تمـــارين (٢ - ١)

اكمل ما يأتى

(١) العدد ع = ٣ - ٤ت يُمثَّل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث أ = (٣ ، -٤)

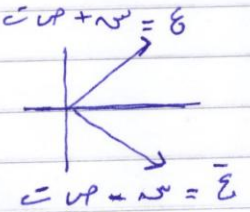
(٢) إذا كانت نقطة أ تمثل العدد ع على مستوى أرجاند، ب تمثل العدد $\overline{ع}$ على مستوى أرجاند، فإن ب صورة أ بالانعكاس فى س محور السينات

(٣) مقياس العدد المركب ع = -٥ت يساوى ع = ٠ - ٥ت ⟸ |ع| = $\sqrt{(٠)^٢ + (-٥)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

(١) ع = ٣ - ٤ت س = ٣ ص = -٤

∴ أ = (٣ ، -٤)

(٢) الانعكاس حول محور س



(٣) ع = -٥ت

ع = ٠ - ٥ت س = ٠ ص = -٥

|ع| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

= $\sqrt{(٠)^٢ + (-٥)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

(٤) إذا كان ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن |ع| = ١

(٥) إذا كانت θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن سعة $\overline{ع}$ هى $-\theta$

(٦) إذا كان ع = $\frac{١}{\overline{ع}}$ فإن |ع| = ١

(٤) ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ بالضرب في مرافق المقام

ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٤ - ٢ت - ٢ت + ت^٢}{٤ - ت^٢} = \frac{٤ - ٤ت - ١}{٤ - (-١)}$

$= \frac{٣ - ٤ت}{٤ + ١} = \frac{٣ - ٤ت}{٥} = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

∴ س = $\frac{٣}{٥}$ ، ص = $\frac{-٤}{٥}$

|ع| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(\frac{٣}{٥})^٢ + (\frac{-٤}{٥})^٢} = \sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}}$

$= \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = ١$

الحل الأول

$\text{ع} = \frac{1}{\bar{\text{ع}}}$

$\text{ع}\,\bar{\text{ع}} = 1$

$\text{ع}\,\bar{\text{ع}} = |\text{ع}|^2$

$\therefore \text{ع}\,\bar{\text{ع}} = |\text{ع}|^2 = 1$

$\therefore |\text{ع}| = 1$

الحل الثاني

نفرض

$\text{ع} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$

$\bar{\text{ع}} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$

$\text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta) = \frac{1}{\text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)}$

$\text{ل}^2\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)(\text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta) = 1$

$\text{ل}^2\,(\text{جتا}^2\theta - \text{ت}^2\,\text{جا}^2\theta) = 1$

$\text{ل}^2\,(\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta) = 1$

$\text{ل}^2 = 1$

$\text{ل} = |\text{ع}| = 1$

الحل الثالث

نفرض أن $\text{ع} = \text{س} + \text{ت}\,\text{ص}$

$\bar{\text{ع}} = \text{س} - \text{ت}\,\text{ص}$

$\text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \frac{1}{\text{س} - \text{ت}\,\text{ص}}$

$(\text{س} + \text{ت}\,\text{ص})(\text{س} - \text{ت}\,\text{ص}) = 1$

$\text{س}^2 - \text{ت}^2\,\text{ص}^2 = 1$

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

$\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{1} = |\text{ع}|$

$\therefore |\text{ع}| = 1$

(٧) الصورة الأسية للعدد -١ + ت هي .....

(٨) إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن السعة الأساسية العدد (١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{٨} هي .....

$ع = س + ت ص = ل \angle \theta$

(٧) $ع = -١ + ت$

$\therefore س = -١ \quad ص = ١$

$\therefore ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$

$س < ٠ ، ص > ٠$ ∴ نقع في الربع الثاني

$\theta = \pi - ظا^{-١} \frac{ص}{س} = \pi - ظا^{-١} \frac{١}{-١} = \pi - \frac{\pi}{٤} = \frac{٣\pi}{٤}$

