خاص بالمجموعات المدرسية

مذكرات

التفوق

التفوق في الرياضيات

للصف الثاني الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

خاص بالمجموعات المدرسية

إعداد
Mr.MORAD
01221353139
moraddorgham@yahoo.com
http://moraddogham.yoo7.com

أبنائي الطلبة والطالبات

- سلسلة التفوق في الرياضيات تقودك الى النجاح والتفوق بأبسط الطرق واسرعها والتي لا غنى عنها لأي طالب او طالبة مهما كان مستواه العلمي .
- تشتمل سلسلة التفوق على اسئلة في جميع اجزاء المنهج بطريقة سهلة ومتدرجة ومتنوعة وخالية من التعقيدات .. تقيس مستوى التحصيل والذكاء الفطري .وتحصل منها على المعلومات التراكمية التي تقتنيها من بعض التمارين في نماذج الوزارة وكراسة التدريبات .

حاول

الحصول على نسخة من مذكرة التفوق التي تبهج روحك ونفسك وتسعدك .لأنها تقودك الى كليات القمة متمنيا لكم النجاح والتفوق .

مراجعة على ماسبق

مجموعات الاعداد درسنا فيما سبق مجموعات الاعداد الاتية

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

ع (مجموعة أعداد العد) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

ص = { .... ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

ص = $ص_{+}$ ∪ { ٠ } ∪ $ص_{-}$

$ص_{-}$ = { -١ ، -٢ ، -٣ ، .... }

$ص_{+}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

ن = { أ/ب : أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر }

وضع العدد النسبي في ابسط صورة

ان يكون مقامة عدد صحيح ونقسم كل من حدية على العامل المشترك الاعلى بينهما إن وجد

فمثلا $\frac{٢٤}{-٣٦} = \frac{-٢٤}{٣٦} = \frac{-٢٤ \div ١٢}{٣٦ \div ١٢} = \frac{-٢}{٣}$

ملحوظة يوجد للعدد النسبي اشكال مختلفة مثل الكسر العشري والنسبة المئوية

فمثلا $٠,٢٥ = \frac{٢٥}{١٠٠} = \frac{١}{٤}$ ، $٤٠٪ = \frac{٤٠}{١٠٠} = \frac{٢}{٥}$

القيمة المطلقة للعدد النسبي

يرمز للقيمة المطلقة للعدد أ بالرمز

فمثلا |٧| = ٧ ، |-٧| = ٧

إذا كان |س| = أ فإن س = ± أ

|س| = ٥ فإن س = ± ٥

|س| = ٣ فإن س = ± ٣

قوانين الاسس

(١) $أ^{-ن} = (\frac{١}{أ^{ن}})$ فمثلا $٢^{-٣} = (\frac{١}{٢^{٣}}) = \frac{١}{٨}$

(٢) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ فمثلا $٢^{٣} \times ٢^{٥} = ٢^{٣+٢} = ٢^{٨}$

(٣) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ فمثلا $٢^{٩} \div ٢^{٥} = ٢^{٩-٥} = ٢^{٤}$

(٤) $(أ ب)^{م} = أ^{م} ب^{م}$ فمثلا $(٢ \times ٣)^{٤} = ٢^{٤} \times ٣^{٤} = ١٦ \times ٨١$

(٥) $(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ فمثلا $(\frac{٢}{٣})^{٤} = \frac{٢^{٤}}{٣^{٤}} = \frac{١٦}{٨١}$

(٦) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ فمثلا $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

الصورة القياسية للعدد النسبي

يمكن كتابة العدد النسبي على الصورة القياسية

$أ \times ١٠^{ن}$ حيث $١ \leq |أ| < ١٠$

فمثلا $٢٤٨٠٦ = ٢,٤٨٠٦ \times ١٠^{٤}$

$٠,٠٠٠٧٤ = ٧,٤ \times ١٠^{-٤}$

الجذر التربيعي للعدد النسبي

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب أ هو العدد الذي مربعه يساوي أ

- الرمز $\sqrt{أ}$ يعنى الجذر التربيعى الموجب للعدد النسبى الموجب أ
- الرمز $-\sqrt{أ}$ يعنى الجذر التربيعي السالب للعدد النسبي الموجب أ
- $\sqrt{صفر}$ = صفر
- الجذر التربيعي للعدد النسبي السالب (ليس له معنى)

$\sqrt{-٤}$ (ليس له معنى)

- الجذر التربيعى للعدد النسبى ٢٥ = ± ٥
- $\sqrt{أ^{٢}} = أ$ ، $\sqrt{أ^{٤}} = أ^{٢}$ ، $\sqrt{أ^{٦}} = أ^{٣}$
- $\sqrt{(-٣)^{٢}} = ٣$ ، $\sqrt{(٣)^{٢}} = ٣$
- $\sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ ولا يساوى ٣ + ٤ = ٧
- $\sqrt{٦\frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{٥}{٢}$

حل المعادلات التربيعية فى ن

مثال ١ اوجد م.ح للمعادلة $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ = ٦ فى ن ، س > صفر

الحـــل ∵ $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ = ٦ بضرب طرفي المعادلة × $\frac{٢}{٣}$

$\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ = ٦ × $\frac{٢}{٣}$ ∴ $س^{٢}$ = ٤

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ∴ س = ±٢

∴ م.ح = {±٢}

مثال ٢ اوجد م.ح للمعادلة $\frac{٥}{٦}$ $س^{٢}$ - ٣ = ٢٧ فى ن

الحـــل ∵ $\frac{٥}{٦}$ $س^{٢}$ - ٣ + ٣ = ٢٧ + ٣

$\frac{٥}{٦}$ $س^{٢}$ = ٣٠ بضرب طرفي المعادلة × $\frac{٦}{٥}$

$\frac{٦}{٥} \times \frac{٥}{٦}$ $س^{٢}$ = ٣٠ × $\frac{٦}{٥}$

∴ $س^{٢}$ = ٣٦ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ س = ±٦ ∵ س > صفر ∴ م.ح = {٦}

Mr Morad

١ اوجد م.ح للمعادلة $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = $\frac{٢}{٩}$ في ن، س < صفر

الحل ∵ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = $\frac{٢}{٩}$ بضرب طرفي المعادلة × ٢

٢ × $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = $\frac{٢}{٩}$ × ٢ ∴ س^{٢} = $\frac{٤}{٩}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ∴ س = ± $\frac{٢}{٣}$

حيث ان س < صفر ∴ س = − $\frac{٢}{٣}$ ∴ م.ح = {− $\frac{٢}{٣}$}

٢ اوجد م.ح للمعادلة (٣ س − ٥)^{٢} = ٤ في ن

الحل بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ ٣ س − ٥ = ± ٢

٣ س − ٥ = ٢	٣ س − ٥ = −٢
٣ س = ٢ + ٥	٣ س = −٢ + ٥
٣ س = ٧	٣ س = ٣
∴ س = $\frac{٧}{٣}$	∴ س = ١

∴ م.ح = {$\frac{٧}{٣}$ ، ١}

الواجب

[١] اكمل ما يأتي :

(١) $\sqrt{(-٥)^{٢}}$ = ... ، $\sqrt{٣^{٤}}$ = ...

(٢) $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ... ، $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ...

(٣) $\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$ = ... ، $\sqrt{(١٣)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = ...

(٤) $-\sqrt{٦٤}$ = ... ، $-\sqrt{١٦٩}$ = ...

(٥) $\sqrt{\frac{٤٩}{٤} + ٢\frac{١}{٤}}$ = ... ، $\sqrt{\frac{٩}{٢٥} + ١\frac{١١}{٢٥}}$ = ...

(٦) $\sqrt{٠,٢٥}$ = ... ، $\sqrt{ص^{٦}}$ = ...

(٧) الصورة القياسية للعدد ٠,٠٠٠٠٢٤ هي ....

(٨) الصورة القياسية للعدد ٢٨٤ × ١٠^{٣} هي ....

(٩) $\sqrt{٠,١٦}$ + |−٠,٦| = ...

(١٠) المعكوس الضربي للعدد ٢$^{-٣}$ = ...

(١١) مجموعة حل المعادلة س + ٥ = |−٥| في ط هي ......

(١٢) ٣^{١٠} + ٣^{١٠} + ٣^{١٠} = ...

[٢] اوجد م.ح للمعادلات الاتية في ن :

(١) $\frac{٥}{٧}$ س^{٢} = ٣٥ (٢) $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} = $\frac{١}{٣}$ (٣) ٨ س^{٢} − ٢ = ٤٨

(٤) (٢س − ١)^{٢} = |−٩| (٥) (٣ س + ٤)^{٢} = |٢٥|

الجذر التكعيبي لعدد نسبي

الجذر التكعيبي لعدد نسبي ا هو العدد الذى مكعبه يساوى ا

$\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ لان (٢)^{٣} = ٨ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ لان (٣)^{٣} = ٢٧

$\sqrt[٣]{-٨}$ = −٢ لان (−٢)^{٣} = −٨ ،

$\sqrt[٣]{-٢٧}$ = −٣ لان (−٣)^{٣} = −٢٧

$\sqrt[٣]{س^{٦}}$ = س^{٢} ، $\sqrt[٣]{س^{٩}}$ = س^{٣} ، $\sqrt[٣]{م^{١٢}}$ = م^{٤}

لاحظ أن $-\sqrt[٣]{٦٤}$ = $\sqrt[٣]{-٦٤}$ = −٨

اكمل ما يأتي :

(١) $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ... (٢) $\sqrt[٣]{-١٢٥}$ = ... (٣) $\sqrt[٣]{-\frac{٨}{٢٧}}$ = ...

(٤) $\sqrt[٣]{-٨س^{٦}}$ = ... (٥) $\sqrt[٣]{٠,٠٠١}$ = ... (٦) $\sqrt[٣]{\frac{٦٤}{١٢٥}}$ = ...

(٧) $\sqrt[٣]{.....}$ = ٤ (٨) $\sqrt{١٦}$ = $\sqrt[٣]{.....}$ (٩) $\sqrt[٣]{٨}$ + $\sqrt[٣]{-٨}$ = ...

(١٠) $\sqrt[٣]{٦٤ + ...}$ = ٥ (١١) $\sqrt{٦٤}$ − $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ...

(١٢) $\sqrt[٣]{صفر}$ = ...

(١٣) المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt[٣]{-١٢٥}$ = ...

(١٤) المعكوس الضربي للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ هو ....

حل المعادلات التكعيبية في ن

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية حيث س ∈ ن :

(١) س^{٣} = ١٢٥

الحل

س^{٣} = ١٢٥ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ ∴ س = ٥ ∴ م.ح = {٥}

(٢) س^{٣} + ٨ = ٠

الحل

س^{٣} + ٨ = ٠ ∴ س^{٣} = −٨ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{-٨}$ ∴ س = −٢ ∴ م.ح = {−٢}

(٣) ٥ س^{٣} + ١ = ٤١

الحل

٥س^{٣} + ١ = ٤١ ∴ ٥ س^{٣} = ٤١ − ١ = ٤٠ ∴ س^{٣} = $\frac{٤٠}{٥}$

∴ س^{٣} = ٨ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{٨}$ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

Mr.Morad

(٤) $٢س^{٣} - ٣ = ٢٤٧$

الحل

$٢س^{٣} = ٢٤٧ + ٣$ ∴ $٢س^{٣} = ٢٥٠$ ∴ $س^{٣} = ١٢٥$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥}$ ∴ $س = ٥$ ∴ $م . ح = \{٥\}$

(٥) $\frac{١}{٢} س^{٣} = ٣٢$

الحل

$\frac{١}{٢} س^{٣} = ٣٢$ بضرب الطرفين $\times ٢$

$٢ \times \frac{١}{٢} س^{٣} = ٣٢ \times ٢$ ∴ $س^{٣} = ٦٤$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{٦٤}$ ∴ $س = ٤$ ∴ $م . ح = \{٤\}$

(٦) $(٢س + ٧)^{٣} = ٨$

الحل

$(٢س + ٧)^{٣} = ٨$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$\sqrt[٣]{(٢س + ٧)^{٣}} = \sqrt[٣]{٨}$

∴ $٢س + ٧ = ٢ - ٧ = -٥$ ∴ $س = -\frac{٥}{٢}$

∴ $م . ح = \{-\frac{٥}{٢}\}$

تمارين على الجذر التكعيبي

[١] اكمل ما يأتي :

(١) $-\sqrt[٣]{-٢٧} = ...$

(٢) $\sqrt{.....} = \sqrt[٣]{٨}$

(٣) $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} = ...$

(٤) $\sqrt[٣]{س^{٣} ص^{١٢}} = ...$

(٥) $\sqrt[٣]{(-٣)^{٣}} = ...$

(٦) $\sqrt[٣]{٢^{٨} + ٢^{٨}} = ...$

(٧) $^{٣}(-٣)^{٣} = ...$

(٨) $\sqrt[٣]{٣^{١١} + ٣^{١١} + ٣^{١١}} = ...$

(٩) $\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt{.......}$

(١٠) $\sqrt{٩} + \sqrt[٣]{-٨} = ...$

[٢] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الاتية حيث $س \in ح$

(١) $١٦س^{٣} - ١١ = ٤٣$

(٢) $٢٧ س^{٣} + ٧ = -١$

(٣) $(٢ س - ١)^{٣} = ٢٧$

(٤) $(٣ س + ٢)^{٣} + ١ = -٧$

(٥) $\frac{١}{٢} س^{٣} + ٣ = -١$

(٦) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٣ = ٦$

(٧) $\frac{٢}{٣} س^{٣} = \frac{٩}{٤}$

(٨) $\frac{٤}{٥} س^{٣} = -\frac{٢٥}{٢}$

[٣] أوجد كلا من الآتي :

(١) $\sqrt[٣]{\sqrt[٣]{٥١٢}}$

(٢) $\sqrt{\sqrt[٣]{٧٢٩}}$

(٣) $\sqrt{٢٧\sqrt[٣]{٢٧}}$

(٤) $-\sqrt{٢^{٩} \times ٣^{٦}}$

[٤] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\sqrt[٣]{-٨} = ...$ [٢ ، −٢ ، ٤ ، −٤]

(٢) $\sqrt[٣]{-٦٤} + \sqrt{١٦} = ...$ [صفر ، ٨ ، −٨ ، ±٨]

(٣) $\sqrt{٢٥} - \sqrt[٣]{-١٢٥} = ...$ [صفر ، ١٠ ، ٥ ، ±٥]

(٤) $\sqrt{(-٢)^{٢}} + \sqrt[٣]{(-٢)^{٣}} = ...$ [صفر ، ٨ ، ٤ ، −٤]

(٥) $\sqrt[٣]{١٠٠٠} \times \sqrt[٣]{-٠,٠٠٨} = ...$ [$\frac{١}{٢}$ ، ١٠ ، ٢ ، −٢]

(٦) اذا كان $-\sqrt{٢٥} = \sqrt[٣]{ص}$ فان ص = .. [٥ ، −٥ ، ١٢٥ ، −١٢٥]

(٧) اذا كان $س^{٣} = ٦٤$ فان $\sqrt{س} = ...$ [٤ ، −٤ ، ٢ ، −٢]

(٨) $\sqrt[٣]{س^{٦}} = \sqrt{....}$ [$س^{٣}$ ، $س^{٢}$ ، $س^{٤}$ ، س]

(٩) اذا كان $\sqrt[٣]{س} = \frac{١}{٤}$ فان س = ... [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{١٢}$ ، $\frac{١}{٦٤}$]

(١٠) المكعب الذى حجمة ٦٤ سم^{٣} يكون طول حرفة = ...

[٤ ، ٨ ، ٣٢ ، ١٦]

(١١) $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{-٨} = ...$ [صفر ، ٤ ، ٢ ، ±٢]

مجموعة الاعداد الغير نسبية

يوجد كثير من الاعداد التى لا يمكن وضعها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ مثل

(١) الجذور التربيعية للأعداد التى ليست مربع كامل

$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٨}$ ، $\sqrt{١٠}$ .... وهكذا

(٢) الجذور التكعيبية للأعداد التى ليست مكعب كامل

$\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٤}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٦}$ ، $\sqrt[٣]{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt[٣]{١٠}$ .... وهكذا

(٣) النسبة التقريبية ط

هذه الاعداد كلها تسمى مجموعة الاعداد الغير نسبية والتي يرمز لها بالرمز $ن'$

لاحظ أن

(١) $ن \cap ن' = \varnothing$

(٢) كل عدد غير نسبي ينحصر بين عددين نسبيين

فمثلا $٤ < ٥ < ٩$ وهذا فإن $٢ < \sqrt{٥} < ٣$

حاول بنفسك

بين أى الاعداد الاتية $\in ن$ وايها $\in ن'$

(١) $\sqrt{٠,٨١}$ (٢) $\sqrt[٣]{-٠,٦٤}$ (٣) $\sqrt[٣]{٢٥} + \sqrt{١٦}$

(١) $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ (٢) $\sqrt[٣]{\frac{٢٤}{٨١}}$ (٣) $\sqrt[٣]{-\frac{٢٧}{٨}}$

Mr.Morad

ملحوظة

- $(\sqrt{أ})^{٢} = \sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ حيث أ ≥ ٠

فمثلا $(\sqrt{٢})^{٢} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$

- $(\sqrt[٣]{أ})^{٣} = \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{أ} = أ$ حيث أ ∈ ن

فمثلا $(\sqrt[٣]{٣})^{٣} = \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٣} = ٣$

أكمل باستخدام احد الرمزين ن ، ن/

(١) ٧ ∈	(٢) − ٧ ∈	(٣) ٣ ∈ .....
(٤) صفر ∈	(٥) ³ − ٨ ∈	(٦) ٩ ∈ .....
(٧) ³ ٥ ∈	(٨) ³ − ٩ ∈	(٩) ٦ ∈ .....
(١٠) $\frac{٨}{٣٢}$ ∈	(١١) ³ −٢٧ ∈	(١٢) ³ ٥ ∈ .....

