تمارين (٢ - ٢)

① باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) جتا ٤θ = ٨ جتا^{٤} θ - ٨ جتا^{٢} θ + ١

ب) جا ٥θ = ١٦ جا^{٥} θ - ٢٠ جا^{٣} θ + ٥ جا θ

نظرية ديموافر

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = جتا ٤θ + ت جا ٤θ ← ①

من ذات الحدين

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = جتا^{٤} θ + ق$^{٤}_{١}$ جتا^{٣} θ جا θ + ق$^{٤}_{٢}$ جتا^{٢} θ جا^{٢} θ ت^{٢}

+ ت^{٣} ق$^{٤}_{٣}$ جتا θ جا^{٣} θ + (ت جا θ)^{٤}

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ جا^{٢} θ + جا^{٤} θ + ت (٤ جتا^{٣} θ جا θ - ٤ جتا θ جا^{٣} θ) ②

من المعادلة ① ، ②

جتا ٤θ + ت جا ٤θ = جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ جا^{٢} θ + جا^{٤} θ + ت (٤ جتا^{٣} θ جا θ

- ٤ جتا θ جا^{٣} θ)

بمساواة الأجزاء الحقيقية معاً و الأجزاء التخيلية معاً

(جا^{٢} θ = ١ - جتا^{٢} θ)

جتا ٤θ = جتا^{٤} θ - ٦ جا^{٢} θ جتا^{٢} θ + جا^{٤} θ

= جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ (١ - جتا^{٢} θ) + (١ - جتا^{٢} θ)^{٢}

= جتا^{٤} θ - ٦ جتا^{٢} θ + ٦ جتا^{٤} θ + ١ - ٢ جتا^{٢} θ + جتا^{٤} θ

= ٨ جتا^{٤} θ - ٨ جتا^{٢} θ + ١

$\therefore$ جتا ٤θ = ٨ جتا^{٤} θ - ٨ جتا^{٢} θ + ١

وهو المطلوب في أ

تابع مسألة (١)

ب- أثبت أن جا ٥θ = ١٦ جا^{٥} θ − ٢٠ جا^{٣} θ + ٥ جا θ

من نظرية ديموافر

(جتا θ + ت جا θ)^{٥} = جتا ٥θ + ت جا ٥θ ⟵ (١)

من نظرية ذات الحدين

(جتا θ + ت جا θ)^{٥} = جتا^{٥} θ + ٥ق١ جتا^{٤} θ (ت جا θ)^{١} + ٥ق٢ جتا^{٣} θ (ت جا θ)^{٢}
+ ٥ق٣ جتا^{٢} θ (ت جا θ)^{٣} + ٥ق٤ جتا θ (ت جا θ)^{٤} + جا^{٥} θ

= جتا^{٥} θ + ٥ جتا^{٤} θ (ت جا θ) + ١٠ جتا^{٣} θ (ت جا θ)^{٢} + ١٠ جتا^{٢} θ (ت جا θ)^{٣}
+ ٥ جتا θ (ت جا θ)^{٤} + (ت جا θ)^{٥}

= جتا^{٥} θ + ت (٥ جتا^{٤} θ جا θ) − ١٠ جتا^{٣} θ جا^{٢} θ − ت (١٠ جتا^{٢} θ جا^{٣} θ)
+ ٥ جتا θ جا^{٤} θ + ت جا^{٥} θ

من المعادلة (١)، (٢)

(جتا θ + ت جا θ)^{٥} = جتا^{٥} θ − ١٠ جتا^{٣} θ جا^{٢} θ + ٥ جتا^{١} θ جا^{٤} θ
+ ت (٥ جتا^{٤} θ جا θ − ١٠ جا^{٣} θ جتا^{٢} θ + جا^{٥} θ) ⟵ (٢)

من (١)، (٢)

