في مفكوك $(\text{س}^{٣} + \frac{٥}{\text{س}})^{٨}$ ، أوجد :

(أولاً) قيمة الحد الأوسط .

(ثانيًا) رتبة الحد الخالي من س في هذا المفكوك .

(ثالثًا) إذا كانت النسبة بين الحد الأوسط والحد السابق له كنسبة ١ : ١٠٠ فأوجد قيمة س .

الحل

(أولاً) ∵ $\text{ن} = ٨$ ∴ عدد حدود المفكوك = ٩

∵ ترتيب الحد الأوسط $= \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

∴ الحد الأوسط $= \text{ع}_{٥} = {}^{٨}\text{ق}_{٤} \left(\frac{٥}{\text{س}}\right)^{٤} (\text{س}^{٣})^{٨-٤}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{٤} \times ٥^{٤} \times \text{س}^{-٤} \times \text{س}^{١٢}$

$= ٧٠ \times ٦٢٥ \, \text{س}^{٨} = ٤٣٧٥٠ \, \text{س}^{٨}$

(ثانيًا) ∵ $\text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{الثاني})^{\text{ر}} (\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{٥}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{٣})^{٨-\text{ر}} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} (٥)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{٢٤-٣\text{ر}}$

∵ $\text{س}^{٠} = \text{س}^{٢٤-٤\text{ر}}$ ∴ $٢٤ - ٤\text{ر} = ٠$ ∴ $\text{ر} = ٦$

∴ الحد الخالي من س هو $\text{ع}_{٧}$

$\text{ع}_{٧} = {}^{٨}\text{ق}_{٦} (٥)^{٦} = {}^{٨}\text{ق}_{٢} (٥)^{٦} = ٢٨ \times ٥^{٦} = ٤٣٧٥٠٠$

(ثالثًا) ∵ $\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$ ∴ $\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{٨ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٥}{\text{س}^{٤}} = \frac{٢٥}{٤ \, \text{س}^{٤}}$

∵ $\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{١}{١٠٠}$ ∴ $\frac{٢٥}{٤ \, \text{س}^{٤}} = \frac{١}{١٠٠}$

∴ $\text{س}^{٤} = ٦٢٥$ ∴ $\text{س} = \pm ٥$

في مفكوك $(١ + ٢\,\text{س})^{\text{ن}}$ ، إذا كان : $\text{ع}_{٣} = ٨٤\,\text{س}^{٢}$ ، $\text{ع}_{٥} = ٥٦٠$
فأوجد قيمة كل من ن ، س .

الحل

$\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثانى})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{٣} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,(٢\,\text{س})^{٢} \times ١$ ، $\because \text{ع}_{٣} = ٨٤\,\text{س}^{٢}$

$\therefore ٨٤\,\text{س}^{٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} \times ٤\,\text{س}^{٢}$ (بقسمة طرفى المعادلة على $٤\,\text{س}^{٢}$)

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = ٢١$ ، $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} = \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}}$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٢١\,\underline{|٢} = ٤٢ = ٧ \times ٦$ ، $\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {}^{٧}\text{ل}_{٢}$ $\therefore \text{ن} = ٧$

$\because \text{ع}_{٥} = {}^{٧}\text{ق}_{٤}\,(٢\,\text{س})^{٤}$ ، $\text{ع}_{٥} = ٥٦٠$

$\therefore ٥٦٠ = {}^{٧}\text{ق}_{٣} \times ١٦\,\text{س}^{٤}$ (بقسمة طرفى المعادلة على ١٦)

$\therefore {}^{٧}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٤} = ٣٥$ ، $\therefore ٣٥\,\text{س}^{٤} = ٣٥$

$\therefore \text{س}^{٤} = ١$ ، $\therefore \text{س} = \pm ١$

أوجد معامل الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{٩}$ فى مفكوك $\text{س}^{٥}\left(٢\,\text{س} + \dfrac{١}{٢\,\text{س}}\right)^{١٠}$

الحل

$\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثانى})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+١} = \text{س}^{٥} \times {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\dfrac{١}{٢\,\text{س}}\right)^{\text{ر}}(٢\,\text{س})^{١٠-\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}}\,(٢)^{١٠-٢\text{ر}} \times \text{س}^{١٥-٢\text{ر}}$