$\therefore ع = \sqrt{٢} \angle \frac{٣\pi}{٤}$ ت

(٨) $ع = ١ + \sqrt{٣}$ ت

$س = ١ \quad ص = \sqrt{٣}$ الربع الأول

$\theta = ظا^{-١} \frac{\sqrt{٣}}{١} = \frac{١}{٣}\pi$

$ل = \sqrt{١ + ٣} = ٢$

$١ + \sqrt{٣}$ ت $= ٢ [جتا \frac{١}{٣}\pi + ت جا \frac{١}{٣}\pi]$

$\theta = \pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣} = ١٢٠°$

$(١ + \sqrt{٣}$ ت$)^٨ = ٢^٨ [جتا \frac{٨}{٣}\pi + ت جا \frac{٨}{٣}\pi]$

$\therefore \theta = \frac{٨}{٣}\pi = ٤٨٠$

$\therefore \theta = ٤٨٠ - ٣٦٠ = ١٢٠°$

∴ السعة الأساسية = ١٢٠°

⑨ الصورة المثلثية للعدد ع = ٢ - ٢√٣ ت هي .....

(٩) ع = ٢ - ٢√٣ ت

س = ٢ ، ص = -٢√٣ الربع الرابع

∴ ل = √(٢)² + (-٢√٣)² = √٤ + ١٢ = √١٦ = ٤

θ = ظا⁻¹ (-٢√٣ / ٢) = ظا⁻¹ -√٣ = -١/٣ π = -٦٠°

∴ ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

= ٤ (جتا(-٦٠) + ت جا(-٦٠))

⑩ إذا كانت سعة العدد المركب ع هي θ فإن سعة العدد المركب ٢ع هي ..... θ

نفرض ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

بضرب المعادلة أعلاه × ٢

٢ع = ٢ل (جتا θ + ت جا θ)

∴ سعة العدد ٢ع = θ

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١١) إذا كان ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ٩٠° د ١٢٠°

جا ٩٠ − هـ = جتا هـ

جتا ٩٠ − هـ = جا هـ

ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠ + ت جتا ٣٠)

ع = $\sqrt{٢}$ (جا(٩٠ − ٦٠) + ت جتا(٩٠ − ٦٠))

= $\sqrt{٢}$ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

∴ السعة الأساسية θ = ٦٠°

(١٢) إذا كان ع = (١ + $\sqrt{٣}$ ت)^{ن} و كان |ع| = ٨ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب $\frac{\pi}{٣}$ ج $\frac{\pi}{٦}$ د π

نفرض أن م = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

∴ س = ١ ص = $\sqrt{٣}$ الربع الأول

ل = $\sqrt{١ + ٣}$ = ٢

θ = ظا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٣}}{١}$ = $\frac{١}{٣}$ π = ٦٠°

م = ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

ع = ٢^{ن} (جتا ٦٠ ن + ت جا ٦٠ ن)

|ع| = ٨ ∴ ٢^{ن} = ٨ = ٢^{٣}

∴ ن = ٣

ع = م^{٣} (جتا ٦٠ × ٣ + ت جا ٦٠ × ٣)

= ٨ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠)

= ٨ (جتا π + ت جا π)

∴ السعة الأساسية = π

(١٣) إذا كان $ع_١ = ل_١ (جتا\theta_١ + ت جا\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢ (جتا\theta_٢ + ت جا\theta_٢)$ وكان $\theta_١ + \theta_٢ = \pi$ فإن $ع_١ ع_٢ =$

أ $ل_١ ل_٢$ ب $-ل_١ ل_٢$ ج $ل_١ ل_٢ ت$ د $-ل_١ ل_٢ ت$

$ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ [جتا(\theta_١ + \theta_٢) + ت جا(\theta_١ + \theta_٢)]$

