نظرية ديموافر

(جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{1}{ك}}$ = جتا $\frac{\theta + ٢ ن \pi}{ك}$ + جا $\frac{\theta + ٢ ن \pi}{ك}$

ن = ...، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ....

السعة $\frac{\theta + ٢ ن \pi}{ك}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

حاول أن تحل (١) ص٥٠

عبر عن جا٣θ بدلالة قوى جاθ

(جتا θ + ت جا θ)^{٣} = جتا٣θ + ت جا٣θ ...... (١)

(جتا θ + ت جا θ)^{٣} = جتا$^{٣}\theta$ + ٣ت جتا$^{٢}\theta$ جاθ − ٣ جتاθ جا$^{٢}\theta$ − ت جا$^{٣}\theta$ ← (٢)

بمساواة الجزء التخيلي في المعادلة (١)، (٢)

جا٣θ = ٣ جتا$^{٢}\theta$ جاθ − جا$^{٣}\theta$ ← (٣)

$\because$ جتا$^{٢}\theta$ = ١ − جا$^{٢}\theta$

جا٣θ = ٣(١ − جا$^{٢}\theta$) جاθ − جا$^{٣}\theta$

جا٣θ = ٣ جاθ − ٣ جا$^{٣}\theta$ − جا$^{٣}\theta$

= ٣ جاθ − ٤ جا$^{٣}\theta$

$\therefore$ جا٣θ = ٣ جاθ − ٤ جا$^{٣}\theta$

حاول أن تحل (٢) ص ١٥

أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $\text{ع}^{4} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

$\text{ع}^{4} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ $\quad$ س = ٢ $\quad$ ص = $٢\sqrt{٣}$ $\quad$ س > ٠ ، ص > ٠

∴ الزاوية تقع في الربع الأول

$$\text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{(٢)^2 + (٢\sqrt{٣})^2} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

$$\theta = \text{ظا}^{-1}\frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \text{ظا}^{-1}\sqrt{٣} = ٦٠^\circ = \frac{\text{ط}}{٣}$$

$$\therefore \text{ع}^{4} = ٤\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\text{ط}}{٣}\right)$$

$$\text{ع} = (٤)^{\frac{1}{4}}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\text{ط}}{٣}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{ع} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\tfrac{1}{4}\left(\frac{\text{ط}}{٣} + ٢\text{ط}\,\text{ر}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\tfrac{1}{4}\left(\frac{\text{ط}}{٣} + ٢\text{ط}\,\text{ر}\right)\right)$$

عندما ر = ٠ $\quad \text{ع}_1 = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{١٢} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{\text{ط}}{١٢}\right) = \boxed{\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{\text{ط}}{١٢}\text{ت}}}$

عندما ر = ١ $\quad \text{ع}_2 = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٧}{١٢}\pi + \text{ت}\,\text{جا}\frac{٧}{١٢}\pi\right) = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٧}{١٢}\pi\,\text{ت}}$

عندما ر = -١ $\quad \text{ع}_3 = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{-٥\text{ط}}{١٢} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-٥}{١٢}\text{ط}\right) = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{-٥\text{ط}}{١٢}\text{ت}}$

عندما ر = ٢ $\quad \text{ع}_4 = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{-١١\text{ط}}{١٢} + \text{ت}\,\text{جا}\frac{-١١\text{ط}}{١٢}\right) = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{-١١\text{ط}}{١٢}\text{ت}}$

حاول أن تحل (٣) ص ٥٢

أوجد جذور المعادلة $ع^{٤} = ١$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند

$ع^{٤} = ١$ $\quad ع^{٤} = ١ + ٠\,ت$ $\quad س = ١ ،\ ص = ٠ \quad \therefore \theta = ٠$

$\therefore$ العدد يقع في محور السينات .