إذا كانت س ∈ ن/ فأوجد م . ح للمعادلات الاتية :

(١) س² = ٧ (٢) س³ = −١١

(٣) $\frac{٣}{٥}$ س² = $\frac{٧}{٢٥}$ (٤) $\frac{١}{٢}$ س³ = $\frac{٥}{٨}$

الحـــــل

(١) س² = ٧ ∴ س = ± ٧ م . ح = { ٧ ، − ٧ }

(٢) س³ = −١١ ∴ س = −³ ١١ م . ح = { −³ ١١ }

(٣) $\frac{٣}{٥}$ س² = $\frac{٧}{٢٥}$ بضرب الطرفين فى $\frac{٥}{٣}$

$\frac{٥}{٣} \times \frac{٣}{٥}$ س² = $\frac{٧}{٢٥} \times \frac{٥}{٣}$ ∴ س² = $\frac{٧}{١٥}$

∴ س = ± $\frac{٧}{١٥}$ ∴ م . ح = { − $\frac{٧}{١٥}$ ، $\frac{٧}{١٥}$ }

(٤) $\frac{١}{٢}$ س³ = $\frac{٥}{٨}$ بضرب الطرفين فى $\frac{٢}{١}$

$\frac{٢}{١} \times \frac{١}{٢}$ س³ = $\frac{٥}{٨} \times \frac{٢}{١}$ ∴ س³ = $\frac{٥}{٤}$

∴ س = ³ $\frac{٥}{٤}$ م . ح = { ³ $\frac{٥}{٤}$ }

---

(٢) إذا كانت س ∈ ن/ فأوجد م . ح للمعادلات الاتية :

٦٤ س³ − ٢ = −٢٩

الحـــــل

٦٤ س³ − ٢ + ٢ = −٢٩ + ٢ بإضافة + ٢ للطرفين

∴ ٦٤ س³ = −٢٧ ∴ س³ = − $\frac{٢٧}{٦٤}$ ∴ س = $\sqrt[٣]{-\frac{٢٧}{٦٤}}$

∴ س = − $\frac{٣}{٤}$ ∈ ن ∴ − $\frac{٣}{٤}$ ∉ ن/ م . ح = ∅

أوجد م . ح للمعادلات الاتية حيث س ∈ ن/

(١) ٢ س³ − ٧ = ٣ (٢) $\frac{١}{٢}$ س³ − ٥ = ٣

(٣) ٥ س² − ١ = ٩ (٤) ٣ س³ = ٢٧

ايجاد قيمة تقريبية للعدد الغير نسبى

يمكن استخدام الالة الحاسبة لإيجاد قيم الاعداد الاتية :

$\sqrt{٢}$ ≈ ١,٤١٤٢٠٠ ، $\sqrt{\ }$ ≈ ١,٧٣٢٠٠

أي ان العدد الغير نسبى يمثل بعدد عشري غير منته وغير دائر

(١) اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{\ }$

نختار عددين مربعين متتاليين يحصران بينهما العدد ٥ نجد ان

٤ < ٥ < ٩ بأخذ $\sqrt{\ }$ لجميع الاطراف

$\sqrt{٤}$ < $\sqrt{٥}$ < $\sqrt{٩}$ أي ان ٢ < $\sqrt{٥}$ < ٣

∴ $\sqrt{٥}$ = ٢ + كسر عشري اقل من الواحد الصحيح

وحيث ان $(٢,١)^{٢}$ = ٤,٤١ ، $(٢,٢)^{٢}$ = ٤,٨٤ ، $(٢,٣)^{٢}$ = ٥,٢٩

∵ ٤,٨٤ < ٥ < ٥,٢٩ ∴ ٢,٢ < $\sqrt{٥}$ < ٢,٣

∴ $\sqrt{٥}$ ≈ ٢,٢ أو ٢,٣

ملاحظة هامة : كل عدد نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين

(٢) اوجد العددان الصحيحان المتتاليان اللذان يقع بينهما العدد ³ − ٢

١
٨
٢٧
٦٤
١٢٥

الحـــــل

³ − ٢ = −³ ٢

٨ < ٢٤ < ٢٧ بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ لجميع الاطراف

³ ٨ < ³ ٢٤ < ³ ٢٧

٢ < ³ ٢٤ < ٣ بالضرب × − ١

−٢ > −³ ٢٤ > −٣

∴ العددان الصحيحان المتتاليان اللذان يحصران −³ ٢٤ هما −٢ ، −٣

مثال (٣) اذا كان س عدد صحيح ، س < ١٣ < س + ١ فما قيمة س

الحـــــل

٩ < ١٣ < ١٦ بأخذ $\sqrt{\ }$ لجميع الاطراف

٩ < ١٣ < ١٦

∴ ٣ < ١٣ < ٤ ∴ س = ٣

مثال (٤) اثبت ان $\sqrt{٣}$ تنحصر قيمته بين ١,٧ ، ١,٨

الحـــــل

بتربيع جميع الاطراف

$(\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣ ، $(١.٧)^{٢}$ = ٢,٨٩ ، $(١.٨)^{٢}$ = ٣,٢٤

٢,٨٩ < ١٣ < ٣,٢٤ ∴ ١,٧ < $\sqrt{٣}$ < ١,٨

مثال (٥) اثبت ان $\sqrt[٣]{١٢}$ تنحصر قيمته بين ٢,٢ ، ٢,٣

الحل

بتكعيب جميع الاطراف $(\sqrt[٣]{١٢})^{٣} = ١٢$ ، $(٢,٢)^{٣} = ١٠,٦٤٨$

$(٢,٣)^{٣} = ١٢,١٦٧$

∴ $١٠,٦٤٨ < ١٢ < ١٢,١٦٧$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$ لجميع الاطراف

$\sqrt[٣]{١٠,٦٤٨} < \sqrt[٣]{١٢} < \sqrt[٣]{١٢,١٦٧}$

∴ $٢,٢ < \sqrt[٣]{١٢} < ٢,٣$

حاول بنفسك

(١) اوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما $\sqrt{١٣}$

(٢) اثبت ان ينحصر $\sqrt{٧}$ بين ٢,٦ ، ٢,٧

تمثيل العدد غير النسبي على خط الاعداد

للحصول على قطعة مستقيمة طولها يساوى العدد الغير نسبي $\sqrt{أ}$ نبحث عن عددين مجموع مربعيهما او الفرق بين مربعيهما يساوى أ ثم نستخدم هذه الاطوال في رسم مثلث قائم الزاوية

امثلة (١) لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٣}$ وحدة طول نوجد

طول وتر المثلث القائم الزاوية = $\frac{٣+١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ وحدة طول

طول احد ضلعي القائمة = $\frac{٣-١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ وحدة طول

(٢) لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٥}$ وحدة طول

طول وتر المثلث القائم الزاوية = $\frac{٥+١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$ وحدة طول

طول احد ضلعي القائمة = $\frac{٥-١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ وحدة طول

وبصفة عامة

لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{أ}$ وحدة طول حيث أ > صفر

نرسم مثلث القائم الزاوية يكون فيه طول الوتر = $\frac{أ+١}{٢}$ وحدة طول

وطول احد ضلعي القائمة = $\frac{أ-١}{٢}$ وحدة طول

مثال (١) ارسم قطعة مستقيمة طولها يساوى كل من الاتي
أو مثل الاعداد الآتية على خط الاعداد

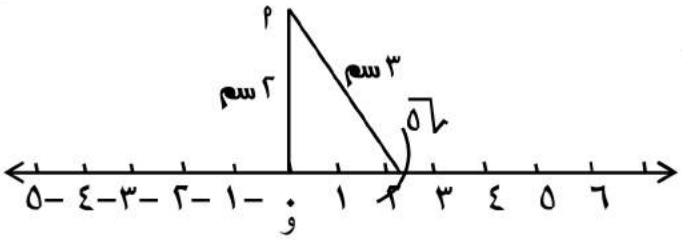
(١) $\sqrt{٥}$ (٢) $-\sqrt{٦}$ (٣) $\sqrt{٣}+١$ (٤) $٢-\sqrt{٧}$

الحل

(١) نرسم المثلث القائم الزاوية الذى

طول وترة = $\frac{٥+١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$ وحدة طول

وطول احد ضلعي القائمة = $\frac{٥-١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ وحدة طول



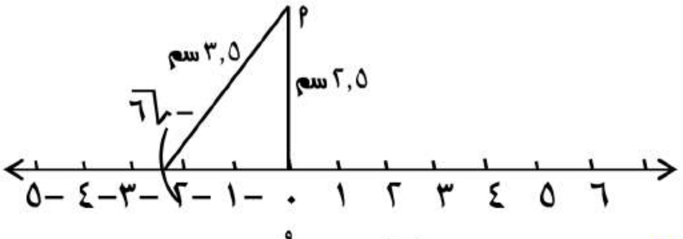
نقيم عمود طوله ٢ سم من نقطة و وليكن وأ ثم نفتح الفرجار فتحة = ٣ سم ونركز سن الفرجار عند أ ونرسم قوسا يقطع خط الاعداد في نقطة ب فيكون $\overline{وب}$ يمثل طول $\sqrt{٥}$

ب تمثل النقطة $\sqrt{٥}$

(٢) لتمثيل العدد $-\sqrt{٦}$ نرسم المثلث القائم الزاوية الذى

طول وترة = $\frac{٦+١}{٢} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$ وحدة طول

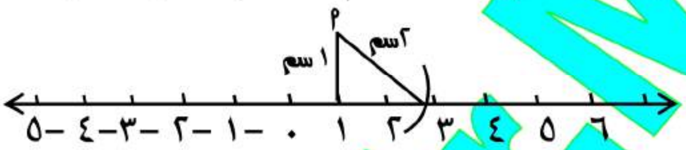
وطول احد ضلعي القائمة = $\frac{٦-١}{٢} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$ وحدة طول



(٣) لتمثيل العدد $١+\sqrt{٣}$ نرسم المثلث القائم الزاوية الذى

طول وترة = $\frac{٣+١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٣,٥$ وحدة طول

وطول احد ضلعي القائمة = $\frac{٣-١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ وحدة طول

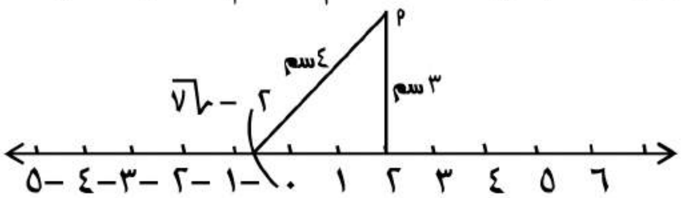


نقيم عمود طوله ١ سم من النقطة التى تمثل العدد ١ ونكرر ما سبق

(٤) لتمثيل العدد $٢-\sqrt{٧}$ نرسم المثلث القائم الزاوية الذى

طول وترة = $\frac{٧+١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$ وحدة طول

وطول احد ضلعي القائمة = $\frac{٧-١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$ وحدة طول



نقيم عمود طوله ٣ سم من النقطة التي تمثل العدد ٢ ونكرر ما سبق

Mr. Morad

تمارين على مجموعة الاعداد الغير نسبية

[١] بين أي الاعداد الأتية $\in$ ن وايها $\in$ ن/

(١) -١١ (٢) $\sqrt[٣]{-٨}$ (٣) $\sqrt[٣]{١١}$ (٤) $\sqrt{٧}$

(٥) $\sqrt{٢\frac{١}{٤}}$ (٦) $\sqrt{\frac{١}{٣}}$ (٧) $-\sqrt{٢٥}$ (٨) ٢π

(٩) $\sqrt{٢}$ (١٠) $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$ (١١) $\sqrt{١٦+٩}$ (١٢) $(-٧)^{صفر}$

[٢] (١) اثبت ان $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

(٢) اثبت ان $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣,٣١ ، ٣,٣٢

[٣] اذا كان س عددا صحيحا فأوجد قيمة س فيما يلي :

(١) س $< \sqrt{٣} <$ س+١ (٢) س $< \sqrt{٨٠} <$ س+١

(٣) س $< \sqrt[٣]{١٧} <$ س+١ (٤) س $< \sqrt[٣]{٩} <$ س+١

(٥) س $< \sqrt{١٥} <$ س+١ (٦) س $< \sqrt[٣]{-١٠} <$ س+١

[٤] اذا كان س $\in$ ن/ فأوجد م.ح للمعادلات الاتية :

(١) س^٢ = ٥ (٢) س^٢ = ١١

(٣) س^٣ = ١٧ (٤) س^٣ = −٦

(٥) ٢س^٣ − ١ = ٥ (٦) $\frac{٣}{٥}$س^٢ + ٥ = ٦

(٧) $\frac{٥}{٦}$س^٢ = $\frac{٥}{٧}$ (٨) $\frac{١}{٣}$س^٢ = $\frac{٥}{٩}$

[٥] أوجد م.ح للمعادلات الاتية مبيننا ما اذا كانت س $\in$ ن او س $\in$ ن/

(١) ٥س^٣ = ٤٠ (٢) ٣س^٢ = ٦

(٣) (س − ١)^٢ = ٤ (٤) (س − ٢)^٣ = ١٢٥

(٥) $\frac{١}{٣}$س^٣ = −٣ (٦) $\frac{١}{٢}$س^٢ = ٢

[٦] اختر الجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) العدد الغير نسبي في الاعداد الاتية هو ....

[$\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}$ ، $\sqrt{\frac{٨}{٥٠}}$ ، $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ ، $\sqrt{٥}$]

(٢) $(\sqrt{-٥})^٢$ = ... [٥ ، −٥ ، ±٥ ، لا يوجد]

(٣) العدد الغير نسبي المحصور بين ٣ ، ٤ هو ....

[$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٠}$]

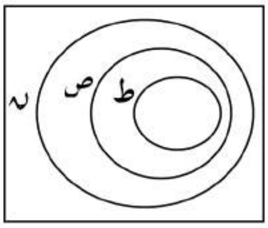
(٤) اذا كان س $\in$ ص ، س $< \sqrt{١١} <$ س+١ فان س=......

[٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥]

مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الناتجة من أتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الغير نسبية

ح = ن $\cup$ ن/



لاحظ أن

ط $\subset$ ص $\subset$ ن $\subset$ ح

ملاحظات

(١) ح* = ح − {٠}

(٢) ح* = ح$^+$ $\cup$ ح$^-$

(٣) ح$^+$ = {س: س $\in$ ح، س > ٠}

(٤) ح$^-$ = {س: س $\in$ ح، س < ٠}

(٥) مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة = ح$_+$ $\cup$ {٠}
= {س: س $\in$ ح، س $\geq$ ٠}

(٦) مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة = ح$_-$ $\cup$ {٠}
= {س: س $\in$ ح، س $\leq$ ٠}

(٧) كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد

(٨) الاعداد الحقيقية المتساوية تمثلها نقطة وحيدة على خط الاعداد

(٩) كل عدد غير نسبي تنحصر قيمته بين عددين نسبيين

مثال ١ رتب الأعداد الأتية ترتيباً تصاعديا

$\sqrt{٧٥}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، ٧ ، −٨ ، $-\sqrt{٣٢}$

الحل

نرتب اولا الاعداد الموجبة وهى : $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، ٧

$\because$ ٧ = $\sqrt{٤٩}$ ، $\because$ ٤٩ < ٦٨ < ٧٥ $\therefore$ $\sqrt{٤٩} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

$\therefore$ ٧ $< \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

ثم نرتب الاعداد السالبة وهى : $-\sqrt{٤٥}$ ، −٨ ، $-\sqrt{٣٢}$

$\because$ ٨ = $\sqrt{٦٤}$ ، $\because$ ٦٤ > ٤٥ > ٣٢ $\therefore$ $\sqrt{٦٤} > \sqrt{٤٥} > \sqrt{٣٢}$

$\therefore$ $-\sqrt{٦٤} < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$ $\therefore$ −٨ $< -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$

إ الترتيب التصاعدي هو :

−٨ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{٣٢}$ ، ٧ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $\sqrt{٧٥}$

من جد وجد

Mr.Morad

مثال (٢) اكتب ثلاثة اعداد غير نسبية تقع بين العددين ١١ ، ١٢

✍ الحـــــل ✍

∵ $(١١)^٢ = ١٢١$ ، $(١٢)^٢ = ١٤٤$

وباختيار ثلاثة اعداد صحيحة تنحصر بين ١٢١ ، ١٤٤ ولتكن
١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٣٠

∴ $١٢١ < ١٢٥ < ١٢٦ < ١٣٠ < ١٤٤$

∴ $\sqrt{١٢١} < \sqrt{١٢٥} < \sqrt{١٢٦} < \sqrt{١٣٠} < \sqrt{١٤٤}$

∴ الاعداد غير النسبية المطلوبة هي : $\sqrt{١٢٥}$ ، $\sqrt{١٢٦}$ ، $\sqrt{١٣٠}$

حاول بنفسك

اكمل كلا مما يأتي بوضع احدى العلامتين > أو <

(١) $\sqrt{٢}$ .... ١ (٢) $-\sqrt{٣}$ .... ١ (٣) $\sqrt[٣]{٩}$ ٣

(٤) $-\sqrt[٣]{٧}$ ... -٢ (٥) $\sqrt{٧}$ .... ٢,٦ (٦) $-\sqrt[٣]{١٦}$ ... $-٢,٥٢$

مثال (٣) أكمل الجدول الآتي :

العدد	عدد ط	عدد ص	عدد ن	عدد ن̀	عدد ح
-٢		✓	✓		✓
$\sqrt{٩}$					
٢,٣					
صفر					
$١\frac{١}{٢}$					
$\sqrt[٣]{-٢}$					
$\sqrt{٧}$					
$\sqrt{-٩}$					
$\sqrt{\frac{٨}{٥٠}}$					

تمارين على مجموعة الاعداد الحقيقية

[١] اكمل كلا مما يأتي:

(١) ن ∩ ن̀ = ... (٢) ن ∪ ن̀ = ... (٣) $ح_+ ∩ ح_-$ = ...

(٤) $ح_+ ∪ ح_-$ = ... (٥) ح − ن̀ = ... (٦) ح − ن = ...