$= ل_١ ل_٢ [جتا\pi + ت جا\pi]$

$= ل_١ ل_٢ [-١ + صفر]$

$= -ل_١ ل_٢$

(١٤) سعة العدد المركب ع = -٣ تساوى

أ صفر° ب ٩٠° ج ١٨٠° د ٢٧٠°

$ع = -٣ + ٠ ت$ $س = -٣$ $ص = ٠$

$ل = \sqrt{(-٣)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{٩} = ٣$

$ظا\theta = \frac{ص}{س} = \frac{٠}{-٣} = صفر$

$ظا ١٨٠ = صفر$

$\therefore \theta = ١٨٠°$

(١٦) إذا كان ع١ = -١ - ت فإن الصورة الأسية للعدد ع هي

أ) هـ^{٣π/٤ ت} ب) هـ^{٥π/٤ ت} ج) √٢ هـ^{٣٠π/٤ ت} د) √٢ هـ^{٢٢٥ ت}

ع = -١ - ت س = -١ ص = -١ الربع الثالث

ل = √((-١)² + (-١)²) = √(١+١) = √٢

ظا ح = ١/١ = ٤٥ = π/٤

الزاوية في الربع الثالث ∴ θ = -π + ظا⁻¹ ص/س

θ = -π + π/٤ = -٣π/٤

ع = ل هـ^{θ ت}

ع = √٢ هـ^{-٣π/٤ ت}

(١٥) إذا كان ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن |ع| =

أ -١ - $\sqrt{٣}$ ت ب $\sqrt{٢}$ **ج ٢** د -٢

ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت س = -١ ص = $\sqrt{٣}$

$|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

(١٧) إذا كان $ع_١$ = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = -٣ - ٣ $\sqrt{٣}$ فإن سعة العدد $ع_١ + ع_٢$ =

أ ٦٠° **ب ٢٤٠°** ج ١٨٠° د ٣٠٠°

$ع_١ = ٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت $ع_٢ = -٣ - ٣\sqrt{٣}$

$ع_١ + ع_٢ = (٢ + ٢\sqrt{٣}ت) + (-٣ - ٣\sqrt{٣})$

$= -١ - \sqrt{٣}$ ت

س = -١ ص = $-\sqrt{٣}$ θ تقع في الربع الثالث

$\theta = -\pi + ظا^{-١}\sqrt{٣} = -\pi + \frac{\pi}{٣} = -\frac{٣\pi}{٣} + \frac{\pi}{٣} = -\frac{٢\pi}{٣} = -١٢٠$

$\theta = ٣٦٠ - ١٢٠ = ٢٤٠$

(١٨) إذا كان س + ص ت = $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}}$ = فإن س^{٢} + ص^{٢}

(أ) أ^{٢}+ب^{٢} (ب) أ^{٢} - ب^{٢} (ج) ٢أ ب (د) ١

$$\text{س} + \text{ت ص} = \frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}} \times \frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} + \text{ب ت}} = \frac{(\text{أ} + \text{ب ت})^{٢}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ت}^{٢} + ٢\text{أ ب ت}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}} = \frac{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} + ٢\text{أ ب ت}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$$

$$= \underbrace{\frac{\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}_{\text{س}} + \underbrace{\frac{٢\text{أ ب}}{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}_{\text{ص}}\ \text{ت}$$

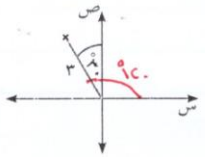
$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \frac{(\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢})^{٢}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}} + \frac{(٢\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{أ}^{٤} - ٢\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢} + \text{ب}^{٤}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}} + \frac{٤\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}} = \frac{\text{أ}^{٤} + ٢\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢} + \text{ب}^{٤}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}}$$

$$\text{أ}^{٤} + ٢\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٢} + \text{ب}^{٤} = (\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}$$

$$\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \frac{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}}{(\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢})^{٢}} = ١$$

(١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب



(أ) ٣(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

(ب) ٣(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

(جـ) ٣(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

(د) ٣(جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

ع = ٣ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

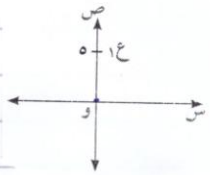
(٢٠) إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{١}{ع}$ هي .....

