ - ٨ + ١ = ٧$

(٤) أثبت أن مفكوك $(س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١١}$ لا يحتوي على حد يشتمل على $س^{٣}$.

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} (\frac{٢}{س^{٣}})^{ر} \times (س^{٢})^{١١-ر} = {}^{١١}ق_{ر} \times \frac{(٢)^{ر}}{س^{٣ر}} \times س^{٢٢-٢ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر} \times (٢)^{ر} \times س^{٢٢-٥ر}$ الحد المشتمل على $س^{٣}$

$٢٢ - ٥ر = ٣$ $٥ر = ١٩$ ∴ $ر = \frac{١٩}{٥} \notin ط$

المفكوك لا يحتوى على حد يشمل على $س^{٣}$

---

⑤ أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية (متجاورة) تمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ = (٣، -٤، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، ٢، -٣) ، $\overrightarrow{ج}$ = (٣، ٢، ٢).

حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{أ} \odot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج}|$ = مقياس $\begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

= | ٣(٤ + ٦) ـ صفر + ٣(١٢ ـ ٢) |

= | ٣ × ١٠ + ٣ × ١٠ | = | ٦٠ | = ٦٠ وحدة حجم

---

⑥ عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار على شكل صف بها ١٠ أماكن وقوف يساوي ....

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٦٨ (ج) $ل^{٧}_{٤}$ (د) ٧! ٤!

= (١٠ ـ ٤ + ١) ٤! = ٧ ٤! = ٧ × ٢٤ = ١٦٨

---

⑦ إذا كانت ع = -٥ (جتا ٦٠° - ت جا ٦٠°) ، فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوي ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

ع = ٥(ـ جتا٦٠ + ت جا٦٠) = ٥(جتا (١٨٠ـ٦٠) + ت حا(١٨٠ـ٦٠))

ع = ٥(جتا١٢٠ + ت جا١٢٠)   السعة الأساسية ١٢٠°

---

⑧ طول قطر الكرة التي معادلتها

$٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٣ع^{٢} + ١٨س - ٢٤ص + ١٢ع + ٣ = ٠$

يساوي .... وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{٧}$ (ب) $٤\sqrt{٧}$ (ج) $٦\sqrt{٢٩}$ (د) $١٢\sqrt{٢٩}$

المعادلة: $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦س - ٨ص + ٤ع + ١ = ٠$

مركز الكرة م(−٣ ، ٤ ، −٢)

$$\text{نق} = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢ + (-٢)^٢ + ١} = \sqrt{٩ + ١٦ + ٤ + ١} = \sqrt{٢٨}$$

$\text{نق} = ٢\sqrt{٧}$ ∴ طول قطر الكرة = $٤\sqrt{٧}$ وحدة طول

---

(٩) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^٢+١ & (\text{س}+١)^٢ \\ \text{ص} & \text{ص}^٢+١ & (\text{ص}+١)^٢ \\ \text{ع} & \text{ع}^٢+١ & (\text{ع}+١)^٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بضرب عناصر $\text{ع}_١ \times ٢$ والجمع على $\text{ع}_٢$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^٢ + ٢\text{س}+١ & (\text{س}+١)^٢ \\ \text{ص} & \text{ص}^٢ + ٢\text{ص}+١ & (\text{ص}+١)^٢ \\ \text{ع} & \text{ع}^٢ + ٢\text{ع}+١ & (\text{ع}+١)^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & (\text{س}+١)^٢ & (\text{س}+١)^٢ \\ \text{ص} & (\text{ص}+١)^٢ & (\text{ص}+١)^٢ \\ \text{ع} & (\text{ع}+١)^٢ & (\text{ع}+١)^٢ \end{vmatrix}$$

Δ = صفر لأن $\text{ع}_٢ = \text{ع}_٣$

---

(١٠) قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{\text{س}-٣}{٢} = \frac{\text{ع}+١}{-٢}$ ، ص = ١ ، $\vec{\text{ر}} = (-١، ٢، -١) + \text{ك}(١، ٢، -٢)$ يساوي ....

(أ) ١٥°   (ب) ٣٠°   (ج) ٤٥°   (د) ٦٠°

متجه إتجاه المستقيم الأول $\vec{\text{ه}}_١ = (٢ ، ٠ ، -٢)$ ،

متجه إتجاه المستقيم الثانى $\vec{\text{ه}}_٢ = (١ ، ٢ ، -٢)$

$\|\vec{\text{ه}}_١\| = \sqrt{٤+٠+٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ ، $\|\vec{\text{ه}}_٢\| = \sqrt{١+٤+٤} = ٣$

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{\text{ه}}_١ \odot \vec{\text{ه}}_٢|}{\|\vec{\text{ه}}_١\|\,\|\vec{\text{ه}}_٢\|} = \frac{|٢\times١ + ٠ + ٢\times٢|}{٢\sqrt{٢} \times ٣} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \quad \therefore \theta = ٤٥^\circ$$

(١١) أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

أ- أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ حيث $\|\overrightarrow{أ}\| = ٥$ وحدات ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس.

ب- أثبت أن المثلث أ ب جـ هو مثلث قائم الزاوية فى ب حيث أ (٢، -١، ٣)، ب (-٢، ٥، ١)، جـ (-٤، ٤، ٢)

(أ) ∵ أحداثيات زوايا الاتجاه متساوية فى القياس $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$

جتا$^٢ \theta$ + جتا$^٢ \theta$ + جتا$^٢ \theta$ = ١ ⇐ ٣ جتا$^٢ \theta$ = ١

∴ جتا$^٢ \theta = \frac{١}{٣}$ ⇐ جتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\overrightarrow{أ} = (\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_س$ ، $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ص$ ، $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_ع) = (\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٣}})$

(ب) (أ ب)^٢ = (٢+٢)^٢ + (-١-٥)^٢ + (٣-١)^٢ = ١٦ + ٣٦ + ٤ = ٥٦

(ب جـ)^٢ = (-٢+٤)^٢ + (٥-٤)^٢ + (١-٢)^٢ = ٤ + ١ + ١ = ٦

(أ جـ)^٢ = (٢+٤)^٢ + (-١-٤)^٢ + (٣-٢)^٢ = ٣٦ + ٢٥ + ١ = ٦٢

∴ (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

---

(١٢) إذا كان (١، ω، $\omega^٢$) هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن $(\omega^٢ + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^٢})^٢$ يساوي ....

