مراجعة حساب التكامل " الدوال الأصلية"

* إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ⊂ ح ، فإن كل دالة ل تحقق العلاقة : لَ(س) = د(س) ∀ ∋ ف
تسمى دالة أصلية أو تكامل أو (معكوس المشتقة) للدالة د على ف .

∫ د(س)ءس = ل(س) + ث (ث ثابت) أو لَ (س) = د(س) (ل دالة أصلية للدالة د)

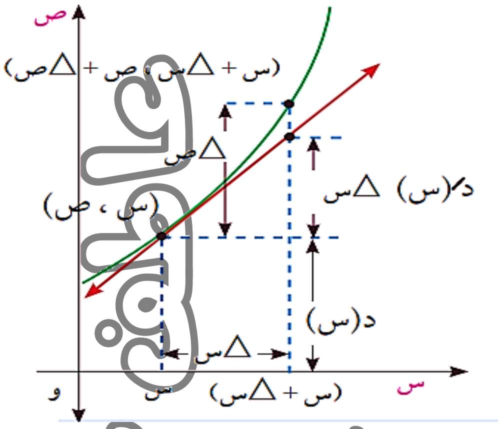
* إذا كانت ل (س) ، ل (س) دالتين أصليتين للدالة د فإن : ل (س)– ل (س) = ث (ثابت)

تمارين على الدوال الأصلية

١	الدالة ل(س) = س^{٤} + ٥ هي دالة أصلية للدالة : (أ) د(س) = $\frac{١}{٥}$ س^{٥} + ٥س + ث (ب) د(س) = ٤س^{٣} (ج) د(س) = ٤س^{٣}+ث (د) د(س) = ل(س) +ث
٢	إذا كانت ل(س)= [٣ - ، د(س) = ١٥ - فإن العلاقة بين الدالتين ل ، د هي : (أ) د دالة أصلية للدلة ل (ب) ل دالة أصلية للدالة د (ج) دَ(س) = ل(س) (د) لً (س) = د(س)
٣	إذا كانت ل(س) = جا س دالة أصلية للدالة د(س) فإن : (أ) دَ(س) = ل(س) (ب) د(س) = ل(س) (ج) د(س) = ٢ جا س (د) د(س) = جا س
٤	الدالة ي(س) = جتا^{٣}٢س جا٢س دالتها الأصلية هي: (أ) –٣جا^{٢}٢س جتا٢س (ب) $\frac{١}{}$ جتا^{٤}٢س جا٢س (ج) – $\frac{١}{}$ جتا^{٤}٢س +٣ (د) يَ(س)
٥	الدالة هـ (س) = $\sqrt{س^{٢}+١}$ إحدى الدوال الأصلية للدالة: (أ) س^{٢}+١ (ب) $\frac{٢}{}$ $\frac{س}{+١}$ (ج) $\frac{س}{+١}$ (د) – $\frac{س}{+١}$
٦	الدالة ل(س) = (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^{٥} هي دالة أصلية للدالة د(س) تساوي : (أ) صفر (ب) ٥(جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^{٤} (ج) ١ (د) ٥ (جتا^{٢}س – جا^{٢}س)^{٤}
٧	إذا كانت ل (س) ،ل (س) دالتين أصليتين للدالة د(س) = ٣س+٢ ،وكانت هـ(س) = ل (س)– ل (س)فإن هـَ(س) = .. (أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٥
٨	إذا كانت الدالة د(س) = جا٢س ، فإن الدالة الأصلية لها هي ل(س) تساوي : (أ) – جتا٢س (ب) جتا^{٢}س (ج) جا س^{٢} (د) جا^{٢}س
٩	أثبت أن الدالة ل(س) = قا^{٢}٣س +ث هي دالة أصلية للدالة د(س) = ٦جا٣س (جتا٣س)$^{-٣}$
١٠	أثبت أن الدالة ل(س) = جتاس هي دالة أصلية للدالة د(س) = جا^{٣}س (جتا^{٢}س– ١)$^{-١}$

طرق التكامل

التفاضلى



نفرض أن الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند النقطة س

و أن النقطة س + Δ س تنتمى لمجال هذه الدالة

فإذا تغيرت س من س إلى س + Δ س

فإن ص تتغير من ص إلى ص + Δ ص

حيث : Δ ص = د (س + Δ س) – د (س)

و من تعريف المشتقة نعلم أن : ⇐⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}^{\prime}(\text{س}) = \text{ص}^{\prime} = \lim\limits_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

⇐⇐ $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} \simeq \text{د}^{\prime}(\text{س})$ عندما Δس ≃ ٠ ، Δس ≠ ٠ و منها Δص ≃ د/ (س) Δس

مما سبق يمكن تعريف التفاضلى :

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، Δ س يرمز للتغير فى س حيث Δس ≠ ٠

فإن ١ - تفاضلى ص ويرمز له بالرمز (ء ص) = د/ (س) ءس

٢ - تفاضلى س ويرمز بالرمز (ءس) = Δ س وعلى ذلك فإن:

القاعدة: $\boxed{\text{ءص} = \text{د}^{/}(\text{س})\ \text{ءس}}$ ⇐⇐ تفاضلي ص = مشتقة د (س) × تفاضلي س

ء ص = د/ (س) ءس وهو دالة فى متغيرين س ، ءس

مثال : إذا كانت ص = س ٣ فإن: ء ص= ٣ س ٢ ءس

مثال ١ صـ ٩٧ : أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

(أ) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ (ب) $\text{ع} = \frac{٤}{٣}\pi\text{نق}^{٣}$

(جـ) ص = ع . ل حيث كل من ع ، ل دالة فى س

الحل

ء ص = د/ (س) ءس د/ (س)= ١ + (س – ١) -١ ء ص = [١ + (س – ١) -١]ءس

ء ح = د/ (س) ء نق د/ (ح)= ٤ π نق ٢ ء ح = ٤ π نق ٢ ء نق

ء ص = د/ (س) ءس د/ (س) = (ع × ل/ ءس + ل × ع/ ءس = ع ء ل +ل ء ع

حاول أن تحل ١ صـ ٩٨ أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

Ⓐ $ص = (٢س + ٥)^{٤}$ Ⓑ $ص = هـ^{٢س - ٣}$ Ⓒ $ص = \frac{ع}{ل}$ حيث ع، ل دوال في المتغير س

Ⓐ $ءص = دَ(س)\,ءس \Leftarrow دَ(س) = ٨(٢س + ٥)^{٣}$ $ءص = ٨(٢س + ٥)^{٣} \times ءس$

Ⓑ $ءص = دَ(س)\,ءس \Leftarrow دَ(س) = ٢هـ^{٢س - ٣}$ $ءص = ٢هـ^{٢س - ٣} \times ءس$

Ⓒ $ءص = دَ(س)\,ءس \Leftarrow دَ(س) = \frac{ل\,عَ - ع\,لَ}{ل^{٢}}\,ءس$ $ءص = \frac{ل\,عَ - ع\,لَ}{ل^{٢}}\,ءس$

تفكير ناقد : اذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ أوجد ءص بدلالة س ، ص ، ءس

الحل بالاشتقاق بالنسبة ل س $\Leftarrow ٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\Leftarrow$ بالضرب $\times$ ءس $٢س\,ءس + ٢ص\,ءص = ٠ \Leftarrow ءص = \frac{-٢س\,ءس}{٢ص} = \frac{-س\,ءس}{ص}$

بعض قواعد التكامل

١	$\int دَ(س)\,ءس = د(س) + ث$	١	يمكن توزيع التكامل على الجمع والطرح
٢	$\int ءس = س + ث$	٢	لا يمكن توزيع التكامل على الضرب والقسمة
٣	$\int س^{ن}\,ءس = \frac{١}{ن+١}س^{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$	٣	$\sqrt[ن]{س^{م}} = (س)^{\frac{م}{ن}}$
٤	$\int (أس+ب)^{ن}\,ءس = \frac{١}{أ(ن+١)}(أس+ب)^{ن+١}$ ، $ن \neq -١$	٤	$١ + \frac{أ}{ب} = \frac{ب + أ}{ب}$
٥	$\int [د(س)]^{ن}\,دَ(س)\,ءس = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١} + ث$	٥	الدالة قابلة للتكامل على فترة إذا كانت معرفة على هذه الفترة

