الوحدة الاولى (التباديل و التوافيق و نظرية ذات الحدين)

- **مبدأ العد :**

١- مبدأ العد (قاعدة الضرب) : إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما (ن) طريقة و عدد طرق إجراء عمل آخر (م) طريقة فإن :
عدد طرق إجراء العمل الأول والعمل الثانى يساوى (م × ن) طريقة .

مثال : كم عددا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة { ١،٢،٣،٤،٥ }
١) لا يسمح بالتكرار للرقم ٢) يسمح التكرار للرقم

الحل :
العدد مكون من ثلاث أرقام (آحاد و عشرات و مئات)
١) عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٥
عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٤
عدد طرق اختيار رقم المئات = ٣
عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠
٢) العدد يسمح بالتكرار
عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٥
عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٥
عدد طرق اختيار رقم المئات = ٥
عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام = ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥

ملحوظة : بوجه عام إذا كان عدد طرق إجراء عملية ما بعدد ن طريقة و عملية تالية بعدد (ن ـ ١) طريقة فإن عدد إجراء العمليتين معا = ن (ن ـ ١)
و عمليات التباديل ما هى إلا عمليات اختيار عدد ما من العناصر (ر مثلا) من عدد من العناصر قدرة (ن) حيث ر ⩽ ن دون تكرار مع مراعاة الترتيب
و بالتالى فإن هذا الاختيار يمكن إجراءه بعدد من الطرق يساوى
ن (ن ـ ١) (ن ـ ٢) ٠٠٠٠٠ الى ر من العوامل و يعبر عنه بالصورة ($^{ن}ل_{ر}$)
مثلا : $^{٥}ل_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة ، $^{١٠}ل_{٣}$ = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠ طريقة

---

٢) مبدأ العد (قاعدة الجمع) :
إذا كان عدد طرق إجراء ما (ن) و عدد طرق إجراء عمل آخر (م) طريقة فإن :
عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى يساوى (م + ن) طريقة .

مثال : اختير ٣ أشخاص معا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٤ نساء أوجد :
كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الأتية :
١) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس ؟
٢) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس ؟

الحل :

١) عدد طرق تكوين المجموعة إذا كان أعضاءها من الرجال فقط = ${}^{٥}ق_{٣}$ = ١٠
عدد طرق تكوين المجموعة إذا كان أعضاءها من النساء فقط = ${}^{٤}ق_{٣}$ = ٤
عدد طرق تكوين المجموعة إذا كان أعضاءها من نفس الجنس = ${}^{٥}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٣}$
= ١٠ + ٤ = ١٤ طريقة

٢) عدد طرق تكوين المجموعة إذا كان أعضاءها الثلاثة اثنان فقط من نفس الجنس
= ${}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{١} + {}^{٥}ق_{١} \times {}^{٤}ق_{٢}$
= ١٠ × ٤ + ٥ × ٦ = ٤٠ + ٣٠ = ٧٠ طريقة

مثال : تحتوى ورقة امتحان على ٨ أسئلة و على الطالب أن يجيب عن ٦ منها بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الاربعة الأولى . فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها ؟

الحل :

١) يمكن للطالب أن يختار سؤالين من الاربعة الأولى و اربعة من أسئلة من باقى الورقة
بطرق عددها ${}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤}$ = ٦
٢) يمكن للطالب أن يختار ٣ أسئلة من الاربعة الأولى و ٣ من أسئلة من باقى الورقة
بطرق عددها ${}^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣}$ = ١٦
٣) يمكن للطالب أن يختار ٤ أسئلة من الاربعة الأولى و ٢ من أسئلة من باقى الورقة
بطرق عددها ${}^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$ = ٦
عدد طرق اختيار الأسئلة = ${}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤} + {}^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$
= ٦ + ١٦ + ٦ = ٢٨

**** <u>عدد طرق اختيار عينة مع الإحلال أو بدون إحلال</u> :**

عند اختيار(ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء فإننا نراعى الحالات الآتية :

١ـ إذا كان الاختيار مع الاحلال و الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن^{ر}$

مثلا : عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {٢،١،٥،٤،٣}= $٥^{٢}$ =٢٥

٢- إذا كان الاختيار مع الإحلال و بدون ترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

مثلا : عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق يساوى $^{٤+٣-١}ق_{٣} = {}^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

٣- إذا كان الاختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ل_{ر}$

مثلا : عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى ساحة انتظار به ١٠ أماكن يساوى $^{١٠}ل_{٤} = ٥٠٤٠$

٤- إذا كان الاختيار بدون إحلال دون مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ق_{ر}$

مثلا : عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخصا يساوى $^{١٢}ق_{٥} = ٧٩٢$

مثال : حقيبة بها ٨ كرات حمراء ، ٤ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء ، ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية إذا كان السحب :

١) مع الاحلال و الترتيب ٢) بدون إحلال مع التريب ٣) بدون إحلال و دون ترتيب

الحل :

١) عدد طرق السحب مع الاحلال و الترتيب = $٨^{٣} \times ٤^{٢} = ٨١٩٢$

٢) عدد طرق السحب بدون إحلال مع الترتيب = $^{٨}ل_{٣} \times {}^{٤}ل_{٢} = ٣٤٨$

٣) عدد طرق السحب بدون إحلال و بدون ترتيب = $^{٨}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٢} = ٣١٣٦$

مثال : من نفس المثال السابق أوجد عدد طرق سحب ٤ كرات من نفس اللون فى كل من الحالات السابقة .

الحل : ١) عدد طرق السحب مع الاحلال و الترتيب = $٨^{٤} \times ٤^{٤} = ١٠٤٨٥٧٦$

٢) عدد طرق السحب بدون إحلال مع الترتيب = $^{٨}ل_{٤} \times {}^{٤}ل_{٤} = ٤٠٣٢٠$

٣) عدد طرق السحب بدون إحلال و بدون ترتيب = $^{٨}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٤} = ٧٠$

مثال : أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف .

١) إذا كان الموقف على شكل دائرة ٢) إذا كان الموقف على شكل صف

الحل :

١) عدد طرق الاختيار = $^{ن+ر-١}ق_{ر} = {}^{١٠+٤-١}ق_{٤} = {}^{١٣}ق_{٤} = ٧١٥$

(الاختيار مع الإحلال و بدون ترتيب)

٢) عدد طرق الاختيار = $^{ن}ل_{ر} = {}^{١٠}ل_{٤} = ٥٠٤٠$

(الاختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب)

*** التبـــاديل ***

هى كل ترتيب يمكن تكوينه من مجموعة من العناصر (الأشياء) بأخذها كلها أو بعضها فى كل مرة .

قوانين التباديل

[١] ن ل ر = ن (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) × ...... × (ن - ر + ١)

حيث ن : العلم ، ر : الدليل (و يساوى عدد العوامل)

حيث ر ≤ ن ، ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^+$

و يستخدم هذا القانون : * إذا كانت ن ل ر = قيمة عددية

** إذا أردنا إيجاد قيمة ن ل ر

[٢] <u>مضروب العدد :</u> ن ل ن = |ن = ن (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) × ...... × ٣ × ٢ × ١

* مضروب العدد ن يبدأ بالعدد ن و ينتهى بالعدد ١

** |ن = ن |ن - ١ = ن (ن - ١) |ن - ٢ = ن (ن - ١) (ن - ٢) |ن - ٣

[٣] <u>قانون المضروبات :</u> ن ل ر = |ن ÷ |ن - ر

و يستخدم هذا القانون : * عندما يكون الدليل رمز

** عندما يكون الدليل عدد كبير معلوم

*** فى إثبات العلاقات الجبرية

[٤] <u>ملاحظات هامة على التباديل و المضروبات :</u>

(١) ن ل ١ = ن (٢) ن ل ٠ = ١ (٣) |١ = |٠ = ١

[٥] إذا كان : ن ل ر = م ل ر

فإما : (١) العلم = العلم ⟸ ن = م

أو : (٢) الدليل = صفر ⟸ ر = صفر

مثال : إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$ فما قيمة ن ؟

الحل :

∵ $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$

∴ ن (ن - ١) (ن - ٢) (ن - ٣) = ١٤ (ن - ٢) (ن - ٣) (ن - ٤)

∴ ن (ن - ١) = ١٤ (ن - ٤)   ∴ $ن^{٢}$ - ن = ١٤ ن - ٥٦

∴ $ن^{٢}$ - ١٥ ن + ٥٦ = ٠   ∴ (ن - ٧) (ن - ٨) = ٠

∴ ن = ٧ أو ن = ٨

مثال : إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$ أوجد قيمة ن

الحل :

∵ $^{ن}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤

نبحث عن اربعة عوامل متتالية حاصل ضربها = ٨٤٠

∴ $^{ن}ل_{٤} = {}^{٧}ل_{٤}$ ∴ ن = ٧

٨٤٠	٢	٤
٤٢٠	٢	
٢١٠	٢	٦
١٠٥	٣	
٣٥	٥	٥
٧	٧	٧
١		

مثال : إذا كان $^{٩}ل_{ر-١} = ٥٠٤$ فأوجد قيمة $\underline{|ر+١}$

الحل : نبدأ القسمة على ٩ ثم بقسمة ناتج القسمة على ٨ ثم نقسم ناتج القسمة على ٧ و هكذا حتى نصل الى العدد ١

∴ ٥٠٤ = ٩ × ٨ × ٧ = $^{٩}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{ر-١}$ ∴ ر - ١ = ٣   ∴ ر = ٤

∴ $\underline{|ر+١} = \underline{|٤+١} = \underline{|٥}$ = ١٢٠

٥٠٤	٩
٥٦	٨
٧	٧
١	

مثال : أوجد قيمة ر فى كل مما ياتى :

(أ) $^{٨}ل_{٢ر-١} = ٦٧٢٠$ (ب) $^{٩}ل_{ر-٤} = \underline{|٩}$

الحل :

(أ) ٦٧٢٠ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = $^{٨}ل_{٥} = {}^{٨}ل_{٢ر-١}$

∴ ٢ ر - ١ = ٥   ∴ ر = ٣

(ب) $^{٩}ل_{ر-٤} = \underline{|٩}$ = ٣٦٢٨٨٠ = $^{٩}ل_{٨}$ ∴ ر - ٤ = ٨   ∴ ر = ١٢

٦٧٢٠	٨
٨٤٠	٧
١٢٠	٦
٢٠	٥
٤	٤
١	

مثال : إذا كان $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ فأوجد قيمة ن

الحل : ∵ $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ ∴ $٠ \leqslant ن - ٣ \leqslant ٨$ ∴ $٣ \leqslant ن \leqslant ١١$

مثال : إذا كان $^{ن-٣}ل_{٨} = {}^{ن-٣}ل_{٨}$ فأوجد قيمة ن

الحل : ∵ $^{ن-٣}ل_{٨} = {}^{ن-٣}ل_{٨}$ ∴ $ن - ٣ \geqslant ٨$ ∴ $ن \geqslant ١١$

∴ ن ∈ { ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ..... }

مثال : إذا كان $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فأوجد قيمة ن .

الحل :

$$\frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن+١-ن+١}} : \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|٢ن-١-ن}} = ٣ : ٥$$

$$\frac{(٢ن+١)\,٢ن\,\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن+٢}} : \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن-١}} = ٣ : ٥$$

$$\frac{(٢ن+١)\,٢\cancel{ن}\,\cancel{\underline{|٢ن-١}}}{(ن+٢)(ن+١)\cancel{ن}\,\cancel{\underline{|ن-١}}} : \frac{\cancel{\underline{|٢ن-١}}}{\cancel{\underline{|ن-١}}} = ٣ : ٥$$

$$\frac{٢(٢ن+١)}{(ن+٢)(ن+١)} : ١ = ٣ : ٥$$

$$\frac{٢(٢ن+١)}{(ن+٢)(ن+١)} = \frac{٣}{٥} \quad ∴ \quad ١٠(٢ن+١) = ٣(ن+٢)(ن+١)$$

∴ $٢٠ن + ١٠ = ٣(ن^٢ + ٣ن + ٢) = ٣ن^٢ + ٩ن + ٦$

∴ $٣ن^٢ - ١١ن - ٤ = ٠$ ∴ $(٣ن+١)(ن-٤) = ٠$

∴ ن = ٤ ، $ن = -\frac{١}{٣}$ مرفوض

مثال : إذا كان $^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٤٢$ ، $^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠$ فما قيمة ن ، ر

الحل :

$\because {}^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠ = {}^{٧}ل_{٤} \quad \therefore ر - ٣ = ٤ \quad \therefore ر = ٧$

$\because {}^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٤٢$

$\therefore {}^{ن-٢}ل_{٥} : {}^{ن-٢}ل_{٧} = ١ : ٤٢$

$\therefore \frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٢-٥}} : \frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٢-٧}} = ١ : ٤٢$

$\therefore \frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٧}} : \frac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٩}} = ١ : ٤٢ \quad \therefore \frac{\underline{|ن-٩}}{\underline{|ن-٧}} = \frac{١}{٤٢}$

$\therefore \frac{\cancel{\underline{|ن-٩}}}{(ن-٧)(ن-٨)\cancel{\underline{|ن-٩}}} = \frac{١}{٤٢} \quad \therefore (ن-٧)(ن-٨) = ٤٢$

$\therefore (ن-٧)(ن-٨) = ٧ \times ٦ \quad \therefore ن - ٧ = ٧ \quad \therefore ن = ١٤$

مثال : إذا كان $^{ن-ر}ل_{٢} = ٩٠$ ، $^{ن+ر}ل_{٢} = ٣٨٠$ أوجد قيمة ن ، ر

الحل : $\because {}^{ن-ر}ل_{٢} = ٩٠ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}ل_{٢} \quad \therefore ن - ر = ١٠ \quad (١)$

$\because {}^{ن+ر}ل_{٢} = ٣٨٠ = ٢٠ \times ١٩ = {}^{٢٠}ل_{٢} \quad \therefore ن + ر = ٢٠ \quad (٢)$

و بحل المعادلتين جبريا نجد : ن = ١٥ ، ر = ٥

مثال : إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $\underline{|ر} = ٧٢٠$ فأوجد قيمة ن ، ر

الحل : $\because \underline{|ر} = ٧٢٠ \quad \therefore ر = ٦$

$\because {}^{ن}ل_{٦} = ٦٠٤٨٠ = {}^{٩}ل_{٦} \quad \therefore ن = ٩$

٧٢٠	١
٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	

مثال : إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيم كل من ن ، ر الممكنة .