$\because \text{س}^{٩} = \text{س}^{١٥-٢\text{ر}}$ $\therefore ٩ = ١٥ - ٢\text{ر}$ $\therefore \text{ر} = ٣$

الحد المشتمل على $\text{س}^{٩}$ هو الحد الرابع

معامل $\text{ع}_{٤} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣}\,(٢)^{٤} = ١٢٠ \times ١٦ = ١٩٢٠$

في مفكوك $(٢ س + \frac{٣}{س^٢})^{ن}$ ، إذا كان : $ع_٩ = ع_{١٠}$ ، والنسبة بين $ع_{١١} : ع_{١٢}$ كنسبة ٢٢ : ١٥ ، فأوجد قيمة ن ، ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س في هذا المفكوك .

الحل

$\because ع_٩ = ع_{١٠}$ $\qquad \therefore \frac{ع_{١٠}}{ع_٩} = ١$

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{الثانى}{الأول}$ $\qquad \therefore \frac{ن - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢ س^٣} = ١$

$\therefore ن - ٨ = ٦ س^٣$ ...... (١)

$\because \frac{ع_{١٢}}{ع_{١١}} = \frac{ن - ١١ + ١}{١١} \times \frac{٣}{٢ س^٣} = \frac{٣(ن - ١٠)}{٢٢ س^٣}$ $\qquad \because \frac{ع_{١٢}}{ع_{١١}} = \frac{١٥}{٢٢}$

$\therefore \frac{٣(ن - ١٠)}{٢٢ س^٣} = \frac{١٥}{٢٢}$ $\qquad \therefore ن - ١٠ = ٥ س^٣$ ...... (٢)

بقسمة (١) على (٢) : $\therefore \frac{ن - ٨}{ن - ١٠} = \frac{٦}{٥}$ $\qquad \therefore ٥(ن - ٨) = ٦(ن - ١٠)$

$\therefore ٥ ن - ٤٠ = ٦ ن - ٦٠$ $\qquad \therefore ن = ٢٠$

لإثبات أنه لا يوجد حد خالٍ من س نوجد :

$ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر \, (الثانى)^ر \, (الأول)^{ن - ر}$

$\because ع_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_ر \, (\frac{٣}{س^٢})^ر \, (٢ س)^{٢٠ - ر}$

$= {}^{٢٠}ق_ر \, (٣)^ر \, (٢)^{٢٠ - ر} \times س^{٢٠ - ٣ر}$

$\because س^٠ = س^{٢٠ - ٣ر}$ $\qquad \therefore ر = \frac{٢٠}{٣} = ٦ \frac{٢}{٣}$

$\because ر \in ص_+$ $\qquad \therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س

في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ ، إذا كان : معامل $ع_{٥}$ = معامل $ع_{١١}$ ،
والحد الخامس يساوى أربعة أمثال الحد السادس ، فأوجد قيمة ن ، س .

الحل

$\because$ معامل $ع_{٥} = {}^{ن}ق_{٤}$ ، معامل $ع_{١١} = {}^{ن}ق_{١٠}$

$\because$ معامل $ع_{٥}$ = معامل $ع_{١١}$ $\therefore {}^{ن}ق_{٤} = {}^{ن}ق_{١٠}$ $\therefore ن = ١٤$

$\because ع_{٥} = ٤ ع_{٦}$ $\therefore \frac{ع_{٦}}{ع_{٥}} = \frac{١}{٤}$ .... (١)

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$ $\therefore \frac{١٤ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{س^{٣}} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{٢}{س^{٣}} = \frac{١}{٤}$ $\therefore س^{٣} = ٨$ $\therefore س = ٢$

إذا كانت : $(أ - س)^{١٤} = ح_{٠} + ح_{١} س + ح_{٢} س^{٢} + ح_{٣} س^{٣} + ... + ح_{١٤} س^{١٤}$
وكـــان : $٤ ح_{٤} + ١١ (ح_{٣} + ح_{٢}) =$ صفر ، فأوجد قيمة أ .

