الخواص الأساسية للمحددات

خاصية (١)

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب

نلاحظ أن ع١ = ص١

حاول أن تحل

(١) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & ٤ & ١ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

الطرف الأيمن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & ٤ & ١ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (٤\times٢ - ١\times٣) - ٢(٥\times٢ - (-١)) - ٣(٥\times٣ - (-٤))$$

$$= ٥ - ٢٢ - ٥٧ = -٧٤$$

الطرف الأيسر

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} - ٥ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} + (-١) \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (٨ - ٣) - ٥(٤ + ٩) - (٢ + ١٢)$$

$$= ٥ - ٦٥ - ١٤ = -٧٤$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

ع١ = ص١

خاصية (٢)

قيمة المحدد لاتتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود).

حاول أن تحل

(٢) أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & \bar{٣} & ٢ \\ ٢ & ١ & \bar{٣} \\ ٣ & \bar{٢} & ١ \end{vmatrix}$ مستخدمًا عناصر الصف الأول مرة ومستخدمًا عناصر العمود الثاني مرة أخرى.

باستخدام عناصر الصف الأول

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} ٣ - \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} ٢ = \Delta$$

$$(١\times١ - ٢\times٣) + (٢\times١ - ٣\times٤)٣ - (٢\times٢ - ٣\times١)٢ =$$

$$١٨- = ٥ + ٢١ - ٢- =$$

باستخدام عناصر العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} ٢ - \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} ٣- = \Delta$$

$$(١\times٣ - ٢\times٢)٢ - (١\times١ - ٤\times٢) + (٢\times١ - ٣\times٤)٣- =$$

$$(٣ - ٤)٢ - (١ - ٦) + (٢ - ٩)٣- =$$

$$١٨- = ٢ - ٥ + ٢١- =$$

∴ المحدد لا يتغير بفكه عن طريق صف أو العمود

خاصية (٣)

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

أولًا: اذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد - صفر

ثانيًا: إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد، فإن قيمة المحدد = صفر

حاول أن تحل

(٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ = صفر

العمود الأول ع١ = العمود الثالث ع٣

∴ قيمة المحدد تساوى الصفر.

خاصية (٤)

> إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

حاول أن تحل

④ إذا كان $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{د} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٠$ أوجد فيه $\begin{vmatrix} ٢\text{ا} & ٢\text{د} & ٢\text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٢\text{ا} & ٢\text{د} & ٢\text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix}$ بأخذ ٢ عامل مشترك من الصف الأول

$٢\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{د} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix}$ بأخذ -٤ عامل مشترك من الصف الثالث

$(٢)(-٤)\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{د} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = ٢ \times -٤ \times ١٠ = -٨٠$

خاصية (٥)

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = -قيمة المحدد الأصلى

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ى} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ى} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix}$$

بتبديل الصفين الثانى والثالث وبصوره أخرى تكتب بتبديل $\text{ص}_{٢}$، $\text{ص}_{٣}$

درس المثال رقم ٥ بالكتاب المدرسي

خاصية (٦)

> إذا كتبت جميع عناصر أي صف "عمود" كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{11}+\text{م} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12}+\text{ن} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13}+\text{هـ} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{م} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{ن} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{هـ} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة فك المحددات.

حاول أن تحل

(٥) أوجد المحدد م = م١ + م٢ + م٣ حيث

$$\text{م}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ،\quad \text{م}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ،\quad \text{م}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

أولاً م١ + م٢ نلاحظ أن الصف الأول والصف الثالث متساويان في المحددين

$$\therefore \text{م}_1 + \text{م}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \text{م}$$

$$\text{م} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{م}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ثانياً م + م٣ نلاحظ أن العمود الأول والثالث متساويان

$$\therefore \text{م} + \text{م}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

خاصية (٧)

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{م}\,\text{ا}_2 & \text{ب}_1 + \text{م}\,\text{ب}_2 & \text{جـ}_1 + \text{م}\,\text{جـ}_2 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 \end{vmatrix}$$

حاول أن تحل

(٦) بدون فك المحدد أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} -٧ & ٥ & ٢ \\ ٤ & -١ & -٣ \\ -٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

بجمع الصف الثاني والصف الثالث ص٢ + ص٣

$$= \begin{vmatrix} -٧ & ٥ & ٢ \\ ٤ & -١ & -٣ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$$

جميع عناصر الصف الثالث تساوي صفر

∴ قيمة المحدد = صفر

حل آخر

بأخذ -١ عامل مشترك من الصف الثاني

$$-١ \begin{vmatrix} -٧ & ٥ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٣ \\ -٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix} =$$

الصف الثاني = الصف الثالث

∴ قيمة المحدد = الصفر

خاصية (٨)

في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرا.

خاصية (٩)

قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى
قيمة المحدد من الصورة السابقة = $\text{أ}_{11} \times \text{أ}_{22} \times \text{أ}_{33}$.

حاول ان تحل

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ - ب - جـ} & \text{٢ب} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ} & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix} = (\text{أ + ب + جـ})^{٢}$$

بجمع العمود الأول والثاني والثالث ع١ + ع٢ + ع٣

$$\begin{vmatrix} \text{أ - ب - جـ + ٢ب + ٢جـ} & \text{٢ب} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ + ب - جـ - أ + ٢جـ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ + ٢ب + جـ - أ - ب} & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ + ب + جـ} & \text{٢ب} & \text{٢جـ} \\ \text{أ + ب + جـ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ \text{أ + ب + جـ} & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ العمود الأول مشترك

$$= (\text{أ + ب + جـ}) \times \begin{vmatrix} 1 & \text{٢ب} & \text{٢جـ} \\ 1 & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ 1 & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

ص١ - ص٢

$$= (\text{أ + ب + جـ}) \times \begin{vmatrix} 0 & \text{أ + جـ + ب} & 0 \\ 1 & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ 1 & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

من الصف الأول
نأخذ عامل مشترك
أ + جـ + ب

$$= (\text{أ + ب + جـ})(\text{أ + ب + جـ}) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ 1 & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

بتبديل العمود الثاني مكان العمود الأول

$$= -\left(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\right)\left(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & 2\,\text{جـ} & 1 \\ 2\,\text{ب} & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} & 1 \end{vmatrix}$$

ص٢ − ص٣

$$= -\left(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\right)^{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 0 \\ 2\,\text{ب} & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} & 1 \end{vmatrix}$$

بتبديل العمود الأول والعمود الثالث

$$= \left(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\right)^{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & -\text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} \\ 1 & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} & 2\,\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}\right)^{3}$$