أمثلة :

(١) $\int (س^{٤} + ٤س - ٥)\,ءس = \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٥س + ث = \frac{١}{٥}س^{٥} + ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٢) $\int (\sqrt{س} + \frac{١}{س^{٣}})\,ءس = \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-٣})\,ءس$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث = \frac{٢\sqrt{س^{٣}}}{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}} + ث$

(٣) $\int (\text{س}-٥)(\text{س}+١)\,\text{ءس} = \int (\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥)\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ث}$

(٤) $\int \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥)\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + \text{ث}$

(٥) $\int \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{\text{س}-١}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^٢ + \text{س} + ١)\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} + \text{ث}$

نظرية :

إذا كان : أ ، ب ثابتين ، ن ≠ −١ فإن : $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{١}{\text{أ}} \times \frac{١}{\text{ن}+١} (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}$ ، ن ≠ −١

البرهان :

ينتج مباشرة بإيجاد المشتقة الأولى للطرف الأيسر

أمثلة :

(١) $\int (٢\text{س}+٥)^٣\,\text{ءس} = \frac{(٢\text{س}+٥)^٤}{٢\times ٤} + \text{ث} = \frac{١}{٨}(٢\text{س}+٥)^٤ + \text{ث}$

(٢) $\int \sqrt{٢\text{س}-٥}\,\text{ءس} = \int (٢\text{س}-٥)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} = \frac{(٢\text{س}-٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٢\times\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}(٢\text{س}-٥)\sqrt{٢\text{س}-٥} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٥\,\text{ءس} = \int \left[\text{س}^٢\left(\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)\right]^٥\,\text{ءس}$

$= \int (٧\text{س}+١)^٥\,\text{ءس} = \frac{١}{٤٢}(٧\text{س}+١)^٦ + \text{ث}$

(٤) $\int (\text{س}+١)\sqrt{٣\text{س}+٥}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س}+٣)(٣\text{س}+٥)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$ بالضرب فى ٣ × $\frac{١}{٣}$

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س}+٥-٢)(٣\text{س}+٥)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$ بإضافة ± ٥

$= \frac{١}{٣}\int (٣\text{س}+٥)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{ءس} - \frac{٢}{٣}\int (٣\text{س}+٥)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٤٥}(٣\text{س}+٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٢٧}(٣\text{س}+٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ (قارن طريقة الحل مع طريقة التكامل بالتعويض التالية)

تدريب :أوجد التكاملات التالية :

(١) ∫ (٣س + ٧)^{٥} ءس =

(٢) ∫ (ــــ^{٥}) ءس =

(٣) أوجد الدوال الأصلية للدالة د(س) = ٣√ س$^{-٢}$

تمارين / أوجد التكاملات الآتية:

١	∫ ٣ءس	٢	∫ ٨س ءس
٣	∫ (٩ س^{٢} + ٤ س^{٣} − ٧) ءس	٥	∫ $\frac{٦}{}$ ءس
٥	∫ $\sqrt[٥]{س^{٣}}$ ءس	٦	∫ (س + ٥) ءس
٧	∫ (٥س^{٤} − ٧س^{٣} + ٣س^{٢}) ءس	٨	∫ س (س^{٢} + ٨) ءس
٩	∫ ٣س^{٢}(س^{٣} − √س + $\frac{٤}{}$) ءس	١٠	∫ ($\sqrt[٣]{س^{٢}}$) (٣س^{٢} + $\sqrt{س^{٣}}$ − $\frac{٧}{}$) ءس
١١	∫ (س^{٢} − ٢)^{٢} ءس	١٢	∫ (٣س + ٧)^{٥} ءس
١٣	∫ (ــــ^{٥}) ءس	١٤	∫ ($\frac{ن^{٢} +}{}$ ــ $\frac{٥}{}$) ءس

١٥	$\int (س^٢ + ٣)(٥س - ٤)\, ءس$	١٦	$\int \frac{س^٢ + ٦س + ٩}{ں +}\, ءس$
١٧	$\int \frac{س^٢ + ٥س - ١٤}{ں}\, ءس$	١٨	$\int \sqrt{س}\,(س^٢ + ٤س - ١)\, ءس$
١٩	أوجد الدوال الأصلية للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{س}^{-٢}$		

التكامل بالتعويض

بالتعويض التكامل *Integration by Substitntion*

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

الحالة الاولى : (تكامل دالة مرفوعة لقوة × مشتقتها)

$$\int د(ر(س))\ رَ(س)\ ءس = \int [د(س)]^{ن} \times دَ(س)\ ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

مثال ٢ ص ٩٩ : أوجد : (أ) $\int س^٣(٢س^٤ - ٧)^٥\ ءس$ (ب) $\int \frac{س+٤}{(س^٢+٨س)^٣}$

$$= \frac{١}{٨}\int ٨س^٣(٢س^٤ - ٧)^٥\ ءس = \frac{١}{٨\times٦}(٢س^٤ - ٧)^٦ + ث = \frac{١}{٤٨}(٢س^٤ - ٧)^٦ + ث$$

(ب) $$\int \frac{س+٤}{(س^٢+٨س)^٣}\ ءس = \frac{١}{٢}\int \frac{(٢س+٨)}{(س^٢+٨س)^٣}\ ءس = \frac{-١}{٤(س^٢+٨س)^٢} + ث$$

حاول أن تحل ٢ ص ٩٩ :

أوجد : (أ) $\int ٣س\,(س^{٢}-٧)^{٤}\,ءس$ (ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣}-٤س)^{٥}}\,ءس$

(أ) $\int ٣س\,(س^{٢}-٧)^{٤}\,ءس = \int \frac{١}{٢}\times ٣\times ٢س\,(س^{٢}-٧)^{٤}\,ءس = \frac{٣}{١٠}(س^{٢}-٧)^{٥} + ث$

(ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣}-٤س)^{٥}}\,ءس = \int \frac{١}{٣}\times ٣س^{٢}\,(س^{٣}-٤)^{-٥}\,ءس = \frac{١}{٣}\times\frac{١}{-٤}(س^{٣}-٤)^{-٤} + ث =$

$= \frac{-١}{١٢(س^{٣}-٤)^{٤}} + ث$

تدريب : أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \sqrt[٣]{س^{٤}-٢س^{٣}+٤}\,(٢س^{٣}-٣س^{٢})\,ءس$

(٢) $\int (س^{٣}+س-٥)^{٩}\,(٣س^{٢}+١)\,ءس$

الحالة الثانية : (استخدام تعويض مناسب لاحدى الدالتين) :

مثال ٣ ص ٩٩ : **أوجد :** (أ) $\int س\,(س+٤)^{٧}\,ءس$ (ب) $\int (س^{٢}+٥)\sqrt{س-١}\,ءس$

(أ) $\int س\,(س+٤)^{٧}\,ءس$ **نلاحظ ان الدالتين المضروبتين من نفس الدرجة (الاولى)**

هذا نفرض $(س+٤) = ص$ **ومنها** $س = ص-٤$ ، $ءس = ءص$ **بالتعويض فى التكامل**

$\int س\,(س+٤)^{٧}\,ءس = \int (ص-٤)(ص)^{٧}\,ءص = \int (ص^{٨}-٤ص^{٧})\,ءص =$

$= \frac{١}{٩}ص^{٩} - ٤\times\frac{١}{٨}ص^{٨} + ث = \frac{١}{٩}(س+٤)^{٩} - \frac{١}{٢}(س+٤)^{٨} + ث = \frac{١}{١٨}(س+٤)^{٨}(٢س-١) + ث$

(ب) $\int (س^{٢}+٥)\sqrt{س-١}\,ءس$

نلاحظ ان الدالتين المضروبتين مختلفتان فى الدرجة (الثانية × الجذر التربيعى للاولى)