الحل

$\because (أ-س)^{١٤} = أ^{١٤} - {}^{١٤}ق_{١} أ^{١٣} س + {}^{١٤}ق_{٢} أ^{١٢} س^{٢} - {}^{١٤}ق_{٣} أ^{١١} س^{٣} + {}^{١٤}ق_{٤} أ^{١٠} س^{٤} - ......$

وبالمقارنة نجد أن : $ح_{٢} = {}^{١٤}ق_{٢} أ^{١٢}$ ، $ح_{٣} = - {}^{١٤}ق_{٣} أ^{١١}$ ، $ح_{٤} = {}^{١٤}ق_{٤} أ^{١٠}$

$\because ٤ ح_{٤} + ١١ (ح_{٣} + ح_{٢}) = ٠$

$\therefore ٤ \times {}^{١٤}ق_{٤} أ^{١٠} + ١١ (- {}^{١٤}ق_{٣} أ^{١١} + {}^{١٤}ق_{٢} أ^{١٢}) = ٠$

بقسمة طرفى المعادلة على $ {}^{١٤}ق_{٣} \times أ^{١٠}$

$\therefore ٤ \times \frac{{}^{١٤}ق_{٤}}{{}^{١٤}ق_{٣}} + ١١ (- أ + \frac{{}^{١٤}ق_{٢}}{{}^{١٤}ق_{٣}} \times أ^{٢}) = ٠$

$\therefore ٤ \times \frac{١٤ - ٣}{٤} + ١١ (- أ + \frac{٣}{١٤ - ٢} \times أ^{٢}) = ٠$

$\therefore ١١ + ١١ (- أ + \frac{١}{٤} أ^{٢}) = ٠$ (بقسمة طرفى المعادلة على ١١)

$\therefore ١ - أ + \frac{١}{٤} أ^{٢} = ٠$ $\therefore (١ - \frac{١}{٢} أ)^{٢} = ٠$ $\therefore أ = ٢$

إذا كان : (٢ س + ١)^{٥} = ا + ب س + حـ س^{٢} + ء س^{٣} + هـ س^{٤} + و س^{٥}

فأوجد قيمة : ا + ب + حـ + ء + هـ + و

الحل

بوضع س = ١

∴ ا + ب + حـ + ء + هـ + و = (٢ × ١ + ١)^{٥} = ٣^{٥} = ٢٤٣

إذا كان : (١ − حـ س)^{ن} = ١ − ا$_{١}$ س + ا$_{٢}$ س^{٢} − ا$_{٣}$ س^{٣} + ...

وكان : ا$_{١}$ = ٦٠ ، ٥٠ ا$_{٢}$ − ٣ ا$_{٣}$ = ٠ ، فأوجد قيمة حـ ، ن .

الحل

(١ − حـ س)^{ن} = ١ − ^{ن}ق$_{١}$ حـ س + ^{ن}ق$_{٢}$ حـ^{٢} س^{٢} − ^{ن}ق$_{٣}$ حـ^{٣} س^{٣}

بالمقارنة نجد أن : ا$_{١}$ = ^{ن}ق$_{١}$ حـ ، ا$_{٢}$ = ^{ن}ق$_{٢}$ حـ^{٢} ، ا$_{٣}$ = ^{ن}ق$_{٣}$ حـ^{٣}

∵ ا$_{١}$ = ٦٠ ∴ ^{ن}ق$_{١}$ حـ = ٦٠ ∴ ن حـ = ٦٠ .... (١)

∵ ٥٠ ا$_{٢}$ − ٣ ا$_{٣}$ = ٠ ∴ ٥٠ × ^{ن}ق$_{٢}$ حـ^{٢} − ٣ × ^{ن}ق$_{٣}$ حـ^{٣} = ٠

بقسمة طرفي المعادلة على : ^{ن}ق$_{٢}$ حـ^{٢}

∴ ٥٠ − ٣ × (^{ن}ق$_{٣}$ / ^{ن}ق$_{٢}$) × حـ = ٠ ∴ ٥٠ − ٣ × ((ن − ٢) / ٣) × حـ = ٠

∴ ٥٠ − ن حـ + ٢ حـ = ٠ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٢ حـ = ١٠ ∴ حـ = ٥

من (١) : ٥ ن = ٦٠ ∴ ن = ١٢

في مفكوك $\left(\frac{س^3}{2} - \frac{4}{س} \right)^{11}$ حسب قوى س التنازلية ، أوجد :

(أولاً) قيمة معامل $س^5$

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين مساويًا للصفر .