جا ٥θ = ٥ جتا^{٤} θ جا θ − ١٠ جا^{٣} θ جتا^{٢} θ + جا^{٥} θ

جا ٥θ = ٥ جا θ (١ − جا^{٢} θ)^{٢} − ١٠ جا^{٣} θ (١ − جا^{٢} θ) + جا^{٥} θ

= ٥ جا θ (١ − ٢ جا^{٢} θ + جا^{٤} θ) − ١٠ جا^{٣} θ + ١٠ جا^{٥} θ + جا^{٥} θ

= ٥ جا θ − ١٠ جا^{٣} θ + ٥ جا^{٥} θ − ١٠ جا^{٣} θ + ١٠ جا^{٥} θ + جا^{٥} θ

= ١٦ جا^{٥} θ − ٢٠ جا^{٣} θ + ٥ جا θ

وهو المطلوب ؛ (٢)

(٢) أوجد في ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية؛ اكتب الجذور على صورة س + ص ت:

(أ) $ع^{٤} = ١٦$ (ب) $ع^{٣} + ٨ = ٠$ (ج) $ع^{٣} + ٨ت = ٠$

(أ) $ع^{٤} = ١٦ \Leftarrow ع^{٤} = ١٦ + ٠\,ت$ $س = ١٦$ $ص = ٠$

$ل = \sqrt{(١٦)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{(١٦)^{٢}} = ١٦$ $\theta = ٠$

$ع^{٤} = ١٦\,(\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠)$

$ع = (١٦)^{\frac{١}{٤}}(\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠)^{\frac{١}{٤}} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{١}{٤}(٠ + ٢ر\pi) + ت\,\text{جا}\,\frac{١}{٤}(٠ + ٢ر\pi)\right)$

$ع = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{٢ر\,ط}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ر\,ط}{٤}\right) = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{ر\,ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{ر\,ط}{٢}\right)$

عندما ر = ٠ $ع_{١} = ٢(\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠) = ٢ \times ١ = ٢$

عندما ر = ١ $ع_{٢} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{ط}{٢}\right) = ٢(٠ + ت) = ٢ت$

عندما ر = ٢ $ع_{٣} = ٢(\text{جتا}\,ط + ت\,\text{جا}\,ط) = ٢(-١ + ٠\,ت) = -٢$

عندما ر = -١ $ع_{٤} = ٢\left(\text{جتا}\,\frac{-ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{-ط}{٢}\right) = ٢(٠ - ت) = -٢ت$

∴ مجموعة الحل $\{٢، -٢، ٢ت، -٢ت\}$

تابع مسألة ٢

(ب) $ع^{٣} + ٨ = ٠ \Leftarrow ع^{٣} = -٨ \Leftarrow ع^{٣} = -٨ + ٠ت$

$ل = \sqrt{(-٨)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٨$

العدد يقع على محور السينات السالب

$ع^{٣} = ٨\,(\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi)$

$ع = ٨^{\frac{١}{٣}}\,(\text{جتا}\,\pi + ت\,\text{جا}\,\pi)^{\frac{١}{٣}} = ٢\left(\text{جتا}\,\tfrac{١}{٣}(\pi + ٢\pi ر) + ت\,\text{جا}\,\tfrac{١}{٣}(\pi + ٢\pi ر)\right)$

$ع = ٢\left[\text{جتا}\,\tfrac{١}{٣}(ط + ٢ط ر) + ت\,\text{جا}\,\tfrac{١}{٣}(ط + ٢ط ر)\right]$

عند $ر = ٠$: $٢\left(\text{جتا}\,\frac{ط}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{ط}{٣}\right) = ٢\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

عند $ر = ١$: $٢\,(\text{جتا}\,ط + ت\,\text{جا}\,ط) = ٢\,(-١ + ٠ت) = -٢$

عند $ر = -١$: $٢\left(\text{جتا}\,\frac{-ط}{٣} + ت\,\text{جا}\,\frac{-ط}{٣}\right) = ٢\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$= ١ - \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore$ مجموعة الحل