هذا نفرض $(س-١) = ص$ **ومنها** $س = ص+١$ **ومنها** $س^{٢}+٥ = (ص+١)^{٢}+٥$

$ءس = ءص$ **بالتعويض فى التكامل**

$\int \left[(ص+١)^{٢}+٥\right]\sqrt{ص}\,ءص = \int \left[ص^{٢+\frac{١}{٢}} + ٢ص^{١+\frac{١}{٢}} + ٥ص^{\frac{١}{٢}}\right]ءص =$

$$= \frac{٢}{٧} ص^{\frac{٧}{٢}} + ٢ \times \frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + ٥ \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٧}(س-١)^{\frac{٧}{٢}} + ٢ \times \frac{٢}{٥}(س-١)^{\frac{٥}{٢}} + ٥ \times \frac{٢}{٣}(س-١)^{\frac{٣}{٢}} + ث =$$

$$= \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(س-١)^{٤}}\left(٥س^{٢}+٤س+٦١\right) + ث$$

حاول أن تحل ٣ ص ١٠٠ : أوجد : (أ) $\int س\,(٢س - ٣)^{٤}\, ءس$ (ب) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{٣س - ١}\, ءس$

(أ) $\int س\,(٢س - ٣)^{٤}\, ءس$

نلاحظ ان الدالتين المضروبتين من نفس الدرجة (الاولى)

هنا نفرض $(٢س - ٣) = ص$ **ومنها** $س = \frac{١}{٢}(ص + ٣)$ $ءس = \frac{١}{٢}\, ءص$

بالتعويض فى التكامل $\int س\,(٢س - ٣)^{٤}\, ءس$

$$= \int \frac{١}{٢}(ص+٣)(ص)^{٤} \times \frac{١}{٢}\, ءص = = \frac{١}{٤}\int (ص^{٥} + ٣ص^{٤})\, ءص =$$

$$= \frac{١}{٤} \cdot \frac{١}{٦} ص^{٦} + \frac{٣}{٥} \cdot ص^{٥} + ث = \frac{١}{٤} \cdot \frac{١}{٦}(٢س-٣)^{٦} + \frac{٣}{٥} \cdot (٢س-٣)^{٥} + ث$$

$$= \frac{١}{٢٤٠}(٢س-٣)^{٥}(١٠س + ٣) + ث$$

(ب) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{٣س - ١}\, ءس$ **نلاحظ ان الدالتين المضروبتين مختلفتان فى الدرجة (الدرجة الثانية × الجذر التكعيبى للاولى**

هنا نفرض $(٣س - ١) = ص \Leftarrow س = \frac{١}{٣}(ص + ١) \Leftarrow س^{٢} = \frac{١}{٩}(ص + ١)^{٢}$

$ءس = \frac{١}{٣}\, ءص$ **بالتعويض فى التكامل** $\int \left[\frac{١}{٩}(ص+١)^{٢}\right]\sqrt[٣]{ص}\, ءص = \frac{١}{٢٧}\int$

$$(ص^{٢+\frac{١}{٣}} + ٢ص^{١+\frac{١}{٣}} + ص^{\frac{١}{٣}})\, ءص = \frac{١}{٢٧} \times \left(\frac{٣}{١٠} ص^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٢\times٣}{٧} ص^{\frac{٧}{٣}} + \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}}\right) + ث = \frac{١}{٢٧} \times$$

$$\left(\frac{١}{٣٠}(٣س-١)^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٦}{٦٣}(٣س-١)^{\frac{٧}{٣}} + \frac{١}{١٢}(٣س-١)^{\frac{٤}{٣}}\right) + ث$$

حالات خاصة : (دوال جذرية – أسية – لوغاريتمية)

مثال ٤ ص ١٠٠ : أوجد : (أ) $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{س}}{س}}\, ءس$ (ب) $\int ٦س\, هـ^{س^{٢}}\, ءس$

(أ) $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{س}}{س}}\, ءس =$

بفرض $١ + \sqrt{س} = ص \Leftarrow س = (ص - ١)^{٢} \Leftarrow ءس = ٢(ص - ١)\, ءص$

$$= \int \sqrt{\frac{\text{ص}}{(\text{ص}-١)^{٢}}} \times ٢(\text{ص}-١)\,\text{ءص} = \int \frac{\sqrt{\text{ص}}}{(\text{ص}-١)} \times ٢(\text{ص}-١)\,\text{ءص} = ٢\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءص} = \frac{٢\times٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٤}{٣}\sqrt{(١+\sqrt{\text{س}})^{٣}} + \text{ث}$$

ب) $\int ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = ٣\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = ٣\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

حاول أن تحل ٤ صـ ١٠١ : أ) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١-٣\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس}$ ب) $\int (٣-\text{س})\,\text{هـ}^{٦\text{س}-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

أ) بفرض ص $=١-٣$ س^{٢} $\Leftarrow$ ءص $= -٣\times٢$ س ءس

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{١-٣\text{س}^{٢}}}\,\text{ءس} = \frac{-١}{٦}\int \frac{١}{\sqrt{١-٣\text{س}^{٢}}} \times -٣\times٢\text{س}\,\text{ءس} = \frac{-١}{٦}\int (\sqrt{\text{ص}})^{-١}\,\text{ءص} = \frac{-١}{٣}\sqrt{\text{ص}} + \text{ث} = \frac{-١}{٣}\sqrt{١-٣\text{س}^{٢}} + \text{ث}$$

ب) $\int (٣-\text{س})\,\text{هـ}^{٦\text{س}-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int (٦-٢\text{س})\,\text{هـ}^{٦\text{س}-\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٦\text{س}-\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

مثال ٥ صـ ١٠١ أوجد : أ) $\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$ ب) $\int \frac{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

أ) $\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس} =$

$$\int \frac{٥}{٦}\times\frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس} = \frac{٥}{٦}\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\,\text{ءس} = \frac{٥}{٦}\times \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث} = \frac{٥}{٦}\times\text{لو}_{\text{هـ}}|٣\text{س}^{٢}-١| + \text{ث} =$$

ب) $\int \frac{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} = \int \text{د}'(\text{س})(\text{د}(\text{س}))^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$$= \frac{٢}{٣}(\text{د}(\text{س}))^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{ث} \quad ، \text{س} > ٠$$

حاول أن تحل ٥ صـ ١٠١

أوجد : أ) $\int \frac{٥\text{س}}{٣\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$ ب) $\int \frac{١}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}\,\text{ءس}$

أ) $\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}+٣}\,\text{ءس} = \int \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{٢\text{س}}| + \text{ث} = ٢\text{س} + \text{ث}$

ب) $\int \frac{١}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{-٢}\,\text{ءس} = \frac{-١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{ث}$

تفكير ناقد: باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

① $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} \, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$ ، $\text{د}(\text{س}) \neq 0$

② $\int \text{د}'(\text{س}) (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}} \, \text{ءس} = \frac{1}{\text{ن}+1} (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \neq -1$

تدريب محلول: أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

(١) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}+1} \, \text{ءس}$ (٢) $\int \text{س}^2 (\text{س}-1)^4 \, \text{ءس}$

(٣) $\int \text{س}^3 (\text{س}^2 - 2)^5 \, \text{ءس}$ (٤) $\int 3\text{س}^2 \sqrt{\text{س}^3+1} \, \text{ءس}$

(١) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}+1} \, \text{ءس}$ **الحل**

بفرض $\text{ع} = \text{س} + 1$ ∴ $\text{س} = \text{ع} - 1$ ، $\text{ءس} = \text{ءع}$

$\therefore \int \text{س}\sqrt{\text{س}+1} \, \text{ءس} = \int (\text{ع}-1)\, \text{ع}^{\frac{1}{2}} \, \text{ءع} = \int (\text{ع}^{\frac{3}{2}} - \text{ع}^{\frac{1}{2}}) \, \text{ءع}$

$= \frac{2}{5} \text{ع}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \text{ع}^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{5} (\text{س}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{15} (\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} (3\text{س} - 2) + \text{ث}$

