حاول أن تحل

(١) اكتب مفكوك:

(أ) (٣س + ص)^{٥}

(ب) (س^{٢} - ١)^{٦}

(أ) (٣س + ص)^{٥} = ق$_{٥،٠}$ (٣س)^{٥} + ق$_{٥،١}$ (٣س)^{٤} ص^{١} + ق$_{٥،٢}$ (٣س)^{٣} ص^{٢}

+ ق$_{٥،٣}$ (٣س)^{٢} ص^{٣} + ق$_{٥،٤}$ (٣س)^{١} ص^{٤} + ق$_{٥،٥}$ (٣س)^{٠} ص^{٥}

= ٣^{٥} س^{٥} + ٥ × ٣^{٤} س^{٤} ص + ١٠ × ٣^{٣} س^{٣} ص^{٢} + ١٠ × ٣^{٢} س^{٢} ص^{٣}

+ ٥ × ٣ س ص^{٤} + ص^{٥}

= ٢٤٣ س^{٥} + ٤٠٥ س^{٤} ص + ٢٧٠ س^{٣} ص^{٢} + ٩٠ س^{٢} ص^{٣}

+ ١٥ س ص^{٤} + ص^{٥}.

(ب) (س^{٢} - ١)^{٦} = ق$_{٦،٠}$ (س^{٢})^{٦} + ق$_{٦،١}$ (س^{٢})^{٥} (-١)^{١} + ق$_{٦،٢}$ (س^{٢})^{٤} (-١)^{٢} + ق$_{٦،٣}$ (س^{٢})^{٣} (-١)^{٣}

+ ق$_{٦،٤}$ (س^{٢})^{٢} (-١)^{٤} + ق$_{٦،٥}$ (س^{٢})^{١} (-١)^{٥} + ق$_{٦،٦}$ (س^{٢})^{٠} (-١)^{٦}

= س^{١٢} - ٦ س^{١٠} + ١٥ س^{٨} - ٢٠ س^{٦} + ١٥ س^{٤} - ٦ س^{٢} + ١

حاول أن تحل

(٢) اكتب مفكوك $(١ - س)^{٨}$، ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة: $١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + ... + {}^{٨}ق_{٨}$

$(١ - س)^{٨} = ١ - {}^{٨}ق_{١}\,س + {}^{٨}ق_{٢}\,س^{٢} - {}^{٨}ق_{٣}\,س^{٣} + {}^{٨}ق_{٤}\,س^{٤} - {}^{٨}ق_{٥}\,س^{٥} + {}^{٨}ق_{٦}\,س^{٦}$
$- {}^{٨}ق_{٧}\,س^{٧} + {}^{٨}ق_{٨}\,س^{٨}$

$= ١ - ٨س + ٢٨س^{٢} - ٥٦س^{٣} + ٧٠س^{٤} - ٥٦س^{٥} + ٢٨س^{٦}$
$- ٨س^{٧} + س^{٨}$

بوضع س = ١ في المفكوك

$(١-١)^{٨} = ١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + {}^{٨}ق_{٤} - {}^{٨}ق_{٥} + {}^{٨}ق_{٦} - {}^{٨}ق_{٧} + {}^{٨}ق_{٨}$
= صفر

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة $(٠,٩٨)^{١٠}$ باستخدام نظرية ذات الحدين، مقربًا الجواب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

$(٠,٩٨)^{١٠} = (١ - ٠,٠٢)^{١٠} = ١ - {}^{١٠}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{١٠}ق_{٢}(٠,٠٢)^{٢} - {}^{١٠}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣}$
$+ {}^{١٠}ق_{٤}(٠,٠٢)^{٤} + ...$

$= ١ - ٠,٢ + ٠,٠١٨ - ٠,٠٠٠٩٦ + ٠,٠٠٠٠٣٣٦ ....$

$= ٠,٨١٧١٠٣٦$

$= ٠,٨١٧$

حاول أن تحل

④ في مفكوك $(\text{٢س} + \frac{١}{٢})^{٧}$، أوجد كل من ح٣ ، ح٧ حسب قوى س التنازلية، وإذا كان ح٣ = ح٧ ، أوجد قيمة س