الحل

(أولاً) $\because ع_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \,(\text{الثانى})^{ر} \,(\text{الأول})^{ن-ر}$

$\therefore ع_{ر+1} = {}^{11}ق_{ر} \left(-\frac{4}{س}\right)^{ر} \left(\frac{س^3}{2}\right)^{11-ر}$

$\therefore ع_{ر+1} = {}^{11}ق_{ر} (-4)^{ر} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11-ر} \times س^{33-4ر}$

$\because س^5 = س^{33-4ر} \qquad \therefore 4ر = 28 \qquad \therefore ر = 7$

قيمة معامل $س^5$ = معامل $ع_8$

$\therefore$ معامل $س^5 = {}^{11}ق_{7} (-4)^{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = -{}^{11}ق_{4} \times 2^{10}$

$= -330 \times 2^{10} = -337920$

(ثانيًا) $\because ن = 11 \qquad \therefore$ عدد حدود المفكوك = 12

ترتيب الحدين الأوسطين = $\frac{11+1}{2}$ ، $\frac{11+3}{2}$

الحدان الأوسطان هما : $ع_6$ ، $ع_7$

$\because ع_7 + ع_6 = 0 \qquad \therefore ع_7 = -ع_6$

$\because \frac{ع_{ر+1}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$

$\because \frac{ع_7}{ع_6} = -1 \qquad \therefore \frac{11 - 6 + 1}{6} \times \frac{-8}{س^4} = -1$

$\therefore \frac{ع_7}{ع_6} = -1 \qquad \therefore \frac{11 - 6 + 1}{6} \times \frac{-8}{س^4} = -1$

$\therefore س^4 = 8 \qquad \therefore س = \pm \sqrt[4]{8}$

في مفكوك $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{6}$ حيث ك عدد صحيح موجب ، أوجد :

(أولاً) قيم ك التي تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س .

(ثانيًا) النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها في أولاً .

الحل

(أولاً) $\because \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{الثاني})^{\text{ر}} \, (\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

$$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{6}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} \times (\text{س}^{\text{ك}})^{6-\text{ر}} = {}^{6}\text{ق}_{\text{ر}} \, \text{س}^{6\text{ك} - (\text{ك}+1)\text{ر}}$$

$\because \text{س}^{0} = \text{س}^{6\text{ك} - (\text{ك}+1)\text{ر}}$ $\quad \therefore 6\text{ك} = (\text{ك}+1)\text{ر}$ $\quad \therefore \text{ر} = \frac{6\text{ك}}{\text{ك}+1}$

عندما : ك = 1 $\quad \therefore \text{ر} = \frac{6}{2} = 3$

عندما : ك = 2 $\quad \therefore \text{ر} = \frac{12}{3} = 4$

عندما : ك = 5 $\quad \therefore \text{ر} = \frac{30}{6} = 5$

$\therefore$ قيم ك هي : 1 ، 2 ، 5

(ثانيًا) $\because \text{ن} = 6$ $\quad \therefore$ عدد حدود المفكوك = 7

ترتيب الحد الأوسط = $\frac{6}{2} + 1 = 4$

الحد الأوسط هو : ع_4 ، الحد الخالي من س لأكبر قيم ك هو ع_6

$$\because \frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الأول}}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل ع}_6}{\text{معامل ع}_4} = \frac{\text{معامل ع}_6}{\text{معامل ع}_5} \times \frac{\text{معامل ع}_5}{\text{معامل ع}_4}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل ع}_6}{\text{معامل ع}_4} = \frac{6 - 5 + 1}{5} \times \frac{6 - 4 + 1}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 3 : 10$$

فى مفكوك (س + ص)^{ن} إذا كان : ا هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، ب هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة فأثبت أن :

(أولًا) $ا^{٢} - ب^{٢} = (س^{٢} - ص^{٢})^{ن}$

(ثانيًا) $٤ ا ب = (س + ص)^{٢ن} - (س - ص)^{٢ن}$

الحل

(أولاً) ∵ ا هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، ب هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة .

∴ $ا + ب = (س + ص)^{ن}$ .... (١) ، $ا - ب = (س - ص)^{ن}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $(ا + ب)(ا - ب) = (س + ص)^{ن}(س - ص)^{ن}$

∴ $ا^{٢} - ب^{٢} = ((س + ص)(س - ص))^{ن} = (س^{٢} - ص^{٢})^{ن}$

(ثانيًا) ∵ $(س+ص)^{٢ن} - (س-ص)^{٢ن} = ((س+ص)^{ن})^{٢} - ((س-ص)^{ن})^{٢}$

$= (ا + ب)^{٢} - (ا - ب)^{٢}$

$= ا^{٢} + ٢ ا ب + ب^{٢} - (ا^{٢} - ٢ ا ب + ب^{٢})$

$= ٤ ا ب$

باستخدام نظرية ذات الحدين أثبت أن : $٣^{٢ن} - ٨ ن - ١$ تقبل القسمة على ٦٤

الحل

∵ $٣^{٢ن} - ٨ن - ١ = (٣^{٢})^{ن} - ٨ن - ١ = ٩^{ن} - ٨ن - ١$

∴ $٣^{٢ن} - ٨ن - ١ = (١ + ٨)^{ن} - ٨ن - ١$

$= ١ + {}^{ن}ق_{١} × ٨ + {}^{ن}ق_{٢} × (٨)^{٢} + {}^{ن}ق_{٣} × (٨)^{٣} + ... - ٨ن - ١$

$= {}^{ن}ق_{٢} × ٦٤ + {}^{ن}ق_{٣} × ٦٤ × ٨ + ...$

$= ٦٤ ({}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} × ٨ + ...)$

∴ $٣^{٢ن} - ٨ن - ١$ تقبل القسمة على ٦٤

إذا كان : ٢ $ح_{٥}$ = $ح_{٤}$ + $ح_{٦}$ في مفكوك (س + ص)^{٨} فأوجد قيمة : $\frac{س}{ص}$

الحل

∵ ٢ $ح_{٥}$ = $ح_{٤}$ + $ح_{٦}$

∴ ٢ $^{٨}ق_{٤}$ $ص^{٤}$ $س^{٤}$ = $^{٨}ق_{٣}$ $ص^{٣}$ $س^{٥}$ + $^{٨}ق_{٥}$ $ص^{٥}$ $س^{٣}$

بقسمة طرفي المعادلة على $^{٨}ق_{٤}$ $س^{٤}$ $ص^{٤}$

∴ $٢ = \frac{^{٨}ق_{٣}}{^{٨}ق_{٤}} \times \frac{س}{ص} + \frac{^{٨}ق_{٥}}{^{٨}ق_{٤}} \times \frac{ص}{س}$

∴ $٢ = \frac{٤}{٨ - ٣} \times \frac{س}{ص} + \frac{٨ - ٤}{٥} \times \frac{ص}{س}$

∴ $٢ = \frac{٤}{٥} \times \frac{س}{ص} + \frac{٤}{٥} \times \frac{ص}{س}$ بضرب طرفي المعادلة × ٥ س ص

∴ ١٠ س ص = ٤ $س^{٢}$ + ٤ $ص^{٢}$ (÷ ٢)

∴ ٢ $س^{٢}$ − ٥ س ص + ٢ $ص^{٢}$ = ٠

∴ (٢ س − ص) (س − ٢ ص) = ٠

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢}$ أو $\frac{س}{ص} = ٢$

أخذت ٣ حدود متتالية فى مفكوك $(١ + س)^{٣٠}$ فوجد أن نسبة مجموع معاملى الحدين الأول والثانى من هذه الحدود إلى مجموع معاملى الحدين الثانى والثالث منها كنسبة ٥ : ٣ فما هذه الحدود ؟

الحل

بفرض أن الحدود هى : $ع_{ر}$ ، $ع_{ر+١}$ ، $ع_{ر+٢}$

معامل $ع_{ر}$ + معامل $ع_{ر+١}$ = ${}^{٣٠}ق_{ر-١} + {}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣١}ق_{ر}$ ،

