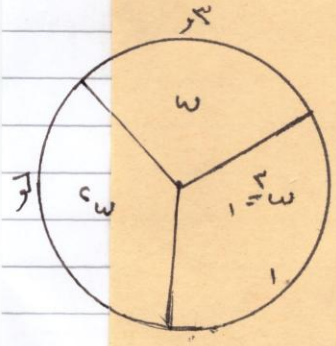
الجذور التكعيبية للواحد



خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

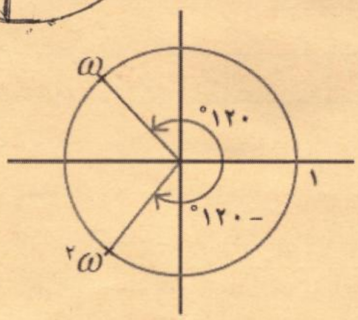
إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

١- $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر (مجموع الجذور = صفر)

($1 + \omega = -\omega^2$ ، $1 + \omega^2 = -\omega$ ، $\omega + \omega^2 = -1$)

٢- $\omega^3 = 1$

($\frac{1}{\omega} = \omega^2$ ، $\frac{1}{\omega^2} = \omega$)



٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتكوِّن رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

٤- $(\omega - \omega^2) = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$ ، $(\omega^2 - \omega) = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$1 + \omega + \omega^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت} = 0$

$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}$ $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}$

مجموع أي جذرين للواحد الصحيح = − الجذر الثالث

$1 \times \omega \times \omega^2 = 1\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}\right]\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}\right] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$\omega^3 = 1$

حاول أن تحل

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة:

أ $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٥}$ ب $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢}(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٣}$

أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٥} = (٢ + ٢\omega + ٣\omega + ٢\omega^{٢})^{٥}$

$= (٣\omega + ٢ + ٢\omega + ٢\omega^{٢})^{٥}$

$= [٣\omega + ٢(١ + \omega + \omega^{٢})]^{٥}$

$= (٣\omega + ٢ \times ٠)^{٥} = (٣\omega)^{٥}$

$= ٣^{٥} \times \omega^{٥} = ٣^{٥} \times \omega^{٣} \times \omega^{٢}$

$= ٣^{٥} \times ١ \times \omega^{٢}$

$= ٢٤٣\,\omega^{٢}$

ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢}(\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٣} = (\omega + \omega^{٢})^{٢}(\omega^{٢} + \omega)^{٣}$

$= (-\omega^{٢})^{٢}(-\omega^{٢})^{٣}$

$= (-١)^{٢}(-١)^{٣}$

$= ١ \times -١ = -١$

حاول أن تحل

② أثبت أن $\left[\dfrac{\text{أ} + \text{ب}\,\omega + \text{جـ}\,\omega^{2}}{\omega^{2}\,\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \dfrac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^{2} + \text{ب}\,\omega}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^{2} + \text{أ}}\right]^{8} = 81$

$$= \left[\frac{\omega^{3}\,\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^{2}\,\text{جـ}}{\omega^{2}\,\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\,\omega^{2} + \text{ب}\,\omega}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^{2} + \text{أ}\,\omega^{3}}\right]^{8}$$

$$= \left[\frac{\omega\,(\omega^{2}\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ})}{\omega^{2}\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\text{جـ} + \cancel{\text{أ}\,\omega^{2}} + \text{ب}\,\omega}{\omega\,(\text{جـ} + \cancel{\omega^{2}\,\text{أ}} + \text{ب}\,\omega)}\right]^{8} = \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^{8}$$

$$= (\omega - \omega^{2})^{8} = (\pm\sqrt{3}\,i)^{8} = (\pm\sqrt{3})^{8}\,(i)^{8} = 81$$

حل آخر

$$\left[\frac{\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^{2}\,\text{جـ}}{\omega^{2}\,\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\text{جـ} + \omega^{2}\,\text{أ} + \omega\,\text{ب}}{\omega\,\text{جـ} + \omega^{2}\,\text{ب} + \text{أ}}\right]^{8}$$

$$\left[\frac{\omega^{3}\,\text{أ} + \omega\,\text{ب} + \omega^{2}\,\text{جـ}}{\omega^{2}\,\text{أ} + \text{ب} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\omega^{3}\,\text{جـ} + \omega^{2}\,\text{أ} + \omega^{4}\,\text{ب}}{\omega\,\text{جـ} + \omega^{2}\,\text{ب} + \text{أ}}\right]^{8}$$

$$\left[\frac{\omega\,[\omega^{2}\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ}]}{\omega^{2}\,\text{أ} + \cancel{\text{ب}} + \omega\,\text{جـ}} - \frac{\omega^{2}\,[\omega\,\text{جـ} + \cancel{\text{أ}} + \omega^{2}\,\text{ب}]}{\omega\,\text{جـ} + \cancel{\omega^{2}\,\text{ب}} + \text{أ}}\right]^{8}$$

