تمارين (٣ – ٢)

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

(١) المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هى:

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

المصفوفة تكون منفردة عندما محددها يساوي الصفر

(أ) (١٨ − ٢٠) = −٢ (ب) −١٢ + ١٢ = ٠ (ج) ١٠ − ١٢ = −٢

(د) ١٢ + ١٢ = ٢٤

(٢) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ منفردة هى:

(أ) −٢ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

Δ = ٢س + ٤ ∴ ٢س + ٤ = ٠ ٢س = −٤

س = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢

(٣) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة:

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

Δأ = ٢ + ١ = ٣ Δب = (٠ − ٤) = −٤

Δج = ١٢ − ١٢ = ٠ Δد = ٣ − ٢ = ١

لكي تكون للمصفوفة معكوس يجب أن يكون محددها ≠ ٠

∴ المصفوفة (ج) محددها = ٠ ∴ ليس لها معكوس ضربي

(٤) إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فإن $(أب)^{-١}$ تساوى:

(أ) − أب (ب) $أ^{-١} ب^{-١}$ (ج) $ب^{-١} أ^{-١}$ (د) $(ب أ)^{-١}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٥) أوجد قيمة س التى تجعل كلًا من المصفوفات الآتية منفردة:

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} - ٣ & ٢ \\ ٧ & \text{س} + ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} \text{س} + ٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س} - ١ & ١ \end{pmatrix}$

(أ) $\Delta = (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) - ١٤$

$= \text{س}^2 + ٢\text{س} - ٣\text{س} - ٦ - ١٤ = ٠$

$\text{س}^2 - \text{س} - ٢٠ = ٠$

$(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤)$

$\therefore \text{س} = ٥ \qquad \text{س} = -٤$

$\therefore$ تكون المصفوفة منفردة عندما س $\in \{٥ ، -٤\}$

(ب) $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} \Longrightarrow ك_1 - ك_3$

$\begin{vmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ \text{س} - ١ & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ وفك المحدد من الصف الثانى

$-(\text{س} - ١)\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = -(\text{س} - ١)(-٤ - ٦)$

$= (-\text{س} + ١)(-١٠)$

$= ١٠\text{س} - ١٠$

$١٠\text{س} = ١٠$

$\text{س} = ١$

$\therefore$ تكون المصفوفة منفردة عندما س $= ١$

(٨)

$$\begin{pmatrix} \text{س}+٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س}-١ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{س}+٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س}-١ & ١ \end{vmatrix} \equiv \underline{\text{ص}_١} - \text{ص}_٣$$

$$\begin{vmatrix} \text{س}-٣ & -\text{س}+٣ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س}-١ & ١ \end{vmatrix}$$ بأخذ عامل مشترك من الصف الأول س − ٣

$$(\text{س}-٣)\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س}-١ & ١ \end{vmatrix} \quad \underline{\text{ع}_١ + \text{ع}_٢}$$

$$(\text{س}-٣)\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٧ & ٥ \\ ٧ & \text{س}+٦ & ١ \end{vmatrix}$$ حل من الصف الأول

$$(\text{س}-٣)\begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ \text{س}+٦ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(\text{س}-٣)\left[٧ - ٥(\text{س}+٦)\right] = (\text{س}-٣)(٧ - ٥\text{س} - ٣٠)$$

$$= (\text{س}-٣)(-٥\text{س} - ٢٣) = ٥\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٦٩ = ٠$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{ج}}}{٢\text{أ}} = \frac{-٨ \pm \sqrt{٦٤ + ٤ \times ٥ \times ٦٩}}{١٠}$$

$$\text{س}_١ = \frac{-٨ + \sqrt{١٤٤٤}}{١٠} = \frac{-٨ + ٢٨}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠} = ٣$$

$$\text{س}_٢ = \frac{-٨ - ٣٨}{١٠} = \frac{-٤٦}{١٠} = \frac{-٢٣}{٥}$$

∴ المصفوفة منفردة عندما س = ٣ أو س = $-\frac{٢٣}{٥}$

⑥ أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} -\text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & \text{جتا}\theta \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} \text{ظا}^{٢}\theta & \text{قا}\theta \\ \text{قا}\theta & ١ \end{pmatrix}$

