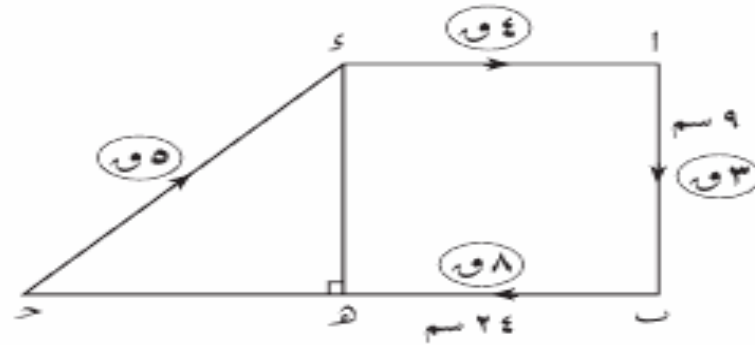


أ ب ح د شبه منحرف فيه :  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  و  $\angle B = 90^\circ$  و  $AB = 9$  سم ،  
 $BC = 2$  و  $AD = 24$  سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ و ٨ و ٥ و ٤ و ٦ نيوتن  
 في أضلاع الشكل بحيث تمثله تمثيلاً تاماً في الاتجاهات أ ب ، ب ح ، ح د ، د أ  
 على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه ٦٤٨ نيوتن . سم في  
 الاتجاه أ ب ح د ، فأوجد قيمة و .  
 ( دور أول ٢٠٠٩ )



$$\begin{aligned} \therefore \Delta DCH \text{ قائم الزاوية في } H \\ \therefore \angle DCH + \angle CDH = \angle DCH + \angle DCH \\ \therefore \angle DCH = 144 + 81 = \angle DCH \\ \therefore \angle DCH = 15 \text{ سم} . \end{aligned}$$

القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد  
 القوى تتناسب مع أطوال أضلاع الشكل

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{8}{24} = \frac{3}{9}$$

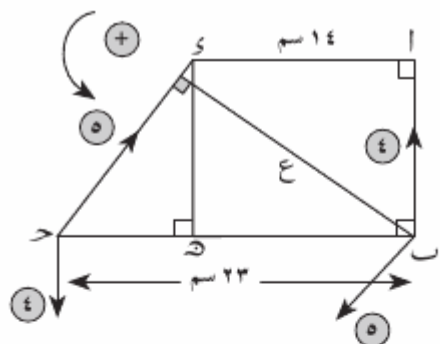
معيار عزم الازدواج حول ح

$$= 648 \text{ نيوتن} \cdot \text{سم} .$$

$$\therefore 648 = 9 \times 4 + 24 \times 3$$

$$\therefore 6 = \frac{648}{108} = 6 \text{ نيوتن} .$$

أ ب ح د شبه منحرف فيه و،  $(\angle ب) = 90^\circ$  //  $أ ب$  //  $أ ب = 12$  سم،  
 ب ح = 23 سم،  $أ د = 14$  سم. أثرت القوتان ٤ و ٥ ث كجم في ب أ ح د على  
 الترتيب وأثرت قوة مقدارها ٥ ث كجم في نقطة (ب) وفي اتجاه ح د قوة مقدارها  
 ٤ ث كجم في نقطة (ح) وفي اتجاه أ ب. أثبت أن القوى متوازنة.



القوتان ( ٤ و ٥ ) تكونان ازدواجًا .

القياس الجبري لعزمه .

$$= 92 \text{ ث كجم} = 23 \times 4 \text{ سم}$$

القوتان ( ٥ و ٤ ) تكونان ازدواجًا .

$$= - 5 \times ٤ \text{ سم}$$

• لإيجاد ع :

نرسم :  $أ ب \perp أ د$

في  $\Delta أ د ب$  :  $أ د = 12$  سم،  $أ ب = ٩$  سم،

$$\therefore (\angle د ب أ) = 90^\circ$$

$$\therefore (\angle د ب أ) = 90^\circ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore ١٥ \text{ سم} = ح د = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore ع = ب ح ح د = \frac{4}{3} \times 23 = ٣٠$$

$$\therefore \text{القياس الجبري لعزم الازدواج} = - 5 \times ٢٣ \times ٥ = - ٩٢ \text{ ث كجم} = ٩٢ \text{ سم}$$

$$\therefore ٩٢ - ٩٢ = ٠$$

∴ الازدواجان متوازنان .

أب ح د شبه منحرف فيه  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  ما قياس  $\angle B = 90^\circ$   $AB = 12$  سم  
 $BC = 16$  سم  $AD = 7$  سم . أثرت القوى ٤ ٣ ٥ ٦ ٧ نيوتن في ح د  
 $\overline{AB}$   $\overline{AD}$   $\overline{CD}$   $\overline{BC}$   $\overline{AC}$  على الترتيب . أثبت أن القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد  
 عزمه .

الإجابة ✓

نفرض أن : ه مسقط د على ح

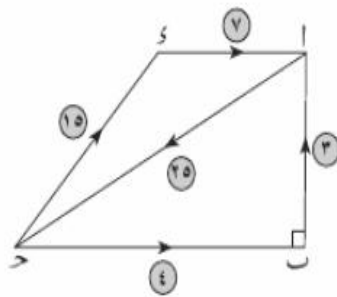
$$\therefore \text{ه ح} = \text{ب ح} - \text{ب ه} = 9 \text{ سم}$$

$$\text{د ه} = \text{أ ب} = 12 \text{ سم}$$

$$\text{في } \triangle \text{د ه ح} : \therefore \angle \text{د ه ح} = 90^\circ$$

$$\therefore (\text{د ح})^2 = (\text{د ه})^2 + (\text{ه ح})^2$$

$$\therefore (\text{د ح})^2 = (12)^2 + (9)^2 = 225 \quad \therefore \text{د ح} = 15 \text{ سم}$$