$$(\omega - \omega^{2})^{8} = (\pm\sqrt{3}\,i)^{8} = (\pm\sqrt{3})^{8}\,(i)^{8}$$

$$= 81$$

حاول أن تحل

(٣) كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(١ + \omega - \omega^٢)^٣$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٣$

$$(\underbrace{١ + \omega}_{-\omega^٢} - \omega^٢)^٣ = (-\omega^٢ - \omega^٢)^٣ = (-٢\omega^٢)^٣ = (-٢)^٣ (\omega)^٦$$

$$= -٨ \, (\omega^٣)^٢ = -٨ \times ١^٢ = -٨$$

$$(١ - \omega + \omega^٢)^٣ = (-\omega + \underbrace{١ + \omega^٢}_{= -\omega})^٣ = (-\omega - \omega)^٣ = (-٢\omega)^٣$$

$$= -٨\omega^٣$$

$$= -٨$$

∴ الجذران هما -٨ ، -٨

س² - (مجموع الجذران) س + حاصل ضرب الجذران = ٠

مجموع الجذران = $-٨ - ٨ = -١٦$

حاصل ضرب الجذران = $-٨ \times -٨ = ٦٤$

∴ المعادلة

س² - (-١٦) س + ٦٤ = ٠

س² + ١٦ س + ٦٤ = ٠

تمـــارين (٢ - ٣)

إذا كان ١، ω، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يأتى:

(١) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٢} =$ ....

(٢) $(\omega - \omega^{٢})^{٤} =$ ....

(٣) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢} (\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} =$ ....

(٤) إذا كان س $= \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ فإن س^{٨} + س^{٤} = ...

(١) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٢} = [٢ + ٥\omega + ٢(-١ - \omega)]^{٢}$

$= (٢ + ٥\omega - ٢ - ٢\omega)^{٢}$

$= (٣\omega)^{٢}$

$= ٩\omega^{٢}$

(٢) $(\omega - \omega^{٢})^{٤} = [\omega(١ - \omega)]^{٤} = \omega^{٤}(١ - \omega)^{٢}(١ - \omega)^{٢}$

$(١ - \omega)^{٢} = ١ - ٢\omega + \omega^{٢} = ١ - ٢\omega + (-١ - \omega)$

$= ١ - ٢\omega - ١ - \omega$

$(١ - \omega)^{٢} = -٣\omega$

$\therefore \omega^{٤} \cdot (١ - \omega)^{٤} = \omega^{٤}(-٣\omega)^{٢}$

$= \omega^{٤} \times ٩\omega^{٢}$

$= ٩\omega^{٦} = ٩ \times (\omega^{٣})^{٢} = ٩ \times ١$

$= ٩$

(٣) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢} (\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢} = (\omega + \omega^{٢})^{٢} (\omega^{٢} + \omega)^{٢}$

$= (-١)^{٢} (-١)^{٢}$

$= ١ \times ١$

$= ١$

(٤) س $= \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت = \omega$ $\therefore$ س $= \omega$

س^{٨} + س^{٤} $= (\omega)^{٨} + \omega^{٤} = \omega^{٦} \cdot \omega^{٢} + \omega^{٣} \cdot \omega = \omega^{٢} + \omega = -١$

⑤ $\left(\frac{١}{٢+\omega}\right)\left(١+\omega-\frac{٣}{\omega}\right) =$ ....

⑥ $١+٣\omega+٣\omega^{٢} =$ ....

⑦ إذا كان أ = $٢\omega - ٣\omega^{٢}$ ، ب = $٣ + ٥\omega^{٢}$ فإن أ^{٢} + ب^{٢} = ...

⑧ $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^{ر} =$ ....

٥) $\left(\frac{١}{\omega+٢}\right)\left(١+\omega-\frac{٣}{\omega}\right) = \left(\frac{١}{\omega+٢}\right)\left(١+\omega-٣\omega^{٢}\right)$

$= \left(\frac{١}{\omega+٢}\right)\left(-\omega^{٢}-٣\omega^{٢}\right)$

$= \frac{-٤\omega^{٢}}{\omega+٢} \times \frac{\omega}{\omega} = \frac{-٤\omega^{٣}}{\omega^{٢}+٢\omega} = \frac{-٤}{-١-\omega+٢\omega} = \frac{-٤}{\omega-١}$

الحل في كتاب الوزارة = ٤ وهذا لا يأتي إلا إذا كانت
[illegible] على الشكل التالي

$\left(\frac{-١}{\omega^{٢}}\right)\left(١+\omega-\frac{٣}{\omega}\right) = (-\omega)\left(١+\omega-٣\omega^{٢}\right)$