معامل $ع_{ر+١}$ + معامل $ع_{ر+٢}$ = ${}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١} = {}^{٣١}ق_{ر+١}$

$\therefore \frac{{}^{٣١}ق_{ر+١}}{{}^{٣١}ق_{ر}} = \frac{٣}{٥}$ $\therefore \frac{٣١ - ر}{ر + ١} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore ٥(٣١ - ر) = ٣(ر + ١)$ $\therefore ١٥٥ - ٥ر = ٣ر + ٣$

$\therefore ٨ر = ١٥٢$ $\therefore ر = ١٩$

$\therefore$ الحدود هى : $ع_{١٩}$ ، $ع_{٢٠}$ ، $ع_{٢١}$

أثبت أن : معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٣} ص^{٤} ع^{٥}$ فى مفكوك $(س + ص + ع)^{١٢}$ هو $\frac{١٢!}{٣!\,٤!\,٥!}$

الحل

فى مفكوك $(س + (ص + ع))^{١٢}$

$\because ع_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (ص + ع)^{ر} \times س^{١٢ - ر}$

$\because س^{٣} = س^{١٢ - ر}$ $\therefore ر = ٩$ $\therefore ع_{١٠} = {}^{١٢}ق_{٩}\, س^{٣} (ص + ع)^{٩}$

فى مفكوك $(ص + ع)^{٩}$

$\because ع_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\, ع^{ر} \times ص^{٩ - ر}$ $\because ص^{٤} = ص^{٩ - ر}$ $\therefore ر = ٥$

$\therefore ع_{٦} = {}^{٩}ق_{٥}\, ع^{٥} ص^{٤}$

$\therefore$ معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٣} ص^{٤} ع^{٥} = {}^{١٢}ق_{٩} \times {}^{٩}ق_{٥}$

$$= \frac{١٢!}{٩!\,(١٢ - ٩)!} \times \frac{٩!}{٥!\,(٩ - ٥)!} = \frac{١٢!}{٣!\,٤!\,٥!}$$

أوجد عدد الحدود التي قيمتها أعداد صحيحة في مفكوك $(\sqrt{٣} + \sqrt[٤]{٥})^{١٢٤}$

الحل

$(\sqrt{٣} + \sqrt[٤]{٥})^{١٢٤} = (\sqrt{٣})^{١٢٤} + {}^{١٢٤}ق_{١}\,(\sqrt[٤]{٥})(\sqrt{٣})^{١٢٣}$

$+ {}^{١٢٤}ق_{٢}\,(\sqrt[٤]{٥})^{٢}(\sqrt{٣})^{١٢٢} + {}^{١٢٤}ق_{٣}\,(\sqrt[٤]{٥})^{٣}(\sqrt{٣})^{١٢١}$

$+ {}^{١٢٤}ق_{٤}\,(\sqrt[٣]{٥})^{٤}(\sqrt{٣})^{١٢٠} + \cdots\cdots$

الحدود هى : $ح_{١}$ ، $ح_{٥}$ ، $ح_{٩}$ ، .... إلى $ح_{١٢٥}$

١ ، ٥ ، ٩ ، .... ، ١٢٥ حدود متتابعة حسابية .

$\because$ أ = ١ ، ء = ٤ ، ل = ١٢٥

$\because$ ل = أ + (ن − ١) ء $\quad\therefore$ ١٢٥ = ١ + (ن − ١) × ٤

$\therefore$ ن − ١ = $\frac{١٢٤}{٤}$ = ٣١ $\quad\therefore$ ن = ٣٢ حداً .

في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان : $٥\,(ح_{٦})^{٢} = ١٨\, ح_{٤} \times ح_{٨}$

فأوجد قيمة ن .