الحل : ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ ∴ ن = ٧ عندما ر = ٣ (هذه القيم الممكنة فقط)

مثال : إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ فأوجد قيم كل من ن ، ر الممكنة

الحل : اولا) ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٦ \times ٥ \times ٤$ ∴ ن = ٦ عندما ر = ٣

ثانيا) ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢$ ∴ ن = ٥ عندما ر = ٤

ثالثا) ∵ $^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ ∴ ن = ٥ عندما ر = ٥

رابعا) ∵ $^{ن}ل_{ر} = {}^{١٢٠}ل_{١}$ ∴ ن = ١٢٠ عندما ر = ١

مثال : أثبت أن : $\underline{|١٠} = ٢^{٥} (١ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٩) \underline{|٥}$

الحل : الطرف الأيمن = $\underline{|١٠} = (١٠ \times ٨ \times ٦ \times ٤ \times ٢) (٩ \times ٧ \times ٥ \times ٣ \times ١)$

$= ٢^{٥} (٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١) (١ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٩)$

$= ٢^{٥} (١ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٩) \underline{|٥}$ = الطرف الأيسر

مثال : أثبت أن : $\underline{|٢ن} = ٢^{ن} [١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)] \underline{|ن}$

الحل : الطرف الأيمن =

$[٢ن (٢ن - ٢) \cdots \times ٦ \times ٤ \times ٢] [(٢ن - ١) (٢ن - ٣) \cdots \times ٥ \times ٣ \times ١]$

$= ٢^{ن} [ن (ن - ١) \cdots \times ٣ \times ٢ \times ١] [١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)]$

$= ٢^{ن} \underline{|ن} [١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)]$

$= ٢^{ن} [١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)] \underline{|ن}$ = الطرف الأيسر

مثال : مجموعة الارقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

١- كم عدد مكون من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينها منها دون تكرار الرقم

٢- كم عدد فردى منها و كم عدد زوجى منها

٣- كم عدد منها يقبل القسمة على ٥

٤- كم عدد منها رقم الآحاد فيه ١ ورقم الالاف فيه ٧

الحل : ١) عدد الأعداد المطلوبة = ${}^{٧}ل_{٤}$ = ٨٤٠ عددا

٢)عدد الالأعداد الفردية منها (التى تبدأ بأحد الارقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ وعددها ٤)
= ٤ × ${}^{٦}ل_{٣}$ = ٤٨٠ عددا

٣) عدد الأعداد الزوجية (التى رقم آحادها هو أحد الارقام ٢ ، ٤ ، ٦) = ٣ × ${}^{٦}ل_{٣}$
= ٣٦٠ عددا

٤) عدد الأعداد التى تقبل القسمة على ٥ [رقم آحادها هو الرقم ٥]
= ١ × ${}^{٦}ل_{٣}$ = ١٢٠ عددا

٥) عدد الأعداد التى فيها رقم الآحاد ١ و رقم الألوف ٧
(أى نحجز الخانتين الاولى و الاخيرة للرقمين ١ ، ٧ و تبقى ٥ ارقام نبدلها على الخانتين الباقيتين) = ${}^{٥}ل_{٢}$ = ٢٠ عددا

مثال : أثبت أن : ${}^{ن}ل_{ر+١} = {}^{ن-١}ل_{ر+١} + (ر+١) \times {}^{ن-١}ل_{ر}$

الحل : الطرف الأيسر $= \dfrac{|\underline{ن-١}}{|\underline{ن-ر-٢}} + (ر+١) \times \dfrac{|\underline{ن-١}}{|\underline{ن-ر-١}}$

$= \dfrac{(ن-ر-١)|\underline{ن-٩}}{|\underline{ن-ر-١}} + (ر+١) \times \dfrac{|\underline{ن-١}}{|\underline{ن-ر-١}}$

$= \dfrac{|\underline{ن-١}}{|\underline{ن-ر-١}} (ن-ر-١+ر+١)$

$= \dfrac{ن|\underline{ن-١}}{|\underline{ن-ر-١}} = \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر-١}} = {}^{ن}ل_{ر+١}$ = الأيمن

مثال : إذا كان $|\underline{ن+١} : |\underline{ن-١} = ٧٢$ أوجد قيمة ${}^{ن}ل_{.} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢}$

الحل : ن = − ٩ مرفوض ، ن = ٨ ، ${}^{٨}ل_{.} + {}^{٨}ل_{١} + {}^{٨}ل_{٢} = ١ + ٨ + ٥٦ = ٦٥$

التـــوافيـــق

* التوافيق :- $^{ن}ق_{ر}$ هى عدد طرق اختيار ر من العناصر المختلفة من بين ن من الأشياء المختلفة **بدون ترتيب العناصر التى نختارها**

التوفيقة $^{ن}ق_{ر} = {}^{\text{عدد الأشياء المتاحة}}ق_{\text{عدد الأشياء المطلوبة}}$

قوانين التوافيق

[١] **قانون العلاقة بين التباديل و التوافيق:** $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$

حيث ن : العلم ، ر : الدليل ، كلٍ من $ن \in ص^{+}$ ، $ر \in ط$ بحيث $ر \leqslant ن$

و يستخدم هذا القانون :

* إذا كانت $^{ن}ق_{ر}$ = قيمة عددية   ** إذا أردنا إيجاد قيمة $^{ن}ق_{ر}$

---

[٢] **قانون المضروبات :** $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!}$

و يستخدم هذا القانون : * عندما يكون الدليل رمز
** عندما يكون الدليل عدد كبير معلوم
*** فى إثبات العلاقات الجبرية

[٣] **قانون تبسيط الدليل :** $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ مثلا $^{١٠}ق_{٧} = {}^{١٠}ق_{٣}$

و يستخدم هذا القانون : إذا زادت قيمة الدليل ر عن نصف قيمة العلم ن

ملاحظة هامة : إذا كان $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

[٤] قانون النسبة بين توفيقتين متتاليتي الدليل :

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} = \frac{\text{العلم} - \text{الدليل الصغير}}{\text{الدليل الكبير}}$$

مثلا : $\frac{{}^{٩}\text{ق}_{٥}}{{}^{٩}\text{ق}_{٤}} = \frac{٩ - ٤}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$ ، $\frac{{}^{٩}\text{ق}_{٥}}{{}^{٩}\text{ق}_{٣}} = \frac{{}^{٩}\text{ق}_{٥}}{{}^{٩}\text{ق}_{٤}} \times \frac{{}^{٩}\text{ق}_{٤}}{{}^{٩}\text{ق}_{٣}}$ غير متتالين

[٥] <u>ملاحظات هامة على التوافيق :</u>

[١] ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{صفر}} = ١$ [٢] ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{١} = \text{ن}$

[٣] ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = ١$ [٤] ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١}$

مثال : بكم طريقة يمكن يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها يتكون من شخصين من بين ١٠ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحل : يمكن أنتخاب اللجنة الاولى بعدد من الطرق = ${}^{١٠}\text{ق}_{٢} = \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} = ٤٥$ طريقة

إذا انتخبنا اثنين للجنة الاولى يتبقى ٨ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثانية

عدد طرق اختيار اللجنة الثانية = ${}^{٨}\text{ق}_{٢} = \frac{٨ \times ٧}{٢ \times ١} = ٢٨$ طريقة

وأخيرا يتبقى ٦ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثالثة

عدد طرق اختيار اللجنة الثالثة = ${}^{٦}\text{ق}_{٢} = \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} = ١٥$ طريقة

∴ عدد الطرق التى يمكن بها اختيار اللجان الثلاث = ٤٥ × ٢٨ × ١٥ = ١٨٩٠٠

مثال : أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة.

الحل :

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها = ${}^{٧}\text{ق}_{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها = ${}^{٤}\text{ق}_{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

∴ عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة = ٣٥ × ٦ = ٢١٠

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من ٦ أفراد من ٢٠ رجل و ١٠ سيدات بحيث تحتوى اللجنة على ٤ رجال و سيدتان .

الحل : عدد طرق تكوين اللجنة = $^{20}\text{ق}_{4} \times {}^{10}\text{ق}_{2} = 4845 \times 45 = 218025$

مثال : إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{3} : {}^{\text{ن}+2}\text{ق}_{4} = 5 : 18$ فما قيمة ن ؟

الحل : $^{\text{ن}}\text{ق}_{3} \div {}^{\text{ن}+2}\text{ق}_{4} = \frac{5}{18}$ ∴ $\frac{\text{ن}!}{3!\,(\text{ن}-3)!} \div \frac{(\text{ن}+2)!}{4!\,(\text{ن}+2-4)!} = \frac{5}{18}$

$$\therefore \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-3)!\,3!} \times \frac{(\text{ن}+2-4)!\,4!}{(\text{ن}+2)!} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-3)!\,3!} \times \frac{(\text{ن}-2)!\,4!}{(\text{ن}+2)!} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-3)!\,3!} \times \frac{(\text{ن}-2)\,(\text{ن}-3)! \times 4\,3!}{(\text{ن}+2)(\text{ن}+1)\,\text{ن}!} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{4\text{ن}-8}{\text{ن}^2+3\text{ن}+2} = \frac{5}{18}$$

$$5\text{ن}^2+15\text{ن}+10 = 72\text{ن}-144$$

$$5\text{ن}^2-57\text{ن}+154 = 0$$

$$(\text{ن}-7)(5\text{ن}-22) = 0$$

ن = ٧ ، ن = $\frac{22}{5}$ (مرفوض)

مثال : أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى (أ) $^{\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}-1} = 66$

(ب) $^{25}\text{ق}_{2\text{ن}-14} = {}^{25}\text{ق}_{\text{ن}-1}$

الحل : (أ) $^{\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ن}-1} = {}^{\text{ن}+1}\text{ق}_{2} = 66 = {}^{12}\text{ق}_{2}$ ∴ ن = ١٢ تحقق

(ب) ∵ $^{25}\text{ق}_{2\text{ن}-14} = {}^{25}\text{ق}_{\text{ن}-1}$ اولا : $2\text{ن}-14 = \text{ن}-1$ ∴ ن = ١٣ تحقق

ثانيا : $2\text{ن}-14+\text{ن}-1 = 25$ ∴ $3\text{ن} = 40$ ∴ ن = $\frac{40}{3}$ مرفوض

مثال: إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٠$ أوجد قيمة ن

الحل :

$^{ن}ق_{٣} = ٢٠$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٦٠$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن = ٥$

حل أخر $^{ن}ق_{٣} = ١٠$

$\frac{^{ن}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ١٠$

$^{ن}ل_{٣} = ١٠ \underline{|٣} = ١٠ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦٠$

$^{ن}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن = ٥$

مثال : إذا كان $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = ١ : ٣$ فما قيمة ر ؟

الحل : $\because \frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٧-ر+١}{ر} = \frac{١}{٣}$

$\therefore ر = ٢٤ - ٣ر \quad \therefore ر = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

مثال : إذا كان $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

أوجد كلا من ن ، ر

الحل :

$\because \frac{^{١٣}ق_{ر}}{^{١٣}ق_{ر+١}} = \frac{٩}{٥}$ [النسبة]

$\frac{\text{الدليل الكبير}}{\text{العلم} - \text{الدليل الصغير}} = \frac{٩}{٥}$

$\therefore \frac{ر+١}{١٣-ر} = \frac{٩}{٥}$

$\therefore ٥ر + ٥ = ١١٧ - ٩ر$

$\therefore ١٤ر = ١١٢ \quad \therefore \boxed{ر = ٨}$

$\because {}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

$\therefore {}^{ن+١}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$

$\therefore {}^{ن+١}ق_{٧} = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_{٧}$

$\therefore ن + ١ = ١٤ \quad \therefore \boxed{ن = ١٣}$

مثال : أثبت أن $^{ن}ق_{ر} + 2\ {^{ن}ق_{ر+1}} + {^{ن}ق_{ر+2}} = {^{ن+2}ق_{ر+2}}$

و من ذلك أوجد قيمة : $^{10}ق_{5} + 2\ {^{10}ق_{6}} + {^{10}ق_{7}}$

الحل : الطرف الأيمن $= {^{ن}ق_{ر}} + {^{ن}ق_{ر+1}} + {^{ن}ق_{ر+1}} + {^{ن}ق_{ر+2}}$