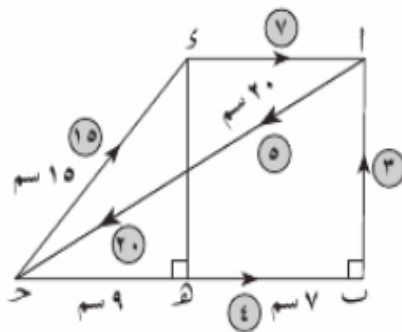


$$\text{في } \triangle \text{أ ب ح} : \therefore \angle \text{أ ب ح} = 90^\circ$$

$$\therefore (\text{أ ح})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ح})^2$$

$$\therefore (\text{أ ح})^2 = (12)^2 + (16)^2 = 400$$

$$\therefore \text{أ ح} = 20 \text{ سم}$$



وبتقسيم القوة ٢٥ نيوتن إلى قوتين إحداهما ٢٠ نيوتن والأخرى ٥ نيوتن نجد أن :

القوى : ٢٠ ، ١٥ ، ٧ التى تعمل فى  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  و  $\vec{d}$

تتناسب مع أطوال أضلاع  $\Delta$  ا ح د

$$\text{وذلك لأن : } \frac{٢٠ \text{ نيوتن}}{٢٠ \text{ سم}} = \frac{١٥ \text{ نيوتن}}{١٥ \text{ سم}} = \frac{٧ \text{ نيوتن}}{٧ \text{ سم}}$$

$$١ = ١ \text{ نيوتن} / \text{سم} = ١ \text{ م}$$

ولكنها فى ترتيب دورى واحد .

∴ فهى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ( ج ، )

$$ج = ٢ - م \times \text{مساحة } \Delta \text{ ا ح د}$$

$$ج = ٢ - ١ \times \left( \frac{١}{٢} \times ا \times د \right) = ٢ - ١ \times \left( \frac{١}{٢} \times ١٥ \times ٧ \right)$$

$$ج = ٢ - ١ \times \left( \frac{١}{٢} \times ١٥ \times ٧ \right) = ٢ - ١ \times ٥٢.٥ = -٤٠.٥ \text{ نيوتن . سم}$$

القوى : ٥ ، ٤ ، ٣ نيوتن التى تعمل فى  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  و  $\vec{d}$

تتناسب مع أطوال أضلاع  $\Delta$  ا ب ح ، وذلك لأن :

$$\frac{٥ \text{ نيوتن}}{٢٠ \text{ سم}} = \frac{٤ \text{ نيوتن}}{١٦ \text{ سم}} = \frac{٣ \text{ نيوتن}}{١٢ \text{ سم}}$$

$$١ = \frac{١}{٤} \text{ نيوتن} / \text{سم} = ٢ \text{ م}$$

ولكنها فى ترتيب دورى واحد .

∴ فهى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه ( ج ، )

$$ج = ٢ - م \times \text{مساحة } \Delta \text{ ا ب ح}$$

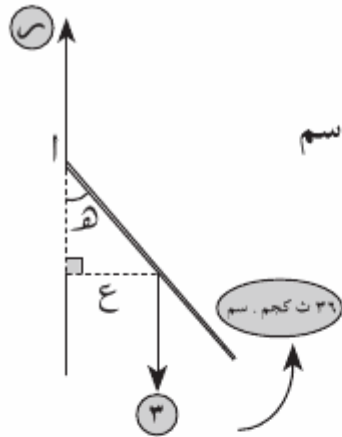
$$ج = ٢ - ٢ \times \left( \frac{١}{٢} \times ا \times ح \right) = ٢ - ٢ \times \left( \frac{١}{٢} \times ١٥ \times ٧ \right)$$

$$ج = ٢ - ٢ \times \left( \frac{١}{٢} \times ١٥ \times ٧ \right) = ٢ - ٢ \times ٥٢.٥ = -١٠٣ \text{ نيوتن . سم}$$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا محصلة القياس الجبرى لعزمه ( ج ، ) .

$$\therefore ج = ج + ج = -١٠٣ + -٤٠.٥ = -١٤٣.٥ \text{ نيوتن . سم}$$

قضيب منتظم طوله ٤٨ سم ووزنه ٣ ث كجم يتحرك في مستوى رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه (١). أثر عليه ازدواج في مستوى رأسي معيار عزمه ٣٦ ث كجم . سم . أوجد في وضع التوازن رد فعل المفصل وكذلك قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى .



القضيب متزن تحت تأثير :

(١) ازدواج : القياس الجبرى لعزمه ج = ٣٦ ث كجم . سم

(٢) القوتين : وزن القضيب (٣ ث كجم) و

رد فعل المفصل (س ث كجم) .

∴ وزن القضيب ورد فعل المفصل يكونان ازدواجًا .

∴ رد فعل المفصل (س) = ٣ ث كجم ويؤثر رأسيًا لأعلى .

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من الوزن ورد الفعل

$$= ٣٦ \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore \text{ج} - = \text{ج} - = ٣٦ \text{ ث كجم . سم}$$

وبفرض أن قياس زاوية ميل القضيب على رأسى = ه°

ع بعد الوزن عن المستوى الرأسى

$$\therefore \text{ج} - = ٣ \times \text{ع} \quad \therefore \frac{\text{ع}}{٢٤} = \text{حاه}$$

$$\therefore ٣٦ - = ٣ \times ٢٤ \text{ حاه}$$

$$\therefore \text{حاه} = \frac{٣٦ -}{٧٢ -} \quad \therefore \text{حاه} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{و} (\text{ه} \angle) = ٣٠^\circ \text{ أ ، و} (\text{ه} \angle) = ١٥٠^\circ$$

أ ب قضيب طوله ٥٠ سم ، وزنه ٢٠ نيوتن يؤثر في منتصفه ، يتحرك في مستوى رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه أ . أثر على القضيب ازدواج في مستوى رأسي معيار عزمه ٢٥٠ نيوتن . سم أوجد رد فعل المفصل وقياس زاوية ميل القضيب على الرأسى في وضع التوازن .