$= (-\omega)\left(-\omega^{٢}-٣\omega^{٢}\right)$

$= (-\omega)\left(-٤\omega^{٢}\right)$

$= ٤\omega^{٣}$

$= ٤$

⑥ $١+٣\omega+٣\omega^{٢} = ١+٣(\omega+\omega^{٢})$

$= ١+٣(-١)$

$= ١-٣$

$= -٢$

⑦ $\text{م} = ٢\omega - ٣\omega^{٢}$, $\text{ن} = ٣ + ٥\omega^{٢}$, $\text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢} = ??$

$\text{م} = ٢\omega - ٣\omega^{٢} = ٢\omega - ٣(-١-\omega) = ٢\omega + ٣ + ٣\omega$

$= ٥\omega + ٣$

$\therefore \text{م}^{٢} = (٥\omega + ٣)^{٢} = ٢٥\omega^{٢} + ٣٠\omega + ٩$

$\text{ن} = ٣ + ٥\omega^{٢}$ $\therefore \text{ن}^{٢} = ٩ + ٢٥\omega^{٤} + ٣٠\omega^{٢}$

$\text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢} = ٢٥\omega^{٢} + ٣٠\omega + ٩ + ٩ + ٢٥\omega^{٤} + ٣٠\omega^{٢}$

$= ٢٥(-\omega-١) + ٣٠\omega + ١٨ + ٢٥\omega + ٣٠(-١-\omega)$

$= -\cancel{٢٥\omega} - ٢٥ + ٣٠\omega + ١٨ + \cancel{٢٥\omega} - ٣٠ - ٣٠\omega$

$= -٢٥ + ١٨ - ٣٠$

$= -٧ - ٣٠$

$= -٣٧$

⑧ $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^{ر} = \omega^{١} + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \omega^{٤} + \omega^{٥}$

$= \omega + \omega^{٢} + ١ + \omega + \omega^{٢}$

$= ١ + ٢\omega + ٢\omega^{٢}$

$= ١ + ٢(\omega + \omega^{٢})$

$= ١ + ٢(-١)$

$= ١ - ٢$

$= -١$

(٩)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مرافق العدد ω يساوي

أ ω ب ω^2 ج ١ د $-\omega$

$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

$\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

$\therefore$ ω^2 هو مرافق ω

(١٠)

(١٠) $(\omega^2 + \frac{1}{\omega})(1 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$

أ ٢ ب صفر ج -3 د -5

$(\omega^2 + \frac{1}{\omega})(1 + \frac{1}{\omega^2})^2 = (\omega^2 + \omega^2)(1 + \omega)^2$

$= (2\omega^2)(-\omega^2)^2$

$= 2\omega^2\omega^4$

$= 2\omega^2\omega^3\omega = 2\omega^2 \times 1 \times \omega$

$= 2\omega^2\omega$

$= 2\omega^3 = 2 \times 1$

$= 2$

(١١)

(١١) $(ا + ب\omega + ا\omega^2)(ا + ب\omega^2 + ا\omega^4) =$

أ ١ ب ا - ب ج $(ا - ب)^2$ د $ب^2 - ا^2$

$(أ + ب\omega + أ\omega^2)(أ + ب\omega^2 + أ\omega^4) =$

$= (أ + أ\omega^2 + ب\omega)(أ + ب\omega^2 + أ\omega)$

$= [أ(1+\omega^2) + ب\omega][أ(1+\omega) + ب\omega^2]$

$= [أ(-\omega) + ب\omega][أ(-\omega^2) + ب\omega^2]$

$= [\omega(-أ+ب)][\omega^2[-أ + ب]]$

$= [\omega(أ-ب)][\omega^2(أ-ب)]$

$= [-\omega(أ-ب)][-\omega^2(أ-ب)]$

$+\omega^3(أ-ب)^2 = (أ-ب)^2$

(١٢)

(١٢) $(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}) =$

أ صفر ب ١ ج -١ د ٢

$(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4})$

$(1 + 2\omega^3\omega^2 + \omega)(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^3\omega})$

$(1 + 2\omega^2 + \omega)(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega})$

$(1 + \omega + 2\omega^2)(1 + 2\omega + \omega^2)$

$(-\omega^2 + 2\omega^2)(1 + \omega^2 + 2\omega)$

$(\omega^2)(-\omega + 2\omega)$

$(\omega^2)(\omega) = \omega^3 = 1$

(١٣)

(١٣) $\dfrac{\text{أ} - \text{ء}\,\omega}{\text{أ}\,\omega^{2} - \text{ء}} - \omega^{2} =$