$= {^{ن+1}ق_{ر+1}} + {^{ن+1}ق_{ر+2}} = {^{ن+2}ق_{ر+2}} =$ الأيسر

قيمة : $^{10}ق_{5} + 2\ {^{10}ق_{6}} + {^{10}ق_{7}} = {^{10}ق_{5}} + 2\ {^{10}ق_{5+1}} + {^{10}ق_{5+2}}$

$= {^{10+2}ق_{5+2}} = {^{12}ق_{7}} = 792$

مثال : أوجد قيمة ن التى تحقق $^{ن}ق_{3} + 2\ {^{ن}ق_{2}} + {^{ن}ق_{1}} = 120$

الحل : $\because\ {^{ن}ق_{3}} + {^{ن}ق_{2}} + {^{ن}ق_{2}} + {^{ن}ق_{1}} = 120$

$\therefore\ {^{ن+1}ق_{3}} + {^{ن+1}ق_{2}} = 120$　　$\therefore\ {^{ن+2}ق_{3}} = 120 = {^{10}ق_{3}}$

$\therefore\ ن + 2 = 10$　　$\therefore\ ن = 8$

مثال : أوجد قيمة : $\dfrac{^{17}ق_{6} + {^{17}ق_{5}}}{^{18}ق_{5}}$

الحل : $\dfrac{^{17+1}ق_{6}}{^{18}ق_{5}} = \dfrac{^{18}ق_{6}}{^{18}ق_{5}} = \dfrac{18-5}{6} = \dfrac{13}{6}$

مثال : أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {^{ن-1}ق_{ر-1}} = \dfrac{ن}{ر}$

و من ذلك أثبت أن $\dfrac{^{25}ق_{4} + {^{24}ق_{3}}}{^{24}ق_{3} + {^{23}ق_{2}}} = \dfrac{58}{9}$

الحل : الطرف الأيمن $= \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}} : \dfrac{|\underline{ن-1}}{|\underline{ر-1}\ |\underline{ن-ر}}$

$= \dfrac{ن\ \cancel{|\underline{ن-1}}}{ر\ \cancel{|\underline{ر-1}}\ \cancel{|\underline{ن-ر}}} : \dfrac{\cancel{|\underline{ن-1}}}{|\underline{ر-1}\ \cancel{|\underline{ن-ر}}} = \dfrac{ن}{ر} : 1 = \dfrac{ن}{ر} =$ الأيسر

اثبات الجزء الثانى : بقسمة البسط و المقام على $^{24}\text{ق}_{3}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{\dfrac{^{25}\text{ق}_{4}}{^{24}\text{ق}_{3}} + 1}{1 + \dfrac{^{23}\text{ق}_{4}}{^{24}\text{ق}_{3}}} = \dfrac{\dfrac{25}{4} + 1}{1 + \dfrac{4}{24}} = \dfrac{58}{9} =$ الأيسر

<u>حل آخر</u> : نأخذ العامل المشترك من البسط $^{24}\text{ق}_{3}$ و العامل المشترك من المقام $^{23}\text{ق}_{2}$ و نستخدم الاثبات الاول نصل لنفس النتيجة .

مثال : إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+2} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \geq {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}$ فأثبت أن : $\text{ن} \geq 2\text{ر} + 1$

الحل : $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+2} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \geq {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}$

$\therefore \dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+2}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1}} \times \dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}} \geq 1$

$\therefore \dfrac{\text{ن} - (\text{ر} + 1)}{\text{ر} + 2} \times \dfrac{\text{ن} - (\text{ر} - 1)}{\text{ر}} \geq 1$

$\therefore \dfrac{\text{ن} - \text{ر} - 1}{\text{ر} + 2} \times \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \geq 1$

$\therefore (\text{ن} - \text{ر} - 1)(\text{ن} - \text{ر} + 1) \geq \text{ر}(\text{ر} + 2)$

$\therefore (\text{ن} - \text{ر})^2 - 1 \geq \text{ر}^2 + 2\text{ر} \quad \therefore (\text{ن} - \text{ر})^2 \geq (\text{ر} + 1)^2$

$\therefore \text{ن} - \text{ر} \geq \text{ر} + 1 \quad \therefore \text{ن} \geq 2\text{ر} + 1$

مثال : أوجد قيم ن الممكنة إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{8} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{6} \geq {}^{\text{ن}}\text{ق}_{7} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{5}$

الحل : $\because \dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{8}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{7}} \times \dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{6}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{5}} \geq 1 \quad \therefore \dfrac{\text{ن} - 7}{8} \times \dfrac{\text{ن} - 5}{6} \geq 1$

$\therefore (\text{ن} - 7)(\text{ن} - 5) \geq 48 \quad \therefore \text{ن}^2 - 12\text{ن} + 35 - 48 \geq 0$

$\therefore \text{ن}^2 - 12\text{ن} - 13 \geq 0 \quad \therefore (\text{ن} - 13)(\text{ن} + 1) \geq 0 \quad \therefore \text{ن} \geq 13$

$\therefore \text{ن} \in \{13 ، 14 ، 15 ، \ldots\}$

تمارين على التباديل و التوافيق

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معًا أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة {أ، ب، جـ، ء، هـ، و} هي:

(أ) ${}^{6}\text{ق}_{2} \times {}^{6}\text{ق}_{3}$ (ب) ${}^{6}\text{ل}_{2} \times {}^{6}\text{ل}_{3}$ (جـ) ${}^{6}\text{ق}_{2} + {}^{6}\text{ق}_{3}$ (د) ${}^{6}\text{ل}_{2} + {}^{6}\text{ل}_{3}$

(٢) إذا كان ${}^{ن}\text{ق}_{5} : {}^{ن}\text{ق}_{4} = 3 : 1$ فإن ن تساوى:

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣) اشترك ١٢ لاعبًا في مسابقة للسباحة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث؟

(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٣١٠ (د) ٣٢١٠

(٤) أي القيم الآتية يمكن أن تساويها ${}^{ن}\text{ل}_{2}$؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٣٠

(٥) إذا كان ${}^{17}\text{ل}_{م+5} = {}^{39}\text{ل}_{م+5}$ فإن م تساوى:

(أ) ‎-٥ (ب) ٠ (جـ) ٥ (د) ١٢

(٦) إذا كان ${}^{ن-3}\text{ل}_{7} = \underline{|8}$ فإنها تساوى:

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

(٧) قيمة ${}^{50}\text{ق}_{4} + \sum_{ر=1}^{6} {}^{56-ر}\text{ق}_{3}$ تساوى:

(أ) ${}^{56}\text{ق}_{4}$ (ب) ${}^{56}\text{ق}_{3}$ (جـ) ${}^{55}\text{ق}_{4}$ (د) ${}^{55}\text{ق}_{3}$

(٨) يجب على طالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالًا بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى، كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (جـ) ٢٨٠ (د) ٣٤٦

(٩) إذا كان ${}^{ن+2}\text{ق}_{4} = ن^{2} - 1$ فإن ن تساوى:

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي وعددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

(١١) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أو عددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

(١٢) كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوى على ٤ طلاب.

(١٣) كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

(أ) مع الإحلال (ب) بدون إحلال

(١٤) إذا كانت س = {٢، ٣، ٤، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س.

(أ) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط. (ب) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل.

(ج) إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر.

(١٥) أوجد قيمة كل من ن، ر في كل مما يأتي:

(أ) ${}^{ن}ل_{٢} = ٢$، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٠$ (ب) ${}^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$، ${}^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦$

(ج) ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١$، ${}^{ن+ر}ل_{٣} = ٩٩٠$ (د) ${}^{ن}ق_{ر} = ١٠$، $|\underline{ن-ر} = ٦$

(١٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر\,١} = ٢ : ٣$ ، ${}^{ن}ق_{ر\,٢} : {}^{ن}ق_{ر\,١} = ٤ : ٣$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

(١٧) أثبت أن $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}} = \dfrac{ر+١}{ن+١}$ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة $\dfrac{{}^{١٥}ق_{٩} + {}^{١٥}ق_{٧}}{{}^{١٦}ق_{٩}}$.

(١٨) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-١}ق_{ر} = \dfrac{ن}{ن-ر}$ ثم استخدم ذلك في حل المعادلة $\dfrac{{}^{ن}ق_{٨} + {}^{ن-١}ق_{٨}}{{}^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$

(١٩) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-١}$ ، ${}^{ن+١}ق_{ر} = \dfrac{٤٠}{|\underline{ر}} \times {}^{ن}ل_{ر-٢}$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

(٢٠) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \; {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فاحسب قيمة ${}^{١٢}ق_{٢ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للمتغير ن والتى تجعل العلاقة صحيحة.

(٢١) أوجد قيمة كل من ن، ر إذا كان ${}^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١ : ٥ : ١٥$

(٢٢) أثبت أن ${}^{ن+١}ق_{ر+١} \div {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن+١}{ر+١}$ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة $\frac{{}^{١٥}ق_{٥} + {}^{١٤}ق_{٤}}{{}^{١٤}ق_{٤} + {}^{١٣}ق_{٣}}$

(٢٣) إذا كان $\frac{{}^{١٣}ق_{ر} + {}^{١٣}ق_{ر+١}}{{}^{١٣}ق_{ر-١} + {}^{١٣}ق_{ر}} = ٢$ فأوجد قيمة ر

(٢٤) إذا كان ${}^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ فما قيمة كل من س ، ص؟

(٢٥) إذا كان ${}^{ن}ل_{٨} \leqslant {}^{ن}ل_{٧}$ فما قيمة ن؟

(٢٦) إذا كان: $\underline{|م+ن} = ٣٨٠\ \underline{|م+ن-٢}$ فأوجد قيمة م + ن

(٢٧) حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $\underline{|ن+٢}\ \underline{|٣ن-٤} = \underline{|ن}\ \underline{|٣ن-٢}$

(ب) $٢\ \underline{|٢ن} = (ن^{٢}+٣ن+٢)\ (\underline{|ن})^{٢}$

(جـ) $\underline{|٢ن}\ \underline{|ن-٣} = ٧٢\ \underline{|٣ن-٧}$

(٢٨) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ثم استخدم ذلك في إيجاد قيمة كل من ن، ر

إذا كان ${}^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩\ {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

(٢٩) الارتباط بالمتابعات :

(أ) إذا كان $٤ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٦}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$ تكون متابعة حسابية أوجد قيمة ن

(ب) إذا كان $٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}$ ، $٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$ في تتابع هندسي فأوجد قيمة ر.

(٣٠) أوجد قيمة كل من ن، ر في كل مما يأتي:

(أ) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

(ب) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

(جـ) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

(د) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٩ : ٥$ ، ${}^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٢ر-٥}$

(هـ) ${}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، ${}^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

(٣١) لدينا ٤ نقاط في مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة ، أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل كل منها بين نقطتين؟

(٣٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق علي ثلاثة أولاد فقط؟

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لايدخل شخص في اللجنتين في ذات الوقت؟

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٢

(٣٨) يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

(ج) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل؟

أسئلة متنوعة على التباديل و التوافيق :

(١) يمكن لموظف فى مجمع التحرير أن يستخدم أحد ست مصاعد للصعود إلى الدور الذى يمارس فيه عمله فبكم طريقة يصعد ثم يهبط

أولاً: إذا أتيح له أن يهبط بنفس المصعد الذى يستخدمه فى الصعود

ثانيا : إذا لم يهبط بنفس المصعد الذى استخدمه فى الصعود [٣٦ ، ٣٠]

(٢) كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف مختلفة يمكن تكوينها من ٧ حروف مختلفة

[٢١٠]

(٣) إثبت أن : ${}^{٥}ل_{٣} - {}^{١}ل_{٣} = ٩ \times {}^{٤}ل_{٢}$

(٤) إثبت أن: $^{٨}ل_{١} \times (^{٥}ل_{٣} \div {}^{١٦}ل_{٠}) = ٧٦$

(٥) أكتب العامل الخامس عشر من

ن(ن-١)(ن-٢) × ...... × (ن-٢٠) وكم يكون عدد العوامل

(٦) إذا كان $\lfloor ن = ٥٠٤٠$ فاحسب قيمة ن ، $^{ن}ل_{٣}$ [٧ ، ٢١٠]

(٧) إذا كان $^{١٠}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ فاحسب قيمة $\lfloor ر$ [٢٤]

(٨) إذا كان $^{ن}ل_{٤} = ٧٩٢٠$ فاحسب قيمة ن [١١]

(٩) إذا كان $^{ن}ل_{٩} = ١٠ \; {}^{ن-١}ل_{٥}$ فاحسب قيمة $\lfloor ن-٣$ [٥٠٤٠]

(١٠) إذا كان $^{٧}ل_{ر+١} : {}^{٥}ل_{ر} = ١٤$ فاحسب قيمة ر [٢]

(١١) إذا كان $^{٢ن}ل_{٣} = ١٢ \; {}^{ن}ل_{٢}$ فاحسب قيمة ن [٢]

(١٢) إذا كان $^{ن-١}ل_{٣} \div {}^{ن+١}ل_{٣} = \frac{٥}{١٢}$ فاحسب قيمة $^{ن}ل_{٢}$ [٥٦]

(١٣) إذا كان $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = \frac{٣}{٥}$ فاحسب قيمة ن [٤]

(١٤) إذا كان $^{ن-١}ل_{ن-٣} : {}^{ن+٢}ل_{ن-٢} = \frac{٣}{١٤}$ فاحسب قيمة $\lfloor ن$ [١٢٠]

(١٥) إذا كان $\frac{١٠}{\lfloor ن} + \frac{١٠}{\lfloor ن-١} - \frac{٣}{\lfloor ن-٢} = ٠$