$\{١ + \sqrt{٣}\,ت \;،\; -٢ \;،\; ١ - \sqrt{٣}\,ت\}$

تابع مسألة (٢)

(هـ) $\text{ع}^{٣} + ٨\text{ت}$

$\text{ع}^{٣} = -٨\text{ت} \Longrightarrow \text{ع}^{٣} = ٠ - ٨\text{ت}$ س = ٠ ، ص = −٨

$\text{ل} = \sqrt{(٠)^{٢} + (-٨)^{٢}} = ٨$ $\theta = \frac{-\pi}{٢}$

$\text{ع}^{٣} = ٨\left(\text{جتا} \frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا} \frac{-\pi}{٢}\right)$

$\text{ع} = (٨)^{\frac{١}{٣}} \left(\text{جتا} \frac{-\pi}{٢} + \text{ت جا} \frac{-\pi}{٢}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$\text{ع} = ٢ \left[\text{جتا} \frac{١}{٣}\left(\frac{-\pi}{٢} + ٢\pi\text{ر}\right) + \text{ت جا} \frac{١}{٣}\left(\frac{-\pi}{٢} + ٢\pi\text{ر}\right)\right]$

عندما ر = ٠ $\text{ع}_{١} = ٢\left[\text{جتا} \frac{-\pi}{٦} + \text{ت جا} \frac{-\pi}{٦}\right] = ٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}\right)$

$\text{ع}_{١} = \sqrt{٣} - \text{ت}$

عندما ر = ١

$\text{ع}_{٢} = ٢\left[\text{جتا} \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا} \frac{\pi}{٢}\right] = ٢(٠ + \text{ت}) = ٢\text{ت}$

عندما ر = −١

$\text{ع}_{٣} = ٢\left[\text{جتا} \frac{-٥\pi}{٦} + \text{ت جا} \frac{-٥\pi}{٦}\right] = ٢\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}\right)$

$\text{ع}_{٣} = -\sqrt{٣} - \text{ت}$

∴ مجموعة الحل هي $\{\sqrt{٣} - \text{ت} ، ٢\text{ت} ، -\sqrt{٣} - \text{ت}\}$

③ أوجد مجموعة حل المعادلة ع٥ + ٢٤٣ = ٠ حيث ع ∈ ك

ع٥ + ٢٤٣ = ٠ ، ع٥ = −٢٤٣ ، ع٥ = −٢٤٣ + ٠ت

س = −٢٤٣ ، ص = ٠ ، العدد يقع على المحور بالسالب لسينات .

∴ θ = π ، ل = √((−٢٤٣)٢ + (٠)٢) = ٢٤٣

∴ ع٥ = ٢٤٣ (جتا π + ت جا π)

ع = (٢٤٣)^(١/٥) (جتا π + ت جا π)^(١/٥)

ع = ٣ (جتا ١/٥ (π + ٢πر) + ت جا ١/٥ (π + ٢πر))

∴ عند ر = ٠

ع١ = ٣ (جتا π/٥ + ت جا π/٥) = ٣[جتا (٣٦) + ت جا (٣٦)]

عند ر = ١

ع٢ = ٣[جتا ٣/٥ π + ت جا ٣/٥ π] = ٣[جتا ١٠٨ + ت جا ١٠٨]

عند ر = −١

ع٣ = ٣[جتا −π/٥ + ت جا −π/٥] = ٣[جتا −٣٦ + ت جا −٣٦]

عند ر = ٢

ع٤ = ٣[جتا π + ت جا π] = ٣ (−١ + ٠) = −٣

عند ر = −٢

ع٥ = ٣[جتا −٢/٥ π + ت جا −٢/٥ π] = ٣[جتا −١٠٨ + ت جا −١٠٨]

∴ مجموعة الحل هي

{ ٣(جتا ٣٦ + ت جا ٣٦) ، ٣(جتا −٣٦ + ت جا −٣٦) ، ٣(جتا ١٠٨ + ت جا ١٠٨) ، ٣(جتا −١٠٨ + ت جا −١٠٨) ، −٣ }

يمكن وضع ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

عند ر = ٣ ع = ٣ (جتا −١٠٨ + ت جا −١٠٨)

عند ر = ٤ ع = ٣ (جتا −٣٦ + ت جا −٣٦)

و سنحصل على نفس النتائج .