$ل = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}} = ١$

$ع^{٤} = ١\,(\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠)$

$\therefore ع = (١)^{\frac{١}{٤}}\,(\text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠)^{\frac{١}{٤}}$

$ع = \text{جتا}\,\frac{١}{٤}(٠ + ٢ط\,ر) + ت\,\text{جا}\,\frac{١}{٤}(٠ + ٢ط\,ر)$

عندما ر = ٠

$ع_{١} = \text{جتا}\,٠ + ت\,\text{جا}\,٠ = ١$

عندما ر = ١

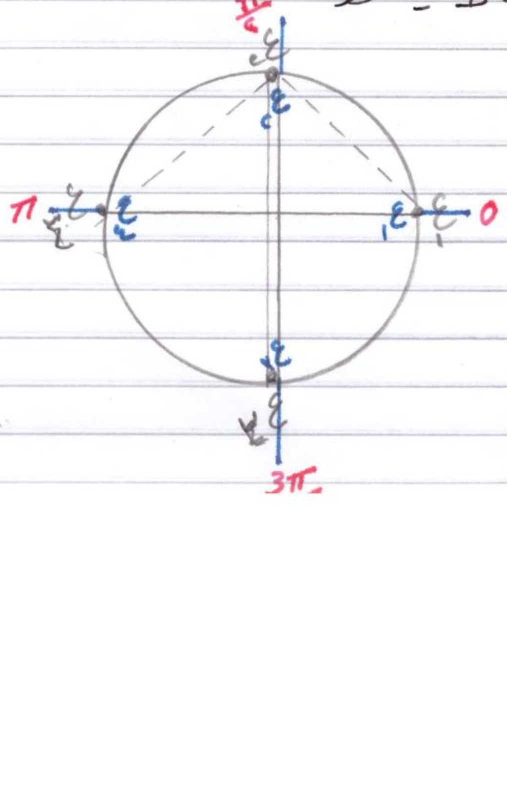
$ع_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢ط}{٤} + ت\,\text{جا}\,\frac{٢ط}{٤} = \text{جتا}\,\frac{ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{ط}{٢} = هـ^{\frac{ط}{٢}ت}$

عندما ر = −١

$ع_{٣} = \text{جتا}\,\frac{-ط}{٢} + ت\,\text{جا}\,\frac{-ط}{٢} = هـ^{-\frac{ط}{٢}ت}$

عندما ر = ٢

$ع_{٤} = \text{جتا}\,ط + ت\,\text{جا}\,ط = هـ^{ط\,ت}$



حاول أن تحل (٤) ص٥٣

مثل على شكل أرجاند الجذور السداسية للعدد ١

$ع^{٦} = ١$ $\quad$ $ع^{٦} = ١ + ٠ت$ $\quad$ $س = ١$ $\quad$ $ص = ٠$

∴ العدد يقع على محور س الموجب

$ل = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(١)^{٢} + (٠)^{٢}} = ١ \qquad \theta = ٠$

$ع^{٦} = ١\,(جتا\,٠ + ت\,جا\,٠)$

$ع = ١^{\frac{١}{٦}}\,(جتا\,٠ + ت\,جا\,٠)^{\frac{١}{٦}}$

$ع = \left[جتا\,\frac{١}{٦}(٠ + ٢ط\,ر) + ت\,جا\,\frac{١}{٦}(٠ + ٢ط\,ر)\right]$

عندما ر = ٠

$ع_{١} = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠ = ١$

عندما ر = ١

$ع_{٢} = جتا\,\frac{ط}{٣} + ت\,جا\,\frac{ط}{٣} = هـ^{\frac{ط}{٣}ت}$

عندما ر = ٢

$ع_{٣} = جتا\,\frac{٢ط}{٣} + ت\,جا\,\frac{٢ط}{٣} = هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$