١. رد فعل المفصل والوزن يكونان ازدواجاً

٢. رد فعل المفصل = ٢٠ نيوتن .

٣. الازدواجان متزانان

$$250 = 20 \times r$$

$$r = \frac{25}{2} \text{ سم}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{25}{2} \text{ حاله} \quad \frac{20}{1} = \frac{25}{2} \text{ حاله}$$

٤. قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى

$$= 30^\circ \text{ أو } 150^\circ$$

أثرت القوى  $\vec{W}_1 = \vec{S}_4 - \vec{S}_6 = \vec{W}_2 = \vec{S}_4 - \vec{S}_8 = -\vec{S}_6 + \vec{S}_8 = \vec{W}_3$  في النقط  $A = (1 - 6 \times 3) = 6 \times (2 \times 7) = 6 \times (-2 \times 6)$  على الترتيب .

كما أثرت قوة  $\vec{W}_4$  مقدارها ١٠ نيوتن في  $A \leftarrow$   
 أثبت أن : القوى الأربع تكافئ ازدواجًا . أوجد عزمه .

☑ الإجابة

$$\therefore \vec{W}_1 = \vec{S}_4 - \vec{S}_6 = -(\vec{S}_4 - \vec{S}_6) = -\vec{W}_2$$

$\therefore \vec{W}_1, \vec{W}_2$  قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ،

$$\therefore \vec{AB} = \vec{C} - \vec{A} = (2 \times 7) - (1 - 6 \times 3) = (3 \times 4)$$

$$\therefore \text{ميل } \vec{AB} = \frac{3}{4} \text{ ، ميل } \vec{W}_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ميل } \vec{AB} \neq \text{ميل كل من } \vec{W}_1, \vec{W}_2$$

$\therefore$  خطأ عمل  $\vec{W}_1, \vec{W}_2$  ليسا على استقامة واحدة .

$\therefore \vec{W}_1, \vec{W}_2$  تكونان ازدواجًا عزمه  $\vec{J}_1$  ،

$$\therefore \vec{W}_3 = \vec{W}_4 \parallel \vec{W}_1 \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$$

$$\therefore \vec{W}_3 = \vec{W}_4 = \frac{\vec{S}_3 + \vec{S}_4}{9 + 16\sqrt{}} \times 10 = \vec{W}_5$$

$$\therefore \vec{W}_3 = -(\vec{S}_6 + \vec{S}_8) = -\vec{W}_6$$

$\therefore \vec{W}_3, \vec{W}_6$  قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ،

$$\therefore \overrightarrow{ا ح} = \overrightarrow{ح} - \overrightarrow{ا} = (-662) - (-63) = (-765)$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{ا ح} = -\frac{7}{5} \text{ ، ميل } \overrightarrow{و ه} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ميل } \overrightarrow{ا ح} \neq \text{ميل كل من } \overrightarrow{و ه} \text{ ، } \overrightarrow{و ه}$$

$\therefore$  خطا عمل  $\overrightarrow{و ه}$  ،  $\overrightarrow{و ه}$  ليس على استقامة واحدة .

$$\therefore \overrightarrow{و ه} \text{ ، } \overrightarrow{و ه} \text{ تكونان ازدواجاً عزمه ج } \overrightarrow{ج ٢}$$

$$\therefore \text{القوى الأربع تكونان ازدواجين عزمهما ج } \overrightarrow{ج ١} \text{ ، ج } \overrightarrow{ج ٢}$$

$\therefore$  فهي تكافئ ازدواجاً محصل عزمه ج

$$\therefore \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج ١} + \overrightarrow{ج ٢}$$

$$\therefore \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ا ب} \times \overrightarrow{و ه} + \overrightarrow{ا ح} \times \overrightarrow{و ه}$$

$$= (\overrightarrow{س ٤} + \overrightarrow{ص ٣}) \times (\overrightarrow{س ٤} - \overrightarrow{ص ٤}) =$$

$$+ (\overrightarrow{س ٥} + \overrightarrow{ص ٧}) \times (\overrightarrow{س ٨} - \overrightarrow{ص ٦}) =$$

$$= (-4 - 12 + 30 + 56) \overrightarrow{ع} = 70 \overrightarrow{ع}$$



أثرت القوتان  $\overline{و_١} = \overline{ا س ه} - \overline{ه ص و_٢} = -\overline{٢ س ه} + \overline{ب ص ه}$  في النقطة ح (٢٦١)  $\overline{و_٢}$  (٣٦١) على الترتيب فكونتا ازدواجًا . أوجد قيمتي الثابتين  $\overline{ا ب}$  ، ومتجه عزم الازدواج والبعد العمودى بين القوتين .

$$\overline{و_١} // \overline{و_٢} \quad \therefore \overline{و_١} = -\overline{و_٢}$$

$$\therefore \overline{ا س ه} - \overline{ه ص و} = \overline{٢ س ه} - \overline{ب ص ه}$$

$$\therefore \boxed{\overline{٢ = ا}} \quad \overline{و} \quad \boxed{\overline{ب = ه}}$$

$$\therefore \overline{ح و} = \overline{(٣٦١) - (٢٦١)}$$

$$\therefore \overline{ح و} = \overline{٢ س ه} + \overline{ه ص و}$$

$$\text{عزم الازدواج} = \overline{ج ح} = \overline{و_٢} \times \overline{و_١}$$

$$= (\overline{٢ س ه} + \overline{ه ص و}) \times (\overline{ه ص و} + \overline{٢ س ه}) =$$

$$= \overline{ع} (٢ + ٨) = \overline{ع} ١٠$$

$$\therefore \text{البعد العمودى} = \frac{\|\overline{ج ح}\|}{\|\overline{و_١}\|} = \frac{١٠}{\sqrt{١٦ + ٤}}$$