فاوجد قيمة ن [٥]

(١٦) إذا كان $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٢} + \frac{\lfloor ن-١}{\lfloor ن-٣} + \frac{\lfloor ن-٢}{\lfloor ن-٤} = ٦٢$

فاوجد قيمة ن [٦]

(١٧) إذا كان $\frac{٣}{\lfloor ن} + \frac{١}{\lfloor ن-١} = \frac{٦٣}{\lfloor ن+١}$ [٦]

(١٨) إثبت أن $^{٢ن}ل_{٣} \div {}^{ن}ل_{٢} = ٢ \, (^{ن}ل_{٢} \div {}^{ن}ل_{١})$

(١٩) إذا كان $^{م+ن}ل_{٢} = ٥٦$ ، $^{م-ن}ل_{٢} = ١٢$

فاحسب قيمة كل من م ، ن [٦ ، ٢]

(٢٠) إذا كان $^{م+ن}ل_{٢} = ١٨٢$ ، $^{م-ن}ل_{٣} = ٣٣٦$

فاحسب قيمة $^{م}ن$ [٩٩٠]

(٢١) إثبت أن $\frac{{}^{ن}ل_{٣}}{{}^{ن}ل_{٢}}$ ، $\frac{{}^{ن}ل_{٥}}{{}^{ن}ل_{٤}}$ ، $\frac{{}^{ن}ل_{٧}}{{}^{ن}ل_{٦}}$ في تتابع حسابي

(٢٢) إثبت أن $\frac{{}^{ن}ل_{١}}{{}^{ن}ل_{٠}} + \frac{{}^{ن}ل_{٢}}{{}^{ن}ل_{١}} + \frac{{}^{ن}ل_{٣}}{{}^{ن}ل_{٢}} + \dots + \frac{{}^{ن}ل_{ن}}{{}^{ن}ل_{ن-١}} = \frac{ن}{٢}(ن+١)$

(٢٣) كم عدد يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

أولا: إذا كان العدد مكونا من ثلاث أرقام مختلفة [١٢٠]

ثانيا: إذا كان العدد مكونا من أربعة أرقام مختلفة [٣٦٠]

ثالثا: إذا كان العدد مكونا من أربعة أرقام مختلفة بحيث يبدأ بالرقم ٣ أو بالرقم ٦ [١٢٠]

رابعا: إذا كان العدد مكونا من أربعة أرقام مختلفة بحيث يبدأ بالرقم ٣ وينتهي بالرقم ٦ [١٢]

(٢٤) كم عدد من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وكم عدد زوجي منها [١٢٠ ، ٤٨]

(٢٥) إثبت أن $\frac{ن!}{(ن-ر)!} + \frac{ر\,ن!}{(ن-ر+١)!} = \frac{(ن+١)!}{(ن-ر+١)!}$

(٢٦) اثبت أن ${}^{ن-١}ل_{ر} + ر \times {}^{ن-١}ل_{ر-١} = {}^{ن}ل_{ر}$

(٢٧) إثبت أن: $\frac{(٢ن)!}{ن!} = ٢^{ن}\,[١ \times ٣ \times ٥ \times \dots \times (٢ن-١)]$

ومن ثم إثبت أنه

$$\frac{(٤ن)!}{(٢ن)!} \div ٢^{ن} \times \frac{(٢ن)!}{ن!} = (٢ن+١)(٢ن+٣)(٢ن+٥) \times \dots \times (٤ن-١)$$

تمارين على التوافيق :

(١) إثبت أن: $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٣٢$

(٢) إثبت أن: $^{٢٠}ق_{١٨} - ٢ \times {}^{١٠}ق_{٨} = ١٠٠$

(٣) إثبت أن: $^{١٥}ق_{١٢} + {}^{٥}ق_{٢} = \frac{٣١}{٨} \times {}^{١١}ق_{٣}$

(٤) إذا كان: $^{ن}ق_{١٥} = {}^{ن}ق_{٣}$ فاحسب قيمة ن [١٨]

(٥) إذا كان $^{ن}ق_{٤} = ٢١٠$ أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{٣}$ [١٦٥]

(٦) إذا كان $^{٢٧}ق_{٢ر} = {}^{٢٧}ق_{ر+٦}$ فاحسب قيمة ر [٦ أو ٧]

(٧) إذا كان $^{٢٥}ق_{٢ر} = {}^{٢٥}ق_{ر-٥}$ فاحسب قيمة $^{ر+٢}ق_{ر-٢}$ [٤٩٥]

(٨) اثبت أن $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = {}^{ن+١}ق_{ن-١}$

(٩) إحسب قيمة $^{٢٠}ق_{٦} : {}^{٢٠}ق_{١٩}$ [٨]

(١٠) إذا كان $^{ن}ق_{٦} : {}^{ن}ق_{٥} = \frac{٢}{٣}$ فاحسب قيمة ن [٩]

(١١) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ فاحسب قيمة ن [١٠]

(١٢) إذا كان $^{ن}ق_{٧} > {}^{ن}ق_{٦}$ اثبت أن $ن > ١٣$

(١٣) إذا كان $^{ن+١}ق_{٤} < {}^{ن+١}ق_{٥}$ اثبت أن $ن > ٨$

(١٤) إذا كان $^{ن}ق_{ر} > {}^{ن}ق_{ر-١}$ اثبت أن $ن + ١ > ٢ر$

(١٥) إثبت أن: $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-١}ق_{ر-١}$

(١٦) إثبت أن: $^{ن+١}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن + ١}{ن - ر + ١}$

ومن ثم أوجد قيمة $\frac{^{١٥}ق_{٥} + {}^{١٤}ق_{٥}}{^{١٤}ق_{٥} + {}^{١٣}ق_{٥}}$ $[\frac{٣٥}{٢٢}]$

(١٧) إثبت أن $^{ن}ق_{ر-١} = \frac{ن - ر + ٢}{ن + ١} \times {}^{ن+١}ق_{ر-١}$

(١٨) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ١٩٠$ فاوجد قيمة $^{ن+١}ق_{٢}$ [٢٣٠]

(١٩) إذا كان $^{٨}ق_{ر-١} > {}^{٨}ق_{ر}$ فاوجد قيمة ر

[٨ أو ٧ أو ٦ أو ٥]

(٢٠) إثبت أن: $\frac{^{ن}ق_{١}}{^{ن}ق_{٠}} + ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٢}}{^{ن}ق_{١}} + ٣ \times \frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} + \cdots + ن \frac{^{ن}ق_{ن}}{^{ن}ق_{ن-١}} = \frac{ن}{٢}(ن+١)$

(٢١) (أ) إثبت أن $\frac{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+١}{ر+١}$

(ب) إذا كان $\frac{^{ن}ق_{١٠} + {}^{ن}ق_{٩}}{^{ن}ق_{٩}} = \frac{٣}{٢}$ فاحسب قيمة ن [١٤]

(٢٢) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = ١$ ، $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٢٨$ فاوجد قيم كل من ن ، ر

[٢٥ ، ٥٦ ، [illegible] أو ٥]

(٢٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-٢} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧ : ٧$ فاحسب كلا من ن ، ر

[١١ ، ٧]

(٢٤) إذا كان $^{ن}ق_{٥}$ وسط هندسى بين $\frac{٩}{٥}\,{}^{ن}ق_{٦}$ ، $^{ن}ق_{٤}$

فاحسب قيمة ن [٧]

(٢٥) إذا كان $^{ن}ق_{٨}$ ، $\frac{١٧}{١٩}\,{}^{ن}ق_{٧}$ ، $^{ن}ق_{٩}$ فى تتابع حسابى

فاحسب قيمة ن [١٠ أو ٢٠]

نظرية ذات الحدين (بأس صحيح موجب)

تمهيد :

تعلم أن $(س + أ)^{٣} = (س + أ)(س + أ)(س + أ)$

$= (س^{٢} + ٢أس + أ^{٢})(س + أ)$

$= س^{٣} + أس^{٢} + ٢أس^{٢} + ٢أ^{٢}س + أ^{٢}س + أ^{٣}$

$= س^{٣} + ٣أس^{٢} + ٣أ^{٢}س + أ^{٣}$

و هذه يمكن كتابتها على الصورة

$(س + أ)^{٣} = س^{٣} + {}^{٣}ق_{١}(أ)س^{٢} + {}^{٣}ق_{٢}(أ)^{٢}س + أ^{٣}$

حيث ${}^{٣}ق_{١} = ٣$ ، ${}^{٣}ق_{٢} = ٣$

و بنفس الطريقة يمكن الوصول الى أن :

$(س + أ)^{٤} = (س + أ)^{٢}(س + أ)^{٢}$

$= س^{٤} + ٤أس^{٣} + ٦أ^{٢}س^{٢} + ٤أ^{٣}س + أ^{٤}$

$= س^{٤} + {}^{٤}ق_{١}(أ)س^{٣} + {}^{٤}ق_{٢}(أ)^{٢}س^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}(أ)^{٣}س + أ^{٤}$

حيث ${}^{٤}ق_{١} = ٤$ ، ${}^{٤}ق_{٢} = ٦$ ، ${}^{٤}ق_{٣} = ٤$

و هكذا يمكن استنتاج مفكوك $(س + أ)^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب حيث الطرف الأيمن يسمى مقدار ذى حدين مرفوع للأس ن ، الطرف الأيسر يسمى مفكوك هذا المقدار .

** نظرية ذات الحدين (بأس صحيح موجب) **

إذا كان الحدان هما س ، أ و الأس ن $\in$ ص$^{+}$ فإن

$(س + أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}أ س^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}أ^{٢}س^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{٣}أ^{٣}س^{ن-٣} + \cdots + أ^{ن}$ حسب قوى س التنازلية (١)

$(أ + س)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}س أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}س^{٢}أ^{ن-٢} + {}^{ن}ق_{٣}س^{٣}أ^{ن-٣} + \cdots + س^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية (٢)

*** ملاحظات على مفكوك $(س + أ)^{ن}$:**

١) عدد حدود المفكوك يزيد (١) عن الأس فعندما يكون الأس = ٤ نجد عدد حدود المفكوك =٥ و هكذا عدد حدود المفكوك = (ن + ١) حيث ن هى الأس

٢) الدليل أسفل ق يساوى دائما أس أ (الحد الثانى فى ذات الحدين)

٣) مجموع أسي أ، س دائما = ن فى أى حد من حدود المفكوك .

مثال : أوجد مفكوك $(س + م)^{٤}$ باستخدام نظرية ذات الحدين

الحل :

$$(س + م)^{٤} = س^{٤} + {}^{٤}ق_{١}\, م\, س^{٣} + {}^{٤}ق_{٢}\, م\, س^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}\, م^{٣}\, س + م^{٤}$$

$$= س^{٤} + ٤\, م\, س^{٣} + ٦\, م^{٢} س^{٢} + ٤\, م^{٣} س + م^{٤}$$

مثال : اكتب مفكوك $(٣\, س + ص)^{٥}$

الحل : $(٣\, س + ص)^{٥} = (٣\, س)^{٥} + {}^{٥}ق_{١}\, ص\, (٣\, س)^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}\, ص^{٢} (٣\, س)^{٣}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}\, ص^{٣} (٣\, س)^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}\, ص^{٤} (٣\, س) + ص^{٥}$

$= ٢٤٣\, س^{٥} + ٤٠٥\, ص\, س^{٤} + ٢٧٠\, ص^{٢} س^{٣}$

$+ ٩٠\, ص^{٣} س^{٢} + ١٥\, ص^{٤} س + ص^{٥}$

حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين :

$$(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \cdots + س^{ن}$$

$$(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} - \cdots + (- س)^{ن}$$

مثال : اكتب مفكوك $(١ - س)^{٨}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة :

$$١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \cdots + {}^{٨}ق_{٨}$$

الحل : $(١ - س)^{٨} = ١ + {}^{٨}ق_{١} (- س) + {}^{٨}ق_{٢} (- س)^{٢} + {}^{٨}ق_{٣} (- س)^{٣} + \cdots + (- س)^{٨}$

بوضع س = ١ نجد : $(١ - ١)^{٨} = ١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \cdots + ١$

$$(٠)^{٨} = ١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \cdots + {}^{٨}ق_{٨}$$

مثال : أوجد مفكوك $\left(س - \frac{٢}{س} \right)^{٤}$ باستخدام نظرية ذات الحدين

الحل : $\left(س - \frac{٢}{س} \right)^{٤} = س^{٤} - {}^{٤}ق_{١} \left(\frac{٢}{س} \right) س^{٣} + {}^{٤}ق_{٢} \left(\frac{٢}{س} \right)^{٢} س^{٢} - {}^{٤}ق_{٣} \left(\frac{٢}{س} \right)^{٣} س + \left(\frac{٢}{س} \right)^{٤}$

$$= س^{٤} - ٨\, س^{٢} + ٢٤ - \frac{٣٢}{س^{٢}} + \frac{١٦}{س^{٤}}$$

ثال : أوجد مفكوك $(١ - \sqrt{٢})^{٦}$

الحل : $(١ - \sqrt{٢})^{٦} = ١ - {}^{٦}\text{ق}_{١}(\sqrt{٢}) + {}^{٦}\text{ق}_{٢}(\sqrt{٢})^{٢} - {}^{٦}\text{ق}_{٣}(\sqrt{٢})^{٣}$

$+ {}^{٦}\text{ق}_{٤}(\sqrt{٢})^{٤} - {}^{٦}\text{ق}_{٥}(\sqrt{٢})^{٥} + (\sqrt{٢})^{٦}$

مثال : أوجد قيمة $(١١)^{٥}$ باستخدام نظرية ذات الحدين .