أ) ٣ت　　ب) $\pm\sqrt{3}$ ت　　ج) -٣　　د) ٣

$$\frac{\text{أ} - \text{ء}\,\omega}{\text{أ}\,\omega^{2} - \text{ء}} - \omega^{2} = \frac{\text{أ}\,\omega^{3} - \text{ء}\,\omega}{\text{أ}\,\omega^{2} - \text{ء}} - \omega^{2} = \frac{\omega(\text{أ}\,\omega^{2} - \text{ء})}{\text{أ}\,\omega^{2} - \text{ء}} - \omega^{2}$$

$$= \omega - \omega^{2} = \pm\sqrt{3}\ \text{ت}$$

(١٤)

(١٤) إذا كان $(1+\omega)^{7} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$ حيث أ، ب عددان حقيقيان فإن (أ، ب) =

أ) (٠ ، -١)　　ب) (١ ، ١)　　ج) (٠ ، ١)　　د) (١ ، -١)

$1 + \omega = -\omega^{2}$

$(1+\omega)^{7} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$(-\omega^{2})^{7} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^{14} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^{12}\cdot\omega^{2} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-(\omega^{3})^{4}\cdot\omega^{2} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$-\omega^{2} = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

$1 + \omega = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$

أ = ١　　ب = ١

$\therefore$ (أ، ب) = (١، ١)

⑮ إذا كان $(١ + \omega)^{ن} = (١ + \omega^{٢})^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هى

أ ٢ ب ٣ ج ٥ د ٦

$١ + \omega = -\omega^{٢}$

$١ + \omega^{٢} = -\omega$

$$(١ + \omega)^{ن} = (١ + \omega^{٢})^{ن}$$

$$(-\omega^{٢})^{ن} = (-\omega)^{ن}$$

$$\cancel{(-١)^{ن}}(\omega^{٢})^{ن} = \cancel{(-١)^{ن}}(\omega)^{ن}$$

$$(\omega^{٢})^{ن} = (\omega)^{ن}$$

$$\omega^{٢ن} = \omega^{ن}$$

$$\omega^{ن} \cdot \cancel{\omega^{ن}} = \cancel{\omega^{ن}}$$

$$\omega^{ن} = ١$$

$$\because \omega^{٣} = ١$$

$\therefore$ أقل قيمة صحيحة لـ ن هى ٣

⑯ $١ + \omega + \omega^{٢} + \omega^{٣} + ... + \omega^{١٠٠} =$

أ صفر ب ١ ج ω د $-\omega^{٢}$

$$١ + \underbrace{(\omega + \omega^{٢} + \omega^{٣})}_{صفر} + \underbrace{(\omega^{٤} + \omega^{٥} + \omega^{٦})}_{صفر} + \underbrace{(\omega^{٧} + \omega^{٨} + \omega^{٩})}_{صفر} + ... + \underbrace{(\omega^{٩٧} + \omega^{٩٨} + \omega^{٩٩})}_{صفر} + \omega^{١٠٠}$$

$$= ١ + \omega^{١٠٠} = ١ + (\omega^{٣})^{٣٣}\omega = ١ + \omega = -\omega^{٢}$$

⑱ $\sum_{ر=١}^{٦} ١+\omega^{ر} =$

ⓐ صفر　ⓑ ٦　ⓒ ١　ⓓ $١ + \omega$

$$\sum_{ر=١}^{٦} ١+\omega^{ر} = (١+\omega^{١}) + (١+\omega^{٢}) + (١+\omega^{٣}) + (١+\omega^{٤}) + (١+\omega^{٥}) + (١+\omega^{٦})$$

$$= ٦ + (\omega^{١} + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \omega^{٤} + \omega^{٥} + \omega^{٦})$$

$$٦ + (-١ + ١ + \omega^{٣}\omega + \omega^{٣}\omega^{٢} + (\omega^{٣})^{٢})$$

$$٦ + (-١ + ١ + \omega + \omega^{٢} + ١^{٢})$$

$$٦ + (-١ + ١ - ١ + ١)$$

$$٦ + \text{صفر} = ٦$$

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} ١+\omega^{ر} = ٦$$

(١٩) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $(١ - \omega + \omega^٢)(١ - \omega^٢ + \omega^٤)(١ - \omega^٤ + \omega^٨)(١ - \omega^٨ + \omega^{١٦}) = ٢^٤$

ب) $\left(\frac{\omega}{١ + ٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{١ + ٢\omega^٢}{\omega^٢}\right)^٢ = \frac{-١٠}{٣}\omega^٢$

ج) $\left[\frac{١}{١ + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{١ + \omega^٢ ت}\right]^٨ = ١٦$