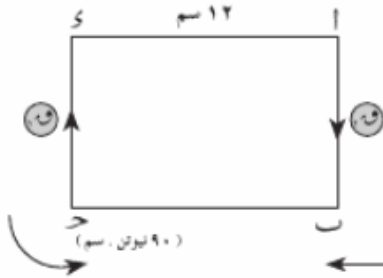
$$\therefore \text{البعد العمودى} = \frac{١٠}{\sqrt{٥ \times ٢}} = \sqrt{٥} \text{ وحدة طول} .$$



$$\therefore \text{ج.} = - \left( \frac{9}{15} \times 12 + \frac{12}{15} \times 9 \right) \times 5 = - \frac{216}{15} \times 5 = - 72 \text{ نيوتن . سم}$$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا محصل القياس الجبري لعزمه ج .

$$\therefore \text{ج} = \text{ج.} + \text{ج.} = 72 - 162 = 90 \text{ نيوتن . سم}$$



ثانيًا) ∴ مجموع القوى تكافئ ازدواجًا

القياس الجبري لعزمه = 90 نيوتن . سم

∴ يتزن معها ازدواج عزمه = - 90 نيوتن . سم

∴  $\vec{W}_1$  تؤثر في  $A$  ← ∴  $\vec{W}_2$  تؤثر في  $C$  ←

$$\therefore - \vec{W}_1 \times 12 = - 90 \quad \therefore \vec{W}_1 = 7,5 \text{ نيوتن .}$$

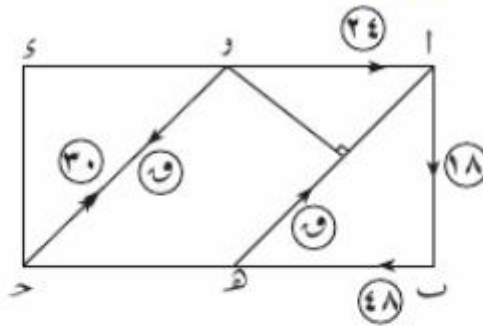
∴ القوتان اللتان تتزان مع المجموعة هما :

•  $\vec{W}_1$  تؤثر في  $A$  ← ومعيارها 7,5 نيوتن

$\vec{W}_2$  تؤثر في  $C$  ← ومعيارها 7,5 نيوتن .

أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ٩ سم ب ح = ١٢ سم هـ د و منتصفات حـ و  
 و أ د على الترتيب أثرت قوى مقاديرها ١٨ ٤٨ ٣٠ ٢٤ ث . جم في أ ب  
 ب ح و ح د و أ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً ، وأوجد  
 معيار عزمه ، ثم أوجد مقدارى القوتين اللتين تؤثران في هـ أ و ح حتى تحدث  
 اتزاناً مع القوى المعروفة .  
 ( دور أول ٢٠١١ )

الإجابة ✓



في  $\Delta$  ح د و :  $\therefore$  و ( د ح ) = ٩٠°

$$\therefore (و ح)^2 = (و د)^2 + (د ح)^2$$

$$\therefore (و ح)^2 = ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥$$

$$\therefore و ح = ١٥ \text{ سم}$$

في الشكل أ ب ح د :

$$\therefore \frac{٢٤}{١٢} = \frac{١٨}{٩} = \frac{٤٨}{٢٤} = \frac{٣٠}{١٥}$$

$\therefore$  القوى تتناسب مع أطوال أضلاع الشكل

$\therefore$  القوى مأخوذة في ترتيب دورى واحد

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه = جـ

$$\therefore جـ = ٩ \times ٤٨ - ١٢ \times ١٨$$

$$= ٦٤٨ \text{ ث . جم . سم}$$

$\therefore$  معيار عزم الازدواج = ٦٤٨ ث . جم . سم

نفرض أن القوتين المؤثرتين في هـ أ و ح

هما و ٦ و ٩ و هما يكونان ازدواجاً عزمه

$$= ٩ \times ٥ = ٤٥ = ١٢ \times ٤ \text{ ح ا}$$

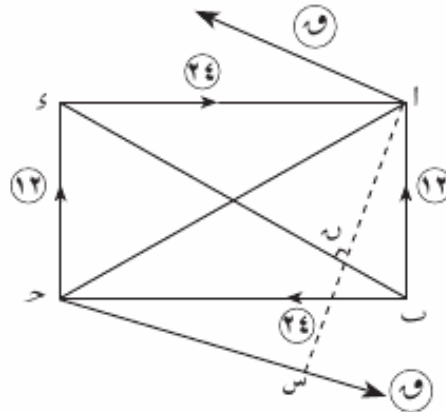
$$= ٩ \times \frac{١٢}{٥} = \frac{٩ \times ١٢}{٥} = \frac{٣٦}{٥} \text{ و ث . جرام . سم .}$$

∴ الازدواجان متزنان .

$$\therefore \frac{٣٦}{٥} \text{ و } - ٦٤٨ = ٠ \therefore ٩٠ = ٩٠ \text{ ث . جرام .}$$

∴ القوتان هما : ٩٠ ٦ ٩٠ ثقل جرام .

أ ب ح و مستطيل فيه : أ ب = ٣٠ سم ، ب ح = ٤٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٢ ٢٤ ١٢ ٢٤ نيوتن في ب أ ، ب ح ، ح و ، و أ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران في أ ، ب و توازيان ب و وتجعلان المجموعة متزنة . ( دور ثان ٢٠٠٩ )



( ١٢ ٢٤ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= ٤٨٠ = ٤٠ \times ١٢ \text{ نيوتن . سم .}$$

( ٢٤ ١٢ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= ٧٢٠ = ٣٠ \times ٢٤ \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= ٧٢٠ - ٤٨٠ = ٢٤٠ \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ معيار عزم الازدواج = ٢٤٠ نيوتن . سم .