الحل : $(١١)^{٥} = (١ + ١٠)^{٥}$

$= ١ + {}^{٥}\text{ق}_{١}(١٠) + {}^{٥}\text{ق}_{٢}(١٠)^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}(١٠)^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}(١٠)^{٤} + (١٠)^{٥}$

$= ١ + ٥٠ + ١٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠٠ = ١٦١٠٥١$

مثال : احسب قيمة $(٠.٩٨)^{١٠}$ مقربا الجواب لأربعة أرقام عشرية .

الحل : $(٠.٩٨)^{١٠} = (١ - ٠.٠٢)^{١٠}$

$= ١ - {}^{١٠}\text{ق}_{١}(٠.٠٢) + {}^{١٠}\text{ق}_{٢}(٠.٠٢)^{٢} - {}^{١٠}\text{ق}_{٣}(٠.٠٢)^{٣}$

+ مقادير صغيرة يمكن إهمالها

$= ١ - ٠.٢ + ٤٥ \times (٠.٠٠٠٤) - ١٢٠ \times (٠.٠٠٠٠٠٨)$ تقريبا

$= ١ - ٠.٢ + ٠.٠١٨٠ - ٠.٠٠٠٩٦٠$

$= ١.٠١٨٠٠ - ٠.٢٠٠٩٦ \simeq ٠.٨١٧٠$

الحد العام فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

$$\boxed{\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \; \text{أ}^{\text{ر}} \; \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}}$$

أو

$$\boxed{\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{الثانى بإشارته})^{\text{ر}} \times (\text{الحد الأول بإشارته})^{\text{ن}-\text{ر}}}$$

أو

$$\boxed{\text{ح}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} \; \text{أ}^{\text{ر}-١} \; \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}}$$

مثال : أوجد معامل الحد السادس فى مفكوك $(٢ أ - ٣ ب)^{٨}$

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الحد الثانى باشارته)^{ر} (الحد الاول باشارته)$^{ن-ر}$

$$ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥}\,(-٣ ب)^{٥}\,(٢ أ)^{٣} = -٣٣٦\ ب^{٥}\ أ^{٣}$$

∴ معامل الحد السادس = − ٣٣٦

مثال : فى مفكوك $(٢ س + \frac{١}{٢})^{٧}$ أوجد كل من $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ حسب قوى س التنازلية

و إذا كان $ح_{٣} = ح_{٧}$ أوجد قيمة س

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الحد الثانى باشارته)^{ر} (الحد الاول باشارته)$^{ن-ر}$

$$ح_{٣} = {}^{٧}ق_{٢}\,(\frac{١}{٢})^{٢}\,(٢ س)^{٥} = ٢١ \times \frac{١}{٤} \times ٢^{٥} س^{٥} = ١٦٨ س^{٥}$$

$$ح_{٧} = {}^{٧}ق_{٦}\,(\frac{١}{٢})^{٦}\,(٢ س) = ٢١ \times \frac{١}{٦٤} \times ٢ س = \frac{٢١}{٣٢} س$$

∵ $ح_{٣} = ح_{٧}$ ∴ $١٦٨ س^{٥} = \frac{٢١}{٣٢} س$ ∴ $س^{٤} = \frac{٢١}{٥٣٧٦}$ ∴ $س = \frac{١}{١٦}$

مثال : من مفكوك $(٢ س - \frac{١}{٣ س^{٢}})^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية .

الحل : الحد الرابع من النهاية فى مفكوك $(٢ س - \frac{١}{٣ س^{٢}})^{١١}$

هو الحد الرابع من البداية فى مفكوك $(\frac{-١}{٣ س^{٢}} + ٢ س)^{١١}$

$$ح_{٤} = {}^{١١}ق_{٣}\,(٢ س)^{٣}\,(\frac{-١}{٣ س^{٢}})^{٨} = ١٦٥ \times ٢^{٣} س^{٣} \times (\frac{-١}{٣})^{٨} (\frac{١}{س^{٢}})^{٨}$$

$$= \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} \times \frac{١}{س^{١٣}}$$

<u>حل آخر</u> : رتبة الحد الرابع من النهاية = ١٢ − ٤ + ١ = ٩ هو $ح_{٩}$

$$ح_{٩} = {}^{١١}ق_{٨}\,(\frac{-١}{٣ س^{٢}})^{٨}\,(٢ س)^{٣} = {}^{١١}ق_{٨}\,(\frac{-١}{٣})^{٨}\,(\frac{١}{س^{١٦}}) \times ٢^{٣} س^{٣}$$

$$= \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} \times \frac{١}{س^{١٣}}$$

مثال : من مفكوك $(١ - س)^{٨} + ٢٤ س (١ - س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ٠٠٠ + ٦٥٦١ س^{٨}$ أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما س = ١

الحل : $(١ - س)^{٨} + ٢٤ س (١ - س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ٠٠٠ + ٦٥٦١ س^{٨}$

$= {}^{٨}ق_{٠} (٣ س)^{٠} (١ - س)^{٨} + {}^{٨}ق_{١} (٣ س) (١ - س)^{٧} + {}^{٨}ق_{٢} (٣ س)^{٢} (١ - س)^{٦}$

$+ ٠٠٠ + (٣ س)^{٨} = [(١ - س) + ٣ س]^{٨} = (١ + ٢ س)^{٨}$

$\because ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥} (٢ س)^{٥} = {}^{٨}ق_{٥} (٢^{٥}) س^{٥} = ١٧٩٢ س^{٥}$

عند س = ١ قيمة $ح_{٦} = ١٧٩٢$

ملاحظات :

(١) $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = ٢ (ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ...)$

= ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة (فى مفكوك المقدار الأول)

(٢) $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = ٢ (ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + ...)$

= ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة (فى مفكوك المقدار الأول)

مثال : أوجد صورة المفكوك $(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥}$

الحل : $(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥} = ٢ [ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦}]$

$= ٢ [{}^{٥}ق_{١} (\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٣} (\sqrt{س})^{٣} + {}^{٥}ق_{٥} (\sqrt{س})^{٥}]$

$= ٢ [٥ \sqrt{س} + ١٠ س \sqrt{س} + س^{٢} \sqrt{س}]$

$= ١٠ \sqrt{س} + ٢٠ س \sqrt{س} + ٢ س^{٢} \sqrt{س}$

مثال : أوجد لأقرب ثلاثة أرقام $(١.٠٣)^{٨} + (٠.٩٧)^{٨}$ مستخدما نظرية ذات الحدين مقربا الناتج لأقرب أربعة أرقام عشرية .

الحل : $(١.٠٣)^{٨} + (٠.٩٧)^{٨} = (١ + ٠.٠٣)^{٨} + (١ - ٠.٠٣)^{٨}$

$= ٢\,[\,ع_{١} + ع_{٣} + ع_{٥} + ع_{٧} + ع_{٩}\,]$

$= ٢\,[\,١ + {}^{٨}ق_{٢}\,(٠.٠٣)^{٢} + {}^{٨}ق_{٤}\,(٠.٠٣)^{٤}$

$+ {}^{٨}ق_{٦}\,(٠.٠٣)^{٦} + {}^{٨}ق_{٨}\,(٠.٠٣)^{٨}\,]$

$= ٢.٠٥٠٥١٣٤٤١ \simeq ٢.٠٥٠٥$

---

*__مثال__ : إذا كان $(١ + حـ\,س)^{ن} = ١ + ٢٠\,س + أ_{١}\,س^{٢} + أ_{٢}\,س^{٣} + \cdots$
$+ أ_{ن-١}\,س^{ن}$

و كان $١٦\,أ_{١} = ٣\,أ_{٢}$ أوجد قيمة كل من ن ، حـ حيث $حـ \neq ٠$

الحل : $(١ + حـ\,س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\,(حـ\,س) + {}^{ن}ق_{٢}\,(حـ\,س)^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,(حـ\,س)^{٣} + \cdots$

$= ١ + {}^{ن}ق_{١}\,حـ\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,حـ^{٢}\,س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,حـ^{٣}\,س^{٣} + \cdots$

$\because {}^{ن}ق_{١}\,حـ = ٢٠ \quad \therefore ن\,حـ = ٢٠ \quad \therefore حـ = \frac{٢٠}{ن}$ (١)

$\because ١٦\,أ_{١} = ٣\,أ_{٢} \quad \therefore ١٦\,{}^{ن}ق_{٢}\,حـ^{٢} = ٣\,{}^{ن}ق_{٣}\,حـ^{٣}$

$\therefore ١٦\,{}^{ن}ق_{٢} = ٣\,{}^{ن}ق_{٣}\,حـ$ (٢) بالتعويض من ١ فى ٢ نجد :

$\therefore ١٦\,{}^{ن}ق_{٢} = ٣\,{}^{ن}ق_{٣} \times \frac{٢٠}{ن} \qquad \therefore ١٦ = ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} \times \frac{٢٠}{ن}$

$\therefore \frac{١٦}{٢٠ \times \cancel{٣}} = \frac{ن - ٢}{\cancel{٣}} \qquad \therefore \frac{٤}{٥} = \frac{ن - ٢}{ن}$

$\therefore ٥\,ن - ١٠ = ٤\,ن \quad \therefore ن = ١٠$ و بالتعويض فى (١) نجد : $حـ = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$

مثال : إذا كان $(١ + حـ\,س)^{ن} = أ_{.} + أ_{١}\,س + أ_{٢}\,س^{٢} + أ_{٣}\,س^{٣} + \cdots + أ_{ن}\,س^{ن}$

و كان $أ_{١} = ١٠$ ، $أ_{٣} = ٢\,أ_{٢}$ أوجد قيمة كلا من ن ، حـ

الحل : $(١ + حـ\,س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\,(حـ\,س) + {}^{ن}ق_{٢}\,(حـ\,س)^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}\,(حـ\,س)^{٣}$
$+ \cdots + {}^{ن}ق_{ن}\,حـ^{ن}\,س^{ن}$

$\therefore أ_{١} = {}^{ن}ق_{١}\,حـ \quad \therefore ن\,حـ = ١٠$ (١)

$\because أ_{٣} = ٢\,أ_{٢} \quad \therefore {}^{ن}ق_{٣}\,حـ^{٣} = ٢ \times {}^{ن}ق_{٢}\,حـ \quad \therefore \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}}\,حـ^{٢} = ٢$

∴ $\frac{ن - ٢}{٣}\, حـ^{٢} = ٢$ ∴ $(ن - ٢)\, حـ^{٢} = ٦$ (٢) بقسمة (١) على (٢)

∴ $\frac{ن\, حـ}{(ن - ٢)\, حـ} = \cancel{\frac{١٠}{٦}}$ ∴ $٥\, (ن - ٢) = ٣\, ن$

∴ ن = ٥ وبالتعويض فى (٢) نجد : حـ = ٢

مثال : من مفكوك $(١ + حـ\, س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠ و كان الحد الخامس يساوى ٢١٠ أوجد قيمة كل من حـ ، س حيث حـ عدد صحيح موجب .

الحل : الحد العام : $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, أ^{ر}\, س^{ن-ر}$

∵ $ح_{٣} = {}^{١٠}ق_{٢}\, (حـ\, س)^{٢} = ٤٥\, حـ^{٢}\, س^{٢}$ ∴ $٤٥\, حـ^{٢} = ١٨٠$ ∴ $حـ^{٢} = ٤$ ∴ حـ = ٢

∵ $ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤}\, (حـ\, س)^{٤} = ٢١٠\, حـ^{٤}\, س^{٤} = ٢١٠$ ∴ $(٢)^{٤}\, س^{٤} = ١$ ∴ $س^{٤} = \frac{١}{٤}$

∴ $س = \frac{١}{٢}$

مثال : إذا كانت النسبة بين $ح_{٦}$ من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ ، $ح_{٥}$ من مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٤}$ تساوى $\frac{٨}{٩}$ أوجد قيمة س

الحل : ∵ $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{{}^{١٥}ق_{٥}\, س^{١٠}\, (\frac{١}{س})^{٥}}{{}^{١٥}ق_{٤}\, س^{١٠}\, (\frac{-١}{س^{٢}})^{٥}} = \frac{٨}{٩}$ ∴ $٣\, س^{٣} = \frac{٨}{٩}$ ∴ $س^{٣} = \frac{٨}{٢٧}$

∴ $س = \frac{٢}{٣}$

مثال : باستخدام مفكوك $(١ + س)^{ن}$ أثبت أن :

$${}^{ن}ق_{٠} + ٣ \times {}^{ن}ق_{١} + ٩ \times {}^{ن}ق_{٢} + ٢٧ \times {}^{ن}ق_{٣} + \cdots + ٣^{ن} \times {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{٢ن}$$

الحل : ∵ $(١ + س)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$

و للحصول على $٢^{٢ن}$ أى $٤^{ن}$ نضع س = ٣ فى الطرفين

$$\therefore (٤)^{ن} = {}^{ن}ق_{.} + {}^{ن}ق_{١}(٣) + {}^{ن}ق_{٢}(٩) + \cdots + {}^{ن}ق_{ن}(٣)^{ن}$$

$$(٢)^{٢ن} = {}^{ن}ق_{.} + {}^{ن}ق_{١}(٣) + {}^{ن}ق_{٢}(٩) + \cdots + {}^{ن}ق_{ن}(٣)^{ن}$$