---

(٢) $\int \text{س}^2 (\text{س}-1)^4 \, \text{ءس}$

الحل

بفرض $\text{ع} = \text{س} - 1$ ∴ $\text{س} = \text{ع} + 1$ ، $\text{ءس} = \text{ءع}$

$\therefore \int \text{س}^2 (\text{س}-1)^4 \, \text{ءس} = \int \text{ع}^4 (\text{ع}+1)^2 \, \text{ءع} = \int (\text{ع}^6 + 2\text{ع}^5 + \text{ع}^4) \, \text{ءع}$

$= \frac{1}{7}\text{ع}^7 + \frac{1}{3}\text{ع}^6 + \frac{1}{5}\text{ع}^5 + \text{ث} = \frac{1}{7}(\text{س}-1)^7 + \frac{1}{3}(\text{س}-1)^6 + \frac{1}{5}(\text{س}-1)^5 + \text{ث}$

---

(٣) $\int \text{س}^3 (\text{س}^2 - 2)^5 \, \text{ءس}$ **بفرض** $\text{ع} = \text{س}^2 - 2$ ∴ $\text{س}^2 = \text{ع} + 2$ ، $2\text{س} \, \text{ءس} = \text{ءع}$

$\therefore \frac{1}{2} \int \text{س}^2 (\text{س}^2 - 2)^5 \, 2\text{س} \, \text{ءس} = \frac{1}{2} \int (\text{ع}+2)\, \text{ع}^5 \, \text{ءع} = \frac{1}{2} \int (\text{ع}^6 + 2\text{ع}^5) \, \text{ءع}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\text{ع}^7 + \frac{1}{6}\text{ع}^6 + \text{ث} = \frac{1}{42}\text{ع}^6 (3\text{ع} + 7) + \text{ث} =$ اكمل الحل ....

---

(٤) $\int 3\text{س}^2 \sqrt{\text{س}^3+1} \, \text{ءس} = \int (\text{س}^3 + 1)^{\frac{1}{2}} \times 3\text{س}^2 \, \text{ءس} = \frac{2}{3} (\text{س}^3+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

التكامل بالتجزئ

التكامل بالتجزئ *Integration by Parts* :

إذا كانت ص ، ع دالتين فى المتغير س وقابلتين للإشتقاق، فإن:

ء/ءس (ص ع) = ص ءع/ءس + ع ءص/ءس   **بتكامل الطرفين بالنسبة لـ س**

∫ ء/ءس (ص ع) ءس = ∫ ص ءع/ءس ءس + ∫ ع ءص/ءس ءس ⇐ ∫ ء(ص ع) = ∫ ص ءع + ∫ ع ءص

⇐ (ص ع) = ∫ ص ءع + ∫ ع ءص ⇐ **[∫ ص ءع = (ص ع) − ∫ ع ءص]**

تسمى المعادلة السابقة بقاعدة التكامل بالتجزئ ، وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى

مثال٦ ص ١٠٢ أوجد

(أ) ∫ س هـ^{س} ء س   **الحل**

بفرض ص = س ، ءع = هـ^{س} ء س

ءص = ء س ، ع = ∫ هـ^{س} ء س = هـ^{س}

⇐ ∫ س هـ^{س} ء س = س هـ^{س} − ∫ هـ^{س} ء س = س هـ^{س} − هـ^{س} + ث = هـ^{س} (س − ١) + ث

(ب) ∫ س^{٢} هـ^{س} ء س   **الحل**

بفرض ص = س^{٢} ، ءع = هـ^{س} ء س

ءص = ٢ س ء س ، ع = ∫ هـ^{س} ء س = هـ^{س}

⇐ ∫ س^{٢} هـ^{س} ء س = س^{٢} هـ^{س} − ∫ ٢ س هـ^{س} ء س

= س^{٢} هـ^{س} − ٢ س هـ^{س} + ٢ هـ^{س} + ث = هـ^{س} [س^{٢} + ٢ س + ٢] + ث (راجع السؤال السابق)

حاول أن تحل ٦ ص ١٠٢ أوجد (أ) ∫ س هـ$^{-٢س}$ ء س   (ب) ∫ س^{٢} هـ$^{س+٣}$ ء س

(أ) ∫ س هـ$^{-٢س}$ ء س   **الحل**

بفرض ص = س ، ءع = هـ$^{-٢س}$ ء س

ءص = ء س ، ع = ∫ هـ$^{-٢س}$ ء س = $\frac{-١}{٢}$ هـ$^{-٢س}$

⇐ ∫ س هـ$^{-٢س}$ ء س = $\frac{-١}{٢}$ س × هـ$^{-٢س}$ − ∫ $\frac{-١}{٢}$ هـ$^{-٢س}$ ء س

$$= \frac{-1}{2}\,\text{س}\,\text{هـ}^{-2\text{س}} - \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{-2\text{س}} + \text{ث}$$

(ب) $\int \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+3}\,\text{ء}\text{س}$

بفرض $\text{ص} = \text{س}^2$ ، $\text{ء}\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}+3}\,\text{ء}\text{س}$

$\text{ء}\text{ص} = 2\,\text{س}\,\text{ء}\text{س}$ ، $\text{ع} = \int \text{هـ}^{\text{س}+3}\,\text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}+3}$

$\Leftarrow \int \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+3}\,\text{ء}\text{س} = \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+3} - \int 2\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+3}\,\text{ء}\text{س}$

$= \text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}+3} - 2\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}+3} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}+3} + \text{ث} = \text{هـ}^{\text{س}+3}\left[\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 2\right] + \text{ث}$

من أجل حل أفضل ندقق في اختيار ص ، ءع بحيث أن

(١) مشتقة ص تخفضها (أبسط من ص) (٢) ءع يكون تكاملها أسهل

مثال ٧ ص ١٠٣ أوجد : (أ) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} =$ (ب) $\int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} =$

(أ) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} =$

بفرض $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{ء}\text{ع} = \text{ء}\text{س}$

$\text{ء}\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{ء}\text{س}$ ، $\text{ع} = \text{س}$

(أ) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \text{ء}\text{س} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{ث}$

(ب) $\int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} =$

بفرض $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{ء}\text{ع} = \text{س}\,\text{ء}\text{س}$

$\text{ء}\text{ص} = \text{ء}\text{س}$ ، $\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{س}^2$

(ب) $\int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{س}^2\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \frac{1}{2}\,\text{س}^2 \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{س}^2\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \frac{1}{4}\,\text{س}^2 + \text{ث}$

حاول أن تحل ٧ ص ١٠٣

أوجد : (أ) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\,\text{ء}\text{س} =$ (ب) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\frac{\text{ء}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} =$

(أ) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\,\text{ء}\text{س} =$

بفرض $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$ ، $\text{ء}\text{ع} = \text{ء}\text{س}$

$\text{ء}\text{ص} = \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{ء}\text{س}$ ، $\text{ع} = \text{س}$

① $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)\,\text{ءس} = \text{س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) - \int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$ ولكن $\int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس} =$

بفرض (ص = س + ١) س = ص − ١ ، ءس = ءص

$= \int \frac{\text{ص}-١}{\text{ص}}\,\text{ءص} = \int \left(١ - \frac{١}{\text{ص}}\right)\text{ءص} = \text{ص} - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ث} = (\text{س}+١) - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$

① $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)\,\text{ءس} = \text{س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) - (\text{س}+١) + \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{ث}$

حل آخر مختصر [(بفرض (ص = س + ١) من البداية] أكمل الحل

ب $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}} =$

بفرض ص = لـوهـ س ، $\text{ءع} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = ٢\sqrt{\text{س}}$

ب $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}} = ٢\sqrt{\text{س}}\;\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\int \sqrt{\text{س}}\;\frac{\text{ءس}}{\text{س}} = ٢\sqrt{\text{س}}\;\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$

$٢\sqrt{\text{س}}\;\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢ \times ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ث} = ٢\sqrt{\text{س}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\right) + \text{ث}$

مثال ٨ ص ١٠٣

① $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$ ب $\int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{ءس}$

① $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$

بفرض ص = س $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءع} = (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)$ ، $\text{ع} = \int (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس} = -(\text{س}+١)^{-١}$