(٤)

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^٤ = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$. اكتب الحل على الصورة الأسية.

$ع^٤ = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ $\quad$ $س = ٢$ $\quad$ $ص = ٢\sqrt{٣}$ $\quad$ $\text{ظا}^{-١}\frac{ص}{س} = \text{ظا}^{-١}\frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \text{ظا}^{-١}\sqrt{٣}$

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\theta = ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}$

$ع^٤ = ٤\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)$

$ع = (٤)^{\frac{١}{٤}}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)^{\frac{١}{٤}}$

$ع = \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\frac{١}{٤}\left(\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ر\right) + ت\,\text{جا}\frac{١}{٤}\left(\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ر\right)\right]$

عندما $ر = ٠$

$ع_١ = \sqrt{٢}\left[\text{جتا}\frac{\pi}{١٢} + ت\,\text{جا}\frac{\pi}{١٢}\right] = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{١٢}ت}$

عندما $ر = ١$

$ع_٢ = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٧}{١٢}\pi + ت\,\text{جا}\frac{٧}{١٢}\pi\right) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت}$

عندما $ر = ٢$

$ع_٣ = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{١٢}{١٢}\pi + ت\,\text{جا}\frac{١٣}{١٢}\pi\right) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{١٣}{١٢}\pi ت}$

عندما $ر = -١$

$ع_٤ = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{-٥\pi}{١٢} + ت\,\text{جا}\frac{-٥\pi}{١٢}\right) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{-٥\pi}{١٢}ت}$

$\therefore$ الجذور في الصورة الأسية هـ

$\left[\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{١٢}ت} ،\ \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت} ،\ \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{١٣}{١٢}\pi ت} ،\ \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{-٥\pi}{١٢}ت}\right]$

(٥)

٥ أوجد الجذور التربيعية لكل من:

أ ٢-٢√٣ ت   ب ١-ت   ج ٨ت

د ٣+٤ت   هـ ٥-١٢ت

(أ) ٢ - ٢√٣ ت   س = ٢   ص = -٢√٣   ل = √(٤ + ١٢) = ٤

ظا⁻¹ $\frac{|ص|}{|س|}$ = ظا⁻¹ $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$ = ظا⁻¹ √٣ = $\frac{\pi}{٣}$ = ٢π − $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{٥}{٣}\pi$

ع = ٤ (جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٣}$)

ع$^{\frac{1}{2}}$ = (٤)$^{\frac{1}{2}}$ (جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٣}$)$^{1/2}$

ع = ٢[جتا $\frac{1}{2}$ ($\frac{٥\pi}{٣}$ + ٢πر) + ت جا $\frac{1}{2}$ ($\frac{٥\pi}{٣}$ + ٢πر)]

عندما ر = ٠

ع١ = ٢[جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$] = ٢[جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠]

ع١ = ٢[− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{1}{2}$ت] = −√٣ + ت

عندما ر = ١

ع٢ = ٢ [جتا $\frac{١١}{٦}\pi$ + ت جا $\frac{١١}{٦}\pi$] = [جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠]

ع٢ = ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{1}{2}$ت) = √٣ − ت

∴ الجذور التربيعية هي

(−√٣ + ت) ، (√٣ − ت)

تابع مسألة ٥

(ب) ١ − ت

س = ١ ص = −١ ظا^{−١} −١ = −٤٥ = ٣١٥ = ٧/٤ π

ل = √((١)² + (−١)²) = √٢

ع² = √٢ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) = √٢ (جتا ٧/٤ π + ت جا ٧/٤ π)