ملحوظة هامة :

لإيجاد معامل أى حد فى مفكوك $(س + ٩)^{ن}$ نطبق قانون الحد العام ثم نضع س = ١ فى الناتج و بذلك يكون :

معامل $ح_{ر+م} = {}^{ن}ق_{ر}$ (معامل الثانى بإشارته $)^{ر}$ × (معامل الأول بإشارته $)^{ن - ر}$

مثال : أوجد معامل $س^{٢}$ فى مفكوك $(١ + س + س^{٢})^{٥}$

الحل : فى مفكوك $[١ + (س + س^{٢})]^{٥}$

$$\because ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_{ر}\ (س + س^{٢})^{ر} = {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \times (١ + س)^{ر}$$

$$= {}^{٥}ق_{ر} \times س^{ر} \times {}^{ر}ق_{م}(س)^{م} = {}^{٥}ق_{ر} \times {}^{ر}ق_{م} \times س^{ر+م}$$

لايجاد معامل $س^{٢}$ نضع ر + م = ٢ حيث م ≤ ر < ٢

ر	١	٢
م	١	٠

$$معامل\ س^{٢} = {}^{٥}ق_{١} \times {}^{١}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٢}ق_{.} = ٥ \times ١ + ١٠ \times ١ = ١٥$$

- **تطبيقات على قانون الحد العام فى مفكوك $(س + ٩)^{ن}$:**

[ايجاد الحد الأوسط فى المفكوك]

١) إذا كان ن عددا فردياً فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون زوجياً وبالتالى فإنه يوجد حدان أوسطان هما $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن+٣}{٢}}$

٢) إذا كان ن عددا زوجياً فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون فردياً و بالتالى يوجد حد أوسط واحد فى المفكوك هو $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$ أ، $ح_{\frac{ن+٢}{٢}}$

مثال : فى مفكوك $(\text{٢ س} + \text{٣ ص})^{١٢}$ أوجد قيمة :

أولا : $ح_{٤}$ ثانيا : الحد الأوسط ثالثا : معامل $ح_{١٠}$

الحل :

أولا : $ح_{٤} = {}^{١٢}ق_{٣}\,(\text{٣ ص})^{٣}\,(\text{٢ س})^{٩} = {}^{١٢}ق_{٣} \times ٣^{٣} \times ٢^{٩}\ \text{ص}^{٣}\text{س}^{٩}$

$= ٣٠٤١٢٨٠\ \text{ص}^{٣}\text{س}^{٩}$

ثانيا : $\because$ ن = ١٢ (زوجى) $\therefore$ عدد حدود المفكوك = ١٣

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \dfrac{ن + ٢}{٢} = \dfrac{١٢ + ٢}{٢} = ٧$ $\therefore$ الحد هو $ح_{٧}$

$\therefore ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}\,(\text{٣ ص})^{٦}\,(\text{٢ س})^{٦}$

ثالثا : $\because ح_{١٠} = {}^{١٢}ق_{٩}\,(\text{٣ ص})^{٩}\,(\text{٢ س})^{٣}$

معامل $ح_{١٠} = {}^{١٢}ق_{٩} \times ٣^{٩} \times ٢^{٣} = ٣٤٦٤٢٠٨٠$

مثال إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(\text{٣ س} + \text{٢ ص})^{١٣}$ متساويين

فأثبت أن : $\dfrac{س}{ص} = \dfrac{٢}{٣}$

الحل : $\because$ ن = ١٣ (فردى) $\therefore$ عدد الحدود = ١٤ $\therefore$ رتبتهما $\dfrac{ن + ١}{٢}$ ، $\dfrac{ن + ٣}{٢}$

$\therefore$ الحدان الأوسطان هما $ح_{٧}$ ، $ح_{٨}$ $\because ح_{٧} = ح_{٨}$

$\therefore {}^{١٣}ق_{٦}\,(\text{٢ ص})^{٦}\,(\text{٣ س})^{٧} = {}^{١٣}ق_{٧}\,(\text{٢ ص})^{٧}\,(\text{٣ س})^{٦}$

$\therefore {}^{١٣}ق_{٦} \times ٢^{٦} \times ٣^{٧}\ \text{ص}^{٦}\text{س}^{٧} = {}^{١٣}ق_{٧} \times ٢^{٧} \times ٣^{٦}\ \text{ص}^{٦}\text{س}^{٦}$

بالقسمة على $\text{ص}^{٧}\text{س}^{٦}$ الطرفين

$\therefore \dfrac{س}{ص} = \dfrac{{}^{١٣}ق_{٧}}{{}^{١٣}ق_{٦}} \times \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{١٣ - ٦}{٧} \times \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{٢}{٣}$

مثال : أوجد الحد الأوسط من مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \dfrac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٠}$ وإذا كانت قيمة هذا الحد $\dfrac{٢٨}{٢٧}$

أوجد قيمة س .

الحل : ∵ $ن = ١٠$ ∴ عدد حدود المفكوك $= ١١$ ∴ الحد الأوسط رتبته $\frac{ن + ٢}{٢} = ٦$

$$∴ ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{٥} \left(س^{٢}\right)^{٥} = {}^{١٠}ق_{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times س^{٥} = \frac{٦٣}{٨}\ س^{٥}$$

$$∵ ح_{٦} = \frac{٢٨}{٢٧} \quad ∴ \frac{٦٣}{٨} س^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧} \quad ∴ س^{٥} = \frac{٢٨ \times ٨}{٢٧ \times ٦٣} = \frac{٣٢}{٢٤٣} \quad ∴ س = \frac{٢}{٣}$$

مثال : أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٣ + ٢س)^{٨} + (٣ - ٢س)^{٨}$

الحل : $ن = ٨$ ∴ رتبة الحد الأوسط $= \frac{ن + ٢}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢س)^{٤} (٣)^{٤} + {}^{٨}ق_{٤} (-٢س)^{٤} (٣)^{٤}$$

$$= ٢ \times {}^{٨}ق_{٤} (٢س)^{٤} (٣)^{٤} = ١٨١٤٤٠ س^{٤}$$

مثال : أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(٣ + ٢س)^{٨} - (٣ - ٢س)^{٨}$

الحل : $ن = ٨$ ∴ رتبة الحد الأوسط $= \frac{ن + ٢}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢س)^{٤} (٣)^{٤} - {}^{٨}ق_{٤} (-٢س)^{٤} (٣)^{٤} = \text{صفر}$$

مثال : فى مفكوك $(٣ - ٢س)^{ن}$ حسب س التصاعدية كانت نسبة الحد الخامس الى الحد السابع $= \frac{٩}{٣٢}$ أوجد قيمة ن عندما $س = ١$

الحل : $ح_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} (-٢س)^{٤} (٣)^{ن-٤} = {}^{ن}ق_{٤} (-٢)^{٤} (٣)^{ن-٤}$

$$ح_{٧} = {}^{ن}ق_{٦} (-٢س)^{٦} (٣)^{ن-٦} = {}^{ن}ق_{٦} (-٢)^{٦} (٣)^{ن-٦}$$

$$∵ \frac{ح_{٥}}{ح_{٧}} = \frac{٩}{٣٢} \quad ∴ \frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{٣٢}{٩} \quad ∴ \frac{{}^{ن}ق_{٦} (-٢)^{٦} (٣)^{ن-٦}}{{}^{ن}ق_{٤} (-٢)^{٤} (٣)^{ن-٤}} = \frac{٣٢}{٩}$$

$$∴ \frac{{}^{ن}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}} \times \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٤}} \times (-٢)^{٢} \times (٣)^{-٢} = \frac{٣٢}{٩} \quad ∴ \frac{ن - ٥}{٦} \times \frac{ن - ٤}{٥} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٣٢}{٩}$$

$$∴ (ن - ٢٠)(ن + ١١) = ٠ \quad ∴ ن = ٢٠$$

إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

* **خطوات الحد المشتمل على $س^{ك}$ من المفكوك :**

١- نفرض أن هذا الحد هو الحد العام $ح_{ر+١}$ و نوجد هذا الحد بدلالة ر

٢- نوجد مجموع قوى س فى الحد العام بدلالة ر ونضع هذا المجموع مساويا للقوة المطلوبة ك و منها نوجد ر التى تحقق احتواء هذا الحد على القوة المطلوبة ك
و نلاحظ ما يلى :
أولا : إذا كان $ر \in ط$ يكون ر + ١ هو الحد المطلوب .
ثانيا : إذا كان $ر \notin ط$ لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك .

٣- لأيجاد الحد الخالى من س نضع مجموع قوى س من الحد العام = صفر

مثال : من مفكوك $\left(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س}\right)^{١١}$ أوجد :
اولا : معامل س   ثانيا : معامل $س^{٥}$ ثالثا : اثبت انه لا يوجد حد خالى من س

الحل : نفرض أن س موجودة فى الحد العام :

$$ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \text{ (الحد الثانى باشارته) }^{ر} \text{ (الحد الاول باشارته) }^{ن-ر}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{٢}{٣س}\right)^{ر} \left(\frac{٣س}{٢}\right)^{١١-ر}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ر} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر} (س)^{١١-ر-ر}$$

اولا : بوضع أس (س) = ١١ ـ ٢ ر = ١   ∴ ١٠ = ٢ ر   ∴ ر = ٥

∴ الحد المطلوب هو $ع_{٦}$ ∴ معامل س = ${}^{١١}ق_{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦} = ٦٩٣$

ثانيا : بوضع ١١ ـ ٢ ر = ٥   ∴ ١١ ـ ٥ = ٢ ر   ∴ ٢ ر = ٦   ∴ ر = ٣

∴ الحد المطلوب هو $ع_{٤}$ ∴ معامل $س^{٥}$ = ${}^{١١}ق_{٤} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٧} = \frac{٤٤٥٥}{٤}$

ثالثا : بوضع ١١ ـ ٢ ر = ٠   ∴ ر = $\frac{١١}{٢} \notin ص^{+}$ ∴ لا يوجد حد خالى من س

مثال : إذا كان فى مفكوك $(س^{٣} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ حداً خاليا من س فأثبت أنه يجب أن تكون ن مضاعفاً للعدد ٥ ثم أوجد الحد الخالى من س فى المفكوك عندما ن = ١٠

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} (س^{٣})^{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر} (س)^{٣ن-٣ر-٢ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} (س)^{٣ن-٥ر}$

بوضع ٣ ن ـ ٥ ر = ٠　∴ $ر = \frac{٣ ن}{٥} \in ص^{+}$

∴ ن لابد أن تقبل القسمة على ٥

و عندما ن = ١٠　∴ $ر = \frac{٣٠}{٥} = ٦$　∴ الحد الخالى من س = $ح_{٧}$

∴ $ح_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦} = ٢١٠$

مثال : أوجد معامل $س^{-١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٢}{س^{٢}} \right)^{١٥}$

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٢}}\right)^{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٣}\right)^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٣}\right)^{١٥-ر} (س)^{٣٠-٢ر-٢ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٣}\right)^{١٥-ر} (س)^{٣٠-٤ر}$

بوضع ٣٠ ـ ٤ ر = ـ ١٠　∴ ٤٠ = ٤ ر　∴ ر = ١٠

∴ الحد $ح_{١١}$ هو المطلوب　∴ المعامل = $ {}^{١٥}ق_{١٠} (٢)^{١٠} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$

مثال : من مفكوك $\left(أ س + \frac{٢}{ب س} \right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع . أثبت أن ٦ أ ب = ٥

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{٢}{ب س}\right)^{ر} (أ س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{٢}{ب}\right)^{ر} (أ)^{١٠-ر} (س)^{١٠-٢ر}$

بوضع ١٠ ـ ٢ ر = ٠ ∴ ر = ٥ ∴ الحد الخالى من س = $ع_6$

$$ع_6 = {}^{10}\text{ق}_5 \left(\frac{2}{\text{ب}}\right)^5 (\text{أ})^5 = {}^{10}\text{ق}_5 (2)^5 \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^5 \quad (1)$$

$$ع_7 = {}^{10}\text{ق}_6 \left(\frac{2}{\text{ب}}\right)^6 (\text{أ})^4 (\text{س})^{-2} = {}^{10}\text{ق}_6 (2)^6 \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^6 (\text{أ})^4 (\text{س})^{-2}$$

$$= {}^{10}\text{ق}_6 (2)^6 \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^4 \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^2 (\text{س})^{-2}$$

معامل الحد $ع_7$ $= {}^{10}\text{ق}_6 (2)^6 \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^4 \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^2 \quad (2)$

∵ الحد الخالى من س = معامل الحد السابع

$$\therefore {}^{10}\text{ق}_5 (2)^5 \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^5 = {}^{10}\text{ق}_6 (2)^6 \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^4 \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^2$$

$$\therefore \text{ب}^2 \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{{}^{10}\text{ق}_6 (2)^6}{{}^{10}\text{ق}_5 (2)^5} \quad \therefore \text{أ ب} = \frac{10-5}{6} \times 2 = \frac{5}{3}$$

$$\therefore 3\,\text{أ ب} = 5$$

مثال: فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}\right)^6$ يوجد حد خالى من س لبعض قيم م الصحيحة الموجبة

الحل: $ع_{ر+1} = {}^{6}\text{ق}_{ر} \left(\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}\right)^{ر} (\text{س})^{6-ر} = {}^{6}\text{ق}_{ر} (\text{س})^{6-ر-\text{م}ر}$