① $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = -\text{س هـ}^{\text{س}} \times (\text{س}+١)^{-١} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= -\text{س هـ}^{\text{س}} \times (\text{س}+١)^{-١} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{ث}$

هذا تذكر : من أجل حل أفضل ندقق في اختيار ص ، ءع بحيث أن

(١) مشتقة ص تخفضها (أبسط من ص)   (٢) ءع يكون تكاملها أسهل

ب $\int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{ءس}$

بفرض ص = ٤ س ، $ءع = (٢س + ١)^{\frac{-١}{٣}} ءس$

$ءص = ٤ ءس$ ، $ع = \int (٢س + ١)^{\frac{-١}{٣}}$ ، $ءس = \frac{٣}{-}(٢س + ١)^{\frac{٢}{٣}}$

(ب) $\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س + ١}} ءس$

أكمل الحل

تفكير ناقد : هل يمكنك ايجاد تكامل (ب) $\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}} ءس$ بطريقة التكامل بالتعويض ؟

بفرض ص = ٢س + ١ ، $س = \frac{ص - ١}{٢} \Leftarrow$ ، $ءس = ءص$ بالتعويض

(ب) $\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}} ءس = \int \frac{\cancel{٤}(ص - ١)}{\cancel{٢}ص^{\frac{١}{٣}}} \frac{ءص}{\cancel{٢}} = \int \left(ص^{\frac{٢}{٣}} - ص^{\frac{-١}{٣}}\right) ءص = \frac{٣}{٥} ص^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٢} ص^{\frac{٢}{٣}} + ث$

$= \frac{٣}{١٠}(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} \left(٢(٢س+١) - ٥\right) + ث = \frac{٣}{١٠}(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}}(٤س - ٧) + ث$

حاول أن تحل ٨ ص ١٠٤

(أ) $\int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} ءس$ (ب) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س + ٣}} ءس$

(أ) $\int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} ءس$

بفرض ص = ٣ س + ٥ ، $ءع = هـ^{-٢س} ءس$

$ءص = ٣ ءس$ ، $ع = \int هـ^{-٢س} ءس = \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$= (٣س + ٥) \times \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} + \int \frac{٣ هـ^{-٢س}}{٢} ءس = (٣س + ٥) \times \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} - \frac{٣ هـ^{-٢س}}{٤} +$ ث

$= \frac{-١}{٤هـ^{٢س}}(٦س + ٧) +$ ث

(ب) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س + ٣}} ءس$ (التعويض) (حاول الحل باستخدام التجزئ)

بفرض ص = ٢س + ٣ ، $س = \frac{ص - ٣}{٢} \Leftarrow$ ، $٢ءس = ءص$ بالتعويض

ب) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{٢س}+١}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{ص}-٣)}{\sqrt{\text{ص}}}\,\frac{\text{ءص}}{٢} = \int \left(\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} - \text{٣ص}^{-\frac{١}{٣}}\right)\text{ءص} = \frac{٣}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٩}{٢}\text{ص}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{١٠}(\text{٢س}+٣)^{\frac{٢}{٣}}\left(٢(\text{٢س}+٣)-١٥\right)+\text{ث} = \frac{٣}{١٠}(\text{٢س}+١)^{\frac{٢}{٣}}(\text{٤س}-٩)+\text{ث}$

تمارين ٤ – ١ اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة (تم حلها)

(١) $\int \text{س}\,(\text{س}^٢+٣)^٥\,\text{ءس}$ يساوي

(أ) $\frac{١}{٦}(\text{س}^٢+٣)^٦+\text{ث}$ (ب) $\frac{١}{١٢}(\text{س}^٢+٣)^٦+\text{ث}$ (جـ) $\frac{١}{٤}(\text{س}^٢+٣)^٤+\text{ث}$ (د) $\frac{١}{٨}(\text{س}^٢+٣)^٤+\text{ث}$

(٢) إذا كان $\int (\text{٢س}+٣)\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$ فإن ص ع يساوى

(أ) $\text{٢س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})$ (ب) $(\text{٢س}+٣)\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})$ (جـ) $\frac{١}{٢}(\text{٢س}+٣)\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})$ (د) $\text{س}(\text{س}+٣)\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})$

(٣) إذا كان $\int (\text{٢س}-١)\,\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}\,\text{ءس} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$ فإن $\int \text{ع ءص}$ يساوى

(أ) $\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}+\text{ث}$ (ب) $\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}+\text{ث}$ (جـ) $-\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}+\text{ث}$ (د) $-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}+\text{ث}$

باستخدام التعويض المناسب, أوجد التكاملات الآتية:

(٤) $\int \text{س}(\text{س}-٢)^٤\,\text{ءس}$ (٥) $\int \text{س}^٢(\text{س}-٢)^٣\,\text{ءس}$ (٦) $\int \text{س}^٣(\text{س}^٢-١)^٥\,\text{ءس}$

(٧) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+٤}\,\text{ءس}$ (٨) $\int (\text{س}^٢-١)\sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$ (٩) $\int \text{س}^٣(\text{س}^٢+٣)^٤\,\text{ءس}$

(١٠) $\int \frac{\text{س}}{\text{٣س}^٢+٢}\,\text{ءس}$ (١١) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$ (١٢) $\int \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}^٢}{\sqrt{\text{٢س}-١}}\,\text{ءس}$ (١٤) $\int \text{س هـ}^{-\text{س}^٢}\,\text{ءس}$ (١٥) $\int \frac{\text{هـ}^{-\text{س}}-١}{\text{هـ}^{-\text{س}}+\text{س}}\,\text{ءس}$

(١٦) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{٥س})\,\frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ (١٧) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\right)^٣\frac{\text{ءس}}{\text{س}}$ (١٨) $\int \frac{١}{\text{س لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})}\,\text{ءس}$

باستخدام التجزئ المناسب, أوجد التكاملات الآتية:

(١٩) $\int \text{٤س هـ}^{\text{٢س}}\,\text{ءس}$ (٢٠) $\int \text{س}^٣\,\text{هـ}^{\text{س}^٢}\,\text{ءس}$ (٢١) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{ءس}$

(٢٢) $\int \text{س}^٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\,\text{ءس}$ (٢٣) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢)\,\text{ءس}$ (٢٤) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\right)^٢\text{ءس}$

(٢٥) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\,\frac{\text{ءس}}{\text{س}^٣}$ (٢٦) $\int (\text{س}+١)^٢\,\text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{ءس}$ (٢٧) $\int \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س})\right)^٢\text{ءس}$

أجب عن ما يأتي:

(٢٨) أوجد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة أ (٢،٣)، وميل العمودي عليه عند أي نقطة (س،ص) هو ٣ − س.

(٢٩) إذا كان ميل المماس لمنحني عند نقطة (س،ص) واقعة عليه هو $س\sqrt{س+١}$، أوجد معادلة المنحني علما بأن المنحني يمر بالنقطة $(٠، \frac{١١}{١٥})$.

(٣٠) أوجد معادلة المنحني ص = د (س) إذا كان $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = أس + ب$ حيث أ، ب ثابتان وللمنحني نقطة انقلاب عند النقطة (٠،٢) وقيمة صغري محلية عند النقطة (١،٠) ثم أوجد القيمة العظمي المحلية لهذا المنحني.