ع = (√٢)^{١/٢} (جتا ٧/٤ π + ت جا ٧/٤ π)^{١/٢}

ع = ⁴√٢ [جتا ½ (٧/٤ π + ٢ π ر) + ت جا ½ (٧/٤ π + ٢ π ر)]

عندما ر = ٠

ع١ = ⁴√٢ (جتا ٧/٨ π + ت جا ٧/٨ π) =

عندما ر = ١

ع٢ = ⁴√٢ (جتا ١٥/٨ π + ت جا ١٥/٨ π) = ⁴√٢ (جتا π/٨ + ت جا π/٨)

ع٢ = ⁴√٢ (جتا π/٨ + ت جا π/٨)

الجذران هما

(⁴√٢ (جتا ٧/٨ π + ت جا ٧/٨ π) ، ⁴√٢ (جتا π/٨ + ت جا π/٨))

(٦)

(٦) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

نفرض أن $ع^{٣} = ٨$ ∴ $ع^{٣} = ٨ + ٠ ت$

$س = ٨$ ، $ص = ٠$ ∴ $\theta = ٠$ ، $ل = \sqrt{(٨)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٨$

∴ العدد يقع على محور س الموجب

$ع^{٣} = ٨\,(جتا ٠ + ت جا ٠)$

$ع = \sqrt[٣]{٨}\,(جتا ٠ + ت جا ٠)^{\frac{١}{٣}}$

$ع = ٢\left(جتا \frac{١}{٣}(٠ + ٢ط ر) + ت جا \frac{١}{٣}(٠ + ٢ط ر)\right)$

$ع = ٢\left(جتا \frac{٢ط ر}{٣} + ت جا \frac{٢ط ر}{٣}\right)$

عندما ر = ٠

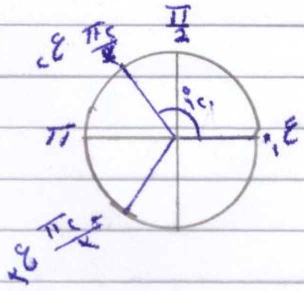
$ع_{١} = م\,(جتا ٠ + ت جا ٠) = ٢(١ + ٠) = ٢$

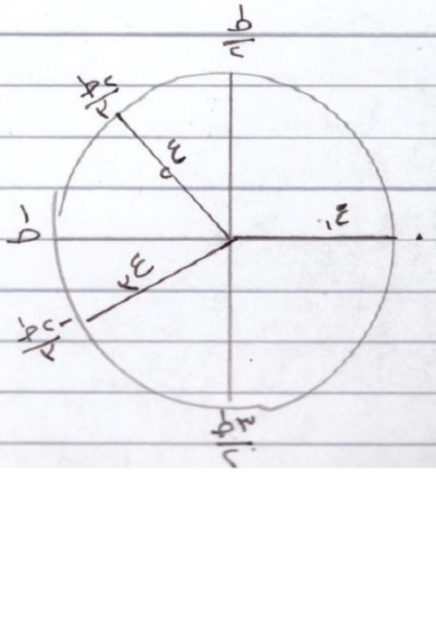
عندما ر = ١

$ع_{٢} = ٢\left(جتا \frac{٢ط}{٣} + ت جا \frac{٢ط}{٣}\right)$

عندما ر = -١

$ع_{٣} = ٢\left(جتا \frac{-٢ط}{٣} + ت جا \frac{-٢ط}{٣}\right)$





⑦ أوجد الجذور الرابعة للعدد - ١ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