عندما ر = ٣

$ع_{٤} = جتا\,ط + ت\,جا\,ط = هـ^{ط\,ت}$

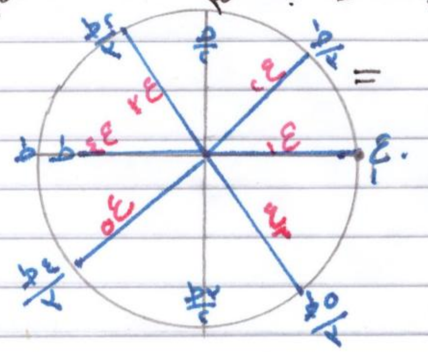
عندما ر = ٤

$ع_{٥} = جتا\,\frac{٤}{٣}ط + ت\,جا\,\frac{٤}{٣}ط = هـ^{\frac{٤}{٣}ط}$ $\qquad$ $\frac{٤}{٣}ط - ٢ط = \frac{-٢ط}{٣}$

$ع_{٥} = جتا\,\frac{-٢}{٣}ط + ت\,جا\,\frac{-٢}{٣}ط = هـ^{\frac{-٢}{٣}ط}$

عندما ر = ٥

$ع_{٦} = جتا\,\frac{٥ط}{٣} + ت\,جا\,\frac{٥ط}{٣} = جتا\,\frac{-ط}{٣} + ت\,جا\,\frac{-ط}{٣} = هـ^{\frac{-ط}{٣}ت}$



حاول أن تحل (٥) ص٥٣

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ٧ - ٢٤ ت

بفرض ص ، س

(٧ - ٢٤ ت)^{½} = س + ت ص   بتربيع الطرفين

٧ - ٢٤ ت = (س + ت ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص ت + ت^{٢} ص^{٢}

= س^{٢} + ٢ س ص ت - ص^{٢}

الجزء الحقيقي   الجزء التخيلي

س^{٢} - ص^{٢} = ٧ ← (١)   ٢ س ص = -٢٤ ← (٢)

بتربيع ~~طرفي~~ المعادلتان (١) ، (٢) ثم جمعهم.

(س^{٢} - ص^{٢})^{٢} = (٧)^{٢} (٢ س ص)^{٢} = (-٢٤)^{٢}

س^{٤} - ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٤٩   ٤ س^{٢} ص^{٢} = ٥٧٦

س^{٤} - ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤ س^{٢} ص^{٢} = ٤٩ + ٥٧٦

س^{٤} + ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٦٢٥

(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٦٢٥   بأخذ جذري الطرفين

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ← (٣)

جمع المعادله (١) + (٣)

س^{٢} - ص^{٢} + س^{٢} - ص^{٢} = ٢٥ + ٧

٢ س^{٢} = ٣٢   س^{٢} = ٦   س = ± ٤

من المعادله (٢)

٢ س ص = -٢٤   ٢ × (-٤) ص = -٢٤

-٨ ص = -٢٤

ص = ٣

٢ × ٤ ص = -٢٤

ص = -٣

س = -٤ ← ص = ٣

س = ٤ ← ص = -٣

∴ جذور المعادله كالاتي :.

-٤ + ٣ ت   ٤ - ٣ ت

مثال ٦ ص ٥٣

أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $(١ - \text{ت})\,\text{س}^2 - (٦ - ٤\text{ت})\,\text{س} + ٩ - ٧\text{ت} = ٠$

الحل

$(١ - \text{ت})\,\text{س}^2 - (٦ - ٤\text{ت})\,\text{س} + ٩ - ٧\text{ت} = ٠$ بقسمة الطرفين على $(١ - \text{ت})$

$$\text{س}^2 - \frac{٦ - ٤\text{ت}}{١ - \text{ت}}\,\text{س} + \frac{٩ - ٧\text{ت}}{١ - \text{ت}} = ٠$$

$$\frac{٦ - ٤\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٦ - ٤\text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}} = \frac{٦ - ٤\text{ت} - ٤\text{ت}^2 + ٦\text{ت}}{٢} = \frac{٦ + ٤ + ٢\text{ت}}{٢} = ٥ + \text{ت}$$

$$\frac{٩ - ٧\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٩ - ٧\text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}} = \frac{٩ + ٩\text{ت} - ٧\text{ت} - ٧\text{ت}^2}{٢} = \frac{٩ + ٧ + ٢\text{ت}}{٢} = ٨ + \text{ت}$$