[٢] ضع العلامة المناسبة (> أو < أو =)

(١) $\sqrt{٧}$ ..... ٢,٦ (٢) $\sqrt[٣]{٢٤}$ ...... ٣ (٣) $\sqrt[٣]{-٢٤}$ ... ٣

(٤) $\sqrt[٣]{٨}$ .... $\sqrt{٤}$ (٥) $\sqrt[٣]{٣} - ١$ ... ٠,٢ (٦) $\sqrt{٥}$ ٢

[٣] ضع العلامة المناسبة (> أو < أو =)

رتب الاعداد الاتية ترتيبا تنازليا :

(١) $\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

(٢) $\sqrt{٢٧}$ ، ٠,٦ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt[٣]{-١}$

[٤] اكتب ثلاثة اعداد غير نسبية موجبة اصغر من ٢

[٥] اكتب اربعة اعداد غير نسبية محصورة بين ٣ ، ٤

[٦] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) ح = ... [ن ∪ ن̀ ، $ص_+ ∪ ص_-$ ، ح* ، ح]

(٢) {س: س ∈ ح، س < ٠} [$ح_+$ ، $ح_-$ ، ح* ، ح]

(٣) اذا كانت س عددا حقيقيا سالبا فأي الاعداد الاتية يمثل عددا موجبا ؟ [$س^٢$ ، $س^٣$ ، ٢ س ، $\frac{س}{٢}$]

(٤) اذا كانت س ∈ $ح_+$ ، ص ∈ $ح_+$ وكانت $س^٢ > ص^٢$ فان .... [س > ص ، س < ص ، س = ص ، س ⩽ ص]

(٥) مجموعة حل المعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ في ح هي ...... [{−١} ، {١ ، −١} ، {١} ، ∅]

[٧] اذا كان س ∈ ح فأوجد م.ج للمعادلات الاتية :

(١) $س^٢ = ٣$ (٢) $س^٣ = ٥$ (٣) $\frac{١}{٣} س^٢ = ٥$

(٤) $٢ س^٣ = ٥$ (٥) $\frac{٢}{٥} س^٢ = \frac{١}{٥}$ (٦) $(س^٣ - ٣)^٣ = ١$

(٧) $٣ س^٢ + ٥ = ١١$ (٨) $\frac{٢}{٥} س^٣ = \frac{٤}{٥}$ (٩) $\frac{٥}{٧} س^٣ + ١ = -٤$

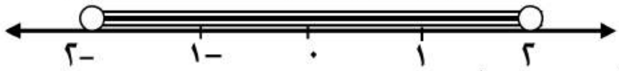
Mr.Morad

تمثيل مجموعات من ح على خط الاعداد

الفترات

مثال: اوجد على خط الاعداد

ع = { س : س ∈ ح ، −٢ < س < ٢ }



اذا كانت ع ∈ ط فان ع = { ٠ ، ١ }

اذا كانت ع ∈ ص فان ع = { −١ ، ٠ ، ١ }

اذا كانت ع ∈ ح فان ع = جميع الاعداد الحقيقية المحصورة بين −٢ ، ٢ وتكتب ع =] −٢ ، ٢ [فترة مفتوحة

لاحظ ان −٢ ∉ ع ، ٢ ∉ ع

اولا : الفترات المحدودة

[١] الفترة المغلقة [أ ، ب]

[أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب }

لاحظ ان أ ∈ [أ ، ب] ، ب ∈ [أ ، ب]

اوجد على صورة فترة مثل الحل على خط الاعداد

ع = { أ : أ ∈ ح ، −١ ≤ أ ≤ ٤ }

ع = [−١ ، ٤]

[٢] الفترة المفتوحة] أ ، ب [

] أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ < س < ب }

لاحظ ان أ ∉] أ ، ب [، ب ∉] أ ، ب [

اوجد على صورة فترة مثل الحل على خط الاعداد

ك = { ن : ن ∈ ح ، −٣ < ن < ٥ }

ك =] −٣ ، ٥ [

[٣] الفترات النصف مفتوحة (النصف مغلقة)

[أ ، ب [،] أ ، ب]

[أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب }

] أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب }

اوجد على صورة فترة مثل الحل على خط الاعداد

ن = { س : س ∈ ح ، −٥ ≤ س < ١ }

ن = [−٥ ، ١ [

اوجد على صورة فترة مثل الحل على خط الاعداد

ن = { س : س ∈ ح ، −١ < س ≤ ٤ }

ن =] −١ ، ٤]

ثانيا : الفترات الغير محددة

[أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س ≥ أ }

لاحظ ان أ ∈ [أ ، ∞ [

] أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س > أ }

لاحظ ان أ ∉] أ ، ∞ [

] −∞ ، أ] = { س : س ∈ ح ، س ≤ أ }

لاحظ ان أ ∈] −∞ ، أ]

] −∞ ، أ [= { س : س ∈ ح ، س < أ }

لاحظ ان أ ∉] −∞ ، أ [

ملحوظة

(١) مجموعة الاعداد الحقيقية يمكن التعبير عنها على الصورة ح =] −∞ ، ∞ [

(٢) مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة $ح^+$ =] ٠ ، ∞ [

(٣) مجموعة الاعداد الحقيقية السالبة $ح^-$ =] −∞ ، ٠ [

(٤) مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة = [٠ ، ∞ [

(٥) مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة =] −∞ ، ٠]

Mr Morad

٥ أكتب على صورة فترة و مثل الحل على خط الاعداد

(١) س = {س: س ∈ ح ، ٥ > س > ٢}

الحل

س =]٢ ، ٥[

(٢) ص = {س: س ∈ ح ، ٧ ≥ س ≥ ٣}

الحل

ص = [٣ ، ٧]

(٣) ل = {س: س ∈ ح ، ٥ ≥ س > ٢}

الحل

ل =]٢ ، ٥]

(٤) هـ = {س: س ∈ ح ، ٧ > س ≥ ٣}

الحل

هـ = [٣ ، ٧[

(٥) و = {س: س ∈ ح ، ٥ > س}

الحل

و =]-∞ ، ٥[

ملحوظة وَ = [٥ ، ∞[..............

(٦) ش = {س: س ∈ ح ، ٧ ≥ س}

الحل

ش =]-∞ ، ٧]

ملحوظة شَ =]٧ ، ∞[..............

(٧) ك = {س: س ∈ ح ، ٥ < س}

الحل

ك =]٥ ، ∞[

ملحوظة كَ =]-∞ ، ٥] ....

(٨) م = {س: س ∈ ح ، ٧ ≤ س}

الحل

م = [٧ ، ∞[

ملحوظة مَ =]-∞ ، ٧[..............

أكتب على صورة فترة و مثل الحل على خط الاعداد

(١) ص = {س: س ∈ ح ، -٤ ≤ س}

(٢) ش = {س: س ∈ ح ، ٣ ≥ س > -٢}

(٣) ع = {س: س ∈ ح ، ٥ > س ≥ ٠}

٦ أكتب على صورة صفة مميزة و مثل الحل على خط الاعداد

(١) [-٢ ، ٣] = {س: س ∈ ح ، ٣ > س > -٢}

(٢)]-٢ ، ٤] =

(٣)]-١ ، ٥[=

(٤) [-١ ، ∞[=

(٥)]-∞ ، ٣[=

(٦)]-∞ ، -٢[=

٧ ضع ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ في الاماكن الخالية الاتية :

(١) -٣ .... [-١ ، ∞[

(٢) [٠ ، ٣[...... ح+

(٣) ٣ .... [√٢ ، √١١[

(٤) {٠} ...... ح-

(٥) ∛-٩ .... [-٢ ، ٥]

(٦) [-١ ، ٢] ...... [-٥ ، ∞]

(٧) ∛١٧ .... [-٣ ، ٢[

(٨) √٥ .... [-١ ، ٣[

تمارين على الفترات

[١] أكتب على صورة فترة و مثل الحل على خط الاعداد :

(١) س = {س: س ∈ ح ، -٢ ≤ س}

(٢) ص = {س: س ∈ ح ، ٢ ≥ س > -٣}

(٣) ع = {س: س ∈ ح ، ١ > س ≥ -٥}

(٤) س = {س: س ∈ ح ، ١ < س}

(٥) ص = {س: س ∈ ح ، ١ ≥ س}

(٦) ع = {س: س ∈ ح ، ٥ ≥ س ≥ ٢.}

[٢] أكتب على صورة صفة مميزة و مثل الحل على خط الاعداد :

(١) [-٤ ، ٥]

(٢)]-٣ ، ٧]

(٣)]١ ، ٦[

(٤) [-٢ ، ∞[

(٥)]-∞ ، ١[

(٦) ح+

(٧) [-٤ ، ٥[

(٨)]-∞ ، ٧]

(٩) ح-

(١٠) مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة .

(١١) مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة .

[٣] ضع ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄ في الاماكن الخالية الاتية :

(١) ٤,٧ ...... [-٥ ، ٣[

(٢) [-٥ ، ٠[...... ح-

(٣) √٣ ...... [-١ ، ٢[

(٤) ∛١١ ..... [-٢ ، ٣]

(٥) ∛-٢٧ ... [-٣ ، ٤]

(٦) [-١ ، ٣] ...... [-٥ ، ٢]

(٧) صفر ..... [-٢ ، ٥[

(٨) {٣} ..... [∛٥ ، ∛٢٢[

(٩) ح+ ..... ح

(١٠) ٥ ..... [√٢ ، √١٣[

(١١) √٩ ...... [-٣ ، ∞[

(١٢) ∛-١ ..... [-∞ ، ١[

Mr Moray

[٤] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{٢}$ ∈ .... ( ]-٢ ، ٥[، [٣ ، ٧[، [-٢ ، ٢[ )

(٢) {٠} ⊂ .... (ح+ ، ح- ، ح* ، ح)

(٣) $\sqrt[٣]{١١}$ ∈ .... ( ]-٢ ، ٣] ، [-٣ ، ١[، [-٥ ، -٢[ )

(٤) ح* = ... (ح+ ∩ ح- ، ح - ح- ، ح - ح+ ، ح - {٠})

(٥) ح+ ∩ ح- = ... (∅ ، {٠} ، ح+ ∪ {٠} ، ح*)

(٦)]٠ ، ٣[⊂ .... (ح+ ، ح- ، ص+ ، ص-)

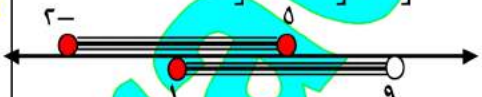
(٧) [-٢ ، ∞[' = ...

( ]٢ ، ∞[،]-∞ ، ٢[،]-∞ ، ١[،]-∞ ، -٢[ )

العمليات على الفترات

الاتحاد أ ∪ ب = جميع العناصر الموجودة في المجموعتين

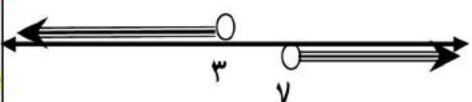
(١) [-٢ ، ٥] ∪ [١ ، ٩[= [-٢ ، ٩[



(٢) [-٣ ، ٩[∪]٠ ، ٤[= [-٣ ، ٩[

(٣)]-∞ ، ٧[∪]٣ ، ∞[=]-∞ ، ∞[= ح

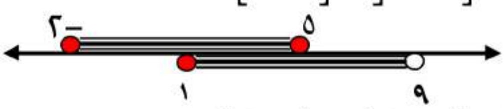
(٤) [-∞ ، ٣[∪]٧ ، ∞[= ح - [٣ ، ٧]



التقاطع

أ ∩ ب = جميع العناصر جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين

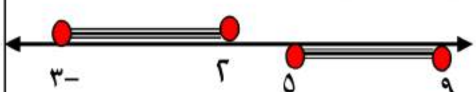
(١) [-٢ ، ٥] ∩ [١ ، ٩[= [١ ، ٥]



(٢) [-٣ ، ٩[∩]٠ ، ٤[=]٠ ، ٤[

(٣) [-∞ ، ٧[∩]٣ ، ∞[= [٣ ، ٧[

(٤) [-∞ ، ٣] ∩]٧ ، ∞[= ∅



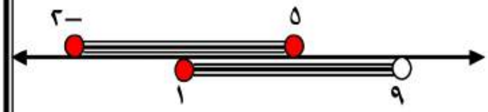
الفرق

أ - ب = جميع العناصر الموجودة في أ وغير موجودة في ب

ب - أ = جميع العناصر الموجودة في ب وغير موجودة في أ

(١) [-٢ ، ٥] - [١ ، ٩[= [-٢ ، ١]

[١ ، ٩[- [-٢ ، ٥] =]٥ ، ٩[



(٢) [-٣ ، ٩[-]٠ ، ٤[= [-٣ ، ٠] ∪ [٤ ، ٩[

]٠ ، ٤[- [-٣ ، ٩[= ∅

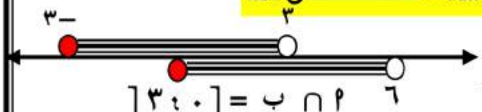
(٣) [-∞ ، ٧[-]٣ ، ∞[= [-∞ ، ٣[

مثال (١) اذا كانت أ = [-٣ ، ٣[، ب = [٠ ، ٦[

فأوجد مستعينا بخط الاعداد كل من

أ ∪ ب ، أ ∩ ب ، أ - ب ، ب - أ

الحل



أ ∪ ب = [-٣ ، ٦[أ ∩ ب = [٠ ، ٣[

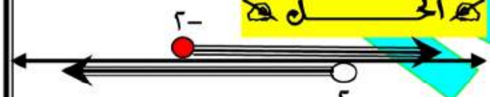
أ - ب = [-٣ ، ٠[ب - أ = [٣ ، ٦[

مثال (٢) اذا كانت س = [-٢ ، ∞[، ص =]-∞ ، ٢[

فأوجد مستعينا بخط الاعداد كل من

س ∪ ص ، س ∩ ص ، س - ص ، ص - س

الحل



س ∪ ص =]-∞ ، ∞[= ح

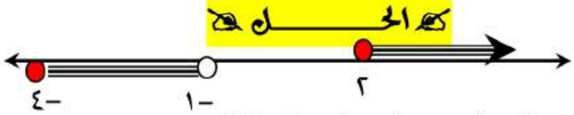
س ∩ ص = [-٢ ، ٢[

س - ص = [٢ ، ∞[، ص - س =]-∞ ، -٢[

مثال (٣) اذا كانت ج = [٢ ، ∞[، د = [-٤ ، -١[

فأوجد مستعينا بخط الاعداد كل من ج ∪ د ، ج ∩ د

الحل



ج ∪ د = [-٤ ، ∞[- [-١ ، ٢[

ج ∩ د = ∅

Mr.Morad

مثال (٤)

إذا كانت $أ = [-١، ٤[$ ، $ب =]-٤، -١[$

فأوجد مستعينا بخط الأعداد كل من

$أ \cup ب$ ، $أ \cap ب$ ، $أ - ب$ ، $ب - أ$

الحل

$أ \cup ب =]-٤، ٤[$ ، $أ \cap ب = \varnothing$

$أ - ب = أ$ ، $ب - أ = ب$

مثال (٥)

إذا كانت $ك =]٢، ٦[$ ، $م =]-٣، ٢[$

فأوجد مستعينا بخط الأعداد كل من

$ك \cup م$ ، $ك \cap م$

الحل

$ك \cup م =]-٣، ٦[- \{٢\}$ ، $ك \cap م = \varnothing$

مثال (٦)

إذا كانت $س =]-\infty، ٢[$ ، $ص = [-١، ٥]$

فأوجد مستعينا بخط الأعداد كل من

$س \cup ص$ ، $س \cap ص$ ، $س - ص$ ، $ص - س$ ، $سَ$ ، $صَ$

الحل

$س \cup ص =]-\infty، ٥]$ ، $س \cap ص = [-١، ٢[$

$س - ص =]-\infty، -١[$ ، $ص - س = [٢، ٥]$

$سَ = [٢، \infty[$ ، $صَ =]-\infty، -١[\cup]٥، \infty[$

مثال (٧)

إذا كانت $س = [١، ٤[$ ، $ص = \{١، ٤\}$

فأوجد مستعينا بخط الأعداد كل من

$س \cap ص$ ، $س \cup ص$ ، $س - ص$ ، $ص - س$

الحل

$س \cap ص = \{١\}$ ، $س \cup ص = [١، ٤]$

$س - ص =]١، ٤[$ ، $ص - س = \{٤\}$

حاول بنفسك

إذا كانت $س =]-١، ٣[$ ، $ص =]٠، ٤]$

فأوجد مستعينا بخط الأعداد كل من

$س \cap ص =$ .... ، $س \cup ص =$ ....

$س -]٠، \infty[=$ ....

$]٠، \infty[- ص =$ ....

$سَ =$ ....

$س \cap \{-٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣\} =$ ....

ملاحظات هامة جدا يجب تذكرها

(١) $[٢، ٥] - \{٢\} =]٢، ٥]$

$[٢، ٥] - \{٥\} = [٢، ٥[$

$[٢، ٥] - \{٢، ٥\} =]٢، ٥[$

$]٢، ٥] - \{٢\} =]٢، ٥]$

(٢) $]٢، ٥] \cup \{٢\} = [٢، ٥]$

$[٢، ٥[\cup \{٥\} = [٢، ٥]$

$]٢، ٥[\cup \{٢، ٥\} = [٢، ٥]$

(٣) $[٢، ٥] -]٢، ٥[= \{٢، ٥\}$

$[٢، ٥] - [٢، ٥[= \{٥\}$

$[٢، ٥] -]٢، ٥] = \{٢\}$

$]٢، ٥[- [٢، ٥] = \varnothing$

(٤) $\{٣\} - [٢، ٥] = \varnothing$

$\{٣\} - [٥، ٩] = \{٣\}$

مثال (٨)

أكمل ما يأتي :

(١) $]-٣، ٤] \cup \{٣\} =$ .... $[-٣، ٤]$

(٢) $]-٢، ٥[\cup \{٥\} =$ .... $]-٢، ٥]$

(٣) $]-٣، ٧[\cup \{-٣، ٧\} =$ .... $[-٣، ٧]$

(٤) $]-٢، ٥[\cap \{٣، ٧\} =$ .... $\{٣\}$

(٥) $]-١، ٣[\cap \{-١، ٣\} =$ .... $\{-١، ٣\}$

(٦) $ص_+ \cap [-٢، ٢[=$ .... $\{١\}$

(٧) $ص_- \cap]-٣، ٣] =$ .... $\{-١، -٢\}$

(٨) $ط \cap [-٣، ٢[=$ .... $\{٠، ١\}$

(٩) $ص_+ \cap]-٣، ٠[=$ .... $\varnothing$

(١٠) $[-٢، ٥[- \{٢\} =$ .... $]-٢، ٥[$

(١١) $[-٣، ٨] - \{٨\} =$ .... $[-٣، ٨[$

(١٢) $[٥، ٦] - \{٥، ٦\} =$ .... $]٥، ٦[$

(١٣) $[-٣، ٧] -]-٣، ٧[=$ .... $\{-٣، ٧\}$

(١٤) $[-٢، ٥[-]-٢، ٥[=$ .... $\{-٢\}$

(١٥) $\{٥، ٦\} -]-٣، ٦[=$ .... $\{٦\}$

(١٦) $\{٤\} - [-٢، ٥[=$ .... $\varnothing$

تمارين على العمليات على الفترات

[١] اوجد على صورة فترة ومثل الحل على خط الاعداد فيما يلي

(١) [-٢ ، ٧[∪ [-٤ ، ٣[

(٢)]-١ ، ∞[∪ [-٥ ، ٣[

(٣)]-٢ ، ٤] ∩ [-٥ ، ٠[

(٤)]-∞ ، ٣] ∩]-١ ، ٥[

(٥) [-٢ ، ٣[∩ [-٥ ، -٢[

(٦) [-١ ، ٣[∪]-٥ ، -٢]

(٧) [-٣ ، ٣] −]-٦ ، ١]

(٨)]-٥ ، ٢[− [-١ ، ٤[

(٩)]-٢ ، ∞[−]-∞ ، ٣]

(١٠) [-٢ ، ٤] − [١ ، ٢]

[٢] اذا كانت س =]٠ ، ∞[، ص =]-∞ ، ٣]

فأوجد على صورة فترة مستعينا بخط الاعداد كل من

س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س ، سَ ، صَ

[٣] اذا كانت س =]-١ ، ٥[، ص =]-٦ ، -٣[

فأوجد على صورة فترة مستعينا بخط الاعداد كل من

س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص ، ص − س ، سَ ، صَ

[٤] اكمل ما يأتى :

(١)]-٥ ، ٧[∪ {-٥} = ...

(٢)]-٣ ، ٤[∪ {-٣ ، ٤} = ...

(٣) [-١ ، ٦[∪ {٦} = ...

(٤)]-٣ ، ٥[∪ {٥} = ...

(٥)]-٣ ، ٥[∩ {٢} = ...

(٦) ط ∩ [-٣ ، ٠[= ....

(٧) ح+ ∩ [-٢ ، ١[= ....

(٨) ص- ∩]-٣ ، ٥] = ...

(٩)]-٣ ، ٥] − {٥} = ...

(١٠) [٤ ، ٧] − {٤ ، ٧} = ...

(١١) [-٣ ، ٥] −]-٣ ، ٥[= ....

(١٢) [٥ ، ٨[− {٥} = ...

(١٣) {-٥} − [-٥ ، ٣[= ....

(١٤) {٢ ، ٥} − [-٢ ، ٣[= ....

(١٥) ح − ح* = ...

(١٦) ح+ ∩ ح- = ...