أ) ٢ ب) صفر جـ) -٣ د) -٥

$(\omega^٢ + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^٢})^٢ = (\omega^٢ + \frac{\omega^٣}{\omega})(١ + \frac{\omega^٣}{\omega^٢})^٢$

$= (\omega^٢ + \omega^٢)(١ + \omega)^٢ = (٢\omega^٢)(-\omega^٢)^٢ = ٢\omega^٢ \times \omega^٤$

$= ٢\omega^٦ = ٢(\omega^٣)^٢ = ٢$

(١٣) طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٣، ١) إلى المستوى ٢س − ٢ص + ع = ٥
هو ...... وحدة طول

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

طول العمود ع = $\dfrac{|٢\times٢ - ٢\times٣ + ١\times١ - ٥|}{\sqrt{٤+٤+١}} = \dfrac{|٤ - ٦ + ١ - ٥|}{\sqrt{٩}} = \dfrac{٦}{٣} = ٢$

---

(١٤) إذا كان ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع هي ....

(أ) $٢هـ^{\frac{-\pi}{٣}ت}$ (ب) $٢هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (جـ) $٢هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (د) $٢هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$

ل = $\sqrt{١+٣} = \sqrt{٤} = ٢$ ، ظا θ = $\dfrac{ص}{س} = \dfrac{-\sqrt{٣}}{١}$

$\therefore \theta = -٦٠^\circ = \dfrac{-\pi}{٣}$ الصورة الأسية هى ع = $٢هـ^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

---

(١٥) باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفات حل المعادلات الآتية:
٢س − ٣ص − ع = ٩
، س + ٢ص + ٣ع = ١٥
، س − ٢ع = ١٢

بفرض أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ $\therefore$ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

$\therefore$ |أ| = ٢ (−٤ − ٠) + ٣(−٢ − ٣) − ١(٠ − ٢) = −٨ − ١٥ + ٣ = −٢١ ≠ ٠

ر (أ) = ٣ يوجد حل وحيد

$أ_{١١}$ = (٢×−٢ − ٣×٠) = −٤ ، $أ_{١٢}$ = −(١×−٢ − ٣×١) = ٥ ، $أ_{١٣}$ = (١×٠ − ١×٢) = −٢

$أ_{٢١}$ = −(−٣×−٢ − ٠×−١) = −٦ ، $أ_{٢٢}$ = (٢×−٢ − ١×−١) = −٣ ، $أ_{٢٣}$ = −(٢×٠ + ٣×١) = −٣

$أ_{٣١}$ = (−٣×٣ + ٢×١) = −٧ ، $أ_{٣٢}$ = −(٢×٣ + ١×١) = −٧ ، $أ_{٣٣}$ = (٢×٢ − ١×−٣) = ٧

$$أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix} \qquad \therefore\ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\ أ^{مل} = \frac{-١}{٢١} \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{-١}{٢١} \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix} = \frac{-١}{٢١} \begin{pmatrix} -٤\times٩ - ٦\times١٥ - ٧\times١٢ \\ ٥\times٩ - ٣\times١٥ - ٧\times١٢ \\ -٢\times٩ - ٣\times١٥ + ٧\times١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \\ -١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١٠ ، ص = ٤ ، ع = -١ ∴ م.ح = { (١٠ ، ٤ ، -١) }

(١٦) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان وأوجد البعد بينهما.

متجة اتجاه العمودى $\overrightarrow{ن_١}$ = (٣ ، ٦ ، ٦) = ٣ (١ ، ٢ ، ٢) ، $\overrightarrow{ن_٢}$ = (١ ، ٢ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{ن_١} = ٣\ \overrightarrow{ن_٢}$ ⟸ $\overrightarrow{ن_١} \parallel \overrightarrow{ن_٢}$ ∴ المستويان متوازيان

بوضع ص=٠ ، ع=٠ فى المستوى الثانى ⟸ النقطة (١ ، ٠ ، ٠) ∈ المستوى

البعد بين المستويين هو طول العمود المرسوم من النقطة على المستوى الأول

طول العمود = ع = $\frac{|٣\times١ + ٦\times٠ + ٦\times٠ - ٤|}{\sqrt{٩ + ٣٦ + ٣٦}} = \frac{|٣ - ٤|}{\sqrt{٨١}} = \frac{١}{٩}$ وحدة طول

(١٧) جيوب تمام قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ١ ، ٢) هي ....

(أ) (-٢، ١، ٢) (ب) (-١، ١، ١)

(ج) $(\frac{٥}{٣}، ٥، \frac{٥}{٢})$ (د) $(\frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣})$

(أ) ∵ جيوب تمام قياسات زوايا الاتجاه للمتجة $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} = \left(\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{س}} \text{ ، } \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ص}} \text{ ، } \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ع}} \right)$

$\text{جتا } \theta_{\text{س}} = \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{-٢}{\sqrt{٤+١+٤}} = \frac{-٢}{٣}$ ، $\text{جتا } \theta_{\text{ص}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{١}{٣}$

$\text{جتا } \theta_{\text{ع}} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ جيوب التمام هى $\left(\frac{-٢}{٣} \text{ ، } \frac{١}{٣} \text{ ، } \frac{٢}{٣} \right)$

---

(١٨) معادلة خط تقاطع المستويين

٢س - ص + ع = ١ ، س - ٣ص - ع = -٢ هي ....