بفرض أن القوتين اللتين تؤثران في أ ، ب

وتوازيان ب و هما : و ، و

∴ ( و ، و ) تكونان ازدواجاً معيار عزمه

$$= ٢٤٠ \text{ نيوتن . سم .}$$

$$∴ و \times ا ب = ٢٤٠$$

$$∴ ا ب = \frac{٢٤٠ \times ا ب}{ب} = ٢٤٠$$

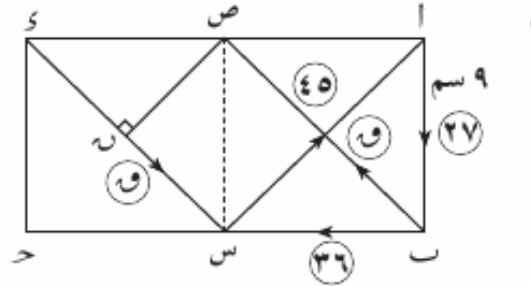
$$∴ ا ب = \frac{٤٠ \times ٣٠ \times ٢}{٥} = ٤٨ \text{ سم .}$$

∴ المجموعة متزنة .

$$∴ و = ٢٤٠ - ٤٨ \times و$$

$$∴ و = \frac{٢٤٠}{٤٨} = ٥ \text{ نيوتن .}$$

أب ح و مستطيل فيه  $أب = ٩$  سم ،  $ب ح = ٢٤$  سم ،  $ص$  منتصف  $ب ح$  ،  
 $و$  على الترتيب أثرت قوى مقاديرها  $٢٧$  ،  $٣٦$  ،  $٤٥$  نيوتن في  $أب$  ،  $ب ح$  ،  
 $ص أ$  على الترتيب . أثبت أن : المجموعة تكافئ ازدواجاً ، وأوجد معيار عزمه ثم  
أوجد : قوتين توثران في  $ب ص$  ،  $و ح$  حتى تتزن المجموعة .



في  $\Delta أ ب ح$  :  $\therefore و (ب \perp ح) = ٩٠^\circ$

$$\therefore (أ س) = (أ ب) + (ب ح)$$

$$\therefore (أ س) = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$$

$$\therefore أ س = ١٥ \text{ سم}$$

$\therefore$  القوى التي تعمل في أضلاع المثلث أ ب ح مأخوذة في ترتيب دورى واحد .

$$\therefore ٣ = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٢٧}{٩}$$

القوى تتناسب مع أضلاع الشكل .

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= - ٢ \times ٣ \times \text{مساحة } \Delta أ ب ح$$

$$= - ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٩ = - ٣٢٤ \text{ نيوتن . سم}$$

$$\text{في } \Delta و ح ص : ص ح = \frac{١٢ \times ٩}{١٥} = \frac{٣٦}{٥} \text{ سم}$$

( و ، و ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= و \times \frac{٣٦}{٥} \text{ نيوتن . سم}$$

$\therefore$  الازدواجان متزانان

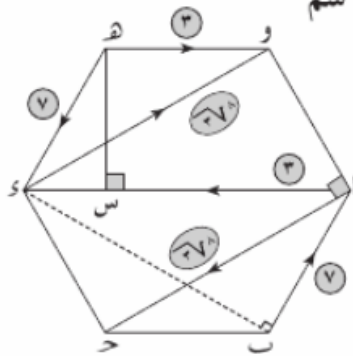
$$\therefore و = ٣٢٤ - و \times \frac{٣٦}{٥} = ٠ \therefore و = ٤٥ \text{ نيوتن}$$

أ ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها : ٣٦٧٦٧  
 $\sqrt{3}$  ٨ ٦  $\sqrt{3}$  نيوتن في ب أ ه د و ه ا د ا ح د و على الترتيب :  
 (أولاً) أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه .  
 (ثانياً) أوجد قوتين تؤثر إحداهما في المستقيم ب د والأخرى تؤثر في نقطة ( أ )  
 وتتوازن مع المجموعة .

### الحل

• البعد بين نقطتين غير متتاليتين في السداسي المنتظم = ٢ ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع

$$٢ = ١٠ \times ٢ \text{ حـا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \times ١٠ = \sqrt{3} \text{ سم}$$



(أولاً) ∴ القوتين ( ٧ ٦ ٧ ) نيوتن تكونان ازدواجاً .

القياس الجبري لعزمه ج = ٧ × ب د

$$= ٧ \times \sqrt{3} \times ١٠$$

$$= ٧٠ \sqrt{3} \text{ نيوتن . سم}$$

∴ القوتين ( ٣ ٦ ٣ ) نيوتن تكونان ازدواجاً

القياس الجبري لعزمه ج = ٣ × ه د

$$= ٣ \times ٥ \sqrt{3} = ١٥ \sqrt{3} \text{ نيوتن . سم}$$

∴ القوتين (  $\sqrt{3}$  ٨ ٦  $\sqrt{3}$  ) نيوتن تكونان ازدواجاً القياس الجبري لعزمه

$$ج = ٨ \sqrt{3} \times ١٠ - ٨ \sqrt{3} \times ١٠ = ٠$$

$$= ٨٠ \sqrt{3} \text{ نيوتن . سم}$$

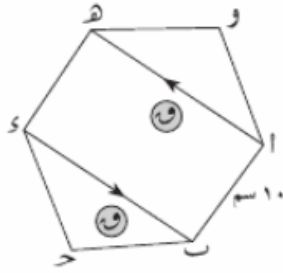
∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً القياس الجبري لعزمه ج حيث :