(أ) θ (ب) $-\theta$ (جـ) $\pi - \theta$ (د) $\pi + \theta$

أجب عمّا يأتي:

(٢١) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

(أ)



من الرسم س = ٠ ، ص = ٥

∴ ع = ٠ + ٥ ت

ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

= $\sqrt{٠ + (٥)^٢}$

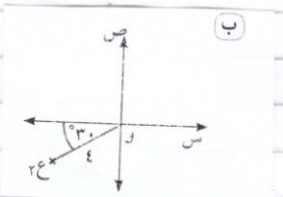
= $\sqrt{٢٥}$ = ٥

جا θ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

جا θ = ١ ، θ = جا$^{-١}$ ١ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$

∴ ع١ = ٥ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

(ب)



من الرسم ل = ٤ ، يقع في الربع الثالث

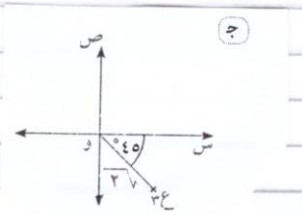
∴ θ = $-\pi$ + ٣٠

= $-\pi + \frac{\pi}{٦}$

= $\frac{-٥\pi}{٦}$

ع = ٤ (جتا $\frac{-٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{-٥\pi}{٦}$)

(جـ)



من الرسم ل = $\sqrt{٢}$

θ = -٤٥ = $\frac{-\pi}{٤}$

ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٤}$)

يوجد خطأ في المسألة

الصحيح

د) $ع_٤ = -\sqrt{٣} + ٤ت$

$ع_٤ = -٣ + ٤ت$

$س < ٠$

$ص > ٠$

$س = -\sqrt{٣}$ $\quad ص = ٤$ $\quad$ الزاوية في الربع الثاني

$ل = \sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٣ + ١٦} = \sqrt{١٩}$

$ل = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$جا\,\theta = \frac{٤}{٥}$ $\quad جا^{-١}\frac{٤}{٥} = ٥٣,١٣$

$\therefore \theta = ١٨٠ - ٥٣,١٣ = ١٢٦,٨٧ \simeq ١٢٦,٩^\circ$

$ع = ٥\,(جتا\,١٢٦,٩ + ت\,جا\,١٢٦,٩)$ ⇐ يوافق حل الكتاب المدرسي

هـ) $ع_٥ = ٤\,(جتا\,٤٠^\circ - ت\,جا\,٤٠^\circ)$

$ع = ل\,(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$

$جتا\,\theta = جتا\,(-\theta)$

$-جا\,\theta = جا\,(-\theta)$

$ع_٥ = ٤\,[جتا\,(-٤٠) + ت\,جا\,(-٤٠)]$

(٢٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_١ = -١ + ت$ ل = ؟؟

ب) $ع_٢ = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت}$ θ = ؟؟

جـ) $ع_٣ = -٢(جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)$

د) $ع_٤ = ١ + ت ظا ٢٠°$

أ - $ع_١ = -١ + ت$ س = -١ ص = ١ الربع الثاني

$ل = \sqrt{(-١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$ $جا θ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $θ = ٤٥ = \frac{π}{٤}$

ب - $ع_٢ = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت} = \frac{٤\sqrt{٣} + ٤ت}{٣ + ١} = \frac{٤\sqrt{٣} + ٤ت}{٤} = \sqrt{٣} + ت$

∴ س = $\sqrt{٣}$ ص = ١

$ل = \sqrt{(\sqrt{٣})^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ $جا ص = جا \frac{١}{٢} = ٣٠ = \frac{π}{٦}$

∴ المقياس ل = ٢ السعة $θ = \frac{π}{٦}$

جـ - $-٢(جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) = ٢(-جتا ٤٥ - ت جا ٤٥)$

الزاوية في الربع الثالث

$= ٢(جتا(π + ٤٥) + ت جا(π + ٤٥)) = ٢(جتا(π + \frac{π}{٤}) + ت جا(π + \frac{π}{٤}))$

$= ٢[جتا \frac{٥}{٤}π + ت جا(\frac{٥}{٤}π)] = ٢(جتا(\frac{٥}{٤}π - ٢π) + ت جا(\frac{٥}{٤}π - ٢π))$