[٥] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) [-٣ ، ٤] − {-٣ ، ٥} = ...

( ]-٣ ، ٤[،]-٣ ، ٤] ،]-٣ ، ٥[، [-٣ ، ٥[ )

(٢) اذا كانت س ∈ [-٣ ، ∞[فإن ....

(س < -٣ ، س ≤ -٣ ، س > -٣ ، س ≥ -٣)

(٣) اذا كانت س = {س : س ∈ ح ، ٢ < س ≤ ٥}

فإن [٣ ، ٤] .... س (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٤) {٣} ∩ [٣ ، ٦] = ...

(∅ ، {٣} ، {٦} ،]٣ ، ٦])

(٥) {٨ ، ٩ ، ١٠} −]٨ ، ١٠[= ....

(∅ ، {٨ ، ١٠} ، {٩} ، ط)

(٦) مجموع العداد الحقيقية فى [-٧٥ ، ٧٥] هو ....

(-٧٥ ، ٧٥ ، ١٥٠ ، صفر)

Mr.Morad

العمليات على الاعداد الحقيقية

اولا: الجمع والطرح في ح.

(١) $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$ (٢) $٢\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} = -٣\sqrt{٥}$

(٣) $-٤\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧} = -٩\sqrt{٧}$

ملحوظة هامة عند جمع وطرح الجذور تجمع وتطرح المعاملات فقط للجذور المتشابهة

مثال (١) اوجد في ابسط صورة $٦\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} + \sqrt{٣}$

الحــــــل

$(٦\sqrt{٣} + \sqrt{٣}) + (-٥\sqrt{٣} + -٢\sqrt{٣})$

$= ٧\sqrt{٣} + (-٧\sqrt{٣}) =$ صفر

مثال اوجد في ابسط صورة $٤\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٦} + ٨\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٥}$

الحــــــل

$(٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥}) + (-٣\sqrt{٦} + ٨\sqrt{٦})$

$= ٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٦}$

مثال اوجد في ابسط صورة $٢\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٣} - \sqrt{٢} - ٣\sqrt{٣}$

الحــــــل

$(٢\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}) + (-٥\sqrt{٢} - \sqrt{٢})$

$= ٦\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٢}$

مثال اوجد في ابسط صورة $٥\sqrt{\text{س}} - ٣\sqrt{\text{ص}} - ٢\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}$

الحــــــل

$(٥\sqrt{\text{س}} - ٢\sqrt{\text{س}}) + (-٣\sqrt{\text{ص}} + \sqrt{\text{ص}})$

$= ٣\sqrt{\text{س}} - ٢\sqrt{\text{ص}}$

مثال اوجد في ابسط صورة

$\frac{١}{٢}\sqrt{٥} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} + \frac{١}{٢}\sqrt{٣} + \frac{١}{٥}\sqrt{٥}$

الحــــــل

$(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥})\sqrt{٥} + (-\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢})\sqrt{٣}$

$= \frac{٧}{١٠}\sqrt{٥} - \frac{١}{٦}\sqrt{٣}$

خواص عملية الجمع في ح.

(١) خاصية الاغلاق

مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب ∈ ح

(٢) خاصية الإبدال

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب = ب + أ

أي أن عملية جمع الأعداد الحقيقية عملية إبداليه

(٣) خاصية التجميع (الدمج)

لأي ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ فإن

أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

(٤) العنصر المحايد الجمعي

الصفر هو العنصر المحايد الجمعي في ح

لان أ + صفر = صفر + أ = أ

(٥) المعكوس الجمعي

لكل عدد حقيقي أ يوجد معكوس جمعي −أ حيث أ + (−أ) = صفر

العدد ٥ معكوسة الجمعي − ٥ ، العدد − ٧ معكوسة الجمعي ٧

العدد ٥ − ٣ معكوسة الجمعي ٣ − ٥

لاحظ أن المعكوس الجمعي للعدد صفر هو صفر

ثانيا: عملية الضرب في ح.

ملحوظة هامة عند ضرب الجذور نضرب الاشارة × الاشارة والمعامل × المعامل والجذر × الجذر

(١) ضرب الجذران المتشابهان

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٤} = ٢$ أو $(\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

$-٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = (-٢ \times ٣) = -٦$

$٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = (٦ \times ٥) = ٣٠$

$(٢\sqrt{٥})^{٢} = ٢\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} = (٤ \times ٥) = ٢٠$

(٢) ضرب الجذران المختلفان

$\sqrt{٥} \times \sqrt{٣} = \sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٧} \times -\sqrt{٣} = -\sqrt{٢١}$

$٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٦}$ ، $٥ \times -\sqrt{٣} = -٥\sqrt{٣}$

$٤\sqrt{٧} \times -٢ = -٨\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٢} \times ٢ = ٢\sqrt{٢}$

ثالثا: عملية القسمة في ح.

$\sqrt{١٥} \div \sqrt{٣} = \sqrt{٥}$ ، $١٢\sqrt{٦} \div ٣\sqrt{٢} = ٤\sqrt{٣}$

$\sqrt{١٢} \div \sqrt{٣} = \sqrt{٤} = ٢$ ، صفر $\div \sqrt{٥} =$ صفر

لاحظ ان القسمة على صفر ليس لها معنى

Morad

خواص عملية الجمع في ح.

(١) خاصية الانغلاق

حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب ∈ ح

(٢) خاصية الإبدال

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب = ب × أ

أي أن عملية ضرب الأعداد الحقيقية عملية أبدالية

(٣) خاصية التجميع (الدمج)

لأي ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب، جـ فإن

أ × ب × جـ = (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

(٤) العنصر المحايد الضربي

الواحد هو العنصر المحايد الضربي في ح

لان أ × ١ = ١ × أ = أ

(٥) المعكوس الضربي

لكل عدد حقيقي أ يوجد معكوس ضربي $\frac{١}{أ}$

$أ \times \frac{١}{أ} = ١$

العدد ٥ معكوسة الضربي $\frac{١}{٥}$ ،،،،،،،

العدد $\frac{٣}{٥}$ معكوسة الضربي $\frac{٥}{٣}$

لاحظ أن

المعكوس الضربي للعدد واحد هو واحد

لا يوجد معكوس ضربي للعدد صفر

(٦) خاصية التوزيع (توزيع الضرب على الجمع)

إذا كان أ ، ب، جـ أعداد حقيقية فإن

أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ

مثال ٦ اوجد ناتج ما يلي :

(١) $\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \sqrt{٥}$ (٢) $٢\sqrt{٣} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{٧} \div \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٧}}$

الحل

(١) $(\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}}) \times \sqrt{٥} = ١ \times \sqrt{٥} = \sqrt{٥}$

(٢) $(٢\sqrt{٣} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{٧}) \div \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٥\sqrt{٧}} = \frac{٤\sqrt{٢١}}{٧} \times \frac{٥\sqrt{٧}}{٢٠\sqrt{٣}}$

$= \frac{٢٠\sqrt{١٤٧}}{١٤٠\sqrt{٣}} = ٣$

مثال ٧ اكتب كلا مما يأتي بحيث يكون المقام عددا صحيحا :

(١) $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ (٢) $\frac{-٣}{\sqrt{٢}}$ (٣) $\frac{٥}{٣\sqrt{٢}}$ (٤) $\frac{٩}{٢\sqrt{٦}}$

الحل

(١) $\frac{٩}{\sqrt{٣}} = \frac{٩}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٣} = ٣\sqrt{٣}$

(٢) $\frac{-٣}{\sqrt{٢}} = \frac{-٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{-٣\sqrt{٢}}{٢}$

(٣) $\frac{٥}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٥}{٣\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٦}$

(٤) $\frac{٩}{٢\sqrt{٦}} = \frac{٩}{٢\sqrt{٦}} \times \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٦}} = \frac{٩\sqrt{٦}}{١٢} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٤}$

مثال ٨ اوجد ناتج كلا مما يأتي :

(١) $٢\sqrt{٣}(٥\sqrt{٣} - ٤)$ (٢) $(٢ + \sqrt{٣})(\sqrt{٣} + ٧)$

(٣) $(٧\sqrt{٢} - ٥)(٧\sqrt{٢} + ٥)$ (٤) $(٥\sqrt{٣} - ٢)^{٢}$

الحل

(١) $٢\sqrt{٣}(٥\sqrt{٣} - ٤) = ٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} \times (-٤)$

$= ١٠ \times ٣ - ٨\sqrt{٣} = ٣٠ - ٨\sqrt{٣}$

(٢) $(٢ + \sqrt{٣})(\sqrt{٣} + ٧) = ٢(\sqrt{٣} + ٧) + \sqrt{٣}(\sqrt{٣} + ٧)$

$= ٢ \times \sqrt{٣} + ٢ \times ٧ + \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + ٧ \times \sqrt{٣}$

$= ٢\sqrt{٣} + ١٤ + ٣ + ٧\sqrt{٣} = (٢\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٣}) + (١٤ + ٣)$

$= ٩\sqrt{٣} + ١٧$

(٣) $(٧\sqrt{٢} - ٥)(٧\sqrt{٢} + ٥) = (٧\sqrt{٢})^{٢} - (٥)^{٢}$

$= ٤٩ \times ٢ - ٢٥ = ٩٨ - ٢٥ = ٧٣$

لاحظ ان $(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

(٤) $(٥\sqrt{٣} - ٢)^{٢} = (٥\sqrt{٣})^{٢} - ٢ \times ٥\sqrt{٣} \times ٢ + (-٢)^{٢}$

$= ٥^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٢} - ٢٠\sqrt{٣} + ٤ = ٢٥ \times ٣ - ٢٠\sqrt{٣} + ٤$

$= ٧٥ - ٢٠\sqrt{٣} + ٤ = ٧٩ - ٢٠\sqrt{٣}$

لاحظ ان $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

مثال ٩ اذا كانت $س = ٥\sqrt{٣} - ٢$ ، $ص = ٥\sqrt{٣} + ٢$

فأوجد قيمة المقدار $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

الحل

من الضرب بمجرد النظر نلاحظ ان

$(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

$\therefore س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = (٥\sqrt{٣} - ٢ + ٥\sqrt{٣} + ٢)^{٢}$

$= (١٠\sqrt{٣})^{٢} = (١٠)^{٢} \times (\sqrt{٣})^{٢} = ١٠٠ \times ٣ = ٣٠٠$

حاول بنفسك

اوجد ناتج كلا مما يأتي :

(١) $٥\sqrt{٢}(٣\sqrt{٢} - ٢)$ (٢) $(٢\sqrt{٣} - ٣)(٢\sqrt{٣} + ٣)$

(٣) $(٧ - \sqrt{٢})(\sqrt{٢} + ٥)$ (٤) $(٣\sqrt{٢} + ٥)^{٢}$

M.Morad

(١٠) اكتب كلا مما يأتي بحيث يكون المقام عددا صحيحا :

(١) $\frac{\sqrt{٢}+٢}{\sqrt{٢}}$ (٢) $\frac{٢\sqrt{٣}+٣}{\sqrt{٣}}$ (٣) $\frac{\sqrt{٥}+٥}{\sqrt{٥}}$

الحل

(١) $\frac{\sqrt{٢}+٢}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}+٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٢+٢\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٢(١+\sqrt{٢})}{٢} = (١+\sqrt{٢})$

(٢) $\frac{٢\sqrt{٣}+٣}{\sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣}+٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٦+٣\sqrt{٣}}{٣} = \frac{٣(٢+\sqrt{٣})}{٣} = (٢+\sqrt{٣})$

(٣) $\frac{\sqrt{٥}+٥}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥}+٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥+٥\sqrt{٥}}{٥} = \frac{٥(١+\sqrt{٥})}{٥} = (١+\sqrt{٥})$

(١١) أكمل ما يأتي :

(١) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو ....

(٢) المعكوس الضربي للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}$ هو ....

الحل

(١) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو $\frac{١٠}{\sqrt{٥}}$

∴ $\frac{١٠}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠\sqrt{٥}}{٥} = ٢\sqrt{٥}$

(٢) المعكوس الضربي للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}$ هو $\frac{٥}{٢\sqrt{٣}}$

∴ $\frac{٥}{٢\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$

(١٢) أوجد ناتج كلا مما يأتي :

(١) $٥\sqrt{٢}(٢\sqrt{٢}-٣)-٧$ (٢) $٣\sqrt{٣}-٢(٥-\sqrt{٣})$

(٣) $٧+٣\sqrt{٥}(\sqrt{٥}-٤)$ (٤) $(٢\sqrt{٣}+١)^٢$

(٥) $(٣+\sqrt{٥})(٣-\sqrt{٥})$ (٦) $(٢\sqrt{٣}+٥)(٢\sqrt{٣}-٥)$

(٧) $(٢\sqrt{٣}+٥)(\sqrt{٣}+١)$ (٨) $(٢\sqrt{٣}+٥)^٢$

الحل

(١) $٥\sqrt{٢}(٢\sqrt{٢}-٣)-٧ = ١٠\times٢-١٥\sqrt{٢}-٧$

$= ٢٠-١٥\sqrt{٢}-٧ = ١٣-١٥\sqrt{٢}$

(٢) $٣\sqrt{٣}-٢(٥-\sqrt{٣}) = ٣\sqrt{٣}-١٠+٢\sqrt{٣}$

$= ٥\sqrt{٣}-١٠$

(٣) $٧+٣\sqrt{٥}(\sqrt{٥}-٤) = ٧+٣\times٥-١٢\sqrt{٥}$

$= ٧+١٥-١٢\sqrt{٥} = ٢٢-١٢\sqrt{٥}$

(٤) $(٢\sqrt{٣}+١)^٢ = (٢\sqrt{٣})^٢+٢\sqrt{٣}\times١\times٢+(١)^٢$

$= ١٢+٤\sqrt{٣}+١ = ١٣+٤\sqrt{٣}$

(٥) $(٣+\sqrt{٥})(٣-\sqrt{٥}) = (٣)^٢-(\sqrt{٥})^٢ = ٩-٥ = ٤$

(٦) $(٢\sqrt{٣}+٥)(٢\sqrt{٣}-٥) = (٢\sqrt{٣})^٢-(٥)^٢ = ١٢-٥ = ٧$

(٧) $(٢\sqrt{٣}+٥)(\sqrt{٣}+١) = ٢\sqrt{٣}(\sqrt{٣}+١)+٥(\sqrt{٣}+١)$

$= ٢\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}+٢\sqrt{٣}\times١+٥\times\sqrt{٣}+٥\times١$

$= ٦+٢\sqrt{٣}+٥\sqrt{٣}+٥ = ١١+٧\sqrt{٣}$

(٨) $(٢\sqrt{٣}+٥)^٢ = (٢\sqrt{٣})^٢+٢\sqrt{٣}\times٥\times٢+(٥)^٢$

$= ١٢+٢٠\sqrt{٣}+٢٥ = ٣٧+٢٠\sqrt{٣}$

مثال (١٣) اذا كانت $\text{أ} = \sqrt{٥}+٣$ ، $\text{ب} = \sqrt{٥}-٣$

فأوجد قيمة المقدار $\text{أ}^٢+٣\,\text{أ}\,\text{ب}+\text{ب}^٢$

الحل

$\text{أ}^٢ = (\sqrt{٥}+٣)^٢ = ٥+٦\sqrt{٥}+٩ = ١٤+٦\sqrt{٥}$

$\text{ب}^٢ = (\sqrt{٥}-٣)^٢ = ٥-٦\sqrt{٥}+٩ = ١٤-٦\sqrt{٥}$

$٣\,\text{أ}\,\text{ب} = ٣(\sqrt{٥}+٣)(\sqrt{٥}-٣) = ٣(٥-٩) = ٣\times-٤ = -١٢$

∴ المقدار $\text{أ}^٢+٣\,\text{أ}\,\text{ب}+\text{ب}^٢ = ١٤+٦\sqrt{٥}-١٢+١٤-٦\sqrt{٥} = ١٦$

مثال (١٤) اذا كانت $\text{س} = ٣\sqrt{٢}+١$ ، $\text{ص} = ٣\sqrt{٢}-١$

فأوجد قيمة المقدار (١) $\text{س}^٢-\text{ص}^٢$ ، (٢) $\text{س}^٢+٢\,\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}^٢$

الحل

$\text{س}^٢ = (٣\sqrt{٢}+١)^٢ = ١٨+٦\sqrt{٢}+١ = ١٩+٦\sqrt{٢}$

$\text{ص}^٢ = (٣\sqrt{٢}-١)^٢ = ١٨-٦\sqrt{٢}+١ = ١٩-٦\sqrt{٢}$

(١) $\text{س}^٢-\text{ص}^٢ = ١٩+٦\sqrt{٢}-(١٩-٦\sqrt{٢})$

$= ١٩+٦\sqrt{٢}-١٩+٦\sqrt{٢} = ١٢\sqrt{٢}$

(٢) $\text{س}^٢+٢\,\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}^٢$ خد بالك ياشاطر بان هذا المقدار مربع كامل أي ان $\text{س}^٢+٢\,\text{س}\,\text{ص}+\text{ص}^٢ = (\text{س}+\text{ص})^٢$

$= (٣\sqrt{٢}+١+٣\sqrt{٢}-١)^٢ = (٦\sqrt{٢})^٢ = ٧٢$

Mr.Morad

تمارين على العمليات على الاعداد الحقيقية

[١] اوجد ناتج ما يلي :

(١) $٥\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}$

(٢) $٥\sqrt{٦} - ٤\sqrt{٦} + ٣\sqrt{٦} - ٤\sqrt{٦}$

(٣) $٢\sqrt{٧} - ٧ + ٥\sqrt{٧} - ٣$

(٤) $٥\sqrt{أ} - ٥\sqrt{ب} - ٢\sqrt{أ} - ٣\sqrt{ب}$

(٥) $(٢\sqrt{٢} + ٣)^٢$ (٦) $(٣\sqrt{٣} + ١)^٢$

(٧) $(\sqrt{٣} - ٢)^٢$ (٨) $(\sqrt{٣} - ٢)^٢$

(٩) $(٥ - ٢\sqrt{٢})^٢$ (١٠) $(٢\sqrt{٢} - ٥)(\sqrt{٣} + ١)$

(١١) $(٥ - ٣\sqrt{٣})(٥ + ٣\sqrt{٣})$ (١٢) $٥\sqrt{٥} - ٣(\sqrt{٥} - ١)$

(١٣) $٣\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٧}(١ + \sqrt{٧})$ (١٤) $(\sqrt{٥} - ٣)(٢\sqrt{٥} + ١)$

(١٥) $(\sqrt{٥} - ٢)(\sqrt{٥} + ٢)$ (١٥) $(\sqrt{٥} - ٢)(\sqrt{٥} + ٢)$

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ...$ [$\sqrt{١٠}$ ، $٢\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٥]

(٢) $\sqrt{٤٥} \div \sqrt{٥} = ...$ [$\sqrt{٤٠}$ ، ٣ ، ±٣ ، ٨]

(٣) $(\sqrt{٥} + ...)^٢ = ٩ + ٤\sqrt{٥}$ [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٤) $(\sqrt{٥} - ٢)^٢(\sqrt{٥} + ٢)^٢ = ...$ [١ ، ٣ ، $\sqrt{٥} - ٢$ ، $\sqrt{٥}$]

(٥) $\sqrt{٣} + (-\sqrt{٣}) = ...$ [$٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٦}$ ، صفر]

(٦) $٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} = ...$ [$٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٦}$ ، $٦\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt[٣]{٣}$]

(٧) $٧\sqrt{٢} + ٥ + \sqrt{٢} - ٤ = ...$

[١٥ ، $١ + ٧\sqrt{٢}$ ، $١ + ٨\sqrt{٢}$ ، $١ + ٦\sqrt{٢}$]

(٨) $(٢\sqrt[٣]{٥})^٣ = ...$ [١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، $٤\sqrt[٣]{٥}$]

(٩) المعكوس الجمعي للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ =........