(أ) $\frac{\text{س}+١}{-١} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{ع}}{٣}$ (ب) $\frac{\text{س}-١}{١} = \frac{\text{ص}}{-٣} = \frac{\text{ع}-٥}{١}$

(ج) $\frac{\text{س}-٢}{١} = \frac{\text{ص}-٣}{-٢} = \frac{\text{ع}}{-١}$ (د) $\frac{\text{س}-١}{٤} = \frac{\text{ص}-١}{٣} = \frac{\text{ع}}{-٥}$

متجة اتجاه العمودى $\overrightarrow{\text{ن}}_١ = (٢ ، -١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}_٢ = (١ ، -٣ ، -١)$

∴ خط التقاطع ⊥ على المتجهين ∵ $\overrightarrow{\text{ن}}_١$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}_٢$ العموديين على المستويين

⇐ متجة إتجاه جط التقاطع $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}_١ \times \overrightarrow{\text{ن}}_٢$

متجة اتجاه العمودى $\overrightarrow{\text{ن}}_١ = (١ ، -٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}_٢ = (١ ، ٠ ، ١)$

$\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}_١ \times \overrightarrow{\text{ن}}_٢ = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٣ & -١ \end{vmatrix} = ٤ \overrightarrow{\text{س}} + ٣ \overrightarrow{\text{ص}} - ٥ \overrightarrow{\text{ع}}$

نقطة التقاطع : بوضع س = ١ من (١) ٢ - ص + ع = ١ ⇐ - ص + ع = -١

نقطة التقاطع : بوضع س = ١ من (٢) ١ - ٣ص - ع = -٢ ⇐ - ٣ص - ع = -٣

بحل المعادلتين س = ١ ، ص = ١ ، ع = ٠ $\frac{\text{س}-١}{٤}$

(١ ، ١ ، ٠) ∋ لخط التقاطع المعادلة $\overrightarrow{\text{ر}} = (١ ، ١ ، ٠) + \text{ك } (٤ ، ٣ ، -٥)$

$\frac{\text{س}-١}{٤} = \frac{\text{ص}-١}{٣} = \frac{\text{ع}}{-٥}$

(١٩) أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

أ- إذا كان ع = ٨ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

اكتب الجذور التكعيبية للعدد ع فى الصورة الأسية.

ب- أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (-٥-١٢ت).

(أ) $ع^{\frac{1}{٣}} = \sqrt[٣]{٨}$ [جتا $\frac{٣٠ + ٣٦٠ر}{٣}$ + ت جا $\frac{٣٠ + ٣٦٠ر}{٣}$]

بوضع ر = صفر ⇐ $ع_١$ = ٢ (جتا ١٠ + ت جا ١٠) = ٢ $هـ^{\frac{\pi}{١٨}ت}$

بوضع ر = ١ ⇐ $ع_٢$ = ٢ (جتا ١٣٠ + ت جا ١٣٠) = ٢ $هـ^{\frac{١٣\pi}{١٨}ت}$

بوضع ر = ٢ ⇐ $ع_٣$ = ٢ (جتا ٢٥٠ + ت جا ٢٥٠) = ٢ $هـ^{\frac{٢٥\pi}{١٨}ت}$

(ب) بفرض س + ت ص = $\sqrt{-٥-١٢ت}$

بالتربيع $س^٢$ + ٢ت س ص ـ $ص^٢$ = ـ٥ ـ ١٢ت

بالمقارنة ⇐ $س^٢$ ـ $ص^٢$ = ـ٥ - - (١) ، ٢س ص = ١٢ - - (٢)

نتربيع (٢) $س^٤$ ـ ٢ $س^٢ ص^٢$ + $ص^٤$ = ٢٥ ، ٤س ص = ١٤٤

من(٢) $س^٤$ + ٢ $س^٢ ص^٢$ + $ص^٤$ = $(س^٢ + ص^٢)^٢$ = ١٦٩

بأخذ الجذر $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٣ - - (٣)

بجمع (١) ، (٣) ٢ $س^٢$ = ٨ ⇐ $س^٢$ = ٤ ∴ س = ± ٢

من (٢) عندما س=٢ ⇐ ص = ـ٣ ، س= ـ٢ ⇐ ص= ٣

∴ $\sqrt{-٥-١٢ت}$ = ± (٢ ـ ٣ت)

إجابة نموذج التدريب الثانى ٢٠١٨

(١) اشترك ١٢ لاعبًا في مسابقة للسباحة . كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث ؟

(أ) ٢٢٠ (ب) ١٣٢٠ (ج) ٧٢ (د) ٦٠

عدد الطرق = ${}^{١٢}ل_{٣}$ = ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٣٢٠

---

(٢) في مفكوك $(٢س + \frac{١}{س^{٢}})^{١٥}$ أوجد قيمة الحد الخالي من س وأثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يحتوي على $س^{٥}$.

$ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} \times (٢س)^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} \times \frac{١}{س^{٢ر}} \times (٢)^{١٥-ر} \times س^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} \times (٢)^{١٥-ر} \times س^{١٥-٣ر}$ الحد الخالى من س

١٥ ـ ٣ر = ٠ ⇐ ٣ر = ١٥ ∴ ر = ٥ ⇐ $ح_{٦}$ هو الحد الخالى من س

$ح_{٦} = {}^{١٥}ق_{٥} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥} \times (٢س)^{١٠} = {}^{١٥}ق_{٥} (٢)^{١٠} = ٣٠٧٥٠٧٢$

الحد المشتمل على $س^{٥}$ ١٥ ـ ٣ر = ٥

⇐ ٣ر = ١٠ ∴ ر = $\frac{١٠}{٣} \notin ط$ ∴ المفكوك لا يحتوى على $س^{٥}$

---

(٣) إذا كان ${}^{أ+ب}ل_{٣} = س$، ${}^{أ-ب}ل_{٢} = ص$ فإن أقل قيمة للعدد $\lfloor س - ص$ تساوي ....

(أ) ٧٢٠ (ب) ٢٤ (ج) ١٢٠ (د) ٤

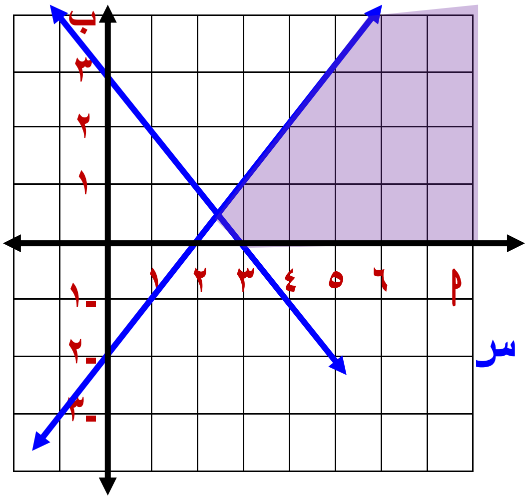
من التعريف أ + ب ⩾ ٣ ، أ ـ ب ⩾ ٢

أ	٠	٣
ب	٣	٠

أ	٠	٢
ب	٢-	٠

من تمثيل الدالتين منطقة الحل

(٣ ، ٠) ، ($٢\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)