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ص}^{\text{ر}}$

$\text{ح}_٣ = {}^{٧}\text{ق}_٢ \times (\text{٢س})^{٥} \times (\frac{١}{٢})^{٢} = ٢١ \times ٣٢ \times \text{س}^{٥} \times \frac{١}{٤} = ١٦٨\,\text{س}^{٥}$

$\text{ح}_٧ = {}^{٧}\text{ق}_٦ \times (\text{٢س})^{١} \times (\frac{١}{٢})^{٦} = ٧ \times \text{٢س} \times \frac{١}{٦٤} = \frac{٧}{٣٢}\,\text{س}$

$\text{ح}_٣ = \text{ح}_٧ \quad \therefore \quad ١٦٨\,\text{س}^{٥} = \frac{٧}{٣٢}\,\text{س}$

$١٦٨\,\text{س}^{٤} = \frac{٧}{٣٢} \Leftarrow \text{س}^{٤} = \frac{٧}{١٦٨ \times ٣٢} = \frac{١}{٧٦٨}$

$\therefore \text{س} = \sqrt[٤]{\frac{١}{٧٦٨}} = \pm ٠{,}١٨٩٩ \simeq \pm ٠{,}١٩$

حاول أن تحل

⑤ من مفكوك $(\text{٢س} - \frac{١}{\text{٣س}^{٢}})^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية:

ترتيب ح٤ من النهاية = ح ١٢-٤+١ = ح٩ من البداية

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ص}^{\text{ر}}$

$\text{ح}_٩ = {}^{١١}\text{ق}_٨ (\text{٢س})^{٣} (\frac{-١}{\text{٣س}^{٢}})^{٨} = ١٦٥ \times ٢^{٣}\,\text{س}^{٣} \times (\frac{-١}{٣})^{٨} (\frac{١}{\text{س}^{٢}})^{٨}$

$= ١٦٥ \times ٨\,\text{س}^{٣} \times \frac{١}{٦٥٦١} \times \frac{١}{\text{س}^{١٦}}$

$= \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} \times \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{١٦}}$

$= \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} \times \frac{١}{\text{س}^{١٣}}$

حل آخر: ترتيب عكسه ، يكون مع الشكل $(\frac{-١}{\text{٣س}^{٢}} + \text{٢س})^{١١}$

$\text{ح}_٤ = {}^{١١}\text{ق}_٣ (\frac{-١}{\text{٣س}^{٢}})^{٨} \times (\text{٢س})^{٣} = \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} \times \frac{١}{\text{س}^{١٣}}$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ص}^{\text{ر}}$

حاول أن تحل

(٦) أوجد في أبسط صورة $(1 + \sqrt{\text{س}})^5 - (1 - \sqrt{\text{س}})^5$

٢) أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية $(1{,}03)^8 + (0{,}97)^8$ ، مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

(١) $(1 + \sqrt{\text{س}})^5 - (1 - \sqrt{\text{س}})^5$ ن = ٥ عدد الحدود = ن + ١ = ٦

$= 2(\text{ح}_2 + \text{ح}_4 + \text{ح}_6)$

$= 2\left[{}^{5}\text{ق}_1 (1)^4 (\sqrt{\text{س}}) + {}^{5}\text{ق}_3 (1)^2 (\sqrt{\text{س}})^3 + {}^{5}\text{ق}_5 (1)^0 (\sqrt{\text{س}})^5\right]$

$= 2\left[5\sqrt{\text{س}} + 10\,\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{س}^2\sqrt{\text{س}}\right]$