(أ) محدد المصفوفة Δ = (٤×٣ − ٢×٥) = ١٢ − ١٠ = ٢

مصفوفة العوامل المرافقة = $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة المرافقة = $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ +٤ & -٢ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ +٤ & -٢ \end{pmatrix}$

(ب) محدد المصفوفة = ٣×٣ − ٠×٠ = ٩

مصفوفة العوامل المرافقة = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ +٣ & ٠ \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة المرافقة = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ +٣ & ٠ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(ج) محدد المصفوفة = (جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$) = ١

مصفوفة العوامل = $\begin{pmatrix} -\text{جتا}\theta & +\text{جا}\theta \\ +\text{جا}\theta & +\text{جتا}\theta \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة = $\begin{pmatrix} +\text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & -\text{جتا}\theta \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\frac{١}{١}\begin{pmatrix} +\text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & -\text{جتا}\theta \end{pmatrix}$

الموضوع: .... التاريخ: ....

(5)
$$\begin{pmatrix} \text{ظا}^2\theta & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & 1 \end{pmatrix}$$

محدد المصفوفة $= \text{قا}^2 - \text{ظا}^2 = 1$

مصفوفة المرافقات $= \begin{pmatrix} -1 & +\text{قا}\,\theta \\ +\cancel{\text{ظا}}\,\text{قا}\,\theta & -\text{ظا}^2\theta \end{pmatrix}$

مدور مصفوفة المرافقات $= \begin{pmatrix} -\text{ظا}^2\theta & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & -1 \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي $= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -\text{ظا}^2\theta & \text{قا}\,\theta \\ \text{قا}\,\theta & -1 \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ز $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٥- \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

(هـ) $|هـ| = ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$

مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٩ \\ ٠ & ٩ & ٠ \\ ٩ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٩ \\ ٠ & ٩ & ٠ \\ ٩ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\frac{١}{٢٧} \times \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٩ \\ ٠ & ٩ & ٠ \\ ٩ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(و) $|و| = ١ \times ١ \times ١ = ١$

مصفوفة العوامل المرافقة = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١- & ١ & ٣- \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

المصفوفة المدورة = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣- & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ١- & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٣- & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

المعكوس الضربي = $\frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٠ & ٣- & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

ج

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

(١) مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} +(3\times 2-1) & -(2\times 2-3) & +(2\times 1-9) \\ -(3-4) & +(2-9) & -(1-6) \\ +(2-9) & -(1-6) & +(3-4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

مدور مصفوفة المرافقات =

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{م}^{-1} = \frac{-1}{18} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فحقق أن (أ ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ أ$^{-١}$

بأستخدام الآلة الحاسبة fx 570 plus

$(أ ب) = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$

$|أ ب| = ٢ \times ١٠ - ٣ \times ٦ = ٢٠ - ١٨ = +٢ \longleftarrow (١)$

$(أ ب)^{-١} = \frac{١}{+٢} \times \begin{pmatrix} ١٠ & -٣ \\ -٦ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +٥ & -\frac{٣}{٢} \\ -٣ & +١ \end{pmatrix}$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ $\quad$ $ب^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

$ب^{-١} . أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$ب^{-١} . أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ -١ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٠ + (-٥)(-١) & ٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{-٥}{٢} \\ ٠ - ٣ & \frac{-١}{٢} + \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٥ & -\frac{٣}{٢} \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$

$\therefore (أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

⑨ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فحقق أن: $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

$أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-٣\times-٣)+(٤\times٢)+(٠\times١) & -٣\times٤+٤\times-١+٠\times٠ & -٣\times٠+٤\times٥+٠\times-٢ \\ (-٣\times٢)+-١\times٢+٥\times١ & ٢\times٤+-١\times-١+٥\times٠ & ٢\times٠+-١\times٥+٥\times-٢ \\ ١\times-٣+٠\times٢+-٢\times١ & ١\times٤+٠\times-١+-٢\times٠ & ١\times٠+٠\times٥+-٢\times-٢ \end{pmatrix}$

$أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٢٠ & -١٦ & ١٧ \\ -١٥ & ٩ & -٣ \\ ٤ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$

$|أ^{٢}| = ١٧\,(٩\times٤ - ٤\times-١٥) - ١٦\,(-٣\times٤) - (-٥\times-١٥) + ٢٠\,[(-٣\times٤) - (-٥\times٩)]$

$|أ^{٢}| = ١٦٣٢ - ١٢٩٢ + ٦٦٠ = ٩٠٠$

$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٩ & -٣ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -١٥ & -٣ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -١٥ & ٩ \\ ٤ & ٤ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١٦ & ١٧ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢٠ & ١٧ \\ ٤ & -٥ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢٠ & -١٦ \\ ٤ & ٤ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -١٦ & ١٧ \\ ٩ & -٣ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢٠ & ١٧ \\ -١٥ & -٣ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢٠ & -١٦ \\ -١٥ & ٩ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$م = \begin{pmatrix} ٢٢ & ٨٧ & ٩٦ \\ ١٢ & ١٦٨ & ١٤٤ \\ ١٠٥ & ١٩٥ & ٦٠ \end{pmatrix}$

الموضوع: .... التاريخ: ....

$$(\text{أ})^{\text{ن}} = \begin{pmatrix} 96 & 144 & \cancel{330} \\ 87 & 168 & 195 \\ 32 & 12 & 105 \end{pmatrix}$$

$$(\text{أ})^{-1} = \frac{1}{900}\begin{bmatrix} 96 & 144 & 60 \\ 87 & 168 & 195 \\ 32 & 12 & 105 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \therefore \; |\text{أ}| = -3(-2\times -1 + 5\times 0) - 4(-2\times 2 - 5\times 1) + 0$$

$$= -6 + 36 = 30$$

$$\text{م} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{م} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \\ 20 & 15 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{أ}^{\text{س}} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 9 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 9 & 6 & 15 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ ٥- & ٤ & ١ \end{pmatrix} \frac{١}{٢٠} \times \begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ ٥- & ٤ & ١ \end{pmatrix} \frac{١}{٢٠} = \text{أ}^{١-} \times \text{أ}^{١-}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٠\times٤ + ٨\times٦ + ٢\times٨ & ٢٠\times١ + ٨\times٩ + ٢\times٢ \\ ١٥\times٤ + ٦\times٦ + ٩\times٨ & ١٥\times١ + ٦\times٩ + ٩\times٢ \\ ٥-\times٤ + ٤\times٦ + ١\times٨ & ٥-\times١ + ٤\times٩ + ١\times٢ \end{bmatrix} \frac{١}{٩٠٠} = {(\text{أ}^{١-})}^{٢}$$

$$\begin{bmatrix} ٥-\times٢٠ + ٨\times١٥ + ٢\times٢٠ \\ ٥-\times١٥ + ٦\times١٥ + ٩\times٢٠ \\ (٥-)\times(٥-) + ٤\times١٥ + ١\times٢٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦٠ & ١٤٤ & ٩٦ \\ ١٩٥ & ١٦٨ & ٨٧ \\ ١٠٥ & ١٢ & ٢٢ \end{bmatrix} \frac{١}{٩٠٠} = {(\text{أ}^{١-})}^{٢}$$

$$\therefore {(\text{أ}^{١-})}^{٢} = {(\text{أ}^{٢})}^{١-}$$

⑩ **تفكير إبداعي:** إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن أ^{٢} - ٧أ - ٨I = $\square$.