$\therefore\ \text{س}^2 - (٥ + \text{ت})\,\text{س} + (٨ + \text{ت}) = ٠$ باستخدام القانون العام للمعادلة التربيعية

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$$

$\text{أ} = ١$ $\quad \text{ب} = -(٥ + \text{ت})$ $\quad \text{جـ} = ٨ + \text{ت}$

$$\text{س} = \frac{(٥ + \text{ت}) \pm \sqrt{(٥ + \text{ت})^2 - ٤ \times ١ \times (٨ + \text{ت})}}{٢ \times ١}$$

$$\text{س} = \frac{(٥ + \text{ت}) \pm \sqrt{٢٥ + ١٠\text{ت} + \text{ت}^2 - ٣٢ - ٤\text{ت}}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{(٥ + \text{ت}) \pm \sqrt{-٨ + ٦\text{ت}}}{٢}$$ ← سيتم الحل عن هذا الجزء ← ①

نفرض أن $(-٨ + ٦\text{ت})^{1/2} = \text{أ} + \text{ب}\,\text{ت}$ بتربيع الطرفين

$$-٨ + ٦\text{ت} = (\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت})^2 = \text{أ}^2 + ٢\text{أ}\text{ب}\,\text{ت} + \text{ب}^2\text{ت}^2$$
$$= \text{أ}^2 - \text{ب}^2 + ٢\text{أ}\text{ب}\,\text{ت}$$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = -٨$ ← ② $\qquad ٢\text{أ}\text{ب} = ٦$ ← ③

بتربيع المعادلة (٢)، ③ ثم جمعهم

$(\text{أ}^2 - \text{ب}^2)^2 = (٨)^2$ $\qquad (٢\text{أ}\text{ب})^2 = (٦)^2$

$\text{أ}^4 - ٢\text{أ}^2\text{ب}^2 + \text{ب}^4 = ٦٤$ $\qquad ٤\text{أ}^2\text{ب}^2 = ٣٦$

$\text{أ}^4 - ٢\text{أ}^2\text{ب}^2 + \text{ب}^4 + ٤\text{أ}^2\text{ب}^2 = ٦٤ + ٣٦$

$$\text{أ}^4 + 2\,\text{أ}^2\text{ب}^2 + \text{ب}^4 = 100$$

$$(\text{أ}^2 + \text{ب}^2)^2 = 100$$ بأخذ جذر الطرفين

$$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 10 \longrightarrow (4)$$

بجمع المعادلة (٢) + (٤)

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 + \text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 10 - 8$$

$$2\,\text{أ}^2 = 2$$

$$\text{أ}^2 = 1$$

$$\text{أ} = \pm 1$$

بالتعويض عن قيم أ في المعادلة (٣) $2\,\text{أ}\,\text{ب} = 6$

$$\text{أ} = +1 \qquad 2 \times 1\,\text{ب} = 6 \qquad \text{ب} = 3$$

$$\text{أ} = -1 \qquad 2 \times (-1)\,\text{ب} = 6 \qquad \text{ب} = -3$$

∴ الجذران هما $\boxed{1 + 3\text{ت}}$ ، $\boxed{-1 - 3\text{ت}}$

بالتعويض عن الجذرين في المعادلة (١)

$$\text{س}_1 = \frac{(5 + \text{ت}) + 1 + 3\text{ت}}{2} = \frac{6 + 4\text{ت}}{2} = 3 + 2\text{ت}$$

$$\text{س}_2 = \frac{5 + \text{ت} - 1 - 3\text{ت}}{2} = \frac{4 - 2\text{ت}}{2} = 2 - \text{ت}$$

$$\therefore \text{س}_1 = 3 + 2\text{ت}$$

$$\text{س}_2 = 2 - \text{ت}$$