∴ القوتين (  $\sqrt{3}$  ٨ ٦  $\sqrt{3}$  ) نيوتن تكونان ازدواجاً القياس الجبري لعزمه

$$ج = ٨ \sqrt{3} \times ١٠ - ٨ \sqrt{3} \times ١٠ = ٠$$

$$= ٨٠ \sqrt{3} \text{ نيوتن . سم}$$





$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 = -3\sqrt{25} \text{ نيوتن . سم .}$$

(ثانيًا) ∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبري

$$\text{لعزمه} = -3\sqrt{25} \text{ نيوتن سم .}$$

∴ يتزن معها ازدواج القياس الجبري لعزمه

$$= - = 3\sqrt{25} \text{ نيوتن . سم .}$$

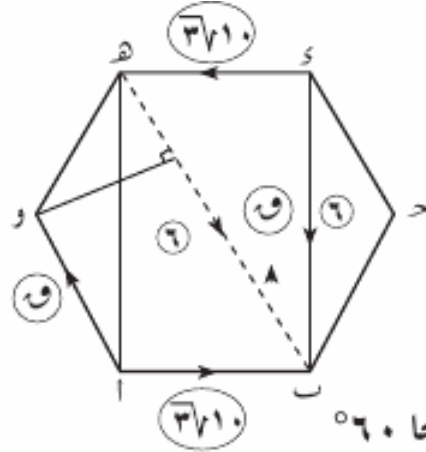
∴ إحدى القوتين (  $\vec{W}$  ) تؤثر في  $\vec{B}$  والأخرى (  $-\vec{W}$  ) تؤثر في  $\vec{A}$  .

( ذلك لأن :  $\vec{B} \parallel \vec{A}$  ، القياس الجبري لعزم الازدواج المطلوب  $< 0$  )

$$\text{∴ القياس الجبري لعزم الازدواج} = \vec{W} \times \vec{A} = 3\sqrt{25} \text{ نيوتن . سم}$$

$$\text{∴} \vec{W} \times \vec{B} = 3\sqrt{25} = 10 \times \vec{W} \text{ ∴} \vec{W} = 3\sqrt{\frac{5}{4}} \text{ نيوتن .}$$

أ ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ل سم . أثرت قوى مقاديرها  $3\sqrt{2} ١٠$  ،  $٦٦ ٣\sqrt{2} ١٠$  نيوتن في أ ب ، ب د ، د ه ، ه أ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران في ب ه ، أ و حتى تتزن المجموعة . (دور أول ٢٠٠٨)



$$\therefore \text{ب د} = ٢ \text{ ل ح ا } ٦٠$$

$$\therefore \text{ب د} = \text{ل} ٣\sqrt{2} \text{ سم .}$$

القوتان ( ٦ ٦ ) تكونان ازدواجًا عزمه

$$= - ٦ \times \text{ل} = - ٦ \text{ ل نيوتن . سم .}$$

القوتان (  $3\sqrt{2} ١٠$  ،  $3\sqrt{2} ١٠$  ) تكونان ازدواجًا

$$\text{عزمه} = 3\sqrt{2} ١٠ \times 3\sqrt{2} \text{ ل} = ٣٠ \text{ ل نيوتن . سم .}$$

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه

$$= - ٦ \text{ ل} + ٣٠ \text{ ل} = ٢٤ \text{ ل نيوتن . سم .}$$

( و ه و ه ) تكونان ازدواجًا عزمه

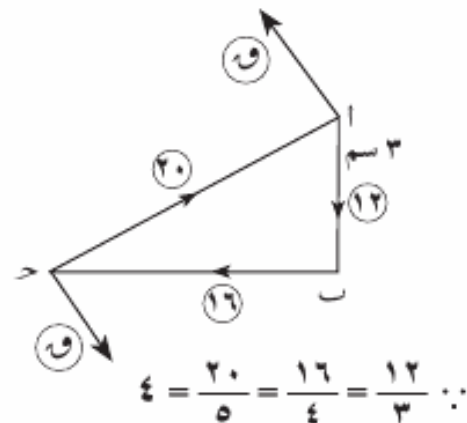
$$= - و \times \frac{\text{ل} ٣\sqrt{2}}{٢} \text{ نيوتن . سم .}$$

$\therefore$  الازدواجان متزان .

$$\therefore - و + \frac{\text{ل} ٣\sqrt{2}}{٢} + ٢٤ \text{ ل} = ٠$$

$$\therefore و = \frac{48}{3\sqrt{2}} \times \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = ١٦ ٣\sqrt{2} \text{ نيوتن .}$$

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ نيوتن في أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب . أثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران في أ ب ح عموديتين على ح أ وتجعلان المجموعة في حالة توازن .



∴ القوى تتناسب مع أطوال أضلاع الشكل

والقوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد .

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه

$$= ج = ١٢ \times ٤ = ٤٨ \text{ نيوتن . سم .}$$

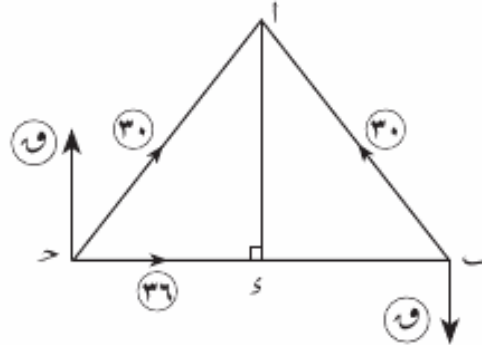
( و م و ) تكونان ازدواجًا معيار عزمه

$$= ٥ \times ٩ = ٤٥ \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة في حالة توازن

$$\therefore ٤٨ - ٤٥ = ٣ \text{ نيوتن .}$$

أ ب ح مثلث فيه :  $ا ب = ا ح = ١٠$  سم  $ب ح = ١٢$  سم . أثرت قوى مقاديرها  $٣٠$  ،  $٣٠$  ،  $٣٦$  نيوتن في ب أ ، أ ح ، ح ب على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران في ب ، ح عموديتين على ب ح بحيث تتزن المجموعة . ( دور ثان ٢٠٠٧ )