$= ٢(جتا(-\frac{٣}{٤}π) + ت جا(-\frac{٧}{٤}π))$

المقياس ل = ٢ السعة $θ = -\frac{٣}{٤}π$

د - $ع_٤ = ١ + ت ظا ٢٠° =$ س = ١ ص = ظا ٢٠

$ل = \sqrt{١^٢ + ظا^٢ ٢٠} = \sqrt{قا^٢ ٢٠} = قا ٢٠°$

∴ ل = قا ٢٠ $θ = ٢٠ = \frac{π}{٩}$

ملحوظة

$ظا^{-١}(\frac{ظا ٢٠}{١}) = ٢٠°$

$ظا^{-١}(ظا θ) = θ$

(٢٣) إذا كان $ع_١$ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦° ، $ع_٢$ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°

$ع_٣$ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤، أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

١٨٠ - ١١٤ = ٦٦

١٨٠ - ٤٢ = ١٣٨

جا θ = جا(١٨٠ - θ) ∴ جا ٦٦ = جا(١٨٠ - ١١٤) = جا ١١٤

∴ $ع_١$ = جتا ١١٤ + ت جا ١١٤ ← (١)

جا ٤٢ = جا(١٨٠ - ٤٢) = جا ١٣٨

∴ $ع_٢$ = جتا (٤٢) + ت جا(٤٢) ← (٢)

جا θ = جتا(٩٠ - θ)

جا ٢٤ = جتا(٩٠ - ٢٤) = جتا ٦٦

جا ١١٤ = جا ٦٦

∴ $ع_٣$ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤

$ع_٣$ = جتا ٦٦ + ت جا ١١٤

$ع_٣$ = جتا ٦٦ + ت جا ٦٦ ← (٣)

$\frac{ع_١ \times ع_٢}{ع_٣} = \frac{ل_١ ل_٢ [جتا(\theta_1 + \theta_2) + ت (جا(\theta_1 + \theta_2)]}{ل_٣ (جتا \theta_3 + ت جا \theta_3)}$

$\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣} = \frac{١ \times ١ [جتا(١١٤ + ٤٢) + ت جا(١١٤ + ٤٢)]}{١ \times (جتا ٦٦ + ت جا ٦٦)}$

$= \frac{جتا ١٥٦ + ت جا ١٥٦}{جتا ٦٦ + ت جا ٦٦} = جتا(١٥٦ - ٦٦) + ت جا(١٥٦ - ٦٦)$

= جتا ٩٠ + ت جا ٩٠

= ٠ + ت × ١ = ت

∴ $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ = ت

$\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ =

جتا($\theta_1 + \theta_2 - \theta_3$)

+ ت جا($\theta_1 + \theta_2 - \theta_3$)

(٢٤) إذا كان ع١ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، ع٢ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)، أوجد على الصورة الأسية العدد:

ع١ع٢ ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$

ع١ = ٢ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥) ل١ = ٢ θ١ = ٧٥°

ع٢ = ٤ (جتا ١٥ + ت جا ١٥) ل٢ = ٤ θ٢ = ١٥°

ع١ع٢ = ل١ . ل٢ (جتا (θ١ + θ٢) + ت جا (θ١ + θ٢))

ع١ع٢ = ٢ × ٤ [جتا (٧٥ + ١٥) + ت جا (٧٥ + ١٥)]

= ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

= ٨ (صفر + ت × ١) = ٨ت

∴ ع١ع٢ = ٨ت

الصورة الأسية ع = ل $هـ^{θت}$

ع١ع٢ = ل١ . ل٢ $هـ^{(θ١ + θ٢) ت}$

ع١ع٢ = ٨ $هـ^{٩٠ت}$ = ٨ $هـ^{\frac{π}{٢}ت}$ الصورة الأسية

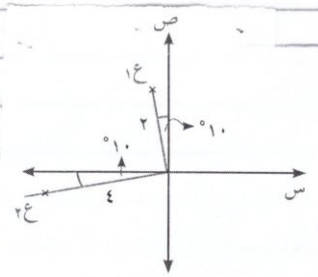
$\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{ل_١}{ل_٢}$ [جتا (θ١ − θ٢) + ت جا (θ١ + θ٢)]

$\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{٢}{٤}$ [جتا (٧٥ − ١٥) + ت جا (٧٥ − ١٥)]

= $\frac{١}{٢}$ [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠]

∴ ل = $\frac{١}{٢}$ θ = ٦٠ = $\frac{π}{٣}$

∴ $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{\frac{π}{٣}ت}$ الصورة الأسية