د) $\left[\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}\right]^٢ = -٣$

هـ) $(١ + \omega^٢)^٨ = \omega^٢$

و) $(١ - \omega^٢ + \omega^٤)^٢ + (١ + \omega^٢ + \omega^٤)^٢ = ٤\omega$

(أ) $(١ - \omega + \omega^٢)(١ - \omega^٢ + \omega^٤)(١ - \omega^٤ + \omega^٨)(١ - \omega^٨ + \omega^{١٦}) = ٢^٤$

$(١ + \omega^٢ - \omega)(١ - \omega^٢ + \omega\omega^٣)(١ - \omega\omega^٣ + \omega^٢\omega^٦)(١ - \omega^٢\omega^٦ + \omega\omega^{١٥}) = ٢^٤$

$(-\omega - \omega)(١ - \omega^٢ + \omega)(١ - \omega + \omega^٢)(١ - \omega^٢ + \omega) = ٢^٤$

$(-٢\omega)(-\omega^٢ - \omega^٢)(-\omega - \omega)(-\omega^٢ - \omega^٢) = ٢^٤$

$(-٢\omega)(-٢\omega^٢)(-٢\omega)(-٢\omega^٢) = ٢^٤$

$(-٢)^٤(\omega)^٦ = (٢)^٤(-١)^٤(\omega)^٦ = ٢^٤$

ب) $\left(\frac{\omega}{١ + ٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{١ + ٢\omega^٢}{\omega^٢}\right)^٢ = \frac{-١٠}{٣}\omega^٢$

$\frac{\omega^٢}{(١ + ٢\omega)^٢} + \frac{(١ + ٢\omega^٢)^٢}{(\omega^٢)^٢} = \frac{\omega^٢}{١ + ٤\omega + ٤\omega^٢} + \frac{١ + ٤\omega^٢ + ٤\omega^٤}{\omega^٤}$

$= \frac{\omega^٢}{١ + ٤(\omega + \omega^٢)} + \frac{١ + ٤(\omega^٢ + \omega^٣\omega)}{\omega^٤}$

$= \frac{\omega^٢}{١ - ٤} + \frac{١ + ٤(-١)}{\omega^٣\omega} = \frac{\omega^٢}{-٣} + \frac{-٣}{\omega}$

$= \frac{\omega^٣ + ٩}{-٣\omega} = \frac{١ + ٩}{-٣\omega} = \frac{١٠}{-٣\omega}$ بالضرب × $\frac{\omega^٢}{\omega^٢}$

$= \frac{١٠}{-٣\omega} \times \frac{\omega^٢}{\omega^٢} = \frac{١٠\omega^٢}{-٣\omega^٣} = -\frac{١٠\omega^٢}{٣}$

تابع ١٩

(هـ) $\left[\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\omega+\text{ت}}{1+\omega^2\text{ت}}\right]^8 = 16$

$$\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\omega+\text{ت}}{1+\omega^2\text{ت}} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - (\omega+\text{ت})(1+\omega\text{ت})}{(1+\omega\text{ت})(1+\omega^2\text{ت})}$$

$$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - (\omega+\omega^2\text{ت}+\text{ت}+\omega\text{ت}^2)}{1+\omega^2\text{ت}+\omega\text{ت}+\omega^3\text{ت}^2} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - (\omega+\text{ت}(\omega^2+\omega))}{1+\text{ت}(\omega^2+\omega)-\omega^3}$$

$$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \omega - \omega^2\text{ت} - \omega\text{ت}^2 - \text{ت}}{1+\text{ت}(\omega^2+\omega)-\omega^3}$$

$$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \cancel{\omega} - \omega^2\text{ت} + \cancel{\omega} - \text{ت}}{1+\text{ت}(-1)-1} = \frac{1+\omega^2\text{ت} - \text{ت}(\omega^2+1)}{-\text{ت}}$$

$$= \frac{1+\omega^2\text{ت} - \text{ت}(-\omega)}{-\text{ت}} = \frac{1+\omega^2\text{ت}+\text{ت}\omega}{-\text{ت}}$$

$$= \frac{1+\text{ت}(\omega^2+\omega)}{-\text{ت}} = \frac{1+\text{ت}(-1)}{-\text{ت}} = \frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}}$$

$$\frac{1-\text{ت}}{-\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{\text{ت}(1-\text{ت})}{-\text{ت}^2} = \frac{\text{ت}-\text{ت}^2}{1} = \text{ت}+1$$

$$\therefore \left[\frac{1}{1+\omega\text{ت}} - \frac{\omega+\text{ت}}{1+\omega^2\text{ت}}\right]^8 = (1+\text{ت})^8$$

$$(1+\text{ت})^8 = \left[(1+\text{ت})^2\right]^4 = (1+2\text{ت}+\text{ت}^2)^4$$

$$= (1+2\text{ت}-1)^4 = (2\text{ت})^4$$

$$= (2)^4(\text{ت})^4 = 16\times 1 = 16$$

وهو المطلوب

تابع ١٩

(د) $\left[\frac{٥ - ٢\omega^2}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^2 - ٧}\right]^2 = -٣$