$= 2\sqrt{\text{س}}\,(5 + 10\,\text{س} + \text{س}^2)$

(٢) $(1{,}03)^8 + (0{,}97)^8 = (1 + 0{,}03)^8 + (1 - 0{,}03)^8$

$= 2[\text{ح}_1 + \text{ح}_3 + \text{ح}_5 + \text{ح}_7 + \text{ح}_9]$

$= 2\left[{}^{8}\text{ق}_0 (1)^8 (0{,}03)^0 + {}^{8}\text{ق}_2 (1)^6 (0{,}03)^2 + {}^{8}\text{ق}_4 (1)^4 (0{,}03)^4 + {}^{8}\text{ق}_6 (1)^2 (0{,}03)^6\right]$

$= 2\left[1 + 28 \times 1 \times 9 \times 10^{-4} + 70 \times 1 \times 8{,}1 \times 10^{-7} + 28 \times 1 \times 7{,}29 \times 10^{-10}\right]$

$= 2\left[1 + 0{,}0252 + 5{,}67 \times 10^{-5} + 2{,}0412 \times 10^{-8}\right]$

$= 2 \times 1{,}0252$

$= 2{,}050515 \simeq 2{,}051$

حاول أن تحل

(٧) من مفكوك $(1 - \text{س})^8 + 24\,\text{س}\,(1 - \text{س})^7 + 252\,\text{س}^2 (1 - \text{س})^6 + \ldots\ldots + 6561\,\text{س}^8$ ، أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما س = ١

الحد الأول = $(1 - \text{س})$ الحد الأخير = $\sqrt[8]{6561\,\text{س}^8} = 3\,\text{س}$

∴ المقدار يمثل المفكوك $[(\text{س} - 1) + 3\,\text{س}]^8 = (1 + 2\,\text{س})^8$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\ \text{ص}^{\text{ر}}$

$\text{ح}_6 = {}^{8}\text{ق}_5 (1)^3 (2\,\text{س})^5 = 56 \times 1 \times 2^5\,\text{س}^5 = 56 \times 32\,\text{س}^5$

$\text{ح}_6 = 1792\,\text{س}^5$

∴ القيمة العددية عند س = ١ = ١٧٩٢

حاول أن تحل

(٨) من مفكوك (١ + جـ س)^١٠ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠، وكان الحد الخامس يساوى ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ عدد صحيح موجب.

ح٣ = ١٨٠ ‏ ‏ ‏ ‏ ح٥ = ٢١٠

ح ر+١ = ن ق ر س^ن-ر ص^ر

∴ ح٣ = ^١٠ق٢ (١)^٨ (جـ س)^٢

١٨٠ = ٤٥ × ١ × جـ^٢ س^٢

٤ = جـ^٢ س^٢

∴ جـ^٢ = ٤

جـ = ٢

ح٥ = ^١٠ق٤ (١)^٦ (جـ س)^٤

٢١٠ = ٢١٠ جـ^٤ س^٤

س^٤ جـ^٤ = ١

∴ س^٤ × (٢)^٤ = ١

١٦ س^٤ = ١

س^٤ = ١/١٦

س = ∜(١/١٦)

س = ± ١/٢

٩ حاول أن تحل

⑨ أوجد معامل $س^٢$ في مفكوك $(١ + س + س^٢)^٥$

$(١ + س + س^٢)^٥ = [١ + (س + س^٢)]^٥$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \, س^{ن-ر} \, ص^{ر}$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \, (١)^{٥-ر} \times (س + س^٢)^{ر}$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times (س + س^٢)^{ر}$

بأخذ س عامل مشترك

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \, (١ + س)^{ر}$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \, (١)^{ر-م} \times س^{م}$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \times س^{ر} \times س^{م}$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \times س^{ر+م}$

$\therefore ر + م = ٢$

$م \le ر < ٦$

$\therefore$ معامل $س^٢ = {}^{٥}ق_{١} \times {}^{١}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٢}ق_{٠}$