(٢٥) فى الشكل المقابل أوجد على الصورة الأسية العدد: $\frac{ع_١}{ع_٢}$

من الرسم

$ل_١ = ٢ \qquad \theta_١ = ١٠ + ٩٠ = ١٠٠$

$\theta_١ = \frac{١٠٠}{١٨٠}\pi = \frac{٥}{٩}\pi$

$\therefore ع_١ = ٢ هـ^{\frac{٥}{٩}\pi ت} = ٢ هـ^{\frac{١٠}{١٨}\pi ت}$

من الرسم

$ل_٢ = ٤ \qquad \theta_٢ = -\pi/٢ + ١٠ = -١٨٠ + ١٠ = -١٧٠°$

$\theta_٢ = \frac{-١٧٠}{١٨٠}\pi = \frac{-١٧}{١٨}\pi$

$\therefore ع_٢ = ٤ هـ^{-\frac{١٧}{١٨}\pi ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢) ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٢}{٤} هـ^{\left(\frac{١٠}{١٨} - \left(\frac{-١٧}{١٨}\right)\right)\pi ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١}{٢} هـ^{\left(\frac{١٠}{١٨} + \frac{١٧}{١٨}\right)\pi ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٢٧}{١٨}\pi ت} = \frac{١}{٢} هـ^{\frac{٣}{٢}\pi ت}$

$\frac{٣}{٢}\pi \leftarrow ٢٧٠° \leftarrow ٢٧٠ - ٣٦٠ = -٩٠$

$\therefore \frac{٣}{٢}\pi$ تكافئ $-\frac{\pi}{٢}$

$\therefore \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١}{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$

(٢٦) اكتب كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية:

أ) $ع_١ = هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$

ب) $ع_٢ = ٢هـ^{\frac{٢\pi}{٤}ت}$

ج) $٣هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$

(أ) $ع_١ = هـ^{\frac{\pi}{٣}ت}$ $\quad ل_١ = ١ \quad \theta = \frac{\pi}{٣}$

$ع_١ = ١(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣})$ الصورة المثلثية

$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ الصورة الجبرية

ب) $ع_٢ = ٢هـ^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$ $\quad ل_٢ = ٢ \quad \theta_٢ = \frac{٣}{٤}\pi$

$ع_٢ = ٢(جتا\frac{٣}{٤}\pi + ت جا\frac{٣}{٤}\pi)$

$ع_٢ = ٢(-\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت)$

$= \frac{-٢}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}}ت = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}ت$

$ع_٢ = -\sqrt{٢} + \sqrt{٢}ت$ الصورة الجبرية

ج) $٣هـ^{\frac{-\pi}{٦}ت}$ $\quad ل_٣ = ٣ \quad \theta = \frac{-\pi}{٦}$

$ع_٣ = ٣(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦}) = ٣(جتا -٣٠ + ت جا -٣٠)$

$= ٣(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{-١}{٢})$

$ع_٣ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}ت$ الصورة الجبرية.

(٢٧) إذا كان ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) أثبت أن $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

$\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})}$ = $٢^{-١}$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)$^{-١}$

$\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا $-\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $-\frac{\pi}{٣}$)

$-\frac{\pi}{٣}$ = -٦٠ ⟸ ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠ = $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ $-\frac{\pi}{٣}$ تكافئ $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٣}$)

∴ ل = $\frac{١}{٢}$ ، θ = $\frac{٥\pi}{٣}$

$\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ $^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

وهو المطلوب

(٢٨) إذا كان ع = $\sqrt{٣}$ + ت أوجد بالصورة الجبرية $ع^{٦}$

ع = $\sqrt{٣}$ + ت س = $\sqrt{٣}$ ص = ١

∴ ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{(\sqrt{٣})^{٢} + (١)^{٢}}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

∴ ل = ٢ جا θ = $\frac{ص}{ل}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ∴ θ = ٣٠°

∴ ع = ٢[جتا ٣٠ + ت جا ٣٠] = ٢[جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$]

$ع^{٦}$ = $٢^{٦}$[جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]^{٦}

$ع^{٦}$ = $٢^{٦}$[جتا ٣٠ × ٦ + ت جا ٣٠ × ٦]