عند(٣ ، ٠) $ل_{٣}^{أ+ب} = ل_{٣}^{٣+٠} = ل_{٣}^{٣} = ٦ = س$

$ل_{٢}^{أ-ب} = ل_{٢}^{٣-٠} = ل_{٢}^{٣} = ٦ = ص$

∴ $(س - ص)! = (٦ - ٦)! = (صفر)! = ١$

عند($٢\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) $ل_{٣}^{أ+ب} = ل_{٣}^{٢\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}} = ل_{٣}^{٣} = ٦ = س$

$ل_{٢}^{أ-ب} = ل_{٢}^{٢\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}} = ل_{٢}^{٢} = ٢ = ص$

∴ $(س - ص)! = (٦ - ٢)! = ٤! = ٢٤$ ١

---

④ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{ص}{س^{٢}}\right)^{٨ن}$ هو الحد التاسع فإن ن = ...

ⓐ ١ ⓑ ٣ ⓒ ٢ ⓓ ٤

رتبة الحد الأوسط = $\frac{٨ن + ١) + ١}{٢}$ = ٩

٤ن + ١ = ٩ ⇐ ٤ن = ٨ ∴ ن = ٢

---

⑤ إذا كان |ع| = |ع + ٢| فإن الجزء الحقيقي للعدد المركب ع = ...

ⓐ ١ ⓑ ٢- ⓒ ٢ ⓓ ١-

بفرض: ع = س + ت ص ⇐ $|ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

ع + ٢ = س+٢ + ت ص ⇐ $|ع + ٢| = \sqrt{(س+٢)^{٢} + ص^{٢}}$

∵ |ع| = |ع + ٢| ⇐ $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(س+٢)^{٢} + ص^{٢}}$

∴ $س^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + ٤س + ٤ + ص^{٢}$ ⇐ ٤ س + ٤ = ٠

∴ س = ـ١ (الجزء الحقيقى للعدد المركب ع = ـ١)

⑥ الصورة الأسية للعدد ع = ٢ − ٢ $\sqrt{3}$ ت هي ....

(أ) $هـ^{\frac{8\pi}{3}ت}$ (ب) $2هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$ (ج) $4هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$ (د) $4هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}$

$ل = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$ظا\,\theta = \frac{ص}{س} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Leftarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$ ∴ $ع = 4\,هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$

⑦ إذا كانت (١، ω، ω²) هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن:

$(5\omega + 2 + 5\omega^2)^3 =$ ....

(أ) ٣٤٣ (ب) −٣٤٣ (ج) ٢٧ (د) −٢٧

$((5\omega + 5\omega^2) + 2)^3 = (-5 + 2)^3 = (-3)^3 = -27$

⑧ **أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:**

أ- ضع العدد ١ - $\sqrt{3}$ ت في الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التربيعية له.

ب- إذا كان ع = $هـ^{\theta ت}$ ، فأثبت أن $\frac{1+ع}{1-ع} = ت\,ظتا\,\frac{\theta}{2}$

(أ) $ل = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ ، $ظا\,\theta = \frac{ص}{س} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$\Leftarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$ ∴ $ع = 2\,هـ^{-\frac{\pi}{3}ت} = 2\,(جتا\,{-60} + ت\,جا\,{-60})$

∴ $ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(جتا\,\frac{-60 + 360ر}{2} + ت\,جا\,\frac{-60+360ر}{2}\right)$

بوضع ر = صفر $\Leftarrow ع_1 = \sqrt{2}\,(جتا\,{-30} + ت\,جا\,{-30}) = \sqrt{2}\,هـ^{\frac{-\pi}{6}ت}$

بوضع ر = ١ $\Leftarrow ع_2 = \sqrt{2}\,(جتا\,150 + ت\,جا\,150) = \sqrt{2}\,هـ^{\frac{5\pi}{6}ت}$

(ب) $ع = هـ^{\theta ت} = جتا\theta + ت\,جا\theta$

$\frac{1 + ع}{1 - ع} = \frac{1 + جتا\theta + ت\,جا\theta}{1 - جتا\theta - ت\,جا\theta}$

$جتا\,\theta = 2\,جتا^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\,جا^2\frac{\theta}{2}$

$جا\,\theta = 2\,جا\frac{\theta}{2}\,جتا\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{\cancel{١} + ٢ جتا^٢ \frac{\theta}{٢} \cancel{- ١} + ٢ت جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢}}{\cancel{١ - ١} + ٢ جا^٢ \frac{\theta}{٢} - ٢ت جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢}}$$

$$= \frac{\cancel{٢} جتا \frac{\theta}{٢} (جتا \frac{\theta}{٢} + ت جا \frac{\theta}{٢})}{\cancel{٢} جا \frac{\theta}{٢} (جا \frac{\theta}{٢} - ٢ت جتا \frac{\theta}{٢})} = ظتا \frac{\theta}{٢} \times \frac{(جتا \frac{\theta}{٢} + ت جا \frac{\theta}{٢})}{جا (٢٧٠ + \frac{\theta}{٢}) - ٢ت جتا (٢٧٠ + \frac{\theta}{٢})}$$

$$= ظتا \frac{\theta}{٢} [جتا (\frac{\theta}{٢} - ٢٧٠ + \frac{\theta}{٢}) + ت جا (\frac{\theta}{٢} - ٢٧٠ + \frac{\theta}{٢})]$$

$$= ظتا \frac{\theta}{٢} [جتا (-٢٧٠) + ت جا (-٢٧٠)] = ظتا \frac{\theta}{٢} [جتا ٩٠ + ت جا ٩٠]$$

$$= ظتا \frac{\theta}{٢} [صفر + ت \times ١] = ت ظتا \frac{\theta}{٢}$$

---

(٩) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١+ص & ١ & ١ \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix} = ص^٢$$

بضرب $ع_١ \times -١ + ع_٢$ ، $ع_١ \times -١ + ع_٣$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١+ص & -ص & -ص \\ ١ & ص & ٠ \end{vmatrix} \overset{-ع_٢ + ع_٣}{=} \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ١+ص & -ص & ٠ \\ ١ & ص & -ص \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١ \times -ص \times -ص = ص^٢$$

---

(١٠) معادلة الكرة التي مركزها (٠ ، ٤ ، ٠)

وتمس المستوى الإحداثي س ص ع هي ....