بوضع ٦ ـ ر ـ م ر = ٠ ∴ ٦ - ر = م ر ∴ $\text{م} = \frac{6-ر}{ر}$

ر	١	٢	٣	٤	٥	٦
م	٥	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	صفر

$\underbrace{\hspace{3em}}_{\text{مرفوض}}$

∵ ر لا تزيد عن ن ∴ ر لا تزيد عن ٦

∴ م ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ }

مثال : من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد :

(أ) معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$

(ب) إذا كانت ن = ٦ أوجد النسبة بين معامل الحد الذى يشتمل على $س^{٣ن}$ و معامل الحد الأوسط

الحل : $ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{٣ن - ر} = {}^{٣ن}ق_{ر} (س)^{٦ن - ٣ر}$

بوضع ٦ ن ـ ٣ ر = ٣ ن　　∴ ٣ ن = ٣ ر　　∴ ن = ر

∴ معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن} = {}^{٣ن}ق_{ن}$

عند ن = ٦　　∴ معامل الحد = ${}^{١٨}ق_{٦}$

عند ن = ٦　∴ الاس = ١٨　∴ رتبة الحد = $\frac{١٨ + ٢}{٢}$ = ١٠

∴ الحد هو $ح_{١٠}$ ∴ معامل الحد الاوسط = ${}^{١٨}ق_{٩}$

∴ النسبة = $\frac{{}^{١٨}ق_{٦}}{{}^{١٨}ق_{٩}}$ = ٢١ : ٥٥

مثال : أوجد معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + ٣ س + ٣ س^{٢} + س^{٣})^{٤}$

الحل : المفكوك $(١ + ٣ س + ٣ س^{٢} + س^{٣})^{٤} = [(١ + س)^{٣}]^{٤} = (١ + س)^{١٢}$

∵ ن = ١٢　∴ حد الاوسط رتبته = $\frac{١٢ + ٢}{٢}$ = ٧　∴ $ح_{٧}$ هو الاوسط

∴ $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦} (س)^{٦}$　∴ معامل الحد الاوسط = ${}^{١٢}ق_{٦}$ = ٩٢٤

مثال: من مفكوك $(٢ + \frac{١}{س})^{٩}$ أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الاوسطين متساويين

الحل : ∵ ن = ٩　∴ رتبة الحدان الاوسطان هما $\frac{٩ + ١}{٢}$ ، $\frac{٩ + ٣}{٢}$ اى $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

∵ $ح_{٥} = ح_{٦}$　∴ ${}^{٩}ق_{٤} \left(\frac{١}{س}\right)^{٤} (٢)^{٥} = {}^{٩}ق_{٥} \left(\frac{١}{س}\right)^{٥} (٢)^{٤}$　∴ س = $\frac{١}{٢}$

<u>حل آخر</u> : نستخدم قاعدة النسبة التالية $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{٩ - ٥ + ١}{٥} \times \left(\frac{١}{س} \div ٢\right) = ١$

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ يكون :

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{الحد الثانى باشارته}}{\text{الحد الأول باشارته}}$$

* نتيجة : فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ يكون :

$$\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثانى باشارته}}{\text{معامل الحد الأول باشارته}}$$

مثلا : $\frac{\text{ع}_7}{\text{ع}_6} = \frac{\text{ن} - 6 + 1}{6} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_7} = \frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_8} \times \frac{\text{ع}_8}{\text{ع}_7}$

مثال : من مفكوك $(3\text{س} + 2\text{ص})^{13}$ أوجد : $\frac{\text{معامل ع}_7}{\text{معامل ع}_6}$ ، $\frac{\text{معامل ع}_6}{\text{معامل ع}_7}$ ، $\frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_8}$ ، $\frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_7}$

الحل :

$$\frac{\text{معامل ع}_7}{\text{معامل ع}_6} = \frac{13 - 6 + 1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{\text{معامل ع}_6}{\text{معامل ع}_7} = \frac{6}{13 - 6 + 1} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_8} = \frac{13 - 8 + 1}{8} \times \frac{2\text{ص}}{3\text{س}} = \frac{6}{8} \times \frac{2\text{ص}}{3\text{س}} = \frac{\text{ص}}{2\text{س}}$$

$$\frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_7} = \frac{\text{ع}_9}{\text{ع}_8} \times \frac{\text{ع}_8}{\text{ع}_7} = \frac{13 - 8 + 1}{8} \times \frac{2\text{ص}}{3\text{س}} \times \frac{13 - 7 + 1}{7} \times \frac{3\text{س}}{2\text{ص}}$$

$$= \frac{6}{8}$$

مثال : من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$ إذا كان $٢\ \text{ح}_{٥} = \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦}$ أوجد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ عدديا

الحل : بالقسمة على $\text{ح}_{٥}$ الطرفين نجد : $\frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٥}} + \frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٥}} = ٢$

$$\therefore \frac{٤}{٨ - ٤ + ١} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{٨ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٢$$ بالضرب فى س ص

$$\therefore \frac{٤}{٥}\text{س}^{٢} + \frac{٤}{٥}\text{ص}^{٢} = ٢\ \text{س ص} \qquad \therefore ٤\ \text{س}^{٢} - ١٠\ \text{س ص} + ٤\ \text{ص}^{٢} = ٠$$

$$\therefore ٢\ \text{س}^{٢} - ٥\ \text{س ص} + ٢\ \text{ص}^{٢} = ٠ \qquad \therefore (٢\ \text{س} - \text{ص})(\text{س} - ٢\ \text{ص}) = ٠$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١}{٢} \quad \text{أ،} \quad \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}$$

مثال : إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(١ - \text{س})^{\text{ن}}$ هى ١، ـ ٤، ١١ حسب قوى س التصاعدية . أوجد قيمة كل من ن ، رتب الحدود الثلاثة .

الحل : نفرض الحدود الثلاثة هى $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+٢}$

$$\therefore \frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{-١}{١} = \frac{-٤}{١}$$

$$\therefore \text{ن} - \text{ر} + ١ = ٤\ \text{ر} \qquad \therefore \text{ن} - ٥\ \text{ر} + ١ = ٠ \qquad (١)$$

$$\therefore \frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}} = \frac{\text{ن} - (\text{ر} + ١) + ١}{\text{ر} + ١} \times \frac{-١}{١} = \frac{١١}{-٤}$$

$$\therefore \frac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + ١} = \frac{١١}{٤} \qquad \therefore ٤\ \text{ن} - ٤\ \text{ر} = ١١\ \text{ر} + ١١$$

$$\therefore ٤\ \text{ن} - ١٥\ \text{ر} - ١١ = ٠ \qquad (٢)$$

بحل المعادلتين جبريا نجد : ن = ١٤ ، ر = ٣ $\therefore$ الحدود هى $\text{ح}_{٣}$ ، $\text{ح}_{٤}$ ، $\text{ح}_{٥}$.

* **ايجاد أكبر حد فى المفكوك :**

مثال : أوجد معامل أكبر حد فى مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{١٠}$

الحل : $\because \frac{\text{معامل } ع_{ر+١}}{\text{معامل } ع_{ر}} = \frac{١٠ - ر + ١}{ر} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٣٣ - ٣ر}{٢ ر}$

أولا : $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} \geqslant ١ \quad \therefore ٣٣ - ٣ر \geqslant ٢ ر \quad \therefore ٥ر \leqslant ٣٣ \quad \therefore ر \leqslant ٦,٦$

و من ذلك نجد : $ع_٧ > ع_٦ > ع_٥ > \cdots > ع_١$

ثانيا : $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} \leqslant ١ \quad \therefore ٣٣ - ٣ر \leqslant ٢ ر \quad \therefore ٥ر \geqslant ٣٣ \quad \therefore ر \geqslant ٦,٦$

و من ذلك نجد : $ع_٧ > ع_٨ > ع_٩ > ع_{١٠} > ع_{١١}$

$\therefore ع_٧$ هو أكبر حد فى المفكوك $\quad \therefore$ معامل $ع_٧ = {}^{١٠}ق_٦ (٣)^٦ (٢)^٤ = ٢٤٤٩٤٤٠$

مثال : فى مفكوك $(١ + م س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية .

معامل $ع_٣ = \frac{٤٥}{٤}$ معامل $ع_١$ ، معامل $ع_٥ = \frac{٧}{٦}$ معامل $ع_٣$

احسب كلا من ن ، م

الحل : $\frac{\text{معامل } ع_٣}{\text{معامل } ع_٢} \times \frac{\text{معامل } ع_٢}{\text{معامل } ع_١} = \frac{٤٥}{٤} \quad \therefore \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{م}{١} \times \frac{ن - ١ + ١}{١} \times \frac{م}{١} = \frac{٤٥}{٤}$

$\therefore \frac{(ن - ١) ن م^٢}{٢} = \frac{٤٥}{٤} \quad \therefore ٢ ن م^٢ (ن - ١) = ٤٥ \quad (١)$

$\because \frac{\text{معامل } ع_٥}{\text{معامل } ع_٤} \times \frac{\text{معامل } ع_٤}{\text{معامل } ع_٣} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{م}{١} \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{م}{١} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{(ن - ٣)(ن - ٢) م^٢}{١٢} = \frac{٧}{٦} \quad \therefore (ن - ٣)(ن - ٢) م^٢ = ١٤ \quad (٢)$

بحل المعادلتين نجد : ن = ١٠ ، ن = $\frac{٢٧}{١٧}$ مرفوض و بالتعويض م = $\pm \frac{١}{٢}$

تمارين على ذات الحدين (١)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان رتبتا الحدان الأوسطان في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هما ٧، ٨ فإن ن تساوى:

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (ج) ١٦ (د) ٥٦

(٢) إذا كان $١ + ٥ س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + \text{......} + س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن س تساوى:

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ١٠ (د) ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{٧}$ يساوى:

(أ) $٢^{٧}$ (ب) $٢^{٥}$ (ج) $٢^{٦}$ (د) صفر

(٤) معامل الحد الخامس من مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$.

(أ) $١٦ \; {}^{١٠}ق_{٥}$ (ب) $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_{٥}$ (ج) $١٦ \; {}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_{٤}$

(٥) في مفكوك ذى الحدين إذا كان الحد العام هو ${}^{١٢}ق_{ر} \; س^{٢٤ - ٤ر}$ يكون الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو:

(أ) $ح_{٣}$ (ب) $ح_{٤}$ (ج) $ح_{٥}$ (د) لايوجد

(٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + ٢ب)^{٢ن + ١}$ متساويين فإن:

(أ) $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ (ب) أ = ٤ب (ج) أ = ٨ب (د) أ = ٢ب

(٧) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(\frac{أ^{٢}}{٣} + \frac{ب}{٢أ})^{٨ن}$ هو الحد التاسع فإن ن تساوى:

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٨) في مفكوك $(١ + ب س)^{٩}$ يكون معامل الحد السادس هو:

(أ) ${}^{٩}ق_{٥}$ (ب) ${}^{٩}ق_{٦}$ (ج) ${}^{٩}ق_{٥} \; ب^{٥}$ (د) ${}^{٩}ق_{٦} \; ب^{٦}$

(٩) في مفكوك ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة:

(أ) $(أ - ب)^{١٢}$ (ب) $(أ - ب)^{١٣}$ (ج) $(أ + ب)^{١٢}$ (د) $(أ - ب)^{١٣}$

(١٠) الحد المشتمل على $س^٤$ في مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ يساوى:

(أ) $^{١٥}ق_٤$ (ب) $\frac{١}{١٦}\ {}^{١٠}ق_٤$ (جـ) $١٦\ {}^{١٠}ق_٤$ (د) $٣٢ \times {}^{١٠}ق_٥$

(١١) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ يكون الحد الخالي من س هو:

(أ) $ح_٤$ (ب) $ح_٥$ (جـ) $ح_٦$ (د) لايوجد حد خال من س

(١٢) في مفكوك $س^٣ (١ + س)^٧$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^٤$ هو:

(أ) $^٧ق_٤$ (ب) $^٧ق_٣$ (جـ) $^٧ق_١$ (د) ٢١

(١٣) في مفكوك $(س^٢ + \frac{٢}{س})^٦$ يكون الحد الخالي من س هو الحد

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) لا يوجد حد خال من س

(١٤) في مفكوك $(أس^٢ + \frac{١}{أس})^{١١}$ إذا كان معاملا $س^٤$، $س^٧$ متساويين فإن أ =

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ١± (د) ٢±

(١٥) إذا كان الحد الخال من س في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^ن$ هو $ح_٧$ فإن ن =

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

(١٦) في مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{أس})^٨$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^٧$ فإن أ =

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(١٧) في مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوى معامل الحد السابع فإن:

(أ) أ ب = $\frac{٦}{٥}$ (ب) أ ب = $\frac{٥}{٦}$ (جـ) أ ب = $\frac{٣٦}{٢٥}$ (د) أ ب = $\frac{٢٥}{٣٦}$

(١٨) الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س})^٨$

(أ) ٣٥ (ب) ١٤٠ (جـ) ٧٠ (د) ٥٦

(١٩) في مفكوك $(١ + أ س)^٧$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_٥$ = ٥٦٠ فإن أ =

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢± (د) ٤±

(٢٠) في مفكوك $(س+ص)^{١٠}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ....

(أ) $\frac{٣ص}{٨س}$ (ب) $\frac{٣س}{٨ص}$ (جـ) $\frac{٨ص}{٣س}$ (د) $\frac{٨س}{٣ص}$

(٢١) في مفكوك $(١ - س)^{١٢}$ معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس ....