حل تمارين (٤ − ١)

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\int س (س^٢ + ٣)^٥ ءس = \frac{١}{٢} \int ٢س (س^٢ + ٣)^٥ ءس = \frac{١}{١٢} (س^٢ + ٣)^٦ + ث$

(أ) $\frac{١}{٦}(س^٢ + ٣)^٦ + ث$ (ب) $\boxed{\frac{١}{١٢}(س^٢ + ٣)^٦ + ث}$ (جـ) $\frac{١}{٤}(س^٢ + ٣)^٤ + ث$ (د) $\frac{١}{٨}(س^٢ + ٣)^٤ + ث$

(٢) إذا كان $\int (٢س + ٣) \text{لو}_هـ(س) ءس = ص ع − \int ع ءص$ فإن ص ع يساوي

نفرض $ص = \text{لو}_هـ(س) \Leftarrow ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، $ءع = ٢س + ٣ ءس \Leftarrow ع = س^٢ + ٣س$

(أ) $٢س \text{لو}_هـ(س)$ (ب) $(٢س+٣) \text{لو}_هـ(س)$ (جـ) $\frac{١}{٢}(٢س+٣) \text{لو}_هـ(س)$ (د) $س(س+٣) \text{لو}_هـ(س)$

(٣) إذا كان $\int (٢س − ١) هـ^{٢س+٣} ءس = ص ع − \int ع ءص$ فإن $\int ع ءص$ يساوي

نفرض $ص = ٢س − ١ \Leftarrow ءص = ٢ ءس$ ، $ءع = هـ^{٢س+٣} ءس \Leftarrow ع = \frac{هـ^{٢س+٣}}{٢}$

(أ) $هـ^{٢س+٣} + ث$ (ب) $\frac{١}{٢} هـ^{٢س+٣} + ث$ (جـ) $− هـ^{٢س+٣} + ث$ (د) $− \frac{١}{٢} هـ^{٢س+٣} + ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الاتية :

④ $\int س (س − ٢)^٤ ءس$ **نفرض** ع = س − ٢ ∴ س = ع + ٢ ، ءس = ءع

$\therefore \int س (س − ٢)^٤ ءس = \int (ع + ٢) ع^٤ ءع = \int (ع^٥ + ٢ع^٤) ءع$

$= \frac{١}{٦} ع^٦ + \frac{٢}{٥} ع^٥ + ث = \frac{١}{٣٠} ع^٥ (٥ع + ٢) + ث = \frac{١}{٣٠} (س − ٢)^٥ (٥س − ٨) + ث$

---

⑤ $\int س^٢ (س − ٢)^٣ ءس$ **نفرض** ع = س − ٢ ∴ س = ع + ٢ ، ءس = ءع

$\therefore \int س^٢ (س − ٢)^٣ ءس = \int (ع + ٢)^٢ ع^٣ ءع = \int (ع^٥ + ٤ع^٤ + ٤ع^٣) ءع$

$= \frac{١}{٦} ع^٦ + \frac{٤}{٥} ع^٥ + ع^٤ + ث = \frac{١}{٣٠} ع^٤ (٥ع^٢ + ٢٤ع + ٣٠) + ث =$

$= \frac{١}{٣٠}(\text{س}-٢)^{٤}\left(٥(\text{س}-٢)^{٢} + ٢٤(\text{س}-٢) + ٣٠\right) + \text{ث} = \frac{١}{٣٠}(\text{س}-٢)^{٤}(٥\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٢) + \text{ث}$

---

(٦) $\int \text{س}^{٣}\left(\text{س}^{٢}-١\right)^{٥} \text{ءس}$

الحل:

بفرض $\text{س}^{٢}-١ = \text{ص}$ $\therefore ٢\text{س ءس} = \text{ءص}$ $\therefore \text{س}^{٢} = \text{ص}+١ \Leftarrow \text{س}^{٣} = \text{س}(\text{ص}+١)$

$\therefore \int \text{س}^{٣}\left(\text{س}^{٢}-١\right)^{٥}\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٢}\left(\text{س}^{٢}-١\right)^{٥} \times ٢\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}+١)\,\text{ص}^{٥}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\int\left(\text{ص}^{٦}+\text{ص}^{٥}\right)\text{ءص} = \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٧}\text{ص}^{٧}+\frac{١}{٦}\text{ص}^{٦}\right]+\text{ث}$

$= \frac{١}{٨٤}\text{ص}^{٦}[٦\text{ص}+٧]+\text{ث} = \frac{١}{٨٤}\left(\text{س}^{٢}-١\right)^{٦}\left[٦\text{س}^{٢}-٦+٧\right]+\text{ث}$

$\therefore \int \text{س}^{٣}\left(\text{س}^{٢}-٢\right)^{٥}\text{ءس} = \frac{١}{٨٤}\left(\text{س}^{٢}-١\right)^{٦}\left(٦\text{س}^{٢}+١\right)+\text{ث}$

---

⑦ $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+٤}\;\text{ءس}$ **بفرض** $\text{ع} = \text{س}+٤$ $\therefore \text{س} = \text{ع}-٤$ ، $\text{ءس} = \text{ءع}$

$\therefore \int \text{س}\sqrt{\text{س}+٤}\;\text{ءس} = \int(\text{ع}-٤)\,\text{ع}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءع} = \int\left(\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}-٤\text{ع}^{\frac{١}{٢}}\right)\text{ءع}$

$= \frac{٢}{٥}\text{ع}^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٨}{٣}\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}+\text{ث} = \frac{٢}{٥}(\text{س}+٤)^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٨}{٣}(\text{س}+٤)^{\frac{٣}{٢}}+\text{ث} =$

$= \frac{٢}{١٥}(\text{س}+٤)^{\frac{٣}{٢}}\left[٣(\text{س}+٤)-٤\times٥\right]+\text{ث} = \frac{٢}{١٥}(\text{س}+٤)^{\frac{٣}{٢}}\left[٣(\text{س})-٨\right]+\text{ث}$

---

⑧ $\int(\text{س}^{٢}-١)\sqrt{\text{س}+١}\;\text{ءس}$

نلاحظ ان الدالتين المضروبين مختلفتان فى الدرجة (الثانية × الجذر التربيعى للاولى)

لهذا نفرض $(\text{س}+١) = \text{ص}$ **ومنها** $\text{س} = \text{ص}-١$ **ومنها** $(\text{س}^{٢}-١) = (\text{ص}-١)^{٢}-١$

$\text{ءس} = \text{ءص}$ **بالتعويض فى التكامل**

$\int\left[(\text{ص}-١)^{٢}-١\right]\sqrt{\text{ص}}\;\text{ءص} = \int\left[\text{ص}^{٢+\frac{١}{٢}}-٢\text{ص}^{١+\frac{١}{٢}}\right]\text{ءص} =$

$= \frac{٢}{٧}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}+\frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}+\text{ث} = \frac{٢}{٣٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}}(٥\text{ص}-٢\times٧)+\text{ث} = \frac{٢}{٣٥}(\text{س}+١)^{\frac{٥}{٢}}(٥\text{س}-٩)+\text{ث}$

---

(٩) $\int \text{س}^{٥}\left(\text{س}^{٢}+٣\right)^{٤}\text{ءس}$

الحل:

بفرض $\text{س}^{٢}+٣ = \text{ص}$ $\therefore ٢\text{س ءس} = \text{ءص}$ $\therefore \text{س}^{٢} = \text{ص}-٣ \Leftarrow \text{س}^{٥} = \text{س}(\text{ص}-٣)^{٢}$

$\therefore \int \text{س}^{٥}\left(\text{س}^{٢}+٣\right)^{٤}\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{س}^{٤}\left(\text{س}^{٢}+٣\right)^{٤}\times ٢\text{س ءس}$

$$= \frac{١}{٢}\int (ص^{٦} - ٦ص^{٥} + ٩ص^{٤})\,ءص = \frac{١}{٢}\int (ص-٣)^{٢}\,ص^{٤}\,ءص = \frac{١}{٢}\int (ص^{٢} - ٦ص + ٩)\,ص^{٤}\,ءص$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٧}ص^{٧} + \frac{\cancel{٦}}{\cancel{٦}}ص^{٦} + \frac{٩}{٥}ص^{٥}\right] + ث = \frac{١}{٧٠}ص^{٥}\left[٥ص^{٢} + ٣٥ص + ٦٣\right] + ث$$

$$= \frac{١}{٧٠}(س^{٢}+٣)^{٥}\left[٥(س^{٢}+٣)^{٢} + ٣٥(س^{٢}+٣) + ٦٣\right] + ث$$

$$\therefore \int س^{٥}(س^{٢}+٣)^{٤}\,ءس = \frac{١}{٧٠}(س^{٢}+٣)^{٥}\left[٥س^{٤} - س^{٢} + ٣\right] + ث$$