(أ) $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ٠$ (ب) $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$

(ج) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$ (د) $(س-٤)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$

نق = | ص | = | ٤ | = ٤

$$(س - ٠)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٠)^٢ = (٤)^٢ \Leftarrow س^٢ + (ص - ٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$$

(١١) حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

س - ص + ٣ع = -٤

٢س + ص = ٤

٣س + ص - ع = ٨

بفرض أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix}$

∴ |أ| = ١ (-١ - ٠) + ١ (-٢ - ٠) + ٣ (٢ - ٣) = - ١ - ٢ - ٣ = -٦ ≠ ٠

ر (أ*) = ر (أ) = ٣ يوجد حل وحيد

$أ_{١١}$ = (١×-١ - ١×٠) = -١ ، $أ_{١٢}$ = - (٢×-١ - ٣×٠) = ٢ ، $أ_{١٣}$ = (٢×١ - ٣×١) = -١

$أ_{٢١}$ = - (-١×-١ - ١×٣) = -٢ ، $أ_{٢٢}$ = (١×-١ - ٣×٣) = -١٠ ، $أ_{٢٣}$ = - (١×١ + ٣×١) = -٤

$أ_{٣١}$ = (-١×٠ - ٣×١) = -٣ ، $أ_{٣٢}$ = - (١×٠ - ٣×٢) = ٦ ، $أ_{٣٣}$ = (١×١ - ٢×-١) = ٣

$أ^{مل}$ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & -١٠ & ٦ \\ -١ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $أ^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ $أ^{مل}$ = $\frac{-١}{٦}$ $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & -١٠ & ٦ \\ -١ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = $\frac{-١}{٦}$ $\begin{pmatrix} -١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & -١٠ & ٦ \\ -١ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ × $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٤ \\ ٨ \end{pmatrix}$ = $\frac{-١}{٦}$ $\begin{pmatrix} -١×-٤ + ٢×٤ - ٣×٨ \\ ٢×-٤ - ١٠×٤ + ٦×٨ \\ -١×-٤ - ٤×٤ + ٣×٨ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ٠ ، ع = -٢ ∴ م.ح = { (٢ ، ٠ ، -٢) }

---

(١٢) إذا كان ٣٠°، ٧٠°، θ هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٦٠° (د) ٦٨,٦١°

جتا² ٣٠ + جتا² ٧٠ + جتا² θ = ١ ⇐ جتا² θ = ١ - جتا² ٣٠ - جتا² ٧٠

جتا² θ ≃ ٠,١٣٣ ⇐ جتا θ ≃ ± ٠,٣٦ ∴ θ = $جتا^{-١}$ ٠,٣٦ = ٦٨° ٥٤′

(١٣) قياس الزاوية بين المستقيمين

$ل_١$: س = ٢-٥ك ، ص = ١-ك ، ع = ٣ + ٤ك ،

$ل_٢$: $\frac{س+١}{٣} = \frac{٢-ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$ يساوي ....

(أ) ٧٥° (ب) ٨٣° (ج) ٣٥ /٤٠° (د) ٤ /٨٥°

متجة اتجاه $\overrightarrow{ه_١}$ = (ـ٥ ، ـ١ ، ٤) ، $\overrightarrow{ه_٢}$ = (٣ ، ـ٤ ، ٢)

$\| \overrightarrow{ه_١} \| = \sqrt{٢٥+١+١٦} = \sqrt{٤٢}$ ، $\| \overrightarrow{ه_٢} \| = \sqrt{٩+١٦+٤} = \sqrt{٢٩}$

جتا $\theta = \frac{| \overrightarrow{ه_١} \odot \overrightarrow{ه_٢} |}{\| \overrightarrow{ه_١} \| \, \| \overrightarrow{ه_٢} \|} = \frac{| ـ١٥+٤ +٨ |}{\sqrt{٤٢} \times \sqrt{٢٩}} \simeq ٠,٠٨٦٠$ ∴ θ = ٤ /٨٥°

(١٤) المستقيمان $\overleftarrow{ر_١}$ = (١، ٢، ٤) + $ك_١$ (٢، -١، ١)،

$\overleftarrow{ر_٢}$ = (١، ٢، ٤) + $ك_٢$ (-٢، ٧، ١١) يكونان ....

(أ) متوازيان (ب) متخالفان (ج) متعامدان (د) منطبقان

متجة اتجاه $\overrightarrow{ه_١}$ = (٢ ، ـ١ ، ١) ، $\overrightarrow{ه_٢}$ = (ـ٢ ، ٧ ، ١١)

$\overrightarrow{ه_١} . \overrightarrow{ه_٢}$ = ٢×ـ٢ ـ١×٧ + ١×١١ = ـ٤ ـ٧ + ١١ = صفر

∴ $\overrightarrow{ه_١} \perp \overrightarrow{ه_٢}$ متعامدان

(١٥) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط (٧، ١، ٣)، (٥، ٣، ٤)، (٣، ٥، ٣)

هو مثلث متساوي الساقين.

أب = $\sqrt{(٧ـ٥)^٢ + (١ـ٣)^٢ + (٣ـ٤)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٤ + ١}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدة طول

ب حـ = $\sqrt{(٥ـ٣)^٢ + (١ـ٣)^٢ + (٣ـ٤)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٤ + ١}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدة طول

أ حـ = $\sqrt{(٧ـ٣)^٢ + (١ـ٥)^٢ + (٣ـ٣)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٦ + ٠}$ = $\sqrt{٢٠}$ وحدة طول

أب = ب حـ ∴ Δ أ ب حـ متساوى الساقين

⑯ إذا كانت θع هي الزاوية التي يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ١) ونقطة الأصل مع الاتجاه الموجب لمحور ع فإن جتاθع :.................