[$-٢\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $-٣\sqrt{٢}$]

(١٠) المعكوس الجمعي للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})$ =........

[$\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$]

(١١) المعكوس الضربي للعدد $\sqrt{٥}$ =........

[-٥ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$]

(١٢) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ =........

[$\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٦}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$]

(١٣) $(\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥}) \div \sqrt{٥} = ...$ [$٣\sqrt{٥}$ ، ٣ ، ٥ ، ٤]

(١٤) اذا كانت $س = \sqrt{٢} + ١٠$ ، $ص = \sqrt{٢} - ١٠$ فان

$(س + ص)^٢$ =........ [$٤\sqrt{٢}$ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

(١٥) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ =........

[$\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٥}$ ، $-\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$]

[٣] اكمل ما يأتي :

(١) المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ =........

(٢) المعكوس الضربي للعدد $\frac{٥\sqrt{٢}}{٤}$ =........

(٣) المعكوس الضربي للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥} = \frac{......}{٦}$

(٤) $(\sqrt{٢} + ٢) \div \sqrt{٢}$ =....

(٥) اذا كانت $\sqrt{س} = \sqrt{٣} + ٢$ فان س =........

(٦) المعكوس الجمعي للعدد $\frac{\sqrt{٢} - ٧}{٣}$ =........

(٧) المحايد الضربي في ح هو ....، المحايد الجمعي في ح هو .....

(٨) المعكوس الجمعي للعدد $(١ - \sqrt{٥})$ =........

(٩) المعكوس الضربي للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{....}{\sqrt{٣}}$

(١٠) $(\sqrt{٣} - ...)^٢ = ٧ - ....$

[٤] اكتب كلا مما يأتي بحيث يكون المقام عددا صحيحا :

(١) $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ (٢) $\frac{١٠}{\sqrt{٥}}$ (٣) $\frac{٨}{\sqrt{٦}}$

(٤) $\frac{-٦}{\sqrt{٣}}$ (٥) $\frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$ (٦) $\frac{٦}{٢\sqrt{٣}}$

(٧) $\frac{\sqrt{٢} + ٣}{\sqrt{٢}}$ (٨) $\frac{\sqrt{٥} - ١٥}{٢\sqrt{٥}}$ (٩) $\frac{٨ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

Mr.Morad

العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن

- $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$ والعكس $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

فمثلا $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ، $\sqrt{10} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$

- $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ والعكس $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$

فمثلا $\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ وكذلك $\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

- $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ فمثلا $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

مثال (١) ضع كلا مما يأتي على صورة أ$\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة

(١) $\sqrt{12}$ (٢) $\sqrt{45}$ (٣) $\sqrt{48}$

(٤) $\sqrt{50}$ (٥) $\sqrt{28}$ (٦) $\sqrt{1000}$

(٧) $\sqrt{3} \times \sqrt{15}$ (٨) $\sqrt{2} \times \sqrt{32}$ (٩) $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$

الحل

(١) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ (٢) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$

(٣) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

(٤) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

(٥) $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

(٦) $\sqrt{1000} = \sqrt{100} \times \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

(٧) $\sqrt{3} \times \sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

(٨) $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2} \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

(٩) $\sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

مثال (٢) ضع كلا مما يأتي على صورة $\sqrt{ب}$ حيث ب عدد صحيح

(١) $2\sqrt{5}$ (٢) $4\sqrt{3}$ (٣) $3\sqrt{5}$ (٤) $10\sqrt{3}$

الحل

(١) $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$

(٢) $4\sqrt{3} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{48}$

(٣) $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$

(٤) $10\sqrt{3} = \sqrt{100 \times 3} = \sqrt{300}$

مثال (٣)

(١) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{98}$ (٢) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75}$

(٣) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$ (٤) $2\sqrt{50} + 3\sqrt{32} - \sqrt{72}$

(٥) $\sqrt{32} - 3\sqrt{8} + 6\sqrt{\frac{1}{2}}$ (٦) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 10\sqrt{\frac{1}{5}}$

الحل

(١) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{98} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$

$= 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$

(٢) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75} = 2\sqrt{4 \times 3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{25 \times 3}$

$= 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(٣) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{25 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3}$

$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

(٤) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72}$

$= 2\sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{16 \times 2} + \sqrt{36 \times 2}$

$= 10\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(٥) $\sqrt{32} - 3\sqrt{8} + 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{16 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{36 \times \frac{1}{2}}$

$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{9 \times 2}$

$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

(٦) $2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 10\sqrt{\frac{1}{5}}$

$= 2\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{16 \times 5} + \sqrt{100 \times \frac{1}{5}}$

$= 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + \sqrt{20} = 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5}$

$= 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = -6\sqrt{5}$

حاول بنفسك أختصر إلى أبسط صورة :

(١) $\sqrt{75} - 2\sqrt{27} + \sqrt{3}$ (٢) $2\sqrt{50} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

(٣) $\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 2\sqrt{5}$ (٤) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

مثال (٤) أكمل ما يأتي :

(١) $\sqrt{2} + \sqrt{2} =$ .... (٢) $\sqrt{2} + \sqrt{8} =$ ....

(٣) $\frac{1}{2}\sqrt{20} =$ .... (٤) $\sqrt{20} - \sqrt{5} =$ ....

(٥) $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{20}$ ، $\sqrt{45}$ ، $\sqrt{80}$ ، .... (بنفس التسلسل)

الحل

(١) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (٢) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$

(٣) $\frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 5} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

(٤) $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{20}$ ، $\sqrt{45}$ ، $\sqrt{80}$ ، $\sqrt{125}$ (بنفس التسلسل)

$\sqrt{5}$ ، $2\sqrt{5}$ ، $3\sqrt{5}$ ، $4\sqrt{5}$ ، $5\sqrt{5}$

Mr Morad

الكميتان المترافقتان أو العددان المترافقان

تعريف

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين فإن كلا من العددين ($\sqrt{أ}+\sqrt{ب}$) ، ($\sqrt{أ}-\sqrt{ب}$) يعتبر مرافقاً للعدد الاخر

* حاصل ضرب العددان المترافقان
= مربع الحد الاول − مربع الحد الثاني = عدد نسبي دائما

$$(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})(\sqrt{أ}-\sqrt{ب}) = (\sqrt{أ})^{٢} - (\sqrt{ب})^{٢} = أ - ب$$

* مجموع العددان المترافقان = ضعف الحد الاول

$$(\sqrt{أ}+\sqrt{ب}) + (\sqrt{أ}-\sqrt{ب}) = ٢\sqrt{أ}$$

فمثلا العدد $\sqrt{٥}-\sqrt{٢}$ مرافقة هو $\sqrt{٥}+\sqrt{٢}$

* مجموعهما = $٢\sqrt{٥}$ * حاصل ضربهما = $٥ - ٢ = ٣$

حاول بنفسك

(١) العدد $\sqrt{٧}+\sqrt{٣}$ مرافقة هو ....
* مجموعهما = ... * حاصل ضربهما = ...

(٢) العدد $\sqrt{٥}+٢$ مرافقة هو ....
* مجموعهما = ... * حاصل ضربهما = ...

(٣) العدد $٢\sqrt{٣}+٥$ مرافقة هو ....
* مجموعهما = ... * حاصل ضربهما = ...

ملحوظة اذا كان لدينا عدد حقيقي مقامة على صورة ($\sqrt{أ}+\sqrt{ب}$) أو ($\sqrt{أ}-\sqrt{ب}$) باننا نضعه فى ابسط صورة وذلك بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام

مثال ١ ضع فى ابسط صورة : $\frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}}$

الحل

$$\frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٧}-\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧}+\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}+\sqrt{٣}} = \frac{٤(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{٧-٣}$$

$$= \frac{٤(\sqrt{٧}+\sqrt{٣})}{٤} = (\sqrt{٧}+\sqrt{٣})$$

مثال ٢ اكتب كلا مما يأتي بحيث يكون المقام عددا صحيحا :

(١) $\frac{١٢}{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}}$ (٢) $\frac{\sqrt{٨}}{٣+٢\sqrt{٢}}$

الحل

(١) $\frac{١٢}{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}} = \frac{١٢}{\sqrt{٦}-\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}} = \frac{١٢(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})}{٦-٢}$

$= ٣(\sqrt{٦}+\sqrt{٢}) = ٣\sqrt{٦}+٣\sqrt{٢}$

(٢) $\frac{\sqrt{٨}}{٣+٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٨}}{٣+٢\sqrt{٢}} \times \frac{٣-٢\sqrt{٢}}{٣-٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٨}(٣-٢\sqrt{٢})}{٩-٨}$

$= \sqrt{٨}(٣-٢\sqrt{٢}) = ٣\sqrt{٨} - ٢\sqrt{١٦} = ٦\sqrt{٢} - ٨$

حاول بنفسك ضع فى ابسط صورة :

(١) $\frac{٤}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$ (٢) $\frac{٧}{٢\sqrt{٢}-١}$ (٣) $\frac{٣}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}$

مثال ٣ اوجد المعكوس الضربي لكل مما يأتي في ابسط صورة :

(١) $\sqrt{٣}-\sqrt{٢}$ (٢) $\sqrt{٥}+٢$

الحل

(١) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣}-\sqrt{٢} = \frac{١}{\sqrt{٣}-\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}{٣-٢} = \sqrt{٣}+\sqrt{٢}$

(٢) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}-٢ = \frac{١}{\sqrt{٥}+٢} \times \frac{\sqrt{٥}-٢}{\sqrt{٥}-٢}$

$= \frac{\sqrt{٥}-٢}{٥-٤} = \sqrt{٥}-٢$

مثال ٤ اذا كانت $أ = \sqrt{٥}-١$ ، $ب = \frac{٤}{\sqrt{٥}-١}$

فأوجد قيمة $أ^{٢} + أ ب + ب^{٢}$

الحل

$ب = \frac{٤}{\sqrt{٥}-١} \times \frac{\sqrt{٥}+١}{\sqrt{٥}+١} = \frac{٤(\sqrt{٥}+١)}{٥-١} = \sqrt{٥}+١$

$أ^{٢} = (\sqrt{٥}-١)^{٢} = ٥ - ٢\sqrt{٥} + ١ = ٦ - ٢\sqrt{٥}$

$ب^{٢} = (\sqrt{٥}+١)^{٢} = ٥ + ٢\sqrt{٥} + ١ = ٦ + ٢\sqrt{٥}$

$أ ب = (\sqrt{٥}-١)(\sqrt{٥}+١) = (٥-١) = ٤$

∴ المقدار $أ^{٢} + أ ب + ب^{٢} = ٦ - ٢\sqrt{٥} + ٤ + ٦ + ٢\sqrt{٥} = ١٦$

مثال ٥ اذا كانت $س = \frac{٢}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}}$ ، $ص = \sqrt{٥}-\sqrt{٣}$

فاثبت ان س ، ص عددان مترافقان ثم اوجد قيمة $س^{٢} + س ص + ص^{٢}$

الحل

$س = \frac{٢}{\sqrt{٥}-\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}+\sqrt{٣}} = \frac{٢(\sqrt{٥}+\sqrt{٣})}{٥-٣} = \sqrt{٥}+\sqrt{٣}$

∴ س ، ص عددان مترافقان

$س^{٢} = (\sqrt{٥}+\sqrt{٣})^{٢} = ٥ + ٢\sqrt{١٥} + ٣ = ٨ + ٢\sqrt{١٥}$

$ص^{٢} = (\sqrt{٥}-\sqrt{٣})^{٢} = ٥ - ٢\sqrt{١٥} + ٣ = ٨ - ٢\sqrt{١٥}$

$س ص = (\sqrt{٥}-\sqrt{٣})(\sqrt{٥}+\sqrt{٣}) = (٥-٣) = ٢$

∴ المقدار $أ^{٢} + أ ب + ب^{٢} = ٨ + ٢\sqrt{١٥} + ٢ + ٨ - ٢\sqrt{١٥} = ١٨$

Mr.Morad

تمارين على العمليات على الجذور التربيعية

[١] اكمل ما يأتي :

(١) $\sqrt{5}+\sqrt{5}=\ldots\ldots$ (٢) $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\ldots\ldots$

(٣) $\frac{1}{4}\sqrt{40}=\ldots\ldots$ (٤) $\sqrt{18}-\sqrt{2}=\ldots\ldots$

(٥) $\sqrt{3}+\sqrt{6}=3\times\ldots\ldots$ (٦) $\frac{1}{2}\sqrt{48}=2\times\ldots\ldots$

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\ldots\ldots$ [$\sqrt{6}$ ، $\sqrt{2}$ ، ٢ ، ١]

(٢) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2=\ldots\ldots$ [$\sqrt{10}$ ، $\sqrt{18}$ ، ١٠ ، ١٨]

(٣) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})=\ldots\ldots$ [$2\sqrt{7}$ ، $-2\sqrt{5}$ ، ١٢ ، ٢]

(٤) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\ldots\ldots$ [$\sqrt{\frac{1}{4}}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ١]

(٥) اذا كانت $\text{س}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ فان $\text{س}^{-1}=\ldots\ldots$ [$\sqrt{3}$ ، $3\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{3}$]

(٦) اذا كانت $\text{س}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ ، $\text{ص}=\sqrt{28}+\sqrt{12}$ فان س $=\ldots\ldots$ [ص ، $\frac{1}{2}$ص ، ٢ص ، ص^2]

[٣] اوجد كلا من س + ص ، س × ص في الحالات الاتية :

(١) $\text{س}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ، $\text{ص}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(٢) $\text{س}=3+\sqrt{5}$ ، $\text{ص}=3-\sqrt{5}$

(٣) $\text{س}=5-3\sqrt{2}$ ، $\text{ص}=5+3\sqrt{2}$

[٤] ضع كلا مما يأتي على صورة أ$\sqrt{\text{ب}}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة

(١) $\sqrt{28}$ (٢) $2\sqrt{72}$ (٣) $6\sqrt{\frac{2}{3}}$

(٤) $\sqrt{50}$ (٥) $3\sqrt{12}$ (٦) $2\sqrt{\frac{1}{2}}$

[٥] أختصر إلى أبسط صورة :

(١) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{5}$ (٢) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{2}$

(٣) $\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{18}$ (٤) $\sqrt{27}-\sqrt{300}+5\sqrt{18}$

(٥) $2\sqrt{8}-4\sqrt{20}+5\sqrt{\frac{1}{5}}$ (٦) $\sqrt{32}-\sqrt{72}+6\sqrt{\frac{1}{2}}$

(٧) $\sqrt{75}-2\sqrt{27}+\sqrt{3}$ (٨) $2\sqrt{50}-3\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{1}{8}}$

(٩) $2\sqrt{3}\times5\sqrt{2}$ (١٠) $2\sqrt{18}\times3\sqrt{2}$

(١١) $\sqrt{\frac{2}{7}}\times\sqrt{\frac{7}{2}}$ (١٢) $12\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{54}$

تمارين على العددين المترافقين

[١] اكمل ما يأتي :

(١) العدد $7+3\sqrt{2}$ مرافقه هو ....

مجموعهما = ... حاصل ضربهما = ...

(٢) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\ldots\ldots$

(٣) اذا كانت $\text{س}=3+\sqrt{2}$ فان مرافقه ....

مجموعهما = ... حاصل ضربهما = ...

(٤) العدد المرافق للعدد $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ هو ....

(٥) المعكوس الجمعي للعدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ هو ....

(٦) اذا كانت $\text{س}=2+\sqrt{5}$ ، ص العدد المرافق للعدد س فان $(\text{س}-\text{ص})^2=\ldots\ldots$

(٧) اذا كانت $\frac{1}{\text{س}}=\sqrt{5}-2$ فان س = ...

(٨) اذا كانت $\text{س}=\sqrt{3}+2$ ، $\text{ص}=\sqrt{3}-2$ فان (س ص ، س+ ص) = ...