في  $\Delta ا ب ح$  :  $\angle ا = ٩٠^\circ$

$$\therefore (ا ب)^2 + (ا ح)^2 = (ب ح)^2$$

$$\therefore (ا ب)^2 = (ب ح)^2 - (ا ح)^2$$

$$\therefore ا ب = ٨ \text{ سم .}$$

$\therefore$  القوى التي تعمل في أضلاع المثلث مأخوذة في ترتيب دورى واحد .

$$\therefore \frac{3}{10} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

أى القوى تتناسب مع أضلاع الشكل .

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه

$$= ٣ \times ٢ \text{ مساحة المثلث ا ب ح}$$

$$= ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٢٨٨ \text{ نيوتن . سم .}$$

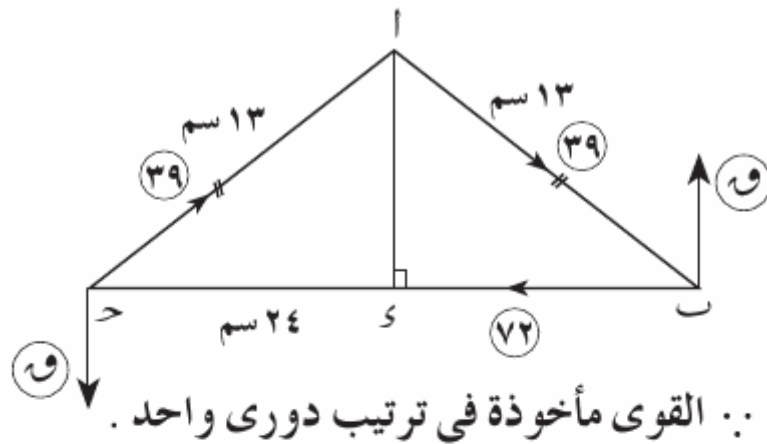
( و م و ) تكونان ازدواجًا عزمه

$$= - ١٢ \times ١٢ = - ١٤٤ \text{ نيوتن . سم .}$$

$\therefore$  الازدواجان متزانان

$$\therefore - ١٢ + ٢٨٨ = ٠ \therefore ٢٧٦ = ٠$$

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح = ١٣ سم ، ب ح = ٢٤ سم . أثرت قوى مقاديرها ٣٩ ٦٧٢ ٣٩ نيوتن في أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب . أثبت أن : المجموعة تكافئ ازدواجاً ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران في ب ح وعموديتين على ب ح وتجعلان المجموعة في حالة توازن .



∴ القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد .

$$3 = \frac{39}{13} = \frac{72}{24} = \frac{39}{13}$$

والقوى تتناسب مع الأضلاع الممثلة لها .

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= - 2 \times 3 \times \text{مساحة } \triangle \text{ أ ب ح}$$

$$= - 6 \times \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = - 360 \text{ نيوتن . سم .}$$

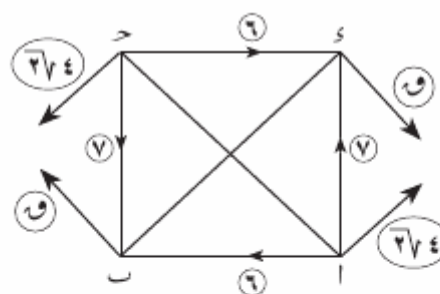
( و م و ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 24 \times 3 \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ الازدواجان متزانان

$$\therefore 24 \text{ و } - 360 = 0 \therefore 15 \text{ نيوتن .}$$

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ٦ ٧ ٦ نيوتن فى أ ب ح د م ح د م ح د م ح د على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما  $2\sqrt{2}$  نيوتن عند أ م ح فى الاتجاهين ب د م ح د على الترتيب ، أوجد :  
 ( أولاً ) معيار عزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة .  
 (ثانياً) مقدار واتجاه قوتين تعملان عند ب د م و توازيان أ ح وتجعلان المجموعة فى حالة توازن .  
 ( دور ثان ٢٠١١ )



(أولاً) ( ٦ ٦ ٦ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 20 \times 6 = 120 \text{ نيوتن . سم .}$$

( ٧ ٦ ٦ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 20 \times 7 = 140 \text{ نيوتن . سم .}$$

(  $2\sqrt{2}$  ٦  $2\sqrt{2}$  ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 2\sqrt{2} \times 20 \times 2\sqrt{2} = 160 \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= 120 + 140 + 160 = 180 \text{ نيوتن . سم .}$$

لكى يحدث توازن للمجموعة

∴ ( و م و ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 180 \text{ نيوتن . سم .}$$

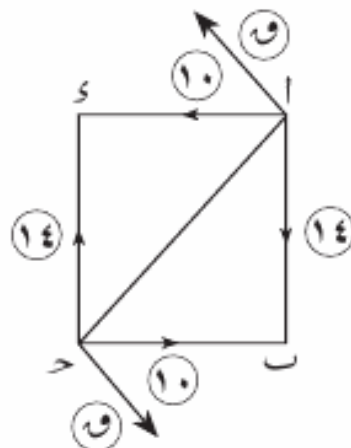
$$= 180 = 2\sqrt{2} \times 20 \times \text{و} \therefore$$

$$\therefore \text{و} = \frac{2\sqrt{2} \times 9}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \times 9}{2} \text{ نيوتن .}$$

∴ القوتان هما :  $(\frac{2\sqrt{2} \times 9}{2} \text{ م } \frac{2\sqrt{2} \times 9}{2})$  نيوتن .