نفرض أن $ع^{٤} = -١$ $\qquad$ $ع^{٤} = -١ + ٠ ت$

$س = -١$ $\qquad$ $ص = ٠$

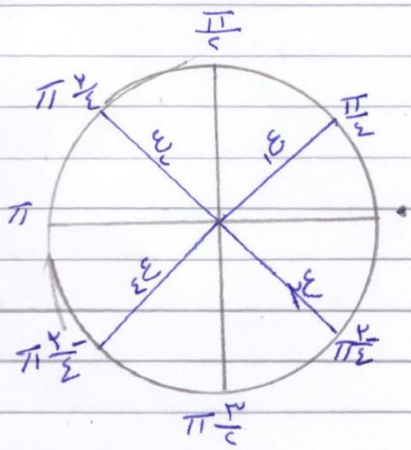
$\therefore \theta = \pi$

$ل = \sqrt{(-١)^{٢} + (٠)^{٢}} = ١$

$ع^{٤} = (\text{جتا}\ \pi + ت\ \text{جا}\ \pi)$

$ع = (\text{جتا}\ \pi + ت\ \text{جا}\ \pi)^{\frac{١}{٤}}$

$ع = \left[\text{جتا}\ \frac{١}{٤}(\pi + ٢\pi ر) + ت\ \text{جا}\ \frac{١}{٤}(\pi + ٢\pi ر)\right]$



عندما ر = ٠

$ع_{١} = \text{جتا}\ \frac{\pi}{٤} + ت\ \text{جا}\ \frac{\pi}{٤}$

عندما ر = ١

$ع_{٢} = \text{جتا}\ \frac{٣}{٤}\pi + ت\ \text{جا}\ \frac{٣}{٤}\pi$

عندما ر = -١

$ع_{٣} = \text{جتا}\ \frac{-\pi}{٤} + ت\ \text{جا}\ \frac{-\pi}{٤}$

عندما ر = -٢

$ع_{٤} = \text{جتا}\ \frac{-٣}{٤}\pi + ت\ \text{جا}\ \frac{-٣}{٤}\pi$

(٨)

٨ إذا كان $\frac{\text{٧} - \text{١١ت}}{\text{٤} + \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$، أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-\text{ب}} + \text{أت})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

$$\text{أ} + \text{ب ت} = \frac{\text{٧} - \text{١١ت}}{\text{٤} + \text{ت}} \times \frac{\text{٤} - \text{ت}}{\text{٤} - \text{ت}} = \frac{\text{٢٨} - \text{٧ت} - \text{٤٤ت} + \text{١١ت}^{\text{٢}}}{\text{١٦} + \text{١}}$$

$$= \frac{\text{٢٨} - \text{٥١ت} - \text{١١}}{\text{١٧}} = \frac{\text{١٧} - \text{٥١ت}}{\text{١٧}} = \text{١} - \text{٣ت}$$

$$\therefore \text{أ} + \text{ب ت} = \text{١} - \text{٣ت} \qquad \therefore \text{أ} = \text{١} \qquad \text{ب} = -\text{٣}$$

$$\therefore (\sqrt{-\text{ب}} + \text{أت})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} = (\sqrt{\text{٣}} + \text{ت})^{\text{٣}/\text{٢}}$$

$$\text{ل} = \sqrt{(\sqrt{\text{٣}})^{\text{٢}} + (\text{١})^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٣} + \text{١}} = \text{٢} \qquad \text{ظا}^{-\text{١}} \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}} = \text{٣٠}^\circ = \frac{\pi}{\text{٦}}$$

$$\therefore \text{ع} = \text{٢} (\text{جتا} \frac{\pi}{\text{٦}} + \text{ت جا} \frac{\pi}{\text{٦}})$$

$$\text{ع}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} = (\text{٢})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} (\text{جتا} \frac{\pi}{\text{٦}} + \text{ت جا} \frac{\pi}{\text{٦}})^{\text{٣}/\text{٢}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\text{جتا} \frac{\pi}{\text{٦}} + \text{ت جا} \frac{\pi}{\text{٦}}]^{\text{٣}/\text{٢}}$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\text{جتا} \frac{\text{٣}}{\text{٢}} (\frac{\pi}{\text{٦}} + \text{٢}\pi\text{ر}) + \text{ت جا} \frac{\text{٣}}{\text{٢}} (\frac{\pi}{\text{٦}} + \text{٢}\pi\text{ر})]$$