(٩) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-9}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{-9}=\ldots\ldots$

(١٠) $(\sqrt{11}-\sqrt{10})^{4}(\sqrt{11}+\sqrt{10})^{3}=\ldots\ldots$

[٢] ضع كلا من الكسور الاتية بحيث يكون المقام عدد صحيحاً :

(١) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (٢) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (٣) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$

[٣] إذا كانت أ $=\frac{2}{3-\sqrt{7}}$ ، ب $=3-\sqrt{7}$

اثبت أن أ ، ب عددان مترافقتان

ثم أوجد قيمة المقدار أ^2 + ٢ أ ب + ب^2

[٤] إذا كانت $\text{س}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ ، $\text{ص}=\frac{2}{\text{س}}$

اثبت أن س ، ص عددان مترافقتان

ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{س ص}}$

[٥] إذا كانت أ $=\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ، ب $=\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

اثبت أن س ، ص عددان مترافقتان

ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{أ ب}}$

Mr.Morad

$\frac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}}$ $\frac{أ}{ب}$ $\frac{\sqrt[٣]{٤}}{\sqrt[٣]{٥}}$ $\sqrt{\frac{٤}{٥}}$

(٣) $\sqrt[٣]{-أ} = -\sqrt[٣]{أ}$ مثلا $\sqrt[٣]{-٨} \times -\sqrt[٣]{٨} = -٢$

(٤) $\sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{أ} = أ$ مثلا $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{} \times \sqrt[٣]{٢} = ٢$

(٥) $أ\sqrt[٣]{ب} = \sqrt[٣]{أ^٣ ب}$ مثلا $٣\sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٥٤}$

مثال (١) أختصر إلى أبسط صورة :

(١) $\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{-٥٤} - \sqrt[٣]{١٢٨}$

الحـــــل

المقدار $= \sqrt[٣]{٨\times٢} + \sqrt[٣]{٢٧\times٢} - \sqrt[٣]{٦٤\times٢}$

$= ٢\sqrt[٣]{٢} + ٣\sqrt[٣]{٢} - ٤\sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢}$

(٢) $٣\sqrt[٣]{٣٢} - ٣(\sqrt[٣]{-٢})^٢ + \sqrt[٣]{-١٠٨}$

المقدار $= ٣\sqrt[٣]{٨\times٤} - ٣\sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٣]{٢٧\times٤}$

$= ٦\sqrt[٣]{٤} - ٣\sqrt[٣]{٤} - ٣\sqrt[٣]{٤} =$ صفر

(٣) $\sqrt[٣]{٤٠} + \sqrt[٣]{١٣٥} - \sqrt[٣]{٣٢٠}$

الحـــــل

المقدار $= \sqrt[٣]{٨\times٥} + \sqrt[٣]{٢٧\times٥} - \sqrt[٣]{٦٤\times٥}$

$= ٢\sqrt[٣]{٥} + ٣\sqrt[٣]{٥} - ٤\sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥}$

(٤) $٢\sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٢٥٠}$

الحـــــل

المقدار $= ٢\sqrt[٣]{٢٧\times٢} + ٣\sqrt[٣]{٨\times٢} - \sqrt[٣]{١٢٥\times٢}$

$= ٢\times٣\sqrt[٣]{٢} + ٣\times٢\sqrt[٣]{٢} - ٥\sqrt[٣]{٢}$

$= ٦\sqrt[٣]{٢} + ٦\sqrt[٣]{٢} - ٥\sqrt[٣]{٢} = ٧\sqrt[٣]{٢}$

(٥) $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{-٢٥٠} + ٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

الحـــــل

المقدار $= \sqrt[٣]{٢٧\times٢} + \sqrt[٣]{١٢٥\times٢} + \sqrt[٣]{٦٤\times\frac{١}{٤}}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{١٦}$

$= ٨\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{١٦} = ٨\sqrt[٣]{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢} = ١٠\sqrt[٣]{٢}$

مثال (٢) ضع كلا مما يأتي على صورة $أ\sqrt[٣]{ب}$ حيث أ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة

(١) $\sqrt[٣]{٥٤}$ (٢) $٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$ (٣) $٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٣}}$

الحـــــل

(١) $\sqrt[٣]{٥٤} = \sqrt[٣]{٢٧\times٢} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

(٢) $٢\sqrt[٣]{٢٥٠} = ٢\sqrt[٣]{١٢٥\times٢} = ١٠\sqrt[٣]{٢}$

(٣) $٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧\times\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٩}$

مثال (٣) اذا كانت $س = \sqrt[٣]{٥} + ١$ ، $ص = \sqrt[٣]{٥} - ١$ فاحسب قيمة

(١) $(س - ص)^٥$ (٢) $(س + ص)^٣$

الحـــــل

(١) $(س - ص)^٥ = ((\sqrt[٣]{٥}+١) - (\sqrt[٣]{٥}-١))^٥$

$= (\sqrt[٣]{٥}+١-\sqrt[٣]{٥}+١)^٥ = (٢)^٥ = ٣٢$

(٢) $(س + ص)^٣ = ((\sqrt[٣]{٥}+١) + (\sqrt[٣]{٥}-١))^٣$

$= (\sqrt[٣]{٥}+١+\sqrt[٣]{٥}-١)^٣ = (٢\sqrt[٣]{٥})^٣ = ٨\times٥ = ٤٠$

مثال (٤) اوجد ناتج مايلي :

(١) $(\sqrt[٣]{٣}+\sqrt[٣]{٢})(\sqrt[٣]{٩}-\sqrt[٣]{٦}+\sqrt[٣]{٤})$

(٢) $\sqrt[٣]{١٢٨} \times \sqrt[٣]{٥٤}$

(٣) $\sqrt[٣]{٢٤} \times \sqrt[٣]{٧٢}$

الحـــــل

(١) $(\sqrt[٣]{٣}+\sqrt[٣]{٢})(\sqrt[٣]{٩}-\sqrt[٣]{٦}+\sqrt[٣]{٤})$

$= \sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{١٨} + \sqrt[٣]{١٢} + \sqrt[٣]{١٨} - \sqrt[٣]{١٢} + \sqrt[٣]{٨}$

$= ٣ + ٢ = ٥$

(٢) $\sqrt[٣]{١٢٨} \times \sqrt[٣]{٥٤} = \sqrt[٣]{٦٤\times٢} \times \sqrt[٣]{٢٧\times٢}$

$= ٤\sqrt[٣]{٢} \times ٣\sqrt[٣]{٢} = ١٢\sqrt[٣]{٤}$

(٣) $\sqrt[٣]{٢٤} \times \sqrt[٣]{٧٢} = \sqrt[٣]{٨\times٣} \times \sqrt[٣]{٨\times٩}$

$= ٢\sqrt[٣]{٣} \times ٢\sqrt[٣]{٩} = ٤\sqrt[٣]{٢٧} = ٤\times٣ = ١٢$

Mr.Morad

تمارين على العمليات على الجذور التكعيبية

[١] اوجد فى ابسط صورة :

(١) $\sqrt[3]{١٦}$ (٢) $\sqrt[3]{-٥٤}$ (٣) $\frac{٢}{٣}\sqrt[3]{-١٢٥}$

(٤) $٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}}$ (٥) $-١٠\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}}$ (٦) $٢\sqrt[3]{٢٥٠}$

[٢] أختصر إلى أبسط صورة :

(١) ∛٨١ + ∛-٢٤ - ٣∛(١/٩)

(٢) ٣∛٥٤ - ٣∛١٦ + ∛١٢٨

(٣) ٥∛٣ - ٥∛٨١ + ∛٢٤ - ∛١٩٢

(٤) ٧∛١٦ + ٤∛-٥٤ - ٨∛(١/٤) + ∛٢٥٠

(٥) ∛١٠٨ + ٢∛٤ - ∛(١/٢)

(٦) √٢٧ - (١/٣)∛٢٧ - ٩√(١/٣) - ١

(٧) ٣∛١٦ - ٥√٥٠ + ∛٥٤ + ٢√٣٢

[٣] اوجد ناتج ما يلى :

(١) (∛٣ + ٥)^٢ (٢) (∛٢ - ١)^٢

(٣) (∛٥ + ∛٢)(∛٢٥ - ∛١٠ + ∛٤)

(٤) (∛٤ - ١)(∛١٦ + ∛٤ + ١)

[٤] اذا كانت س = ∛٣ + ١ ، ص = ∛٣ - ١ فاحسب قيمة

(١) (س - ص)^٣ (٢) (س + ص)^٣

[٥] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) ∛٥٤ + ∛-٢ = ... [∛٥٢ ، ∛٢ ، ٢∛٢ ، ٢∛٢]

(٢) ∛-٦٤ + √١٦ = ... [صفر ، ٨ ، -٨ ، ±٨]

(٣) ∛٢ + ∛٢ = ... [∛٢ ، ∛٤ ، ∛٨ ، ∛١٦]

(٤) ∛(٢/٩) = ... [∛(١/٦) ، ∛٦ ، ∛٢ ، ∛٦ / ٣]

[٦] اكمل ما يأتي :

(١) ∛(٢/٣) × ∛-١٢ = ... (٢) ∛٣ × ∛٩ = √.....

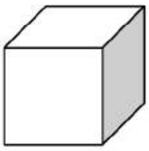
(٣) ∛٥٤ - ∛-١٦ = ∛..... (٤) ∛٢٥٠ - ∛٢ = ...

(٥) ∛(٣/٤) ÷ ∛(٢/٩) = ... (٦) ∛٥٤ + ∛-٢ = ...

تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

اولا المكعب :

المكعب هو مجسم يتكون من ٦ اوجه مربعة متساوية كما هو مبين بالشكل أبعاده متساوية فى الطول



بفرض ان طول حرف (ضلع) المكعب هو ل

فان مساحة الوجه الواحد = ل^٢ وحدة مربعة

مساحته الجانبية = ٤ ل^٢ وحدة مربعة ،

مساحته الكلية = ٦ ل^٢ وحدة مربعة

حجمه = ل^٣ وحدة مكعبة

مثال ١ مكعب طول حرفه ١٠ سم أوجد

(١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه

الحل

مساحته الجانبية = ٤ ل^٢ = ٤ (١٠)^٢ = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ سم^٢

مساحته الكلية = ٦ ل^٢ = ٦ (١٠)^٢ = ٦ × ١٠٠ = ٦٠٠ سم^٢

حجمه = ل^٣ = (١٠)^٣ = ١٠٠٠ سم^٣

مثال ٢ مكعب مساحته الجانبية ١٠٠ سم^٢ أوجد مساحته الكلية وحجمه

الحل

∵ مساحته الجانبية = ١٠٠ ٤ ل^٢ = ١٠٠

∴ ل^٢ = ٢٥ ∴ ل = √٢٥ = ٥ سم

∴ مساحته الكلية = ٦ ل^٢ = ٦(٥)^٢ = ٦ × ٢٥ = ١٥٠ سم^٢

∴ حجمه = ل^٣ = (٥)^٣ = ١٢٥ سم^٣

مثال ٣ مكعب مساحته الكلية ٦٠٠ سم^٢ أوجد مساحته الجانبية وحجمه

الحل

∵ مساحته الكلية = ٦٠٠

٦ ل^٢ = ٦٠٠ ∴ ل^٢ = ١٠٠ ∴ ل = √١٠٠ = ١٠ سم

∴ مساحته الجانبية = ٤ ل^٢ = ٤(١٠)^٢ = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ سم^٢

∴ حجمه = ل^٣ = (١٠)^٣ = ١٠٠٠ سم^٣

مثال ٤ مكعب حجمه ٢١٦ سم^٣ أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية

الحل

∵ حجمه = ٢١٦ ∴ ل^٣ = ٢١٦ ∴ ل = ∛٢١٦ = ٦ سم

∴ مساحته الجانبية = ٤ ل^٢ = ٤(٦)^٢ = ٤×٣٦ = ١٤٤ سم^٢

∴ مساحته الكلية = ٦ ل^٢ = ٦(٦)^٢ = ٦ × ٣٦ = ٢١٦ سم^٢

Mr Morad

حاول بنفسك

اكمل الجدول الاتي :

	طول حرف المكعب	مساحة الوجه الواحد	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
١	٣ سم	....	....	....	....
٢	....	٤٩ سم²	....	....	....
٣	....	....	١٤٤ سم²	....	....
٤	....	....	....	١٥٠ سم²	....
٥	....	....	....	....	٦٤ سم³

تمارين على المكعب

[١] مكعب طول حرفه = ٦سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه [١٤٤سم²، ٢١٦سم²، ٢١٦سم³]

[٢] مكعب حجمه = ١٢٥ سم³ أوجد طول حرفه، مساحته الجانبية ومساحته الكلية [٥ سم، ١٠٠سم²، ١٥٠سم²]

[٣] مكعب مساحة أحد أوجهه = ١٠٠سم² أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

[٤] مكعب محيط أحد أوجهه = ١٢ سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه [٣٦سم²، ٥٤سم²، ٢٧سم³]

[٥] مكعب مجموع أطوال جميع أحرفه = ٤٨ سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه [٦٤سم²، ٩٦سم²، ٦٤سم³]

[٦] اكمل ما يأتي :

(١) المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ل سم = ... سم²

(٢) إذا كان طول حرف مكعب ٦سم فإن حجمه = ... سم³

(٣) المكعب الذي طول حرفه ٦ل سم فإن حجمه = ... سم³

(٤) مكعب طول حرفه = ٤ سم فإن مساحته الكلية = ... سم²

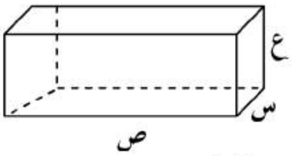
(٥) المكعب الذي حجمه = ١٠٠٠ سم³ مساحة سطحه الجانبي = ... سم²

(٦) إذا كانت المساحة الكلية لمكعب = ٩٦ سم² فإن مساحة الوجه الواحد = ... سم²

(٧) إذا كانت مساحة الاوجه الستة لمكعب = ١٥٠ سم² فإن حجمه = ... سم³

(٨) مكعب حجمه = ٥ سم³ إذا ضوعف طول حرفه فإن حجمه = ... سم³

ثانيا متوازي المستطيلات :



متوازي المستطيلات :

هو جسم جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل وكل وجهين متقابلين متطابقين

إذا كانت أبعاده س ، ص ، ع فإن

مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢(س + ص) × ع

مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع)

حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع = س ص ع

مثال ١ متوازي مستطيلات أبعاده ٣ ، ٤ ، ٦سم أوجد

(١) مساحته الكلية (٢) حجمه

الحل

مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + س ع)

= ٢ [٣ × ٤ + ٤ × ٦ + ٣ × ٦]

= ٢ [١٢ + ٢٤ + ١٨] = ٢ × ٥٤ = ١٠٨ سم²

حجمه = س ص ع = ٣ × ٤ × ٦ = ٨٤ سم³

مثال ٢ متوازي مستطيلات النسبة بين أبعاده ٢ : ٣ : ٥ فإذا كان حجمه ٣٠٠٠٠ سم³ أوجد مساحته الكلية

الحل

نفرض أبعاده هي ٢ س ، ٣ س ، ٥ س

∵ حجمه = ٣٠٠٠٠ ∴ ٢ س × ٣ س × ٥ س = ٣٠٠٠٠

∴ ٣٠ س³ = ٣٠٠٠٠ ∴ س = ∛١٠٠٠

∴ أبعاده هي ٢ × ١٠ ، ٣ × ١٠ ، ٥ × ١٠

٢٠ سم ، ٣٠ سم ، ٥٠ سم

مساحته الكلية = ٢(٢٠×٣٠+٣٠×٥٠+٢٠×٥٠)

= ٢ (٦٠٠ + ١٥٠٠ + ١٠٠٠) = ٢ × ٣١٠٠ = ٦٢٠٠

حاول بنفسك

متوازي مستطيلات أبعاده √٢ ، √٣ ، √٦ سم أوجد

(١) مساحته الكلية (٢) حجمه

Mr.Morad

تمارين على متوازي المستطيلات

[١] متوازي مستطيلات أبعاده ٤ سم ، ٦ سم ، ٥ سم أوجد

(١) مساحته الكلية (٢) حجمه

[٢] متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٤ سم ، ٥ سم

وارتفاعه = ٦ سم أوجد

(١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه

[٣] متوازي مستطيلات النسبة بين أبعاده ٢ : ٣ : ٤

وحجمه = ٣٠٠٠ أوجد مساحته الكلية

[٤] متوازي مستطيلات قاعدته مربع طول ضلعه = ٥ سم

وارتفاعه = ٦ سم أوجد

(١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه

[٥] ايهما اكبر حجما :

مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} أم متوازي مستطيلات أبعاده

٧$\sqrt{٢}$ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٥ سم^{٢}

ثالثا الدائرة :

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ π نق

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = π نق^{٢}

حيث نق هو نصف قطر الدائرة ، ط = π = $\frac{٢٢}{٧}$

أو ٣,١٤ مالم يذكر خلاف ذلك

مثال (١) دائرة طول قطرها ٧ سم احسب محيطها ومساحتها لأقرب سم وكذلك احسب محيطها ومساحتها بدلالة π

الحل

∵ طول قطرها ٧ سم ∴ نق = ٧ سم

∴ مساحتها = π نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ سم^{٢}

∴ مساحتها بدلالة π = π × ٤٩ = ٤٩ π سم^{٢}

∴ محيطها = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

محيطها بدلالة π = ٢ π × ٧ = ١٤ π سم

مثال (٢) دائرة مساحتها ١٥٤ سم^{٢} أوجد محيطها لأقرب سم

حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ مساحتها = ١٥٤ ∴ π نق^{٢} = ١٥٤

∴ $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} = ١٥٤ ∴ نق^{٢} = ١٥٤ × $\frac{٧}{٢٢}$

∴ نق^{٢} = ٤٩

∴ محيطها = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

مثال (٣) دائرة مساحتها ٣٦ π سم^{٢}

أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها

الحل

∵ مساحة الدائرة = ٣٦ π ∴ π نق^{٢} = ٣٦ π

∴ نق^{٢} = ٣٦ ∴ نق = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

∴ محيطها = ٢ π نق = ٢ π × ٦ = ١٢ π

دائرة محيطها ٢٦ π سم اوجد

طول نصف قطرها ثم أوجد مساحتها

الحل

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

∴ ٢٦ π = ٢ π نق ∴ ٢٦ = ٢ نق

∴ نق = ١٣ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١٦٩ π سم^{٢}

= ١٦٩ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٥٣٠,٦٦ سم^{٢}

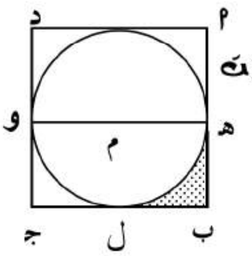
مثال (٤) في الشكل المقابل :

دائرة مرسومة داخل مربع فاذا كانت

مساحة المربع = ١٩٦ سم^{٢} فأوجد

(١) مساحة الجزء المظلل

(٢) محيط الجزء المظلل



الحل

∵ مساحة المربع = ١٩٦ سم^{٢} ∴ أ ب = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

∵ طول ضلع المربع أ د = هـ و = ٢ نق ∴ نق = ٧ سم

(١) مساحة الجزء المظلل

= (مساحة المربع − مساحة الدائرة) ÷ ٤

= (١٩٦ − $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧) ÷ ٤ = ٤٢ ÷ ٤ = ١٠,٥ سم^{٢}

(٢) محيط الجزء المظلل = ب هـ + ب ل + $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة

= ٧ + ٧ + ($\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧) = ١٤ + ١١ = ٢٥ سم

حاول بنفسك

دائرة محيطها ٨٨ سم اوجد طول نصف قطرها ثم احسب مساحتها .