وتعملان فى أ ح م ح د

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٨ سم ، أثرت القوى ١٤ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٠ نيوتن في الاتجاهات أ ب ، ب ح ، ح د ، د أ على الترتيب . أوجد معيار عزم الازدواج المحصل ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران في أ ، ح وتوازيان ب د حتى تتزن المجموعة .



( ١٤ ، ١٤ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= - 14 \times 8 = - 112 \text{ نيوتن . سم .}$$

( ١٠ ، ١٠ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 10 \times 8 = 80 \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= - 32 \text{ نيوتن . سم .}$$

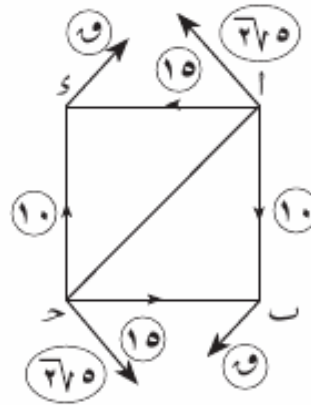
( ٩ ، ٩ ) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 9 \times 8 = 72 \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة متزنة ∴  $72 - 32 = 40$

$$\therefore 9 = \frac{40}{8} = 5 \text{ نيوتن .}$$

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٣ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٥ ١٠ ٦ ١٥ ٦ ١٠ نيوتن في أ ب ح د ع ف م ا د على الترتيب ، كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٥ نيوتن عند النقطتين ا م ح في الاتجاهين ب د م ب على الترتيب . أوجد :  
 ( أولاً ) معيار عزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة .  
 (ثانياً) قوتين تعملان عند النقطتين ب م د وتوازيان أ ح وتجعلان المجموعة في حالة توازن .



$$\begin{aligned} & \text{(أولاً) } (10 \text{ و } 10) \text{ تكونان ازدواجاً عزمه} \\ & = - = 3 \times 10 = 30 \text{ نيوتن . سم .} \\ & (15 \text{ و } 15) \text{ تكونان ازدواجاً عزمه} \\ & = 3 \times 15 = 45 \text{ نيوتن . سم .} \\ & (25 \text{ و } 25) \text{ تكونان ازدواجاً عزمه} \\ & = 25 \times 3 = 75 \text{ نيوتن . سم .} \end{aligned}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

$$= 45 \text{ نيوتن . سم .}$$

(ثانياً) (و م) تكونان ازدواجاً عزمه

$$= - = 25 \times 3 = 75 \text{ نيوتن . سم .}$$

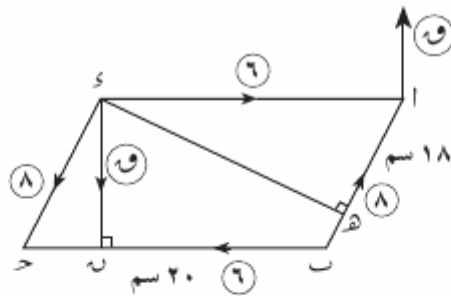
∴ الازدواجان متزانان

$$\therefore - = 75 + 45 = 120$$

$$\therefore 120 = \frac{25 \times 15}{2} \text{ نيوتن .}$$



أب ح و متوازي أضلاع فيه : أب = ١٨ سم ، ب ح = ٢٠ سم ، و (أ ب ح) = ٣٠°  
 أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ ، ٦ ، ٨ نيوتن في ب أ ، ب ح ، ح و ، و أ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران في أ و ب وعموديتين على  $\overline{أ ب}$  وتكافئان المجموعة السابقة .



(۸۶۸) تکنونان ازدواجاً عزمه

$$= 8 \times 20 \text{ حـا } 30^\circ = 80 \text{ نيوتن . سم .}$$

( ٦ ٦ ٦ ) تڪونان ازدواجاً عزمه

$$= 6 \times 18 \text{ ح } 30^\circ = 54 \text{ نيوتن . سم .}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه

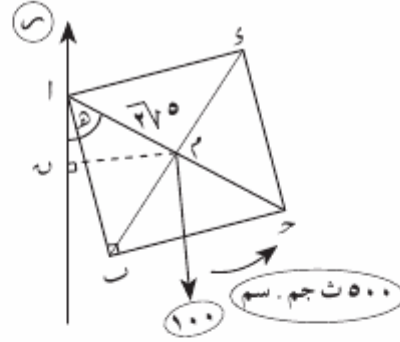
$$= 80 - 54 = 26 \text{ نیوٹن . سم .}$$

القوتان المؤثرتان في الماء تكونان ازدواجاً عزمه

$$= 20 \times \text{نيوتن} \cdot \text{سم}.$$

$$\therefore 20 = 19 \quad \therefore 1, 3 = 19 \text{ نيوتن}.$$

أ ب ح د صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ١٠ سم ووزنها ١٠٠ ث . جرام ويؤثر في نقطة تلاقي القطرين . علقت الصفيحة في مسمار أفقي رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٥٠٠ ث . جرام . سم ، أوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل أ ح على الأفقي .



∴ طول قطر المربع =  $10\sqrt{2}$  سم .

∴ أ ح =  $10\sqrt{2}$  سم .

في وضع التوازن :

وزن الصفيحة ١٠٠ ث جم ، رد فعل المسمار  
تكونان ازدواجًا عزمه

٥٠٠ ث جم . سم ، وذراعه م ح

∴  $100 \times م ح = 500$  . ∴ م ح = ٥ سم .

∴ ح أ ه =  $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  .

∴  $45^\circ = (\angle ه)$  .

الصفيحة تصنع زاوية قياسها  $45^\circ$  مع الرأسى

وزاوية قياسها  $45^\circ$  مع الأفقي .