$\left[\frac{٥ - ٣\omega^2}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^2 - ٧}\right]^2 = \left[\frac{٥\omega^3 - ٣\omega^2}{٥\omega - ٣} - \frac{\cancel{٢} - ٧\omega}{٢\omega^2 - ٧\omega^3}\right]^2$

$= \left[\frac{\omega^2(\cancel{٥\omega - ٣})}{\cancel{٥\omega - ٣}} - \frac{\cancel{٢ - ٧\omega}}{\omega^2(\cancel{٢ - ٧\omega})}\right]^2$

$= \left[\frac{\omega^2}{١} - \frac{١}{\omega^2}\right]^2 = \left[\omega^2 - \frac{١}{\omega^2}\right]^2$

$= \left[\omega^2 - \omega\right]^2 = \left[\pm\sqrt{٣}\,ت\right]^2 = ٣ت^2 = -٣$

هـ) $(١ + \omega^2)^٨ = \omega^2$

$(-\omega)^٨ = (-١)^٨ . \omega^٨ = (-١)^٨ . \omega^٦ . \omega^2$

$= ١ \times ١ \times \omega^2$

$= \omega^2$

تابع ١٩

(و) $(١ - ω^٢ + ω^٤)^٢ + (١ + ω^٢ + ω^٤)^٢ = ٤ω$

$(١ - ω^٢ + ω^٤)^٢ = (١ - ω^٢ + ω^٣ \cdot ω)^٢ = (١ - ω^٢ + ω)^٢ = (١ + ω - ω^٢)^٢$

$= (-ω^٢ - ω^٢)^٢ = (-٢ω^٢)^٢ = ٤ω^٤ = ٤ω^٣ω = ٤ω$

$(١ + ω^٢ + ω^٤)^٢ = (١ + ω^٢ + ω^٣ω)^٢ = (١ + ω^٢ + ω)^٢ = (\text{صفر})^٢ = \text{صفر}$

$\therefore (١ - ω^٢ + ω^٤)^٢ + (١ + ω^٢ + ω^٤)^٢ = ٤ω + \text{صفر} = ٤ω$

وهو المطلوب

(٢ح)

٢٠ أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $٥ + ٣\omega + ٣\omega^٢ = ؟$

ب) $(١ + \omega + ٢\omega^٢)^٢ + (١ + ٢\omega + \omega^٢)^٢$

ج) $\dfrac{\omega^٢(\omega - ١)(\omega^٢ - ١)}{(٢\omega + ١)(\omega^٢ + ٢)}$

د) $\left[\dfrac{١}{١ + ٢\omega^٢} - \dfrac{١}{١ + ٢\omega}\right]^٢$

هـ) $(١ + \dfrac{١}{\omega} + ت)(١ + \dfrac{١}{\omega^٢} + ت)$

(أ) $٥ + ٣\omega + ٣\omega^٢ = ٥ + ٣(\omega + \omega^٢) = ٥ + ٣(-١) = ٥ - ٣ = ٢$

$\therefore ٥ + ٣\omega + ٣\omega^٢ = ٢$

$\omega + \omega^٢ = -١$

$١ + \omega = -\omega^٢$

$١ + \omega^٢ = -\omega$

ب) $(١ + \omega + ٢\omega^٢)^٢ + (١ + ٢\omega + \omega^٢)^٢ =$

$(-\omega^٢ + ٢\omega^٢)^٢ + (-\omega + ٢\omega)^٢$

$(\omega^٢)^٢ + (\omega)^٢$

$\omega^٤ + \omega^٢ = \omega^٣ \cdot \omega + \omega^٢ = \omega + \omega^٢ = -١$

ج) $\dfrac{\omega^٢(\omega - ١)(\omega^٢ - ١)}{(٢\omega + ١)(\omega^٢ + ٢)} = \dfrac{\omega^٢(-١ - \omega^٢ - ١)(-١ - \omega - ١)}{(٢\omega + ١)(\omega^٢ + ٢)} = \omega^٢[-(١ + \omega^٢)$

$= \dfrac{\omega^٢(-٢ - \omega^٢)(-٢ - \omega)}{(٢\omega + ١)(\omega^٢ + ٢)} = \dfrac{\omega^٢[-\cancel{(٢ + \omega^٢)}][-(٢ + \omega)]}{(٢\omega + ١)\cancel{(\omega^٢ + ٢)}}$

$= \dfrac{\omega^٢(٢ + \omega)}{(٢\omega + ١)} = \dfrac{٢\omega^٢ + \omega^٣}{٢\omega + ١} = \dfrac{٢\omega^٢ + ١}{٢\omega + ١} = \dfrac{\omega^٢ + \omega^٢ + ١}{٢\omega + ١}$