Mr.Morad

تمارين على الدائرة

(١) دائرة طول نصف قطرها = ٢١ سم أوجد محيطها ومساحتها

(٢) دائرة محيطها = ٤٤ سم أوجد مساحتها

(٣) دائرة طول نصف قطرها = $\sqrt{7}$ أوجد مساحتها

(٤) دائرة مساحتها = ٦١٦ سم^2 أوجد محيطها

(٥) دائرة محيطها = ١٤ π أوجد مساحتها

(٦) دائرة مساحتها = ٢٥ π أوجد محيطها

(٧) دائرة محيطها = ٢ π^2 أوجد مساحتها

(٨) دائرة محيطها = π أوجد مساحتها

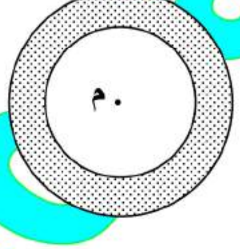
(٩) دائرة مساحتها = π أوجد محيطها

(١٠) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي محيطها يساوي مساحتها

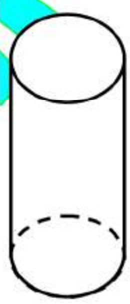
(١١) دائرتان متحدتان في المركز م

طولا نصفي قطريهما ٣ سم ، ٥ سم

أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π



رابعا الاسطوانة الدائرية القائمة



المساحة الجانبية للأسطوانة

= محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق × ع

المساحة الكلية للأسطوانة

= المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^2

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق^2 × ع

مثال أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ١٠ سم أوجد

(١) مساحتها الجانبية (٢) مساحتها الكلية (٣) حجمها

الحل

مساحتها الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع = ٢ × $\frac{22}{7}$ × ٧ × ١٠ = ٤٤٠ سم^2

مساحتها الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

= ٤٤٠ + ٢ π نق^2 = ٤٤٠ + ٢ × $\frac{22}{7}$ × ٤٩

= ٤٤٠ + ٣٠٨ = ٧٤٨ سم^2

حجمها = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^2 × ع = $\frac{22}{7}$ × ٤٩ × ١٠ = ١٥٤٠ سم^3

مثال أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٢ سم وحجمها ١٢٠٠ π سم^3 أوجد طول نصف قطر قاعدتها ثم أوجد مساحتها الجانبية

الحل

∵ حجمها = ١٢٠٠ π

∴ مساحة القاعدة × الارتفاع = ١٢٠٠ π

∴ π نق^2 × ع = ١٢٠٠ π ∴ نق^2 × ١٢ = ١٢٠٠

∴ نق^2 = ١٠٠ ∴ نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم

مساحتها الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع = ٢ × π × ١٠ × ١٢ = ٢٤٠ π

مثال أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٦٤ π سم^3 فإذا كان ارتفاعها يساوي طول نصف قطر دائرتها أوجد ارتفاعها

الحل

∵ حجمها = ٦٤ π ∴ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٦٤ π

∴ π نق^2 ع = ٦٤ π ∵ ع = نق

∴ ع^2 × ع = ٦٤ ∴ ع^3 = ٦٤ ∴ ع = $\sqrt[3]{٦٤}$ = ٤ سم

مثال أسطوانة دائرية قائمة محيطها ٤٤ سم وارتفاعها ٥ سم أوجد حجمها

الحل

∵ محيط القاعدة = ٤٤ سم

∴ ٢ π نق = ٤٤ ∴ ٢ × $\frac{22}{7}$ × نق = ٤٤

∴ $\frac{44}{7}$ × نق = ٤٤ ∴ نق = ٤٤ × $\frac{7}{44}$ = ٧سم

حجمها = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^2 ع = $\frac{22}{7}$ × ٤٩ × ٥ = ٧٧٠ سم^3

مثال إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة ٤٤٠٠ سم^3 وارتفاعها ١٤ سم أوجد طول قطر قاعدتها

الحل

∵ حجمها = ٤٤٠٠ سم^3

∴ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٤٠٠

∴ π نق^2 ع = ٤٤٠٠ ∴ $\frac{22}{7}$ × نق^2 × ١٤ = ٤٤٠٠

∴ ٤٤ نق^2 = ٤٤٠٠

∴ نق^2 = ١٠٠ ∴ نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم

∴ طول قطرها = ٢نق = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم

Mr.Morad

للمتفوقين

أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم³
ومساحتها الجانبية = ٦٠π سم² أوجد ارتفاعها
وطول نصف قطر قاعدتها ثم أحسب مساحتها الكلية

تمارين على الاسطوانة الدائرية القائمة

(١) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها = ٧سم وارتفاعها = ٢٥سم أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة
(الجيزة ٢٠٠٦) [١١٠٠ سم²]

(٢) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها = ١٤سم وارتفاعها = ١٠ سم أوجد مساحتها الجانبية ومساحتها الكلية وحجمها

(٣) أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤سم وارتفاعها ٢٥سم أوجد حجمها [٣٨٥٠ سم³]

(٤) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٢٥سم² وطول قطر قاعدتها = ٢٠سم أوجد حجمها [٢٥٠سم³]

(٥) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول قطر قاعدته وحجمها ٢١٥٦ سم³ أوجد مساحتها الكلية [٩٢٤ سم²]

(٦) إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها وحجم الاسطوانة ٧٢π سم³ أحسب ارتفاع الأسطوانة [٢ $\sqrt[3]{9}$ سم]

(٧) أسطوانة دائرية قائمة مصمتة من المعدن ارتفاعها ٢٨سم وطول نصف قطر قاعدتها ١١سم صُهرت وحولت إلى مكعب مصمت أوجد المساحة الكلية للمكعب

(٨) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠سم وحجمها ١٥٠٤ سم³ أوجد طول نصف قطرها
(الوادي الجديد ٢٠٠٨) [٠,٠٧ سم]

(٩) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم² وارتفاعها ٦ سم أوجد مساحتها الجانبية ومساحتها الكلية

(١٠) ايهما اكبر حجما :
أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها = ٧سم وارتفاعها = ١٠ سم أم مكعب طول حرفة ١١ سم

خامسا الكرة :

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق² ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٧سم ثم أوجد مساحته سطحها

الحل

∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق³ = $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^٣ = \frac{٤٣١٢}{٣}$ سم³

مساحتها الجانبية = ٤π نق² = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ٦١٦ سم²

كرة حجمها $\frac{٥٠٠ \pi}{٣}$ سم³ أوجد طول نصف قطرها

الحل

∵ حجم الكرة = $\frac{٥٠٠ \pi}{٣}$ ∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق³ = $\frac{٥٠٠ \pi}{٣}$

∴ ٤ نق³ = ٥٠٠ ∴ نق³ = ١٢٥

∴ نق = $\sqrt[3]{١٢٥}$ = ٥ سم

مثال (٢) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها ٣٦π سم³

الحل

∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق³ ∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق³ = ٣٦π

∴ نق³ = ٣٦ × $\frac{٣}{٤}$ = ٢٧ ∴ نق = $\sqrt[3]{٢٧}$ = ٣ سم

مثال (٣) كرة من المعدن طول نصف قطرها ٣ سم صهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم أحسب ارتفاع الاسطوانة

الحل

∵ حجم الكرة = حجم الاسطوانة

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق³ = π نق² × ع

∴ $\frac{٤}{٣}$ × (٣)³ = (٣)² × ع

∴ ٣٦ = ٩ع ∴ ع = ٤ سم

Mr.Morad

تمارين على الكرة

(١) أوجد حجم كرة طول نصف قطرها = ٣٠ سم
(π = ٣,١٤١) [٣٣٥٠٤ سم^3]

(٢) كرة حجمها ٤١٨٨ سم^3 أوجد طول نصف قطرها
(π = ٣,١٤١) [١٠سم]

(٣) أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم^3
ثم أوجد مساحة سطحها [٤٢ سم ، ٥٥٤٤ سم^2]

(٤) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها يساوى حجم أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها ١٨ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٤ سم
(أسوان ٢٠٠٤) [٦ سم]

(٥) أوجد لأقرب سم^3 حجم كرة طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^3 وارتفاعها ٢٤سم (π = ٣,١٤١) [٤١٨٦٠٧ سم^3]

(٦) كرة حجمها ٣٦ π سم^3 وضعت داخل مكعب فمست أوجهه الستة أوجد طول نصف قطر الكرة وحجمها [٣سم ، ٢١٦ سم^3]

(٧) وضعت كرة داخل مكعب فمست أوجهه الستة أوجد النسبة بين حجم المكعب وحجم الكرة [٦ : π]

(٩) كرة من المعدن طول قطرها ٦سم صُهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٣سم أحسب ارتفاع الأسطوانة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) حجم الكرة = ...
[٤ π نق^2 ، $\frac{4}{3}\pi$ نق^3 ، $\frac{4}{3}\pi$ نق^2 ، $\frac{3}{4}\pi$ نق^3]

(٢) الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[3]{3}$ سم يكون حجمها =....
[٤π ، $\frac{4}{3}\pi$ ، ٤$\sqrt{3}\pi$ ، $\frac{9}{4}\pi$]

(٣) حجم الكرة التى طول قطرها ٦ سم = ...سم^3
[٤π ، $\frac{4}{3}\pi$ ، ٤$\sqrt{3}\pi$ ، $\frac{9}{4}\pi$]

(٤) اذا كان حجم الكرة $\frac{9}{16}\pi$ سم^3 فان طول نصف قطرها =......سم
[٣ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{3}$]

(٥) اذا كانت مساحة كرة ٩π سم^2 فان طول قطرها =......سم
[٣ ، ٩ ، ٦ ، ١,٥]

(٦) اذا كانت ثلاثة ارباع حجم كرة ٨π سم^3 فان طول نصف قطرها =......سم
[٤ ، ٨ ، ٦ ، ٢]

أكمل العبارات الاتية

(١) حجم كرة طول قطرها ٦سم = ... سم^3

(٢) إذا كان حجم كرة يساوى $\frac{32}{3}\pi$ سم^3 فإن طول قطرها =....

(٣) إذا كان مساحة الاوجه الستة لمكعب ٥٤ سم^2 فإن حجمه = ... سم^3

(٤) مكعب حجمه ٢$\sqrt{2}$ سم^3 فإن طول حرفه = ... سم

(٥) مكعب طول حرفه ٤ سم فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(٦) كرة طول نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ سم فإن مساحة سطحها = ... سم^2

(٧) إذا كان حجم مكعب = ٢٧سم^3 فإن مساحة أحد أوجهه = ... سم^2

(٨) إذا كان حجم كرة = $\frac{9}{2}\pi$ سم^3 فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم

(٩) إذا كانت مساحة مربع ٥ سم^2 فإذا تضاعف طول ضلعه فإن مساحته = ... سم^2

(١٠) إذا كانت مساحة دائرة = π فإن طول قطرها = ... سم

(١١) إذا كانت مساحة دائرة = π^3 فإن طول نصف قطرها = ... سم

(١٢) إذا كانت المساحة الجانبية للأسطوانة = ٤ π نق ع فإن أرتفاعها = ... سم

(١٣) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٥٠٠ π سم^3 وطول نصف قطرها ٥ سم فإن أرتفاعها = ...

(١٤) إذا كانت مساحة دائرة = ٥ π فإن طول نصف قطرها = ... سم

(١٥) الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[3]{3}$ يكون حجمها =... سم^3

(١٦) الكرة التى حجمها $\frac{4}{3}\pi$ يكون طول نصف قطرها =.. سم

(١٧) الكرة التى مساحتها السطحية ٨ π يكون طول نصف قطرها = ... سم

(١٨) أسطوانة دائرية قائمة حجمها = π ع^3 فإن نق = ...

(١٩) أسطوانة دائرية قائمة حجمها = ٥ π نق^2 يكون طول قطرها = ... سم

(٢٠) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٢ π نق يكون أرتفاعها = ... سم

Mr.Morad

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الاولى في ح

كل من المعادلات ٢ س − ٥ = ٣ ، √٣ س − ١ = ٨ ،

½ س − √٥ = ٠ تسمى معادلات من الدرجة الأولى في متغير واحد وهو س لان اس المتغير س يساوي الواحد الصحيح

ومعنى حل معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد في ح هو ايجاد العدد الحقيقي الذي يحقق المعادلة .

مثال ١ اوجد في ح مجموعة الحل لكل من العادلات الآتية :

(١) ٣ س + ٢ = ١　　(٢) √٣ س − ١ = ٢

(٣) ٧س − √٧ = ٦√٧　　(٤) س − √٥ = ١

الحـــل

(١) ٣ س + ٢ = ١ بإضافة −٢ للطرفين

∴ ٣ س + ٢ − ٢ = ١ − ٢　∴ ٣ س = − ١

بالضرب × ١/٣ للطرفين　∴ ٣ س × ١/٣ = − ١ × ١/٣

∴ س = − ١/٣　∴ م.ح = {− ١/٣}

− ١/٣

٣− ٢− ١− ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

(٢) √٣ س − ١ = ٢ بإضافة +١ للطرفين

∴ √٣ س − ١ + ١ = ٢ + ١　∴ √٣ س = ٣

س = √٣　∴ م.ح = {√٣}

ويمكن تمثيل العدد √٣ على خط الاعداد كما سبق دراسته في تمثيل العدد غير النسبي على خط الاعداد

(٣) ∵ ٧س − √٧ = ٦√٧　∴ ٧س − √٧ + √٧ = ٦√٧ + √٧

∴ ٧س = ٧√٧　∴ س = √٧　∴ م.ح = {√٧}

ويمكن تمثيل العدد √٧ على خط الاعداد كما سبق دراسته في تمثيل العدد غير النسبي على خط الاعداد

(٤) ∵ س − √٥ = ١　∴ س − √٥ + √٥ = ١ + √٥

∴ س = ١ + √٥　∴ م.ح = {١ + √٥}

ويمكن تمثيل العدد √٧ على خط الاعداد كما سبق دراسته في تمثيل العدد غير النسبي على خط الاعداد .

حاول بنفسك

اوجد في ح مجموعة الحل لكل من العادلات الآتية

(١) ٢ س + ٥ = ٤　　(٢) √٥ س − ١ = ٤

(٣) ٣ س − √٣ = ٢√٣　　(٤) س − √٣ = ٢

حل متباينة الدرجة الاولى في متغير واحد

خواص التباين

لأي ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ

إذا كان أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ

[سواء أكانت جـ موجبة أو سالبة]

إذا كان أ > ب فإن أ جـ > ب جـ إذا كانت جـ موجبة

إذا كان أ > ب فإن أ جـ < ب جـ إذا كانت جـ سالبة

مثال ١ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الاتية واكتب مجموعة الحل على صورة فترة :

(١) س − ١ > ٣　　(٢) س + ١ ≥ ٣

(٣) س − ٢ < ٧　　(٤) س + ٣ ≤ ٨

(٥) ٥ − ٢ س > ١١　　(٦) ١ − ٣ س < ١٣

(٧) ٢س + ٣ ≥ ١١　　(٨) ٣ س − ٢ < ١٣

الحـــل

(١) ∵ س − ١ > ٣　　∴ س > ٣ + ١

∴ س > ٤　　∴ م.ح =]٤ ، ∞[

(٢) ∵ س + ١ ≥ ٣　　∴ س ≥ ٣ − ١

∴ س ≥ ٢　　∴ م.ح = [٢ ، ∞[

(٣) ∵ س − ٢ < ٧　　∴ س < ٧ + ٢

∴ س < ٩　　∴ م.ح =]−∞ ، ٩[

(٤) ∵ س + ٣ ≤ ٨　　∴ س ≤ ٨ − ٣

∴ س ≤ ٥　　∴ م.ح =]−∞ ، ٥]

(٥) ٥ − ٢ س > ١١　　∴ − ٢ س > ١١ − ٥

∴ − ٢ س > ٦　∴ س < − ٣ وذلك بالقسمة على − ٢

مع ملاحظة تغيير علامة التباين عند القسمة على عدد سالب

∴ م.ح =]−∞ ، −٣[

(٦) ∵ ١ − ٣ س < ١٣　　∴ − ٣ س < ١٣ − ١

∴ − ٣ س < ١٢　∴ س > − ٤ وذلك بالقسمة على − ٣

مع ملاحظة تغيير علامة التباين عند القسمة على عدد سالب

∴ م.ح =]−٤ ، −∞[

(٧) ∵ ٢س + ٣ ≥ ١١　　∴ ٢ س ≥ ١١ − ٣

∴ ٢ س ≥ ٨　∴ س ≥ ٤　∴ م.ح = [٤ ، ∞[

(٨) ٣ س − ٢ < ١٣　　∴ ٣ س < ١٣ + ٢

∴ ٣ س < ١٥　∴ س < ٥　∴ م.ح =]−∞ ، ٥[

Mr.Morad

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الاتية واكتب مجموعة الحل على صورة فترة :

(١) س + ٢ < ٣ (٢) س – ٤ ≤ ٣

(٣) س + ١ > ٥ (٤) س – ٢ ≥ ١

(٥) ٥ – ٣ س < ١٤ (٦) ١ – ٣ س > ١٩

مثال (٢) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الاتية واكتب مجموعة الحل على صورة فترة :

(١) ٢س – ١ > س+ ٣ (٢) ٣ س + ١ < س+ ١٣

(٣) ٢س – ٣ ≤ ١٢– س (٤) ٥ س – ١٢ ≥ س

(٥) ٥ > س – ١ > ١٠ (٦) ٣ >٢س + ١ ≤١١

الحـــــل

(١) ∵ ٢س – ١ > س+ ٣ ∴ ٢س – س > ٣ + ١

∴ س > ٤ ∴ م.ح =] ٤ ، ∞ [

(٢) ٣ س + ١ < س+ ١٣ ∴ ٣ س – س < ١٣ – ١

∴ ٢ س < ١٢ ∴ س < ٦ ∴ م.ح =] –∞ ، ٦ [

(٣) ٢س – ٣ ≤ ١٢– س ∴ ٢س + س ≤ ١٢ +٣

∴ ٣ س ≤ ١٢ ∴ س ≤ ٤ ∴ م.ح =] –∞ ، ٤]

(٤) ٥ س – ١٢ ≥ س ∴ ٥ س – س ≥ ١٢

∴ ٤ س ≥ ١٢ ∴ س ≥ ٣ ∴ م.ح = [٣ ، ∞ [

(٥) ٥ > س – ١ > ١٠ بإضافة +١ لجميع الاطراف

∴ ٥ +١ > س – ١ + ١ > ١٠+١

∴ ٦ > س > ١١ ∴ م.ح =] ٦ ، ١١ [

(٦) ٣ >٢س + ١ ≤١١ بإضافة –١ لجميع الاطراف

∴ ٣ –١>٢س + ١ – ١ ≤ ١١–١

∴ ٢ >٢س ≤ ١٠ بالقسمة على ٢ لجميع الاطراف

∴ ١ > س ≤ ٥ ∴ م.ح =] ١ ، ٥]

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الاتية واكتب مجموعة الحل على صورة فترة :

(١) ٥س – ٣ > س+ ٥ (٢) ٢ س + ١ < س+٦

(٣) ٢س + ٦ ≤ ١٢– س (٤) ٤ س – ١٢ ≥ س

(٥) ٥ > س + ٢ > ١٠ (٦) ٥ >٢س + ١ ≤١٥

مثال (٣) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الاتية واكتب مجموعة الحل على صورة فترة :

(١) ١ > $\frac{\text{س}+1}{3}$ > ٢ (٢) ٣ > $\frac{\text{س}}{2}$ + ١ > ٧

(٣) ٧ ≥ ٣ – ٢ س > ١١

(٤) س + ٤ > ٣ س + ٢ > س + ١٠

(٥) ٤ – س > ٢ س + ١ > ١٣– س

الحـــــل

(١) ∵ ١ > $\frac{\text{س}+1}{3}$ > ٢ بضرب جميع الاطراف × ٣

∴ ٣ > س + ١ > ٦ ∴ ٣ –١ > س +١ –١ > ٦ –١

∴ ٢ > س > ٥ ∴ م.ح =] ٢ ، ٥ [

(٢) ∵ ٣ > $\frac{\text{س}}{2}$ + ١ > ٧ بضرب جميع الاطراف × ٢

∴ ٦ > س + ٢ > ١٤ ∴ ٦ –٢ > س +٢ –٢ > ١٤ –٢

∴ ٤ > س > ١٢ ∴ م.ح =] ٤ ، ١٢ [

(٣) ٧ ≥ ٣ – ٢ س > ١١ بإضافة –٣ لجميع الاطراف

∴ ٧ – ٣ ≥ ٣ –٣– ٢ س >١١–٣

٤ ≥ – ٢ س > ٨ بالقسمة على – ٢ لجميع الاطراف

∴ –٢ ≤ س > –٤ ∴ م.ح =] –٤ ، –٢]

(٤) ∵ س + ٤ > ٣ س + ٢ > س + ١٠

بإضافة – س لجميع الاطراف

∴ س – س + ٤ > ٣ س – س + ٢ > س – س + ١٠

∴ ٤ > ٢ س + ٢ > ١٠ بإضافة –٢ لجميع الاطراف

∴ ٤ –٢ > ٢ س + ٢ –٢ > ١٠ –٢

∴ ٢ > ٢ س > ٨ بالقسمة على ٢ لجميع الاطراف

∴ ١ > س > ٤ ∴ م.ح =] ١ ، ٤ [

(٥) ٤ – س > ٢ س +١ > ١٣– س بإضافة س لجميع الاطراف

∴ ٤ – س+ س > ٢ س+ س +١ > ١٣– س + س

∴ ٤ > ٣ س +١ > ١٣ بإضافة –١ لجميع الاطراف

∴ ٤ –١ > ٣ س +١–١ > ١٣–١

∴ ٣ > ٣ س > ١٢ بالقسمة على ٣ لجميع الاطراف

∴ ١ > س > ٤ ∴ م.ح =] ١ ، ٤ [

Mr.Morad

تمارين على حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الاولى

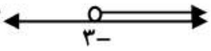
[١] اوجد في ح مجموعة الحل لكل من العادلات الآتية :

(١) ٢ س − ٣ = ٤ (٢) √٥ س − ١ = ٤

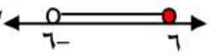
(٣) س + ٢√٣ = √٣ (٤) س − ١ = √٣

(٥) ٢ − √٦ س = |−٨| (٦) ٥ س + ٦ = ١

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الشكل  يمثل حل المتباينة .... في ح

[س > −٣ ، س ≤ −٣ ، س < −٣ ، س ≥ −٣]

(٢) الشكل  يمثل حل المتباينة .... في ح

[−٦ > س > ٦ ، −٦ ≥ س > ٦ ، −٦ > س ≥ ٦ ، −٦ ≥ س ≥ ٦]

(٣) اذا كانت س ∈] ٣ ، ∞ [فإن : ....