---

(١٠) $\int \frac{س}{٣س^{٢}+٢}\,ءس = \frac{١}{٦}\int \frac{٦س}{٣س^{٢}+٢}\,ءس = \frac{١}{٦}لو|٣س^{٢}+٢| + ث$

---

(١١) $\int \frac{س}{س+١}\,ءس = \int \frac{ص+١}{ص}\,ءص = \int\left(١ - \frac{١}{ص}\right)ءص = ص - لو_{هـ}|ص| + ث = (س+١) - لو_{هـ}|س+١| + ث$

---

(١٢) $\int \frac{س+١}{\sqrt{س-١}}\,ءس =$ بفرض $ص = س - ١ \Leftarrow ءص = ءس \Leftarrow س = ص + ١ \Leftarrow س+١ = ص+٢$

---

(١٣) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ءس$

بفرض $٢س - ١ = ص \Leftarrow س = \frac{ص+١}{٢} \Leftarrow س^{٢} = \frac{١}{٤}(ص+١)^{٢} \quad \therefore ٢ءس = ءص$

$$\therefore \int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٢س-١}}\,ءس = \int \frac{١}{٤}(ص+١)^{٢} \times ص^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{٢}ءص = \frac{١}{٨}\int \left(ص^{\frac{٣}{٢}} + ٢ص^{\frac{١}{٢}} + ص^{-\frac{١}{٢}}\right)ءص =$$

$$= \frac{١}{٨}\left(\frac{٥}{٢}ص^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢\times٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}} + ٢ص^{\frac{١}{٢}}\right) + ث = \frac{٢ص^{\frac{١}{٢}}}{٨\times١٥}(٣ص^{٢} + ١٠ص + ١٥) + ث =$$

$$= \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{٦٠}(١٢س^{٢} - ١٢س + ٣ + ٢٠س - ١٠ + ١٥) + ث = \frac{\sqrt{٢س-١}}{٦٠}(١٢س^{٢} + ٨س + ٨) + ث =$$

$$= \frac{\sqrt{٢س-١}}{١٥}(٣س^{٢} + ٢س + ٢) + ث$$

---

(١٤) $\int س\,هـ^{-س^{٢}}\,ءس = -\frac{١}{٢}\int -٢س\,هـ^{-س^{٢}}\,ءس = -\frac{١}{٢}هـ^{-س^{٢}} + ث$

---

(١٥) $\int \frac{هـ^{-س}-١}{هـ^{-س}+س}\,ءس = -\int \frac{-هـ^{-س}+١}{هـ^{-س}+س}\,ءس = -لو_{هـ}|هـ^{-س}+س| + ث = لو_{هـ}\frac{١}{|هـ^{-س}+س|} + ث$

---

(١٦) $\int \text{لـوهـ}(\text{٥س})\,\frac{\text{دس}}{\text{س}} = \int \text{لـوهـ}(\text{٥س})\,\frac{٥}{\text{٥س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\left(\text{لـوهـ}(\text{٥س})\right)^{٢} + \text{ث}$

(١٧) $\int \left(\text{لـوهـ}(\text{س})\right)^{٣}\frac{\text{دس}}{\text{س}} = \int \frac{١}{\text{س}}\left(\text{لـوهـ}(\text{س})\right)^{٣}\text{دس} = \frac{١}{٤}\left(\text{لـوهـ}(\text{س})\right)^{٤} + \text{ث}$

(١٨) $\int \frac{١}{\text{لـوهـ}(\text{س})}\,\frac{\text{دس}}{\text{س}} = \int \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لـوهـ}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لـوهـ}\left|\text{لـوهـ}(\text{س})\right| + \text{ث}$

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الاتية :

(١٩) $\int \text{٤س}\,\text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{دس}$

بفرض $\text{ص} = \text{٤س}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{ع} = \int \text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{دس} = \frac{١}{}\,\text{هـ}^{\text{٢س}}$

$\Leftarrow \int \text{٤س}\,\text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{دس} = \text{٤س} \times \frac{١}{}\,\text{هـ}^{\text{٢س}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{٢س}}\,\text{دس} = \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{هـ}^{\text{٢س}}$

(٢٠) $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

بفرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{دع} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{٢س}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \int \frac{١}{} \times \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{دس} = \frac{١}{}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

$\Leftarrow = \frac{١}{}\,\text{س}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{}\int \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{دس} = \frac{١}{}\,\text{س}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{دس}$

بفرض $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{دس}$ ، $\text{ع} = -\int -\frac{١}{} \times -٢\,\text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس} = -\frac{١}{}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}}$

$\int \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس} = -\frac{١}{}\,\text{س} \times \text{هـ}^{-\text{٢س}} + \frac{١}{}\int \text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس} = -\frac{١}{}\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{١}{}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{ث}$

(٢٢) $\int \text{س}^{٣}\,\text{لـوهـ}(\text{س})\,\text{دس}$

بفرض $\text{ص} = \text{لـوهـ}(\text{س})$ ، $\text{دع} = \text{س}^{٣}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{}\,\text{س}^{٤}$

= $\frac{١}{}$ س^{٤} × لـو$_{هـ}$(س) − ∫ $\frac{١}{}$ س^{٣} ءس = $\frac{١}{}$ س^{٤} لـو$_{هـ}$(س) − $\frac{١}{}$ · $\frac{١}{}$ س^{٤} + ث

---

(٢٣) ∫ لـو$_{هـ}$(س^{٢}) ءس

بفرض ص = لـو$_{هـ}$(س^{٢}) ، ءع = ءس

ءص = $\frac{٢}{س}$ ءس ، ع = س

= س لـو$_{هـ}$(س^{٢}) − ∫ ٢ ءس = س لـو$_{هـ}$(س^{٢}) − ٢س + ث

---

(٢٤) ∫ (لـو$_{هـ}$(س))^{٢} ءس

بفرض ص = (لـو$_{هـ}$(س))^{٢} ، ءع = ءس

ءص = $\frac{٢}{س}$ لـو$_{هـ}$ س ءس ، ع = س

(٢٤) ∫ (لـو$_{هـ}$(س))^{٢} ءس = س (لـو$_{هـ}$ س)^{٢} − ٢ ∫ لـو$_{هـ}$ س ءس =

بفرض ص = لـو$_{هـ}$ س ، ءع = ءس

ءص = $\frac{١}{س}$ ءس ، ع = س

(٢٤) ∫ (لـو$_{هـ}$(س))^{٢} ءس = س (لـو$_{هـ}$ س)^{٢} −٢س لـو$_{هـ}$ س + ∫ ٢ ءس =

= س (لـو$_{هـ}$ س)^{٢} −٢س لـو$_{هـ}$ س + ٢س + ث

---

(٢٥) ∫ لـو$_{هـ}$(س) $\frac{ءس}{س^{٣}}$

بفرض ص = س$^{-٢}$ ، ءع = $\frac{١}{س}$ لـو$_{هـ}$ س ءس

ءص = −٢س$^{-١}$ ءس ، ع = ∫ لـو$_{هـ}$ س $\frac{ءس}{س}$ = $\frac{١}{٢}$(لـو$_{هـ}$ س)^{٢}

= $\frac{١}{٢س^{٢}}$(لـو$_{هـ}$ س)^{٢} + ∫ (لـو$_{هـ}$ س)^{٢} $\frac{ءس}{س}$ = $\frac{١}{٢س^{٢}}$(لـو$_{هـ}$ س)^{٢} + $\frac{١}{٣}$(لـو$_{هـ}$ س)^{٣} + ث

---

(٢٦) ∫ (س + ١)^{٢} هـ^{٢س} ءس

بفرض ص = (س + ١)^{٢} ، ءع = هـ^{٢س} ءس

ءص = ٢(س + ١) ءس ، ع = ∫ هـ^{٢س} ءس = $\frac{١}{}$ هـ^{٢س}

$\Leftarrow$ (٢٦) $\int (س+١)^٢ هـ^{٢س} ءس = (س+١)^٢ \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} - \boxed{\int س هـ^{٢س} ءس} - \int هـ^{٢س} ءس =$