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{١١}}$ (جـ) $\frac{١}{١١}$ (د) $\frac{١}{٣}$

أ(٣ ، -١ ، ١) ، و (٠،٠،٠)

متجة اتجاه $\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{و}$ = (٣ ، -١ ، ١) - (٠،٠،٠) = (٣ ، -١ ، ١)

متجة الوحدة فى اتجاه محور $\overrightarrow{ع}$ =(٠،١،٠)

$$جتا\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ} \odot \overrightarrow{ع}|}{\|\overrightarrow{هـ}\|\,\|\overrightarrow{ع}\|} = \frac{|٠+٠+١|}{\sqrt{٩+١+١} \times \sqrt{١}} = \frac{١}{\sqrt{١١}}$$

⑰ طول العمود المرسوم من النقطة (١، ٥، -٤) على المستوى الذي معادلته ٣ س - ص + ٢ع = ٦ هو ....وحدة طول.

(أ) $\frac{٨}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\frac{٨}{٧}$ (د) $\frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$

$$طول\ العمود = ع = \frac{|٣\times١ - ١\times٥ + ٢\times-٤ - ٦|}{\sqrt{٩+١+٤}} = \frac{|-١٦|}{\sqrt{١٤}} = \frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$$ وحدة طول

⑱ أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

أ- أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، -١، ٠) والمتجه $\overrightarrow{ن} = ٤\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$ عمودي عليه.

ب- أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما (١، ١، ٢)، ($\sqrt{٣}$، -١، -$\sqrt{٣}$، -١، ٤)

(أ) $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، -١ ، ٠) ، $\overrightarrow{ن}$ = (٤ ، ١٠ ، -٧)

$\overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \odot \overrightarrow{أ}$ ⟸ (٤ ، ١٠ ، -٧) $\odot \overrightarrow{ر}$ = (٤ ، ١٠ ، -٧) $\odot$ (٢ ، -١ ، ٠)

(٤ ، ١٠ ، -٧) $\odot \overrightarrow{ر}$ = ٨ - ١٠ - ٠ = -٢

٤(س - ٢) + ١٠(ص + ١) - ٧(ع - ٠) = ٠ ⟸ ٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = ٠

(ب) متجة اتجاه $\overrightarrow{هـ_١} = (١ ، ١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{هـ_٢} = (\sqrt{٣}-١ ، -\sqrt{٣}-١ ، ٤)$

$$جتا\,\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_١} \odot \overrightarrow{هـ_٢}|}{\|\overrightarrow{هـ_١}\|\,\|\overrightarrow{هـ_٢}\|} = \frac{|(\sqrt{٣}-١-\sqrt{٣}-١+٨|}{\sqrt{١+١+٤}\times\sqrt{٢٤}} = \frac{١}{٢} \quad \therefore \theta = ٦٠^\circ$$

(١٩) إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع في النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب. احسب مساحة Δ أ ب جـ.

٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ بقسمة الطرفين على ١٢

$$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$$

المستوى يقطع المحاور $\overleftrightarrow{س}$ ، $\overleftrightarrow{ص}$ ، $\overleftrightarrow{ع}$ فى النقاط أ ، ب ، حـ

أ = (٤ ، ٠ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦ ، ٠) ، حـ = (٠ ، ٠ ، ٣)

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، ٦ ، ٠) - (٤ ، ٠ ، ٠) = (-٤ ، ٦ ، ٠)$

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، ٠ ، ٣) - (٤ ، ٠ ، ٠) = (-٤ ، ٠ ، ٣)$

متجة اتجاه العمودى $\overrightarrow{ى_١} = (١ ، ١ ، -٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ى_٢} = (١ ، ٠ ، ١)$

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ١٨\,\overrightarrow{س} - ١٢\,\overrightarrow{ص} + ٢٤\,\overrightarrow{ع}$$

$$مساحة\ \Delta\ أ ب حـ = \frac{١}{٢}\,\|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}\| = \frac{١}{٢}\sqrt{(١٨)^٢ + (١٢)^٢ + (٢٤)^٢}$$

$$= \frac{٦}{٢}\sqrt{٩+٤+١٦} = ٣\sqrt{٢٩}\ \text{وحدة مربعة}$$

إجابة نموذج التدريب الثالث ٢٠١٨

(١) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ل_{ر} = \frac{١}{٦}$ فإن $\underline{|ر - ٣} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٦

$$^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ل_{ر} = \frac{\cancel{^{ن}ل_{ر}}}{\underline{|ر}} \times \frac{١}{\cancel{^{ن}ل_{ر}}} = \frac{١}{٦} \qquad \underline{|ر} = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١$$

$$\therefore ر = ٣ \Leftarrow \underline{|ر - ٣} = \underline{|٣ - ٣} = \underline{|\text{صفر}} = ١$$

(٢) الحد الاخير في مفكوك $(٢ - س)^{٥} (٢ + س)^{٥}$ حسب قوى س التصاعدية هو ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $- س^{٥}$ (جـ) $س^{١٠}$ (د) $- س^{١٠}$

$$(٢ - س)^{٥} (٢ - س)^{٥} = (٤ - س^{٢})^{٥} \qquad \text{الحد الأخير هو } (- س^{٢})^{٥} = - س^{١٠}$$

(٣) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، -٣ ، ٤) على محور س يساوي .... وحدة طول

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

$$\text{طول العمود على محور } \overleftrightarrow{س} = \sqrt{ص^{٢} + ع^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٩ + ١٦} = ٥ \text{ وحدة طول}$$

(٤) قياس الزاوية الحادة بين المتجهين (٠ ، - ب ، ب) ، (ب ، - ب ، ٠) يساوي ....°

حيث ب ثابت ≠ صفر.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

متجة اتجاه $\overrightarrow{ه_{١}} = (٠ ، - ب ، ب)$ ، $\overrightarrow{ه_{٢}} = (ب ، - ب ، ٠)$

$$\text{جتا } \theta = \frac{|\overrightarrow{ه_{١}} \odot \overrightarrow{ه_{٢}}|}{\|\overrightarrow{ه_{١}}\| \, \|\overrightarrow{ه_{٢}}\|} = \frac{|٠ + ب^{٢} + ٠|}{\sqrt{٠ + ب^{٢} + ب^{٢}} \times \sqrt{ب^{٢} + ب^{٢} + ٠}} = \frac{\cancel{ب^{٢}}}{٢\cancel{ب^{٢}}} \therefore \theta = ٦٠°$$

(٥) أجب عن إحدى المفردتين الآتيتين :-

في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية

(أ) أوجد النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الثامن.

(ب) أوجد النسبة بين معامل الحد الاوسط ومعامل الحد العاشر.

$$\text{(أ)} \quad ع_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{١٢-ر}$$

$$= {}^{١٢}ق_{ر} \times \frac{١}{س^{ر}} \times س^{٢٤-٢ر} = {}^{١٢}ق_{ر} \times س^{٢٤-٣ر}$$

الحد الخالى من س

$٢٤ - ٣\text{ر} = ٠ \Leftarrow ٣\text{ر} = ٢٤ \quad \therefore \text{ر} = ٨$

$\Leftarrow$ $\text{ع}_٩$ هو الحد الخالى من س $\quad \dfrac{\text{ع}_٩}{\text{معامل ع}_٨} = \dfrac{١٢ - ٨ + ١}{٨} \times ١ = \dfrac{٥}{٨}$

(ب) رتبة الحد الأوسط $= \dfrac{١٢+١}{٢} = ٧$

$\dfrac{\text{معامل ع}_٧}{\text{معامل ع}_{١٠}} = \dfrac{{}^{١٢}\text{ق}_٦}{{}^{١٢}\text{ق}_٩} = \dfrac{\lfloor١٢}{\lfloor٦ \times \lfloor٦} \div \dfrac{\lfloor١٢}{\lfloor٩ \times \lfloor٣}$

$= \dfrac{\cancel{\lfloor١٢}}{٦\times٥\times٤\times\cancel{\lfloor٣}\times\cancel{\lfloor٦}} \times \dfrac{٩\times٨\times٧\times\cancel{\lfloor٦}\times\cancel{\lfloor٣}}{\cancel{\lfloor١٢}} = \dfrac{٩\times٨\times٧}{٦\times٥\times٤} = \dfrac{٢١}{٥}$

(٦) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ـ ١ ـ ت هي ....

(أ) $\dfrac{\pi}{٤}$ (ب) $\dfrac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\dfrac{-٣\pi}{٤}$ (د) $\dfrac{٥\pi}{٤}$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{-١}{-١} = ١ \quad \theta = ٤٥^\circ = \dfrac{\pi}{٤}$ فى الربع الثالث

$\therefore$ السعة الأساسية للعدد ع $= \theta = -\pi + \dfrac{\pi}{٤} = -\dfrac{٣\pi}{٤}$

(٧) قيمة $\left(\dfrac{١}{١+\text{ت}\,\omega} - \dfrac{\omega+\text{ت}}{١+\text{ت}\,\omega^٢}\right)^٨ = ...$

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ ت (د) ٨ ت

$\left(\dfrac{١+\text{ت}\,\omega^٢ - (\omega+\text{ت})(١+\text{ت}\,\omega)}{(١+\text{ت}\,\omega^٢)(١+\text{ت}\,\omega)}\right)^٨$

$= \left(\dfrac{\cancel{١}+\cancel{\text{ت}\,\omega^٢} - \text{ت} - \cancel{\omega} - \cancel{\text{ت}\,\omega^٢} + \cancel{\omega}}{\cancel{١} + \text{ت}\,\omega + \text{ت}\,\omega^٢ - \cancel{١}}\right)^٨$

$= \left(\dfrac{١-\text{ت}}{\text{ت}\,(\omega^٢+\omega)}\right)^٨ = \left(\dfrac{١-\text{ت}}{-\text{ت}}\right)^٨ = \left(\dfrac{(١-\text{ت})^٢}{(-\text{ت})^٢}\right)^٨ =$

$= \left(\dfrac{١-٢\text{ت}-١}{١}\right)^٤ = (٢\,\text{ت})^٤ = ١٦$

(٨) بدون فك المحدد حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ٢س & ٣س \\ ٣س & ٢س & س \\ ٠ & -س & س \end{vmatrix} = ٩٦$

بتبديل ع١ مع ع٣

$\Delta = - \begin{vmatrix} ٣س & ٢س & س \\ س & ٢س & ٣س \\ س & -س & ٠ \end{vmatrix} = ٩٦$ ـ٣× ص١ + ص٢ $= - \begin{vmatrix} ٣س & ٢س & س \\ -٨س & -٤س & ٠ \\ س & -س & ٠ \end{vmatrix}$

− ع٣ + ع٢ $\Delta = - \begin{vmatrix} ٣س & ٥س & س \\ -٨س & -١٢س & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٩٦ \Leftarrow -(س \times -١٢س \times س) = ٩٦$

$١٢ س^٣ = ٩٦ \Leftarrow س^٣ = ٨ \quad \therefore س = ٢ \qquad$ م.ح = {٢}

(٩) عدد حلول النظام : ٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٣ ص = ٦ هو ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عدد لا نهائي من الحلول

بحل المعادلتين م.ح = {(٠ ، ٢)} حل وحيد ويمكن بالمصفوفات

(١٠) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{س}{٢} + \frac{٣}{س} \right)^{٢ن}$ هو الحد السابع فإن ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٤

عدد الحدود = ٢ ن + ١ عدد فردى رتبة الحد الأوسط = $ع_٧$

(٢ن + ١ + ١) ÷ ٢ = ن + ١ = ٧ ∴ ن = ٦

(١١) حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\vec{أ}$ = (٠ ، ٠ ، ٢) ، $\vec{ب}$ = (٨ ، ٠ ، ٠) ، $\vec{جـ}$ = (٠ ، ٤ ، ٠) =............وحدة مكعبة.

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

حجم متوازى السطوح = $|\vec{أ} \odot \vec{ب} \times \vec{جـ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٨ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$

$= |٢ (٣٢ - ٠)| = ٦٤$ وحدة حجم

(١٢) أجب عن إحدى المفردتين الآتيتين :-

أ - أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، - ٢ ، ٥) والمتجه (١ ، - ٢ ، ٢) متجه اتجاه له.

ب - إذا كان $\overleftarrow{جـ}$ = (٢ ، ١ ، - ٢) ، $\overleftarrow{جـ}$ + $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{جـ}$ × $\overleftarrow{ب}$ فأوجد || $\overleftarrow{ب}$ ||

(أ) $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، ـ٢ ، ٥) + ك (١ ، ـ٢ ، ٢) الصورة المتجة

س = ٤ + ك ، ص = ـ٢ ـ٢ ك ، ع = ٥ + ٢ك الصورة البارمترية

$\frac{س - ٤}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع - ٥}{٢}$ الصورة الأحداثية

(ب) ∵ $\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{جـ}$ عمودى على مستوى المتجهين $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$

∴ $\overleftarrow{ب}$ × $\overleftarrow{جـ}$ = $\overleftarrow{و}$ ∴ $\overleftarrow{ب}$ + $\overleftarrow{جـ}$ = $\overleftarrow{و}$

∴ $\overleftarrow{ب}$ = ـ $\overleftarrow{جـ}$ = (ـ٢ ، ـ١ ، ٢) ∴ || $\overleftarrow{ب}$ || = $\sqrt{٤+١+٤}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

---

(١٣) طول قطر الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ س + ٤ ص – ٢ ع = ١١ يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

مركز الدائرة = (ـ $\frac{١}{٢}$ معامل س ، ـ $\frac{١}{٢}$ معامل ص ، ـ $\frac{١}{٢}$ معامل ع) = (٣ ، ـ٢ ، ١)

نق = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢ + (١)^٢ - (-١١)}$ = $\sqrt{٩ + ٤ + ١ + ١١}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

---

(١٤) حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

٢ س + ع = ٥ ، س + ص = ٣ ، ع – ص = ١

بفرض أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ | أ | = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

∴ | أ | = ٢ (١ـ٠) ـ صفر + ١(ـ١ ـ٠) = ٢ ـ ٠ ـ ١ = ١ ≠ ٠

ر (أ*) = ر (أ) = ٣ يوجد حل وحيد

$أ_{١١}$ = (١×١ ـ١×٠) = ١ ، $أ_{١٢}$ = ـ (١× ١ـ٠×٠) = ـ١ ، $أ_{١٣}$ = (١×ـ١ ـ٠×١) = ـ١

$أ_{٢١}$ = ـ (٠×١+١×ـ١) = ـ١ ، $أ_{٢٢}$ = (٢×١ ـ١×٠) = ٢ ، $أ_{٢٣}$ = ـ (٢×ـ١ +٠×٠) = ٢

$أ_{٣١}$ = (٠×٠ـ١×١) = ـ١ ، $أ_{٣٢}$ = ـ (٢×٠ـ١×١) = ١ ، $أ_{٣٣}$ = (٢×١ـ١×٠) = ٢

$أ^{مل} = \begin{pmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} أ^{مل} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٢ & -١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١\times١ - ٣\times١ - ٥\times١ \\ ١\times١ + ٣\times٢ + ٥\times١- \\ ١\times٢ + ٣\times٢ + ٥\times١- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ∴ م.ح = { (١ ، ٢ ، ٣) }

(١٥) إذا كان المستقيمان $\frac{س+١}{٣} = \frac{٢-ص}{٣} = \frac{ع-٣}{٦}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص+١}{-٢} = \frac{ع-١}{ك}$ متوازيان ، فإن ك = ...

(أ) -٦ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) -٤

متجة اتجاه المستقيم الأول $\overrightarrow{هـ_١}$ = (٣ ، -٣ ، ٦)

، متجة اتجاه المستقيم الثانى $\overrightarrow{هـ_٢}$ = (٢ ، -٢ ، ك) المستقيمان متوازيان

$\frac{٣}{٢} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٦}{ك}$ ∴ ك = $\frac{٦ \times ٢}{٣}$ = ٤

(١٦) إذا كان المستقيم $\frac{س}{٣}$ = ص = $\frac{ع}{-٣}$ يوازي المستوى س + ك ص + ٢ ع + ك = ٠

فإن ك = ...

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٦

متجة اتجاه المستقيم الأول $\overrightarrow{هـ}$ = (٣ ، ١ ، -٣)

، متجة اتجاه العمودى على المستوى ن $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، ك ، ٢)

المستقيم// المستوى $\overrightarrow{هـ} \perp \overrightarrow{ن}$ $\overrightarrow{هـ} . \overrightarrow{ن}$ = صفر

٣×١ + ١×ك -٣×٢ = ٣ + ك - ٦ = ٠ ∴ ك =٣

(١٧) إذا كان ع١ = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، ع٢ = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

فأوجد $(ع_١ \div ع_٢)^٦$ على الصورة الأسية

ع١ = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ل = $\sqrt{١+٣}$ = ٢ ظا θ = $\frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{٣}}{١}$ ⇐ θ = ٦٠°

$ع_1 = ٢\,(جتا ٦٠ + ت\, جا ٦٠)$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{٢\,(جتا ٦٠ + ت\, جا ٦٠)}{\sqrt{٢}\,(جتا ٤٥ + ت\, جا ٤٥)} = \sqrt{٢}\,(جتا ١٥ + ت\, جا ١٥)$$

$$\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)^{٦} = \left[\sqrt{٢}\,(جتا ٤٥ + ت\, جا ٤٥)\right]^{٦} = (\sqrt{٢})^{٦}\,(جتا ١٥ + ت\, جا ١٥)^{٦}$$

$$= ٨\,[جتا (٦ \times ١٥) + ت\, جا (٦ \times ١٥)] = ٨\,[جتا ٩٠ + ت\, جا ٩٠] = ٨\, هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$$

(١٨) أوجد طول العمود الساقط من النقطة (١ ، -٦ ، ٣) على المستوى الذي معادلته :
$\overrightarrow{ر} \odot (٢ ، -٢ ، ١) = ٥$

معادلة المستوى ٢س - ٢ص + ع - ٥ = ٠

$$طول\ العمود\ ع = \frac{|٢\times١ - ٢\times-٦ + ١\times٣ - ٥|}{\sqrt{٤+٤+١}} = \frac{|١٧ - ٥|}{\sqrt{٩}} = \frac{١٢}{٣} = ٤\ وحدة\ طول$$

(١٩) أوجد نقطة تقاطع المستقيم : س = ص = ع مع المستوى : $\overrightarrow{ر} \odot (١ ، ٢ ، ٣) = ١٢$

س = ص = ع = م ، معادلة المستوى س + ٢ص + ٣ع - ١٢ = ٠

م + ٢م + ٣م = ١٢ ⇐ م = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢،٢،٢)