ثم استخدم ذلك في إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة أ

$$\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤\times٢+٢\times٣ & ١٠\times٢+٣\times٣ \\ ٤\times٤+٢\times١٠ & ٣\times٤+٣\times١٠ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

$$٧\text{أ} = ٧\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٢١ \\ ٢٨ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

$$٨I = ٨\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٢} - ٧\text{أ} - ٨I = \begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٤ & ٢١ \\ ٢٨ & ٧٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٠-١٤-١٤ & ٨-٢١-٢٩ \\ ٨-٢٨-٣٦ & ٠-٧٠-٧٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

حاول أن تحل (١) صـ

أوجد قيم أ التي تجعل المصفوفة (أ ٩ / ٤ أ) ليس لها معكوس ضربي

Δ = | أ ٩ / ٤ أ | = أ × أ − ٤ × ٩

= أ² − ٣٦

∵ أ² − ٣٦ = ٠

أ² = ٣٦

أ = ± ٦

∴ عندما تكون أ = ± ٦ فإن قيمة المحدد = صفر

وبالتالي فالمصفوفة ليس لها معكوس ضربي

الموضوع : .... التاريخ : ....

حاول أن تحل ٢ صـ٣٣

حدد هل للمصفوفة س = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ معكوس ضربي ؟

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= ٤\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - (-٣)\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٤(-١) + ٣(-١) + ٢(-٢)$$

$$-٤ - ٣ - ٤ = -١١$$

$$\therefore \Delta \neq ٠$$

∴ المصفوفة لها معكوس ضربي

حاول أن تحل ٣ ص ٨١

أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$م = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (28 - 30) & -(0 - 15) & +(0 - 12) \\ -(7 + 18) & +(14 + 9) & -(12 - 3) \\ +(5 + 12) & -(10 + 0) & (8 - 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 15 & -12 \\ -25 & 23 & -9 \\ 17 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

حلول أسئلة ٤ ص ٨٢

أوجد المعكوس الضربي لكل المصفوفات الآتية إن أمكن:

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

(أ) نوجد محدد المصفوفة باستخدام الصف الأول

$$\begin{vmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{vmatrix} \Leftarrow \Delta = ٠(١٦-١٢) - (-١)(\text{صفر}) + (٣-٤)$$

$$= \text{صفر} + \text{صفر} - ١ = -١$$

$$\therefore \Delta = -١$$

نوجد مصفوفة العوامل المرافقة:

$$م = \begin{pmatrix} +(٢\times٨ - ٣\times٤) & -(١\times٨ - ٢\times٤) & +(١\times٣ - ٢\times٢) \\ -(-٨ - ٣) & +(٠ - ٢) & -(٠\times٣ - ٢) \\ +(-٤ - ٢) & -(٠\times٤ - ١\times١) & +(٠\times٢ + ١) \end{pmatrix}$$

$$م = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & -١ \\ ١١ & -٢ & -٢ \\ -٦ & -١ & +١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore أ^{ح} = \begin{pmatrix} ٤ & ١١ & -٦ \\ ٠ & -٢ & +١ \\ -١ & -٢ & +١ \end{pmatrix}$$

الموضوع: .... التاريخ: ....

$$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times أ^{مص}$$

$$\begin{pmatrix} -٦ & ١١ & ٤ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ١ & -٢ & -١ \end{pmatrix} \times \frac{١}{-١} = أ^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} ٦ & -١١ & -٤ \\ -١ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = أ^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ ٢- & ٢ & ٧ \\ ٣ & ٣- & ٢ \end{pmatrix} \quad (ب$$

نوجد محدد المصفوفة بالصف الأول

$$\text{صفر} = (٦-٦)\,٥ = \begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٣ & ٣- \end{vmatrix} ٥ = \Delta$$

∴ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي