حاول أن تحل

(١) حل المعادلات الآتية:

٢س - ٣ص - ع = ٩ ، س + ٢ص + ٣ع = ١٥ ، س - ٢ع = ١٢

باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات

٢س − ٣ص − ع = ٩

س + ٢ص + ٣ع = ١٥

س + ٠ص − ٢ع = ١٢

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix} \qquad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \qquad ب = \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$$

$$|أ| = ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} - (-٣)\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} + (-١)\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = -٨ - ١٥ + ٢ = -٢١$$

$$م = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$م = \begin{pmatrix} -٤ & ٥ & -٢ \\ -٦ & -٣ & -٣ \\ -٧ & -٧ & ٧ \end{pmatrix} \qquad \therefore أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} \qquad \therefore أ^{-١} = \frac{١}{-٢١} \begin{pmatrix} -٤ & -٦ & -٧ \\ ٥ & -٣ & -٧ \\ -٢ & -٣ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$س = أ^{-١} . ب$$

٣

تعبير شفهي: بين أي نظام من الأنظمة الآتية يمثل نظام معادلات خطية متجانسة و أيها يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة.

١ ٣س +٢ص -٥ع =٠ ، ٥س -٣ص +٢ع =٤ ، س -٢ع =٠

٢ ٢س +٣ص =٥ع ، ٣س +ع =٤ص ، س +ع =٠

٣س + ٢ص - ٥ع = ٠
٥س - ٣ص + ٢ع = ٤
س - ٠ص - ٢ع = ٠

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & -٣ & ٢ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}}_{\text{أ}} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}}_{\text{س}} = \underbrace{\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}}_{\text{ب}}$$

∴ معادلات خطية غير متجانسة لأن المصفوفة
ب بها عنصر لا يساوي الصفر

٢س + ٣ص - ٥ع = ٠
٣س - ٤ص + ع = ٠
س + ٠ص + ع = ٠

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -٥ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}}_{\text{أ}} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}}_{\text{س}} = \underbrace{\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}}_{\text{ب}}$$

معادلات خطية متجانسة لأن جميع عناصر المصفوفة ب صفرية

(٤)

حاول أن تحل

(٢) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١,٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ المصفوفة على النظام ٢ × ٣

∴ أعلى رتبة للمحدد ممكن أن تكون هو ٢ × ٢

$\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٢ × ٥ − ٣ × ٧ = ١٠ − ٢١ = −١١ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٢

ب = $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ المصفوفة من نظام ٢ × ٣

∴ أعلى رتبة تكون ٢

$\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢} & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ − ٣ × ١ = ٣ − ٣ = صفر

$\begin{vmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٣ × ٦ − ٢ × ٩ = ١٨ − ١٨ = صفر

$\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢} & ٩ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix}$ = $\frac{٣}{٢}$ × ٦ − ٩ = ٩ − ٩ = صفر

∴ قيمة المحددات الثلاثة = صفر ∴ ر(ب) < ٢

∴ ر(ب) = ١

٥

حاول أن تحل

(٣) أوجد مرتبة كل من المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ١- & ١ \end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢- & ٤ & ٧ \\ ١٥ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$

أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ١- & ١ \end{pmatrix}$ المصفوفة على النظام ٣×٣
أعلى رتبة ممكنة أن تكون ٣

|أ| = $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & ١- & ١ \end{vmatrix}$ نفك المحدد بالعمود الثالث

$٣\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣(٥ - ٦) = -٣ \neq$ صفر

∴ رتبة أ = ٣   ر(أ) = ٣

ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢- & ٤ & ٧ \\ ١٥ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$ رتبة أعلى محدد ممكن أن تكون ٣

|ب| = $\begin{vmatrix} ٥ & ٥- & ٢ \\ ٢- & ١١- & ٧ \\ ١٥ & ١٥- & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ٥- & ٢ \\ ١٣ & ١١- & ٧ \\ ٠ & ١٥- & ٦ \end{vmatrix}$ نفك المحدد من العمود الثالث

$+١٣\begin{vmatrix} ٢ & ٥- \\ ٦ & ١٥- \end{vmatrix} = ١٣[(٢ \times ١٥-) - (٦ \times ٥-)]$

$= ١٣(-٣٠ + ٣٠) =$ صفر

∴ ر(ب) < ٣

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix} = ٨ - ٢١ = -١٣ \neq ٠$

∴ ر(ب) = ٢

(٨)

حاول أن تحل

(٤) أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

(أ) ٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س-ص=٥ ، س-ص= ١

(ب) ٣س + ٢ص - ع = ٤ ، س + ص + ع= ٣ ، س-ع= ٠

(أ)

٢س + ٣ص = ٧

٣س - ص =٥

س - ص = ١

$$\begin{pmatrix} ٧ & \vdots & ٣ & ٢ \\ ٥ & \vdots & ١- & ٣ \\ ١ & \vdots & ١- & ١ \end{pmatrix} = {}^{*}أ$$

(ب)

٣س + ٢ص - ع = ٤

س + ص + ع = ٣

س + ٠ص - ع = ٠

$$\begin{pmatrix} ٤ & \vdots & ١- & ٢ & ٣ \\ ٣ & \vdots & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & \vdots & ١- & ٠ & ١ \end{pmatrix} = {}^{*}أ \quad \therefore$$

٩

حاول أن تحل

(٥) أوجد مرتبة مصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة

أ ٣س + ٢ص = ٤ ، ٢س + ٣ص = -٦

ب ٣س - ٥ص = ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠

(أ) ٣س + ٢ص = ٤

٢س + ٣ص = -٦

∴ $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -٦ \end{array}\right)$

المصفوفة $أ^*$ على النظام ٢×٣

∴ أعلى رتبة للمحددة ممكن أن تكون ٢

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣\times٣ - ٢\times٢ = ٩ - ٤ = ٥ \neq ٠$

∴ ر$(أ^*) = ٢$

(ب) ٣س - ٥ص = ٢

٩س + ١٥ص = ١٠

∴ $أ^* = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ & ٢ \\ ٩ & ١٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

المصفوفة $أ^*$ على النظام ٢×٣

∴ أعلى رتبة للمحددة ممكن أن تكون ٢

$\begin{vmatrix} ٣ & -٥ \\ ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = (٣\times١٥) - (٩\times-٥) = ٤٥ + ٤٥ = ٩٠ \neq ٠$

∴ ر$(أ^*) = ٢$

١٠

حاول أن تحل

(٦) بين أن للنظام ٢س + ص - ع = ٠ ، س - ع = ٠ ، ٢ص + ع = ٠ حلًا صفريًا فقط.

٢س + ص - ع = ٠

س + ٠ص - ع = ٠

٠س + ٢ص + ع = ٠

المعادلات متجانسة ∴ ر(أ) = ر(أ*)

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ المصفوفة على النظام ٣ × ٣ ∴ أعلى رتبة للمحدده هي ٣.

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + (-١)\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$

$|أ| = ٢ \times (٠ \times ١ - (٢ \times -١)) - ١(١ \times ١ - ٠ \times -١) - ١(١ \times ٢)$

$= ٤ - ١ - ٢ = +١ \neq ٠$

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ يوجد حل وحيد هو الحل الصفرى

س = ٠ ص = ٠ ع = ٠

∴ مجموعة الحل = {(٠، ٠، ٠)}

حاول أن تحل

(٧) بين أن للنظام ٢س+ ٣ص+ ٥ع = ٠، ٧س + ٤ص -٢ع=٠ ، ٦س + ٩ص + ١٥ع = صفر عددًا لا نهائيًا من الحلول واكتب صورة الحل.

٢س + ٣ص + ٥ع = ٠

٧س + ٤ص - ٢ع = ٠   المعادلات متجانسة

٦س + ٩ص + ١٥ع = ٠   ∴ ر(أ) = ر(أ*)

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

∴ أعلى محدد ممكن تكوينه هو ٣

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أخذ عامل مشترك ٣ من الصف الثالث

$$أ = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

الصف الأول = الصف الثالث

∴ قيمة المحدد = أ = صفر

∴ ر(أ) ≠ ٣

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ - ٣ \times ٧ = ٨ - ٢١ = -١٣ \neq ٠$$

∴ ر(أ) = ٢

∴ ر(أ) = ر(أ*) < ٣ (عدد المجاهيل)

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

لا يمكن استخدام المعادلة الأولى والثالثة لأنهما متناسبتان

∴ يتم استخدام المعادلة الأولى والثانية

(١٢)

نفرض أن س = ل

∴ ٢ل + ٣ص + ٥ع = ٠ ← ١

٧ل + ٤ص − ٢ع = ٠ ← ٢

∴ ٣ص + ٥ع = −٢ل   بضرب المعادلة × ٢ ← ٣

٤ص − ٢ع = −٧ل   بضرب المعادلة × ٥ ← ٤

٦ص + ١٠ع = −٤ل ← ٥

٢٠ص − ١٠ع = −٣٥ل   جمع المعادلتين ← ٦

٢٦ص = −٣٩ل

∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ ل

بالتعويض عن ص في المعادلة ٤

٤ × $\frac{-٣}{٢}$ ل − ٢ع = −٧ل

−٦ل − ٢ع = −٧ل

−٢ع = −٧ل + ٦ل

−٢ع = −ل

ع = $\frac{١}{٢}$ ل

∴ س = ل   ص = $\frac{-٣}{٢}$ ل   ع = $\frac{١}{٢}$ ل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول منهم الحل الصفري

تفكير ناقد

١- إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ك \\ ١- & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ أوجد قيمة ك

أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & ك \\ ١- & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ر(أ) = ٢ هذا يعنى أن محدده ٣ × ٣ = صفر

|أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ك \\ ١- & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ⇐ ص١م١ + ص٢م٢ + ص٣م٣ ⇐ $\begin{vmatrix} ٣+ & ١- & ٢+ \\ ١- & ٠+ & ك- \\ ٠+ & ٤- & ٢ك+ \end{vmatrix}$

فنفك العمود الثاني

$-١ \begin{vmatrix} ١ & ك \\ ١- & ٢ك \end{vmatrix} + ٠ - ٤ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ك \end{vmatrix}$

$-١(-٢ك) - ٤(٢ - ٣ك) = ٢ك - ٨ + ١٢ك = ٠$

$١٤ك - ٨ = ٠$

$١٤ك = ٨$

$ك = \frac{٨}{١٤} = \frac{٤}{٧}$

(١) أ١١ أ١٢ أ١٣ ‏ $(-1)^{س+ص}$
أ٢١ أ٢٢ أ٢٣
أ٣١ أ٣٢ أ٣٣

٢- اذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & ك & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ وكانت ر (أ) = ٣ أوجد قيمة ك الحقيقية

أ = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & ك & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $|أ| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{3} & \overset{+}{-1} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{ك} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{4} & \overset{-}{1} & \overset{+}{3} \end{vmatrix}$

ع١ + ع٣ ‏ $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & ك & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

نفك المحدد من الصف الأول

$-1 \begin{vmatrix} 2 & ك \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}$

$-1\,(7ك - 2) + 3\,(0 - 6)$

$-7ك + 2 - 18 = -7ك - 16 \neq$ صفر

$\therefore 7ك \neq 16$

$ك \neq \frac{16}{7}$

$\therefore ك \in ح - \left\{\frac{16}{7}\right\}$