عندما ر = ٠

$$\text{ع}_{\text{١}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\text{جتا} \frac{\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا} \frac{\pi}{\text{٤}}] = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} + \frac{\text{ت}}{\sqrt{\text{٢}}}]$$

$$\text{ع}_{\text{١}} = \text{٢} + \text{٢ت}$$

عندما ر = ١

$$\text{ع}_{\text{٢}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\text{جتا} \frac{\text{١٣}}{\text{٤}}\pi + \text{ت جا} \frac{\text{١٣}}{\text{٤}}\pi] = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} [\text{جتا} \frac{\text{٥}}{\text{٤}}\pi + \text{ت جا} \frac{\text{٥}}{\text{٤}}\pi]$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٢}} (\text{جتا} -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\pi + \text{ت جا} -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\pi)$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٢}} (-\frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{ت} \frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}})$$

$$= -\text{٢} - \text{٢ت}$$

(٩)

(٩) ضع العدد ٢√٢ (١+ت) على الصورة المثلثية، ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية.

ع = ٢√٢ (١+ت) = ٢√٢ + ٢√٢ ت

س = ٢√٢ ، ص = ٢√٢ ∴ الزاوية θ تقع في الربع الأول

ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{(٢\sqrt{٢})^2 + (٢\sqrt{٢})^2} = \sqrt{١٦} = ٤$

ظا$^{-1}$ $\frac{٢\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}}$ = ظا$^{-1}$ ١ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

ع = ٤ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

ع = ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٤}\text{ت}}$

(ع)$^{1/2}$ = ٤$^{1/2}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)$^{1/2}$

√ع = ٢ (جتا $\frac{1}{2}$ ($\frac{\pi}{٤}$ + ٢πر) + ت جا $\frac{1}{2}$ ($\frac{\pi}{٤}$ + ٢πر))

عندما ر = ٠ ، ع$_1$ = ٢(جتا $\frac{\pi}{8}$ + ت جا $\frac{\pi}{8}$)

ع$_1$ = ٢ هـ$^{\frac{\pi}{8}\text{ت}}$

عندما ر = ١ ، ع$_2$ = ٢(جتا $\frac{٩}{٨}\pi$ + ت جا $\frac{٩}{٨}\pi$)

ع$_2$ = ٢ هـ$^{\frac{٩}{٨}\pi\text{ت}}$

(١٠)

(١٠) إذا كان ع = ٨ - ٦ت أوجد ع$^{\frac{3}{2}}$ على الصورة الجبرية.

ع = ٨ - ٦ت   ع$^{\frac{3}{2}}$ = (٨ - ٦ت)$^{\frac{3}{2}}$

ع$^{3/2}$ = (ع$^{1/2}$)^{3} = [(٨ - ٦ت)$^{1/2}$]^{3}

نفرض أن (٨ - ٦ت)$^{1/2}$ = س + ت ص   بتربيع الطرفين

٨ - ٦ت = (س + ت ص)^{2} = س^{2} + ٢ت س ص + ت^{2} ص^{2}

= س^{2} + ٢ت س ص - ص^{2}

٨ - ٦ت = س^{2} - ص^{2} + ٢ت س ص

∴ س^{2} - ص^{2} = ٨ ← (١)   ٢ س ص = -٦ ← (٢)

بتربيع طرفي المعادلتين (١)، (٢)

(س^{2} - ص^{2})^{2} = ٦٤   ٤ س^{2} ص^{2} = ٣٦ ← (٣)

س^{4} - ٢ س^{2} ص^{2} + ص^{4} = ٦٤ ← (٤)

بجمع المعادلة (٣) + (٤)

س^{4} - ٢ س^{2} ص^{2} + ص^{4} + ٤ س^{2} ص^{2} = ٣٦ + ٦٤

س^{4} + ٢ س^{2} ص^{2} + ص^{4} = ١٠٠

(س^{2} + ص^{2})^{2} = ١٠٠   بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

س^{2} + ص^{2} = ١٠ ← (٥)