$= \dfrac{-\omega + \omega^٢}{٢\omega + ١} = \dfrac{-\omega + \omega^٢}{\omega + \omega + ١} = \dfrac{-\omega + \omega^٢}{-\omega^٢ + \omega}$

$= \dfrac{-(\omega - \omega^٢)}{(\omega - \omega^٢)} = -١$

تابع (٢٠)

(د) $\left[\frac{1}{1+3\omega^2} - \frac{1}{1+3\omega}\right]^2$ توحيد المقامات

$$= \left[\frac{(1+3\omega) - (1+3\omega^2)}{(1+3\omega)(1+3\omega^2)}\right]^2 = \left[\frac{1+3\omega-1-3\omega^2}{(1+3\omega)(1+3\omega^2)}\right]^2 = \left[\frac{3(\omega-\omega^2)}{(1+3\omega)(1+3\omega^2)}\right]^2$$

$\because \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$$\frac{\left[3(\pm\sqrt{3}\,\text{ت})\right]^2}{(1+3\omega+3\omega^2+9\omega^3)^2} = \frac{9\times 3\times \text{ت}^2}{(1+3(\omega+\omega^2)+9)^2} = \frac{-27}{(1-3+9)^2} = \frac{-27}{(7)^2}$$

$$= \frac{-27}{49}$$

(هـ) $\left(1+\frac{1}{\omega}+\text{ت}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}+\text{ت}\right) = (1+\omega^2+\text{ت})(1+\omega+\text{ت})$

$$= (-\omega+\text{ت})(-\omega^2+\text{ت})$$

$$= \omega^3 - \omega\text{ت} - \omega^2\text{ت} + \text{ت}^2$$

$$= \omega^3 - \text{ت}(\omega+\omega^2) + \text{ت}^2$$

$$= 1 - \text{ت}(-1) - 1$$

$$= -\text{ت}(-1) = \text{ت}$$

(٢١) إذا كان س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ أثبت أن س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥ س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س=٠ .

$\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}\,ت}{٢} = \omega =$ س

من نظرية ذات الحدين

س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س + ١ = (س + ١)^{٦}

∴ س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س = (س + ١)^{٦} − ١

(س + ١)^{٦} − ١ $= (\omega + 1)^{6} - 1 = (-\omega^{2})^{6} - 1 = \omega^{12} - 1 = (\omega^{3})^{4} - 1$

$= 1 - 1 = 0$

نفرض أن س $= \omega^{2}$

س^{٦} + ٦س^{٥} + ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦س = (س+١)^{٦} − ١

$(\omega^{2} + 1)^{6} - 1 = (-\omega)^{6} - 1 = (\omega^{3})^{2} - 1 = 1^{2} - 1 =$ صفر

يمكن حل هذا المثال بالتعويض في المعادلة عن س $= \omega$
ولكنها ستكون طويلة جداً وعرضة للأخطاء الأكثر انتشار .

(٢٢)

٢٢ إذا كان $\frac{١}{١ + \omega}$ ، $\frac{١}{١ + \omega^٢}$ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة .

نفرض أن الجذر الأول هو ل $= \frac{١}{\omega + ١} = \frac{١}{-\omega^٢} = -\omega$

نفرض أن الجذر الثاني هو م $= \frac{١}{\omega^٢ + ١} = \frac{١}{-\omega} = -\omega^٢$

المعادلة

س^٢ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

س^٢ - (ل + م) س + ل.م = ٠

س^٢ - ($-\omega - \omega^٢$) س + ($-\omega \cdot -\omega^٢$) = ٠

س^٢ - [+١] س + ($+\omega^٣$) = صفر

س^٢ - س + ١ = ٠

∴ المعادلة هي

س^٢ - س + ١ = ٠

(٢٣) إذا كان ع = ٢ (ω + ت) ($\omega^{٢}$ + ت) أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية.

ع = ٢ (ω + ت) ($\omega^{٢}$ + ت)

= ٢ [$\omega \, \omega^{٢}$ + ω ت + ت $\omega^{٢}$ + ت^{٢}]

= ٢ [$\omega^{٣}$ + ω ت + ت $\omega^{٢}$ − ١]

= ٢ [١ + ت ($\omega + \omega^{٢}$) − ١]

= ٢ [١ + ت (−١) − ١]

= ٢ (−ت)

ع = − ٢ ت   س = ٠   ص = −٢

∴ العدد يقع على محور الصادات السالب

ل = $\sqrt{(٠)^{٢} + (-٢)^{٢}}$ = ٢ $\theta = \frac{-\pi}{٢}$

ع = ٢ (جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$) = ٢ هـ$^{\frac{-\pi}{٢} ت}$