(أ) $(\frac{٨}{٥})$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-٨}{٥}$ (د) $\frac{-٥}{٨}$

(٢٢) في مفكوك $(س + ص)^{٨}$ تكون نسبة $\frac{ح_٦}{ح_٤}$ = ...

(أ) $\frac{٢٥ ص^٢}{١٦ س^٢}$ (ب) $\frac{٢٥س^٢}{١٦ ص^٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{ص^٢}{س^٢}$

(٢٣) في مفكوك $(٣أ - ٢ ب)^{١١}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٣}{٢}$ فإن أ : ب = ...

(أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ١ (د) -١

(٢٤) من مفكوك $(١ + س)^{ن} = ١ + أ_١س + أ_٢س^٢ + أ_٣س^٣ + أ_٤س^٤ + \_\_ + أ_{١٠}س^{١٠}$ وكان $\frac{أ_٢ + أ_٢}{أ_٢} = ٣$ فإن ن = ___

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٢٥) إذا كان $١ + \frac{٥}{٢}س + \frac{٥ \times ٤}{٤\,\underline{|٢}}س^٢ + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٨\,\underline{|٢}}س^٣ + \_\_ + \frac{١}{٣٢}س^٥ = ١٠٢٤$ فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٦) من مفكوك $(أس + ب)^{٢ن + ١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن = ...

(أ) أ = ٢ ب (ب) ب = ٢أ (جـ) أب = ٢ (د) أب = $\frac{١}{٢}$

أجب عن الاسئلة الآتية :

(١) إذا كان $١ + ٨س + {}^{٨}ق_{٢} س^٢ + \_\_ + س^٨ = ٢٥٦$ أوجد قيمة س

(٢) أوجد لأقرب رقم من ألف مستخدمًا نظرية ذي الحدين قيمة كل من :

(أ) $(١,٠٠٣)^٥$ (ب) $(٠,٩٩٨)^٧$ (جـ) $(١,٠١)^٦ + (٠٠,٩٩)^٦$ (د) $(١,٠٢)^٨ - (٠,٩٨)^٨$

(٣) أوجد قيمة س التي تحقق $(١ + \sqrt{٣})^٦ - (١ - \sqrt{٣})^٦ = ٤٨٠ \sqrt{٣}$ س

(٣) باستخدام المفكوك : $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}س + {}^{١٠}ق_{٢}س^٢ + \_\_ + س^{١٠}$ أثبت أن:

(أ) $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + \_\_ + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$ (ب) $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - \_\_ + {}^{١٠}ق_{١٠}$ = صفر

③ اكتب مفكوك كلًا من :

(أ) $(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢})^٤$　　　(ب) $(س - \frac{١}{س})^٥$

(ج) $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤$　　　(د) $(\sqrt{٣} + ٢س)^٥ - (\sqrt{٣} - ٢س)^٥$

④ من مفكوك $(١ + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_٣ = ٢٨س^٢$ ، $ح_٥ = ١١٢٠$ أوجد قيمة كل من: ن، س

⑤ من مفكوك $(١ + س)^ن$ إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة ن.

⑥ من مفكوك $(أ س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معامل $ح_٦ = \frac{٦٣}{٨}$ اثبت ان ٢ أب = ١

⑦ من مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد الحد الأوسط.

⑧ من مفكوك $(\frac{س^٢}{٢} - \frac{٢}{س})^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين.

⑨ من مفكوك $س^٤(س - \frac{١}{س})^٩$ حسب قوى س التنازلية، أوجد الحد الرابع من النهاية.

⑩ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{٣س})^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$ فأوجد قيمة س.

⑪ أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٠}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما س = ٣

⑫ إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س^٣ + \frac{١}{س})^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{١}{س^٢})^{١٤}$ تساوى -١٦ : ١٥ أوجد قيمة س

⑬ فى مفكوك $(٤س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد الحد الخالى من س

⑭ أوجد معامل $س^{١٢}$ فى مفكوك $س^٢ (\frac{س^٢}{٢} + \frac{٢}{س^٢})^{١٥}$

⑮ إذا كان الحد السادس فى مفكوك $(٢س - \frac{١}{س^٣})^ن$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س، أوجد قيمة ن، ثم ابحث هل احد حدود هذا المفكوك يشتمل على $س^{-٦}$ أم لا؟

⑯ فى مفكوك $(٢س - \frac{١}{س^٢})^٩$ أوجد :

أولًا: معامل $س^٣$　　　**ثانيًا** : الحد الخالى من س

ثالثًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على $س^٢$

(١٧) أثبت أن $\,^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \div \,^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-١} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$ وإذا كانت النسبة بين معامل $\text{ع}_{١١}$ في مفكوك $(١ + \text{س}^{٢})^{\text{ن}}$ ومعامل $\text{ع}_{١٠}$ في

(١٨) مفكوك $(١ - \text{ص})^{\text{ن}-١}$ تساوى ‎-٣ : ٢ أوجد قيمة ن.

(١٩) أوجد معامل $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٤}$ من مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

(٢٠) أوجد معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ في مفكوك $(١ + \text{س})^{٢\text{ن}}$ ، ثم أثبت أنه يساوى ضعف معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ من مفكوك $(١ + \text{س})^{٢\text{ن}-١}$

(٢١) في مفكوك $\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{ن}}$ أثبت أن الحد الخالي من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨

(٢٢) في مفكوك $\left(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب. أوجد :

أولاً: قيمة ك التي تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س

ثانيًا: النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التي حصلت عليها من أولًا.

(٢٣) في مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{أ}\text{س}}\right)^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل $\text{س}^{٣}$ من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ ، أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما س = ٢.

(٢٣) في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٠}$ إذا كان معامل $\text{س}^{٥}$ يساوى معامل $\text{س}^{١٥}$ أوجد قيمة أ.

(٢٤) في مفكوك $\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٨}}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية :

أولًا: أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س **ثانيًا:** إذا كان $\text{ع}_{٤} = \text{ع}_{١١}$ أوجد قيمة س

(٢٥) في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد:

اولاً: رتبة وقيمة الحد الخالي من س

ثانيا: قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين في المفكوك يساوى صفر.

(٢٦) أوجد قيمة الحد الخالي من س في مفكوك $\left(٩\text{س}^{٢} + \frac{١}{٣\text{س}}\right)^{٩}$، ثم أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢٨) في مفكوك (س^{٢} + $\frac{١}{س}$)^{٣ن} اثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذى يحتوي على س^{٣ن} ، و إذا كانت ن = ٦ فاوجد النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط.

(٢٨) من مفكوك (٢س^{٢} + $\frac{٣}{س^{٣}}$)^{١١} أوجد كلًا من:

(أ) $\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}}$ (ب) $\frac{ح_{٤}}{ح_{٥}}$ (جـ) $\frac{ح_{٦}}{ح_{٨}}$ (د) $\frac{\text{معامل } ح_{٤}}{\text{معامل } ح_{٦}}$

(٢٨) في مفكوك (١ + س)^{١٢} إذا كان ح$_{٣}$ = ٢ح$_{٢}$ فأوجد قيمة س ....

(٢٩) في مفكوك (أ + ب)^{ن} إذا كان ح$_{٢}$= ٢٤٠ ، ح$_{٣}$= ٧٢٠ ، ح$_{٤}$= ١٠٨٠ فأوجد قيمة كلًا من أ ، ب ، ن

(٣٠) إذا كانت ح$_{٢}$: ح$_{٣}$ من مفكوك (أ + ب)^{ن} تساوي النسبة بين ح$_{٣}$: ح$_{٤}$ من مفكوك (أ + ب)$^{ن + ٣}$ فأوجد قيمة ن

(٣١) في مفكوك (١ + م س)^{ن} إذا كانت ٤ ح$_{٦}$ = ٧ ح$_{٨}$، $\frac{ح_{٤}}{ح_{٦}}$ = $\frac{١}{٤}$ ملاحظة وذلك عندما س = ١ فأوجد قيمة كل من م ، ن

(٣٢) أوجد عدديًا قيمة اكبر حد في مفكوك (٣ - ٥س)^{١٥} عندما س = $\frac{١}{٥}$.

(٣٣) في مفكوك (س + ص)^{ن} حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثاني وسط حسابي بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ ص فأوجد قيمة ن.

تمارين على ذات الحدين (٢)

(١) باستخدام مفكوك (١+س)^{ن} اثبت أن

ن ق$_{٠}$ − ن ق$_{١}$ + ن ق$_{٢}$ − ن ق$_{٣}$ + ... + (−١)^{ن} ن ق$_{ن}$ = صفر

(٢) باستخدام مفكوك (١+س)^{ن} اثبت أن

١ + ٢ × ن ق$_{١}$ + ٤ × ن ق$_{٢}$ + ٨ × ن ق$_{٣}$ + ... + ٢^{ن} × ن ق$_{ن}$ = ٣^{ن}

(٣) إذا كان (أ − س)^{١٢} = ح$_{٠}$ + ح$_{١}$ س + ح$_{٢}$ س^{٢} + ... + ح$_{١٢}$ س^{١٢}

وكان ٦ ح$_{٢}$ + ١١ ح$_{١}$ = ٠ اثبت أن أ = ٣

(٤) إذا كان (١ + ص س)^{ن} = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ س + أ$_{٢}$ س^{٢} + أ$_{٣}$ س^{٣} + ... + أ$_{ن}$ س^{ن}

وكان أ$_{١}$ = ٢٠ ، ٢ أ$_{٤}$ = ٧ أ$_{٣}$. أوجد قيمة كلًا من ن ، ص

[−١ ، ٢]

(٥) الحدود الثلاثة الأولى فى مفكوك $(1-م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية هى
١ ، $-٥س$ ، $\frac{٢٥}{٣}س^2$ على الترتيب - أوجد كلاً من م ، ن [$\frac{1}{3}$ ، ١٥]

(٦) فى مفكوك $(1+س)^{ن}$ إذا كانت أ هى مجموع الحدود الفردية الرتبة ، ب
هى مجموع الحدود الزوجية الرتبة فاثبت أن $(1-س^2)^{ن} = أ^2 - ب^2$
وأن $أ ب = \frac{1}{4}\left[(1+س)^{2ن} - (1-س)^{2ن}\right]$

(٧) فى مفكوك $(1+2س)^{15}$ - اكتب قيمة كل من الحدين الأوسطين
[$^{15}ق_7 (2س)^7$ ، $^{15}ق_8 (2س)^8$]

(٨) فى مفكوك $(2س - \frac{1}{2}ص)^8$ - أوجد معامل الحد الأوسط [٧٠]

(٩) إذا كانت معاملات $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ فى مفكوك $(1+س)^{ن}$ فى
تتابع حسابى - فأوجد قيمة ن

(١٠) إذا كانت معاملات $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ فى مفكوك $(1+س)^{ن}$ فى
تتابع حسابى - فأوجد قيمة ن

(١١) أوجد النسبة بين $ح_6$ فى مفكوك $(س+2)^{12}$ ، $ح_8$ فى مفكوك
$(\sqrt{2}+س)^{12}$ [$\frac{24}{12}$]

(١٢) إذا كانت معامل $ح_{2ر+3}$ يساوى معامل $ح_{3ر+2}$ فى مفكوك
$(1+س)^{ن}$
اثبت أن $ن = 5ر + 3$ أو $ر = 1$

(١٣) اثبت أن معامل $س^{ن}$ فى مفكوك $(1+س)^{2ن}$ ضعف معامل $س^{ن}$ فى
مفكوك $(1+س)^{2ن-1}$

(١٤) أوجد معامل $س^{٣ن}$ في مفكوك $(\frac{س^٢}{٣} + \frac{٣}{٢س})^{٣ن}$ حيث ن عدد صحيح موجبا
[$^{٣ن}ق_{ن} \times ٢^{-ن}$]

(١٥) في مفكوك $(س^ك + \frac{١}{س})^٨$ يوجد حد يشتمل على $س^٧$ لبعض قيم ك الصحيحة الموجبة. أوجد هذه القيم.
[٢، ٤، ١٤]

(١٦) في مفكوك $(٥ + ٤س)^{١٣}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين احسب قيمة س
[$\frac{٥}{٤}$]

(١٧) في مفكوك $(١ + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت $ح_٧ = ح_٨$ حيث $س = \frac{٧}{١٢}$ فما قيمة ن
[١٨]

(١٨) في مفكوك $(س + ٢)^{١٠}$ إذا كان $ح_٨ = \frac{٣}{٧} ح_٧$ فبرهن أن س = ٦ واستنتج أنه في هذه الحالة يوجد في المفكوك حدان متساويان ـ وأوجد رتبة كل منهما
[$ح_٤$، $ح_٥$]

(١٩) في مفكوك $(١ + ٣س)^{١٢}$ ـ أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس عندما $س = \frac{١}{٤}$
[$\frac{٢١}{٢٠}$]

(٢٠) في مفكوك $(٣ + ٢س)^ن$ ـ إذا كان معامل $ح_٣$: معامل $ح_٥$ $= \frac{٣}{٨}$ فاحسب قيمة ن
[١١]

(٢١) أوجد كلاً من الحد الأوسط والحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{٢}{س^٢})^{١٢}$ ثم أوجد النسبة بينهما عندما س = ١
[$\frac{١١٢}{١٥}$]

(٢٢) أوجد قيمة ن التي تجعل $ح_٣ = ح_ن$ في مفكوك $(س + ٣)^{٢ن + ١٤}$ [٢]