بفرض $ص = س$ ، $ءع = هـ^{٢س} ءس$

$ءص = ءس$ ، $ع = \int هـ^{٢س} ءس = \frac{١}{٢} هـ^{٢س}$

(٢٦) $\int (س+١)^٢ هـ^{٢س} ءس = (س+١)^٢ \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} - \frac{١}{٢} س هـ^{٢س} + \frac{١}{٢} \int هـ^{٢س} ءس - \frac{١}{٢} هـ^{٢س} =$

(٢٦) $\int (س+١)^٢ هـ^{٢س} ءس = \frac{١}{٢} (س+١)^٢ هـ^{٢س} - \frac{١}{٢} س هـ^{٢س} + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} - \frac{١}{٢} هـ^{٢س} =$

$= \frac{١}{٢} (س+١)^٢ هـ^{٢س} - \frac{١}{٢} س هـ^{٢س} - \frac{١}{٤} هـ^{٢س} = \frac{١}{٤} هـ^{٢س} \left(٢س^٢ + ٢س + ١\right) + ث$

---

(٢٧) $\int س \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ ءس$

بفرض $ص = \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢$ ، $ءع = س ءس$

$ءص = \frac{٢}{س} لو_{هـ} س \; ءس$ ، $ع = \frac{١}{٢} س^٢$

(٢٧) $\int س \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ ءس = \frac{١}{٢} س^٢ \times \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ - \int س لو_{هـ} س \; ءس =$

بفرض $ص = لو_{هـ} س$ ، $ءع = س \; ءس$

$ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، $ع = \frac{١}{٢} س^٢$

$= \frac{١}{٢} س^٢ \times \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ - \frac{١}{٢} س^٢ لو_{هـ} س + \frac{١}{٢} \int س \; ءس =$

$= \frac{١}{٢} س^٢ \left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ - \frac{١}{٢} س^٢ لو_{هـ} س + \frac{١}{٤} س^٢ + ث = \frac{١}{٤} س^٢ \left(٢\left(لو_{هـ}(س)\right)^٢ - ٢لو_{هـ} س + ١\right) + ث$

تكاملات الدوال المثلثية

١	∫ جا س ءس = − جتا س + ث	٧	∫ جا م س ءس = − $\frac{1}{م}$ جتا م س + ث
٢	∫ جتا س ءس = جا س + ث	٨	∫ جا^2 س ءس = $\frac{1}{2}$ ∫ (١ − جتا ٢س) ءس
٣	∫ قا^2 س ءس = ظا س + ث	٩	∫ جتا^2 س ءس = $\frac{1}{2}$ ∫ (١ + جتا ٢س) ءس
٤	∫ قا س ظا س = قا س + ث	١٠	∫ ظا^2 س ءس = ∫ (قا^{2}س − ١) ءس
٥	∫ قتا^2 س ءس = − ظتا س + ث	١١	∫ ظتا^{2}س ءس = ∫ (قتا^{2}س − ١) ءس
٦	∫ قتا س ظتا س ءس = − قتا س + ث	١٢	∫ دَ(س) جتا د(س) ءس = جا د(س) + ث
١٣	∫ جا^ن د(س) جتاد(س) دَ(س) ءس = $\frac{1}{ن+1}$ جا$^{ن+1}$ د(س) + ث ، ن ≠ −١		

تكامل نسبة مثلثية زاويتها دالة :

ولتعميم النتائج السابقة أو جميع الصور القياسية للتكامل نلاحظ أنه بإضافة ثابت إلى المتغير المستقل س لا يؤثر على صيغة التكامل ، كما أن ضرب س فى المعامل فإن التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

∫ جا م س ءس = − $\frac{1}{م}$ جتا م س + ث ، **وتعمم لجميع الدوال**

١٣	∫ جا^ن د(س) جتاد(س) دَ(س) ءس = $\frac{1}{ن+1}$ جا$^{ن+1}$ د(س) + ث ، ن ≠ −١

مثال ١) صـ ١٠٧

∫ (جتا س + جا س) ءس = جاس – جتا س + ث

∫ قا س (قا س + ظا س) ءس = ∫ (قا^٢ س + قا س ظا س) ءس = ظا س + قا س + ث

حاول أن تحل (١) صـ ١٠٧ أوجد :

(أ) ∫ (جاس + قا^٢ س) ء س = – جتا س + ظا س + ث

(ب) ∫ قا س (جتاس + ظا س) ء س = ∫ ١ + قا س ظا س) ء س = س + قا س + ث

(جـ) ∫ قتا س (ظتاس + قتا س) ء س = ∫ قتا س ظتاس + قتا^٢ س) ء س = – قتا س – ظتا س + ث

(ء) ∫ $\frac{\text{جتاس}}{١-\text{جتا}^٢ \text{س}}$ ء س = ∫ $\frac{\text{جتاس}}{١-\text{جتا}^٢ \text{س}}$ ء س = ∫ ظتاس قتا س ء س = – قتا س + ث

تمارين

١	∫ (جتا س + جا س) ء س =	١١	∫ (٣س^٢ + جتا ٣س) ءس = س^٣ – ١/٣ جا ٣س + ث
٢	∫ (٥جتا س + ظا س) ء س =	١٢	∫ (جا^٢ س + جتا^٢ س) ^٦ ءس = ∫ ءس = س = ث
٣	∫ (جاس + ٤√س – ٥) ء س =	١٣	∫ (ظا^٢ س + جا^٢ س + جتا^٢ س) ء س =
٤	∫ (١ + ٥) ء س =	١٤	∫ جا^٢ ٣س ء س =
٥	∫ جتا^٢ (٤س – ٣) ء س =	١٥	∫ ظا س ءس
٦	∫ (جاس + جتاس)^٢ ء س =	١٦	∫ (١ + √جتا س)^٢ جا س ء س =

٧	∫(قاس+ظاس)^{٢}ء س =	١٧	∫ جا . ب/ن ء س =
٨	∫ قا(٣س+٤) ظا(٣س +٤)ء س =	١٨	∫ جتا^{٧}س جا س ء س =
٩	∫ جا^{٥} ٤ س جتا ٤س ء س =	١٩	∫ ظا^{٩} س قا^{٢} س ء س =
١٠	∫ (ظا س – ٧)^{٤} قا^{٢}س ء س =	٢٠	∫ س ظا^{٦}(٣س^{٢}+٥) قا^{٢} (٣س^{٢}+٥) ء س =
	(١٥) ∫ (قا س – حتا س)^{٢} ءس	٢١	∫ قا س جتا^{٣}س ء س =
			(١٧) ∫ (١ + حا س)^{٢} ءس
	ءس / (ما س + ٢ – ما س)		(١٨) ∫ (قا^{٢} س + طا^{٢} ٢ س) ءس
			(س^{٢} – ٢ س + ٢) / (س – ١)^{٢}
			(١ + حا^{٢} س) / (١ – حا^{٢} س)
(١٦)	∫ [(١ – طا س)^{٢} + ٢ طا س] ءس = ∫(١ + طا^{٢} س) ءس = ∫ قا^{٢}س ء س = ظا س + ث		(٢٠) ∫ ٨ حا س/٢ جتا س/٢ ءس

تكامل نسبة مثلثية زاويتها دالة :

بالرجوع للملحوظة السابقة :

ولتعميم النتائج السابقة أو جميع الصور القياسية للتكامل نلاحظ أنه بإضافة ثابت إلى المتغير المستقل س لا يؤثر على صيغة التكامل ، كماأن ضرب س في المعامل فإن التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل.

∫ جا م س ءس = − $\frac{١}{م}$ جتا م س + ث

وتعمم لجميع الدوال

∫ جا^{ن} د (س) جتاد(س) دَ(س) ءس = $\frac{١}{ن+١}$ جا$^{ن+١}$ د (س) + ث   ن ≠ −١

مثال ٢ ص ١٠٨ : أوجد :

أ) ∫ جا (٢ س − ٥) ء س =

(ب) ∫ قا^{٢} (٥ − ٢س) ء س =

(ج) ∫ قتا^{٢}(٢س + ٣) ء س =