∴ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $(٢)^{\frac{١}{٢}}$ (جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$)$^{\frac{١}{٢}}$

ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{١}{٢}$ ($\frac{-\pi}{٢}$ + ٢πر) + ت جا $\frac{١}{٢}$ ($\frac{-\pi}{٢}$ + ٢πر))

عندما ر = ٠ ، ع$_{١}$ = (جتا $\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٤}$) $\sqrt{٢}$

عندما ر = ١ ، ع$_{٢}$ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

(٢٤) تفكير إبداعي: أوجد قيم ن التى تجعل $(2+5\omega+2\omega^2)^{\text{ن}} = (2+2\omega+5\omega^2)^{\text{ن}}$

$$(2+5\omega+2\omega^2)^{\text{ن}} = (2+5\omega^2+2\omega)^{\text{ن}}$$

$$(2+2\omega+3\omega+2\omega^2)^{\text{ن}} = (2+2\omega^2+3\omega^2+2\omega)^{\text{ن}}$$

$$[3\omega+2(1+\omega+\omega^2)]^{\text{ن}} = [3\omega^2+2(\omega+\omega^2+1)]^{\text{ن}}$$

$$[3\omega+2\times 0]^{\text{ن}} = [3\omega^2+2\times 0]^{\text{ن}}$$

$$(3\omega)^{\text{ن}} = (3\omega^2)^{\text{ن}}$$

$$\cancel{3^{\text{ن}}}\,\omega^{\text{ن}} = \cancel{3^{\text{ن}}}\,\omega^{2\text{ن}}$$

$$\omega^{\text{ن}} = \omega^{2\text{ن}}$$

عند ن = ٠ $\qquad \omega^{0} = \omega^{2\times 0} = 1$

عند ن = ٣ $\qquad \omega^{3} = \omega^{6} \Leftarrow \omega^{3} = (\omega^{3})^{2} = 1$

عند ن = ٦ $\qquad \omega^{6} = \omega^{12} \Leftarrow (\omega^{3})^{2} = (\omega^{3})^{4} = 1$

$\therefore$ ن = ٣ك حيث ك $\in$ ص

٢٥ أوجد : (أ) $\sum_{ر = صفر}^{١٠} \omega^{ر}$ (ب) $\sum_{ر = صفر}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر})$

(أ) $ح = \omega^{٠} + \omega^{١} + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \dots + \omega^{١٠}$

$= ١ + \underbrace{\omega + \omega^{٢} + \omega^{٣}}_{صفر} + \dots + \underbrace{\omega^{٧} + \omega^{٨} + \omega^{٩}}_{صفر} + \omega^{١٠}$

$= ١ + \omega^{١٠} = ١ + \omega^{٩} . \omega = ١ + (\omega^{٣})^{٣} \omega = ١ + \omega = -\omega^{٢}$

(ب) $ر = ٠$ $١ + \omega^{٠} + \omega^{٢ \times ٠} = ١ + ١ + ١ = ٣$

$ر = ١$ $١ + \omega^{١} + \omega^{٢} =$ صفر

$ر = ٢$ $١ + \omega^{٢} + \omega^{٤} = ١ + \omega^{٢} + \omega^{٣} . \omega = ١ + \omega^{٢} + \omega =$ صفر

* $ر = ٣$ $١ + \omega^{٣} + \omega^{٦} = ١ + ١ + (\omega^{٣})^{٢} = ٣$

$ر = ٤$ $١ + \omega^{٤} + \omega^{٨} = ١ + \omega^{٣} . \omega + (\omega^{٣})^{٢} . \omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

$ر = ٥$ $١ + \omega^{٥} + \omega^{١٠} = ١ + \omega^{٣} . \omega^{٢} + (\omega^{٣})^{٣} \omega = ١ + \omega^{٢} + \omega =$ صفر

* $ر = ٦$ $١ + \omega^{٦} + \omega^{١٢} = ١ + (\omega^{٣})^{٢} + (\omega^{٣})^{٤} = ٣$

$ر = ٧$ $١ + \omega^{٧} + \omega^{١٤} = ١ + \omega^{٦} . \omega + \omega^{١٢} \omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

$ر = ٨$ $١ + \omega^{٨} + \omega^{١٦} = ١ + \omega^{٦} . \omega^{٢} + \omega^{١٥} . \omega = ١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

* $ر = ٩$ $١ + \omega^{٩} + \omega^{١٨} = ١ + (\omega^{٣})^{٣} + (\omega^{٣})^{٦} = ٣$

$ر = ١٠$ $١ + \omega^{١٠} + \omega^{٢٠} = ١ + \omega^{٩} . \omega + \omega^{١٨} \omega^{٢} = ١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

$\therefore \sum_{ر = ٠}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر}) = ١٢$