الحل

$\because ٥\,(ح_{٦})^{٢} = ١٨\, ح_{٤} \times ح_{٨}$

$\therefore \frac{٥}{١٨} = \frac{ح_{٤}}{ح_{٦}} \times \frac{ح_{٨}}{ح_{٦}} = \frac{ح_{٤}}{ح_{٥}} \times \frac{ح_{٥}}{ح_{٦}} \times \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} \times \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}}$

$\therefore \frac{٥}{١٨} = \frac{٤}{ن - ٤ + ١} \times \frac{٥}{ن - ٥ + ١} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{ن - ٧ + ١}{٧} \times \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times س^{٢}$

$\therefore \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٠}{(ن - ٣)(ن - ٤)} \times \frac{(ن - ٦)(ن - ٥)}{٤٢}$

$\therefore \frac{٧}{١٢} = \frac{ن^{٢} - ١١ن + ٣٠}{ن^{٢} - ٧ن + ١٢}$

$\therefore ١٢ن^{٢} - ١٢ \times ١١ن + ٣٦٠ = ٧ن^{٢} - ٤٩ن + ٨٤$

$\therefore ٥ن^{٢} - ٨٣ن + ٢٧٦ = ٠ \quad \therefore (٥ن - ٢٣)(ن - ١٢) = ٠$

$\therefore ٥ن - ٢٣ = ٠ \quad \therefore ن = \frac{٢٣}{٥}$ (مرفوض)

أو $ن - ١٢ = ٠ \quad \therefore ن = ١٢$

في مفكوك $\left(\text{٢ س} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والسابع كنسبة ٨ : ١٥

فأوجد قيمة ن ، وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في هذا المفكوك . [دور ثان ٢٠١١]

$\because \frac{\text{ع}_{١٠}}{\text{ع}_{٩}} = ١$

$\therefore \frac{\text{ن} - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{\text{٢ س}^{٣}} = ١$

$\therefore (\text{ن} - ٨) = \text{٦ س}^{٣}$ ...... (١)

$\because \frac{\text{ع}_{٧}}{\text{ع}_{٦}} = \frac{١٥}{٨}$

$\therefore \frac{\text{ن} - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٣}{\text{٢ س}^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$

$٢(\text{ن} - ٥) = \text{١٥ س}^{٣}$ ...... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{\text{ن} - ٨}{٢(\text{ن} - ٥)} = \frac{٦}{١٥}$

$٥(\text{ن} - ٨) = ٤(\text{ن} - ٥)$ $\therefore \boxed{\text{ن} = ٢٠}$

$\because \text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}} (\text{٢ س})^{٢٠ - \text{ر}}$

$\because \text{س}^{٠} = \text{س}^{٢٠ - ٣\text{ر}}$

$\therefore \text{ر} = \frac{٢٠}{٣} \notin \text{ص}_{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من س في هذا المفكوك .

إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هي على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فما قيمة كل من س ، ص ، ن ؟

$\because \dfrac{\text{ع}_3}{\text{ع}_2} = \dfrac{\text{ن} - 2 + 1}{2} \times \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{720}{240} = 3$

$\therefore (\text{ن} - 1)\,\text{ص} = 6\,\text{س}$ ...... (١)

$\because \dfrac{\text{ع}_4}{\text{ع}_3} = \dfrac{\text{ن} - 3 + 1}{3} \times \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{1080}{720} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore 2(\text{ن} - 2)\,\text{ص} = 9\,\text{س}$ ...... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\therefore \dfrac{\text{ن} - 1}{2(\text{ن} - 2)} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore 3\text{ن} - 3 = 4\text{ن} - 8 \qquad \therefore \boxed{\text{ن} = 5}$

من (١) $4\,\text{ص} = 6\,\text{س} \qquad \therefore \text{ص} = \dfrac{3}{2}\,\text{س}$

$\because \text{ع}_2 = {}^{5}\text{ق}_1\,\text{ص}\,\text{س}^4 = 240$

$\therefore \dfrac{3}{2}\,\text{س}^5 = 48 \qquad \therefore \text{س} = 2 \text{ ، } \text{ص} = 3$

في مفكوك $\left(\text{س}^3 + \dfrac{1}{\text{س}}\right)^{17}$ حسب قوى س التنازلية :

(أولًا) أثبت أنه لا يوجد حد خال من س .

(ثانيًا) إذا كان الحدان الأوسطان متساويين ، فأوجد قيمة س .

(أولًا) $\because \text{ع}_{\text{ر}+1} =$

${}^{17}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{-\text{ر}} \times (\text{س}^3)^{17-\text{ر}}$

$\therefore \text{س}^0 = \text{س}^{51 - 4\text{ر}}$

$\because \text{ر} = \dfrac{51}{4} \notin \text{ص}^{+}$

∴ لا يوجد حد خالٍ من س في هذا المفكوك .