$= ٥ \times ١ + ١٠ \times ١ = ١٥$

حاول أن تحل

(١٠) برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن $({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢} = {}^{٢ن}ق_{ن}$

$$(1+س)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} + ... {}^{ن}ق_{ن}س^{ن} \longleftarrow (1)$$

$$(س+1)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{٢}س^{ن-2} + ... {}^{ن}ق_{ن} \longleftarrow (2)$$

بضرب المعادلة (1) × (2)

$$(1+س)^{ن}(س+1)^{ن} = [{}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}س + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن}س^{ن}] \times [{}^{ن}ق_{٠}س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{٢}س^{ن-2} + ... + {}^{ن}ق_{ن}]$$

بمقارنة معاملات $س^{ن}$

$$({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢}$$

$$\because (1+س)^{ن}(س+1)^{ن} = (1+س)^{٢ن}$$

$$ح_{ن+1} = {}^{٢ن}ق_{ن}س^{ن}$$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{٢ن}ق_{ن}$

$$({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢} = {}^{٢ن}ق_{ن}$$

حاول أن تحل

(11) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{2س}\right)^{10}$ ، وإذا كانت قيمة هذا الحد = $\frac{28}{27}$ أوجد قيمة س

$ن = 10$ (عدد زوجي) ∴ يوجد حد أوسط واحد هو $ح_{\frac{ن}{2}+1}$

الحد الأوسط = $ح_{\frac{10}{2}+1} = ح_6$ ∴ $ح_6$ هو الحد الأوسط

$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر}\, ص^{ر}$

$ح_6 = {}^{10}ق_5 \,(س^2)^5 \left(\frac{1}{2س}\right)^5 = 252 \times س^{10} \times \frac{1}{32 س^5}$

الحد الأوسط $= ح_6 = \frac{252}{32} \times س^5 = \frac{63}{8} س^5$

$ح_6 = \frac{28}{27}$

$\frac{28}{27} = \frac{63}{8} س^5$

$س^5 = \frac{28 \times 8}{27 \times 63} = \frac{32}{243}$

$س = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣\text{س} + ٢\text{ص})^{١٣}$ متساويين فأثبت أن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$

ن = ١٣ عدد فردي ∴ يوجد حدان أوسطان $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن+٣}{٢}}$

$ح_{\frac{١٣+١}{٢}} = ح_{٧}$

$ح_{\frac{١٣+٣}{٢}} = ح_{٨}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\ ٣^{ن-ر}\ ص^{ر}$

$ح_{٧} = {}^{١٣}ق_{٦}\ (٣س)^{٧}\ (٢ص)^{٦} = ١٧١٦\ (٣س)^{٧}\ (٢ص)^{٦}$

$ح_{٨} = {}^{١٣}ق_{٧}\ (٣س)^{٦}\ (٢ص)^{٧} = ١٧١٦\ (٣س)^{٦}\ (٢ص)^{٧}$

∴ $ح_{٧} = ح_{٨}$

∴ $\cancel{١٧١٦}\ \cancel{(٣س)^{٧}}\ \cancel{(٢ص)^{٦}} = \cancel{١٧١٦}\ \cancel{(٣س)^{٦}}\ (٢ص)^{٧}$

$٣س = ٢ص$

$\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ وهو المطلوب

حاول أن تحل

(١٣) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $\left(2\sqrt{س} + \frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^{10} + \left(2\sqrt{س} - \frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^{10}$

ن = ١٠ عدد زوجي $ح_{\frac{ن}{2}+1}$ = الحد الأوسط

$ح_{\frac{10}{2}+1} = ح_6$

$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر}\, ص^{ر}$

$$\left(2\sqrt{س}\right)^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{س}}\right)^5 + \left(2\sqrt{س}\right)^5 \left(\frac{-1}{2\sqrt{س}}\right)^5$$

$$\left(\frac{2\sqrt{س}}{2\sqrt{س}}\right)^5 + \left(\frac{-2\sqrt{س}}{2\sqrt{س}}\right)^5$$

١ − ١ = صفر