$ع^{٦}$ = ٦٤[جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠]

$ع^{٦}$ = ٦٤[−١ + صفر] = −٦٤

$ع^{٦}$ = −٦٤ + ٠ ت

(٢٩) إذا كان ع = $\frac{(\text{أ}+\text{ب})+\text{ت}(\text{أ}-\text{ب})}{(\text{أ}-\text{ب})-\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})}$ فأوجد العدد ع في أبسط صورة ثم أوجد |ع| حيث أ، ب ∈ ح

لتعيين الجزء والأختصار نضع س = أ + ب

ص = أ − ب

∴ ع = $\frac{(\text{أ}+\text{ب})+\text{ت}(\text{أ}-\text{ب})}{(\text{أ}-\text{ب})-\text{ت}(\text{أ}+\text{ب})}$ = $\frac{\text{س}+\text{ت ص}}{\text{ص}-\text{ت س}}$

بالضرب في مرافق المقام

ع = $\frac{\text{س}+\text{ت ص}}{\text{ص}-\text{ت س}}$ × $\frac{\text{ص}+\text{ت س}}{\text{ص}+\text{ت س}}$

ع = $\frac{(\text{س}+\text{ت ص})(\text{ص}+\text{ت س})}{\text{ص}^2+\text{س}^2}$ =

ع = $\frac{\text{س ص}+\text{ت س}^2+\text{ت ص}^2+\text{ت}^2\text{س ص}}{\text{ص}^2+\text{س}^2}$

ع = $\frac{\cancel{\text{س ص}}+\text{ت}(\text{س}^2+\text{ص}^2)-\cancel{\text{س ص}}}{\text{ص}^2+\text{س}^2}$

ع = $\frac{\text{ت}\cancel{(\text{س}^2+\text{ص}^2)}}{\cancel{(\text{ص}^2+\text{س}^2)}}$ = ت

ع = ٠ + ت

∴ |ع| = $\sqrt{(0)^2+(1)^2}$ = ١

(٣٠) تفكير إبداعي: إذا كان ع١ = جتا ٧٥ + ت جا ٧٥ ، ع٢ = جتا ١٥ + ت جا ١٥، أوجد بالصورة المثلثية للعدد: ع١ + ع٢

ع١ + ع٢ = (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥) + (جتا ١٥ + ت جا ١٥)

= (جتا ٧٥ + جتا ١٥) + ت (جا ٧٥ + جا ١٥)

جتا ٧٥ = جتا(٤٥ + ٣٠) جتا ١٥ = جتا(٤٥ − ٣٠)

جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

جتا(أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

جتا(٤٥ + ٣٠) = جتا ٤٥ جتا ٣٠ − جا ٤٥ جا ٣٠ ← (١)

جتا(٤٥ − ٣٠) = جتا ٤٥ جتا ٣٠ + جا ٤٥ جا ٣٠ ← (٢)

بالجمع

جتا(٤٥ + ٣٠) + جتا(٤٥ − ٣٠) = ٢ جتا ٤٥ جتا ٣٠ = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

جا ٧٥ + جا ١٥ = جا(٤٥ + ٣٠) + جا(٤٥ − ٣٠)

جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

جا(أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

جا ٧٥ + جا ١٥ = جا ٤٥ جتا ٣٠ + ~~جتا ٤٥ جا ٣٠~~ + جا ٤٥ جتا ٣٠ − ~~جتا ٤٥ جا ٣٠~~

= ٢ جا ٤٥ جتا ٣٠ = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

∴ ع١ + ع٢ = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ت

ل = $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^٢}$ = $\sqrt{\frac{٦}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

ظا$^{-١}$($\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ÷ $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$) = ظا$^{-١}$ ١ = ٤٥°

∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ الزاوية تقع في الربع الأول

ع١ + ع٢ = $\sqrt{٣}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

= $\sqrt{٣}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

من أ فز في الصفحة التالية

حل أ ض (٣٠)

$ع_١ = جتا ٧٥ + ت جا ٧٥$

$= \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤} ت$

$ع_٢ = جتا ١٥ + ت جا ١٥$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤} ت$