(ثانيًا) $\because \text{ن} = 17$

∴ عدد حدود المفكوك = ١٨

∴ الحدان الأوسطان هما : ع_9 ، ع_{10}

$\because \dfrac{\text{ع}_{10}}{\text{ع}_9} = 1 \qquad \therefore \dfrac{17 - 9 + 1}{9} \times \dfrac{1}{\text{س}^4} = 1$

$\therefore \text{س}^4 = 1 \qquad \therefore \text{س} = \pm 1$

في مفكوك $(س^{2} + \frac{1}{8 س})^{13}$ حسب قوى س التنازلية :

(أولًا) أثبت أنه لا يوجد حد يشتمل على س .

(ثانيًا) إذا كان الحدان الرابع والحادى عشر متساويين ، فأوجد قيمة س

(أولًا) $\because$ $ع_{ر+1}$ =

$ {}^{13}ق_{ر} \left(\frac{1}{8 س} \right)^{ر} (س^{2})^{13 - ر}$

$\because$ $س^{0} = س^{26 - 3 ر}$

$\therefore$ $ر = \frac{26}{3} \notin ص_{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من س في هذا المفكوك .

(ثانيًا) $\because$ $ع_{4} = ع_{11}$

$\therefore$ ${}^{13}ق_{3} \left(\frac{1}{8 س} \right)^{3} \left(س^{2} \right)^{10}$

$= {}^{13}ق_{10} \left(\frac{1}{8 س} \right)^{10} \left(س^{2} \right)^{3}$

$\therefore$ $(س^{2})^{7} = \left(\frac{1}{8 س} \right)^{7}$

$\therefore$ $س^{2} = \frac{1}{8 س}$ $\qquad$ $\therefore$ $س^{3} = \frac{1}{8}$

$\therefore$ $س = \frac{1}{2}$

في مفكوك $\left(س - \frac{1}{س^2} \right)^9$ ، أوجد :

(أولًا) قيمة الحد الخالي من س .

(ثانيًا) قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين في المفكوك مساويًا الصفر .

(أولًا) $\because$ $ع_{ر+1} = {}^9ق_ر \left(\frac{-1}{س^2}\right)^ر \times س^{9-ر}$

$\because$ $س^0 = س^{9-3ر}$ $\boxed{ر = 3}$

الحد الخالي من س هو $ع_4$

$\therefore$ $ع_4 = {}^9ق_3 \left(-1\right)^3 = -84$

(ثانيًا) $\because$ $ن = 9$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك = 10

الحدان الأوسطان هما $ع_5$ ، $ع_6$

$\because$ $ع_6 + ع_5 = 0$ $\therefore$ $ع_6 = -ع_5$

$\therefore$ $\frac{ع_6}{ع_5} = -1$

$\therefore$ $\frac{9-5+1}{5} \times \frac{-1}{س^3} = -1$

$\therefore$ $س^3 = 1$ $\therefore$ $\boxed{س = 1}$

في مفكوك $\left(\frac{١}{س} + س^{٢}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التصاعدية أوجد :

(أولًا) قيمة الحد الخالى من س

(ثانيًا) قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين .

(أولًا) $\because$ $ع_{ر+١} =$

$^{١٥}ق_{ر} \,(س^{٢})^{ر}\,(س)^{ر-٥}$

$\because$ $س^{٠} = س^{٣ر-١٥}$ $\therefore$ $٣ر - ١٥ = ٠$

$\therefore$ $ر = ٥$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ع_{٦}$

$ع_{٦} = {}^{١٥}ق_{٥} = ٣٠٠٣$

(ثانيًا) $\because$ $ن = ١٥$

$\therefore$ عدد حدود المفكوك = ١٦

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما $ع_{٨}$ ، $ع_{٩}$

$\because$ $\frac{ع_{٩}}{ع_{٨}} = ١$ $\therefore$ $\frac{١٥-٨+١}{٨} \times س^{٣} = ١$

$\therefore$ $س^{٣} = ١$ $\therefore$ $\boxed{س = ١}$