بجمع المعادلة (١) + (٥)

س^{2} - ص^{2} + س^{2} + ص^{2} = ٨ + ١٠

٢ س^{2} = ١٨   س^{2} = ٩   س = ±٣

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٢)

س = ٣ ⟸ ٢ × ٣ × ص = -٦   ص = -١

س = -٣ ⟸ ٢ × -٣ × ص = -٦   ص = ١

ع$^{3/2}$ = [(٨ - ٦ت)$^{1/2}$]^{3} = [٣ - ت]^{3} = ٣^{3} + ٣(-ت) × ٣^{2} + ٣(-ت)^{2} × ٣ + (-ت)^{3}

= ٢٧ - ٢٧ت - ٩ + ت = ١٨ - ٢٦ت

ع$^{3/2}$ = [(٨ - ٦ت)$^{1/2}$]^{3} = (-٣ + ت)^{3} = (-١)^{3} [٣ - ت]^{3}

= (-١)[٢٧ - ٢٧ت - ٩ت^{2} - ت^{3}] =

= -١٨ + ٢٦ت

⑪ **تفكير إبداعي:** أثبت أن جتا$^{٤}\theta$ = $\frac{1}{٨}$ (جتا ٤θ + ٤ جتا (٢θ + ٣))

من نظرية ديموافر

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = (جتا ٤θ + ت جا ٤θ) ← ①

من نظرية ذات الحدين

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = جتا$^{٤}\theta$ + ٤(ت جا θ) جتا$^{٣}\theta$ + ٦(ت جا θ)^{٢} جتا$^{٢}\theta$

+ ٤ (ت جا θ)^{٣} جتا θ + (ت جا θ)^{٤}

(جتا θ + ت جا θ)^{٤} = جتا$^{٤}\theta$ + ت (٤ جا θ جتا$^{٣}\theta$) − ٦ جا$^{٢}\theta$ جتا$^{٢}\theta$ − ت (٤ جا$^{٣}\theta$ جتا θ) + جا$^{٤}\theta$

= جتا$^{٤}\theta$ − ٦ جا$^{٢}\theta$ جتا$^{٢}\theta$ + جا$^{٤}\theta$ + ت (٤ جا θ جتا$^{٣}\theta$ − ٤ جا$^{٣}\theta$ جتا θ) ← ②

من ①، ②

جتا ٤θ = جتا$^{٤}\theta$ − ٦ جا$^{٢}\theta$ جتا$^{٢}\theta$ + جا$^{٤}\theta$

= جتا$^{٤}\theta$ − ٦ جتا$^{٢}\theta$ (١ − جتا$^{٢}\theta$) + (١ − جتا$^{٢}\theta$)^{٢}

= جتا$^{٤}\theta$ − ٦ جتا$^{٢}\theta$ + ٦ جتا$^{٤}\theta$ + ١ − ٢ جتا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٤}\theta$

جتا ٤θ = ٨ جتا$^{٤}\theta$ − ٨ جتا$^{٢}\theta$ + ١ ← ③

∵ جتا ٢θ = ٢ جتا$^{٢}\theta$ − ١

∴ ٢ جتا$^{٢}\theta$ = جتا ٢θ + ١   بالضرب × ٤

٨ جتا$^{٢}\theta$ = ٤ جتا ٢θ + ٤ ← ④

من ③، ④

جتا ٤θ = ٨ جتا$^{٤}\theta$ − (٤ جتا ٢θ + ٤) + ١

= ٨ جتا$^{٤}\theta$ − ٤ جتا ٢θ − ٤ + ١

جتا ٤θ = ٨ جتا$^{٤}\theta$ − ٤ جتا ٢θ − ٣

∴ ٨ جتا$^{٤}\theta$ = ٤ جتا ٢θ + ٣ + جتا ٤θ بقسمة الطرفين على ٨

جتا$^{٤}\theta$ = $\frac{1}{٨}$ (جتا ٤θ + ٤ جتا ٢θ + ٣)