$ع_١ + ع_٢ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤} + \left(\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤} + \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}\right) ت$

$= \frac{٢\sqrt{٦}}{٤} + \frac{٢\sqrt{٢}}{٤} ت$

$= \frac{\sqrt{٦}}{٢} + \frac{\sqrt{٦}}{٢} ت = \frac{\sqrt{٦}}{٢} (١ + ت)$

$س = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ $\quad ص = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ الزاوية في الربع الأول

$ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٦}}{٢} \div \frac{\sqrt{٦}}{٢}\right) = ظا^{-١} ١ \Leftarrow \theta = ٤٥ = \frac{\pi}{٤}$

$ل = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{٦}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٦}}{٢}\right)^٢} = \sqrt{\frac{١٢}{٤}} = \sqrt{٣}$

$ل = \sqrt{٣} \qquad \theta = \frac{\pi}{٤}$

$ع_١ + ع_٢ = \sqrt{٣}\left(جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤}\right)$

(٢١) إذا كان سعة $ع_١ = \frac{\pi}{٣}$ ، و سعة $ع_٢ = \frac{٣\pi}{٤}$ ، سعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$ أوجد:

أ سعة $(ع_١^٣ \, ع_٢^٢)$ ب سعة $(٢ع_١ \cdot ع_٢)$ جـ سعة $\left(\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}\right)$ د سعة $(ع_٣^٦)$

$\theta_١ = \frac{\pi}{٣}$ $\theta_٢ = \frac{٣}{٤}\pi$ $\theta_٣ = \frac{\pi}{٦}$

(أ) $ع_١^٣ ع_٢^٢ = ٣\theta_١ + ٢\theta_٢ = ٣\times\frac{\pi}{٣} + ٢\times\frac{٣}{٤}\pi = \pi + \frac{٣}{٢}\pi = \frac{٥}{٢}\pi$

$\frac{٥}{٢}\pi = ٤٥٠$ $\therefore ٤٥٠ - ٣٦٠ = ٩٠ = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ سعة $ع_١^٣ ع_٢^٢ = \boxed{\frac{\pi}{٢}}$

(ب) $٢ع_١ \cdot ع_٢ = \theta_١ + \theta_٢ = \frac{\pi}{٣} + \frac{٣}{٤}\pi = \boxed{\frac{١٣}{١٢}\pi}$

$\frac{١٣}{١٢}\pi - ٢\pi = -\frac{١١}{١٢}\pi$

$\therefore$ سعة $٢ع_١ ع_٢ = -\frac{١١}{١٢}\pi$

(جـ) $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣} = \theta_١ + \theta_٢ - \theta_٣ = \frac{\pi}{٣} + \frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٦} = \boxed{\frac{١١\pi}{١٢}}$

(د) $ع_٣^٦ = ٦\theta_٣ = ٦\times\frac{\pi}{٦} = \boxed{\pi}$

(٣٢) تفكير إبداعي: أثبت أن جتا $\theta = \frac{1}{2}$ ($هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}$)، جا $\theta = \frac{-ت}{2}$ ($هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}$)

I نفرض أن $ع = هـ^{\theta ت}$ ، $\bar{ع} = هـ^{-\theta ت}$

$ع = جتا\theta + ت جا\theta$ ، $\bar{ع} = جتا\theta - ت جا\theta$

$ع + \bar{ع} = هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = جتا\theta + \cancel{ت جا\theta} + جتا\theta - \cancel{ت جا\theta}$

$\therefore هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = 2 جتا\theta$

$\therefore جتا\theta = \frac{هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}}{2} = \frac{1}{2}(هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت})$

هذا هو المطلوب أولاً

II $ع - \bar{ع} = هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت} = \cancel{جتا\theta} + ت جا\theta - \cancel{جتا\theta} + ت جا\theta$

$\therefore هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت} = 2 ت جا\theta$

$\therefore جا\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{2ت}$ بالضرب $\times \frac{ت}{ت}$

$جا\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{2ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{2ت^2} \times ت$

$جا\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{-2} \times ت$

$\therefore جا\theta = \frac{-ت}{2}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت})$

وهذا هو المطلوب الثاني