[س > ٣ ، س ≥ ٣ ، س < ٣ ، س ≤ ٣]

(٤) مجموعة حل المتباينة س > ٧ في ح هي ....

{]−٧ ، ∞[،]٧ ، ∞[،]−∞ ، ٧[،]٧ ، ∞[}

(٥) مجموعة حل المتباينة −١ > س ≥ ٥ في ح هي ....

{]−١ ، ٥] ، [−١ ، ٥] ، {−١ ، ٥} ، [−١ ، ٥[}

(٦) مجموعة حل المتباينة − س > ٣ في ح هي ....

{]−∞ ، ٣[،]−∞ ، −٣[، {٣} ،]٣ ، ∞[}

(٧) مجموعة حل المتباينة س + ٣ > ٣ في ح هي ....

{]−∞ ، ٠[،]−∞ ، ٠] ، [٠ ، ∞[،]٠ ، ∞[}

(٨) مجموعة حل المتباينة ١ > س − ٥ > −١ في ح هي ....

{]٤ ، ٦[، [٤ ، ٦] ،]٤ ، ٦] ، [٤ ، ٦[}

(٩) اذا كانت س > ٥ فإن − س ....

[> −٩ ، ≥ −٥ ، > −٥ ، < −٥]

(١٠) العدد ٥ ينتمي الى مجموعة حل المتباينة ....

[س > ٥ ، س < ٥ ، − س ≥ −٥ ، − س ≤ ٥]

[٣] اكمل ما يأتي :

(١) اذا كانت س − ٣ ≥ ٠ فإن س ....

(٢) اذا كانت ٥ س > ١٥ فإن س ....

(٣) اذا كانت ١ − س > ٤ فإن س ....

(٤) اذا كانت − ٢س ≥ ٣ فإن س ....

(٥) اذا كانت √٢ س > ٤ فإن س ....

(٦) إذا كانت ٧ − س > ٣ فإن س > ....

(٧) مجموعة حل المتباينة − س + ١ > ٠ في ح هي ....

[٤] أكتب على صورة فترة مجموعة الحل لكلا من المتباينات الآتية

(١) ٢ س > ١٢ (٢) −٣ س > ١٢

(٣) $\frac{٣}{٢}$ س > ٦ (٤) س − ١ > ٥

(٥) س + ١ ≥ ٤ (٦) س − ٣ ≥ ٥

(٧) ٢ س − ٣ > ٧ (٨) ٣ س − ٢ > ١٠

(٩) ٥ س + ١ > ٤١ (١٠) ٧ − ٢ س > ٥

(١١) س + ١ ≥ ١١ (١٢) ٣ − ٤ س > ١

(١٣) ٢ ≥ س − ٣ ≥ ٥ (١٤) ٣ ≥ ٢س + ١ > ١١

(١٥) ٥ ≥ ٣ س + ٢ ≥ ١٧ (١٦) −٥ ≥ س + ٣ > ٩

(١٧) − س + ٥ > ٩ (١٨) س − ١ > ٣ − س

(١٩) ٢س − ٣ > ٥س + ٩ (٢٠) ٧ س − ٩ > ٤ س

(٢١) − س > س − ٤ > س (٢٢) − س − ١ > س + ٢ > − س + ٥

(٢٣) س + ٣ > ٢س > س − ٤ (٢٤) س + ٣ ≥ ٢س − ٢ ≥ س − ٣

(٢٥) س − ١ ≥ ٣ س + ٧ ≥ س + ١٥

(٢٦) ٢ + ٢س > ٣ س + ٣ > ٥ + ٢س

(٢٧) ١ − س ≥ ١ − ٢ س > ٣ − س

(٢٨) ٣ س − ١ ≥ ٤ س − ٣ ≥ ٢ س + ٥

(٢٩) ٣ + ٢س ≥ ٣ س + ٣ > س + ٧

Mr.Morad

١

٣

= ٥+٢ = ٧ (٧ ،١)

عندما س= ٢ ص=٥+٢(٢) = ٥+٤ = ٩ (٩ ،١)

عندما س= ٣ ص=٥+٢(٣) = ٥+٦ = ١١ (١١ ،١)

س	١	٢	٣
ص	٧	٩	١١

٤ أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة س + ٢ ص = ٧

الحـــــل

س + ٢ ص = ٧ س = ٧ − ٢ ص

عندما ص=١ س=٧−٢(١) = ٧−٢ = ٥ (١ ،٥)

عندما ص=٢ س=٧−٢(٢) = ٧−٤ = ٣ (٢ ،٣)

عندما ص=٣ س=٧−٢(٣) = ٧−٦ = ١ (٣ ،١)

س	٥	٣	١
ص	١	٢	٣

مثال ٥ أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ص = س

الحل

عندما س=١ ص=١ (١، ١) يحقق العلاقة

عندما س=٢ ص=٢ (٢، ٢) يحقق العلاقة

عندما س=٣ ص=٣ (٣، ٣) يحقق العلاقة

س	١	٢	٣
ص	١	٢	٣

مثال ٦ أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ص = −٣

الحل

عندما س=١ ص=−٣ (١، −٣) يحقق العلاقة

عندما س=٢ ص=−٣ (٢، −٣) يحقق العلاقة

عندما س=٣ ص=−٣ (٣، −٣) يحقق العلاقة

س	١	٢	٣
ص	−٣	−٣	−٣

مثال ٧ أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة س = ٥

الحل

عندما ص = ١ س = ٥ (٥، ١) يحقق العلاقة

عندما ص = ٢ س = ٥ (٥، ٢) يحقق العلاقة

عندما ص = ٣ س = ٥ (٥، ٣) يحقق العلاقة

س	٥	٥	٥
ص	١	٢	٣

مثال ٨ بين أيا من الازواج التالية يحقق العلاقة ص − ٢س = ٣

(١ ، ٢) ، (٤ ، ١١) ، (٢ ، ٥)

الحل

بالتعويض بالزوج (١ ، ٢) في العلاقة [س = ١ ، ص = ٢]

ص − ٢ س = ٣ ∴ ٢ − ٢ (١) = ٢ − ٢ = ٠ ≠ ٣

∴ الزوج (١ ، ٢) لا يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج (٤ ، ١١) في العلاقة [س = ٤ ، ص = ١١]

ص − ٢ س = ٣ ∴ ١١ − ٢ (٤) = ١١ − ٨ = ٣

∴ الزوج (٤ ، ١١) يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج (٢ ، ٥) في العلاقة [س = ٢ ، ص = ٥]

ص − ٢ س = ٣ ∴ ٥ − ٢ (٢) = ٥ − ٤ = ١ ≠ ٣

∴ الزوج (٤ ، ١١) لا يحقق العلاقة

مثال ٩ إذا كان الزوج (٢ ، ٣) يحقق العلاقة

ك س − ٤ ص = ١٠ أوجد قيمة ك

الحل

بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٣

في العلاقة ك س − ٤ ص = ١٠

ك × ٢ − ٤ × ٣ = ١٠ ∴ ٢ك − ١٢ = ١٠

∴ ٢ك = ١٠ + ١٢ ∴ ٢ك = ٢٢ ∴ ك = ١١

مثال ١٠ إذا كان الزوج (ك ، ٢) يحقق العلاقة

٣ س + ص = ١٧ أوجد قيمة ك

الحل

٣ س + ص = ١٧ ∴ ٣ × ك + ٢ = ١٧

∴ ٣ ك = ١٧ − ٢ ∴ ٣ ك = ١٥ ∴ ك = ١٥

حاول بنفسك

(١) إذا كان الزوج (م ، ١) يحقق العلاقة ص = س+١

أوجد قيمة م [صفر]

(٢) إذا كان الزوج (٢ ، ٣) يحقق العلاقة ص = ٢س+ م

أوجد قيمة م [−١]

(٣) إذا كان الزوج (−٣، م) يحقق العلاقة ص = ٢س +٥

أوجد قيمة م [−١]

الحل

....

....

....

Mr.Morad

التمثيل البيانى للعلاقة الخطية

لتمثيل العلاقة الخطية بيانيا نقوم بتعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ونتأكد من وقوعها على خط مستقيم واحد ويمكن تعيين زوجين فقط ولكن الزوج الثالث للتأكيد ثم نصل بين هذه النقط مع مد الخط فى الاتجاهين حتى تكون خط مستقيم .

ملاحظات هامة

(١) العلاقة الخطية التى على الصورة ٩س + ب ص = جـ تمثل بخط مستقيم يقطع المحورين . مثل العلاقة س + ٢ ص = ٣

(٢) العلاقة الخطية التى على الصورة ٩س = جـ تمثل بخط مستقيم يوازى محور الصادات . مثل العلاقة ٢ س = ٣

(٣) العلاقة الخطية التى على الصورة ب ص = جـ تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات . مثل العلاقة ٣ ص = -٤

(٤) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم ٢س +ص = ٦ مع محور السينات

نضع ص = صفر ∴ ٢س = ٦ ∴ س = ٣

∴ نقطة تقاطع المستقيم ٢س +ص = ٦ مع محور السينات (٣، ٠)

(٥) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم س +٢ص = ٥ مع محور الصادات

نضع س = صفر ∴ ٢ ص = ٥ ∴ ص = $\frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستقيم ٢س +ص = ٦ مع محور الصادات (٠، $\frac{٥}{٢}$)

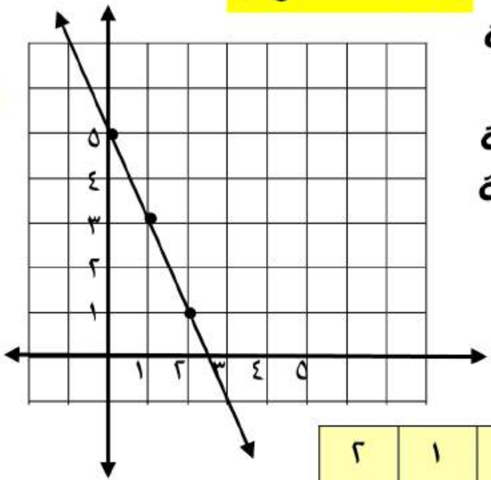
مثال (١) مثل بيانيا العلاقة ٢س +ص = ٥

الحـــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ويمكن تعديل العلاقة على الشكل

ص = ٥ -٢س

س	٠	١	٢
ص	٥	٣	١



مثال مثل بيانيا العلاقة ص - ٢س = ٣

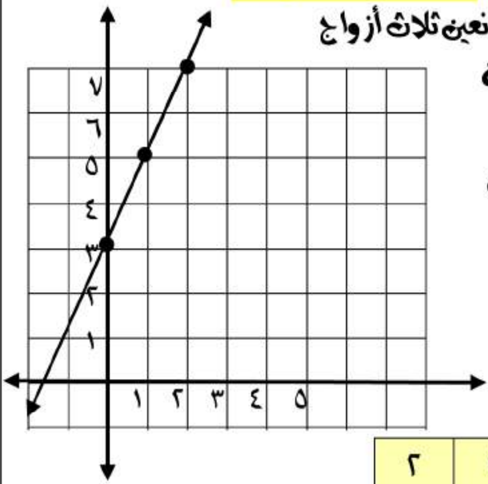
الحـــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة

ص - ٢س = ٣

ويمكن تعديل العلاقة على الشكل

ص = ٣ + ٢س



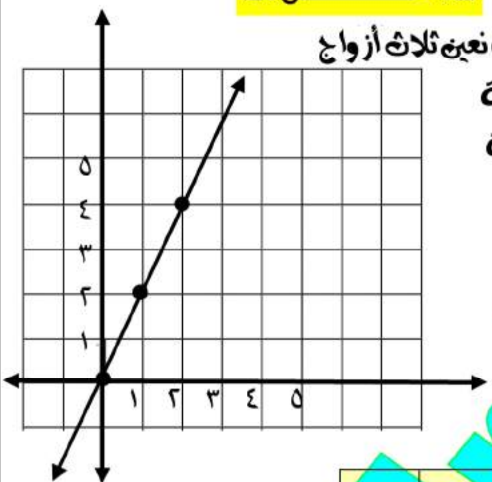
س	٠	١	٢
ص	٣	٥	٧

مثال مثل بيانيا العلاقة ص - ٢س = ٠

الحـــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ويمكن تعديل العلاقة على الشكل

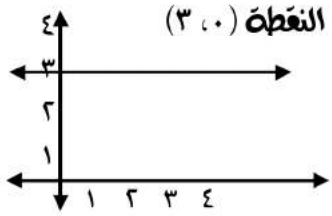
ص = ٢س



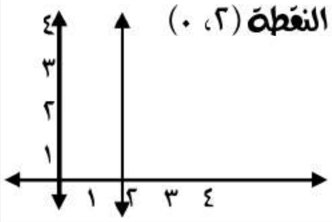
س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٤

مثال مثل بيانيا العلاقة

(١) ص = ٣ هذه العلاقة الخطية على يمثلها خط مستقيم يوازى محور السينات ويبعد عنه ٣ وحدات طول ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠، ٣)



(٢) س = ٢ هذه العلاقة الخطية على يمثلها خط مستقيم يوازى محور الصادات ويبعد عنه ٢ وحدة طول ويقطع محور السينات فى النقطة (٢، ٠)



Mr.Morad

تمارين على العلاقة بين متغيرين

[١] أكمل الازواج المرتبة الاتية التى تحقق العلاقة

ص = ٢ س + ١

(٥ ، ....) ، (...... ، ٢١) ، (٠ ، ....)، (..... ، –٥) ، (٤ ، .....)

[٢] بين أيا من الازواج المرتبة الاتية تحقق العلاقة

ص = ٣ س + ٢

(١) (١ ، ٧) (٢) (٤ ، ١٤) (٣) (٠ ، ٤) (٤) (–١ ، –١)

[٣] أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقات الاتية

(١) ص = س + ١ (٢) ص = ٣ س – ٤ (٣) ص – ٥ س = ١

(٤) ٢ص – س = ٧ (٥) ٢ص + ٣ س = ٧ (٦) ٢ص = ٣ س

(٧) ص = ١/٢ س + ٥ (٨) ٢ص = س (٩) ص = ٤ س

[٤] باستخدام العلاقات الخطية أكمل الجدول التالي :

(١) ٤س – ص = –١

س	٠	١	٢	٣
ص	...	...	...	...

(٢) ص = ٥ س + ١٥

س	–٤	–٣	–٢
ص	....	....	....

(٣) م – ب = ٤

م	١	....	....
ب	....	٠	–٣

(٤) م – ٣ ب = ٥

م	٢	....	–١
ب	....	٠	....

[٥] إذا كانت ص – ٢ س = ١ فأوجد

(١) قيمة ص عندما س = ٢ (٢) قيمة ص عندما س = –٥

(٣) قيمة س عندما ص = ١ (٤) قيمة س عندما ص = –١

[٦] إذا كان (٣ ، ٦) يحقق العلاقة ص = ك س

فأوجد قيمة ك [٢]

[٧] إذا كان (٢ ، ك) يحقق العلاقة ص – ٣ س = ١

أوجد قيمة ك [٧]

[٨] إذا كان (ك ، ٣) يحقق العلاقة ص + س = ٧

أوجد قيمة ك [٤]

[٩] إذا كان (ك ، ٥) يحقق العلاقة ٢ ص – ٣ س = ٧

أوجد قيمة ك [١١]

[١٠] إذا كان (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة ص + ٣ س = ٣٠

أوجد قيمة ك [٥]

[١١] إذا كان (٢ ، ٣) يحقق العلاقة ٥ س – ٢ ص = ك

أوجد قيمة ك [٤]

[١٢] إذا كان (٣ ، ٤) يحقق العلاقة ك س – ٢ ص = ٧

أوجد قيمة ك [٥]

[١٣] إذا كان (٢ ، ٥) يحقق العلاقة ٣ س + ك ص = ١٦

أوجد قيمة ك [٢]

[١٤] مثل بيانيا كلا من العلاقات الاتية

(١) س + ص = ٢ (٢) س – ص = ٣ (٣) ص – ٥ س = ١

(٤) س + ٢ص = ٣ (٥) ص – ٢ س = ١ (٦) ص = –٢ س

(٧) ص – ٢س + ١ = ٠ (٨) ٢ س = ٥ (٩) ص + ١ = ٠

[١٥] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) إذا كان (٢ ، – ٥) يحقق العلاقة ٣ س – ص + ج = ٠

فان ج = ... [١ ، –١ ، ١١ ، –١١]

(٢) أى الازواج المرتبة الاتية يحقق العلاقة ٢ س + ص = ٥

[(–١ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢)]

(٣) الزواج المرتب (٣ ، ٢) لا يحقق العلاقة ....

[ص + س = ٥ ، ٣ص – س = ٣ ، ص + س = ٧ ، س – ص = ١]

(٤) النقطة (٣ ، ٥) تقع على المستقيم الممثل بالعلاقة ....

[ص = ٣ س – ٥ ، ص = ٣ س – ١ ، ٣ س + ص = ١ ، ٢س – ص = ١]

(٥) إذا كان (–١ ، ٥) يحقق العلاقة ٣ س + ك ص = ٧

فان ك = ... [٢ ، –٢ ، ١ ، ١٠]

(٦) العلاقة ٣ س + ٨ص = ٢٤ يمثلها خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

[(٠ ، ٨) ، (٨ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣)]

(٧) العلاقة ٢ س + ٧ص = ١٤ يمثلها خط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

[(٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، (٠ ، ٧)]

(٨) الجدول الاتي يبين علاقة س ، ص وهى ....

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

ص = س + ٤ ص = س + ١

ص = ٢ س – ١ ص = ٣ س – ٢

(٩) الجدول الاتي يبين علاقة س ، ص وهى ....

س	١	٢	٣	٤
ص	–٢	–٥	–٨	–١١

س + ص = –١ س – ص = ٣

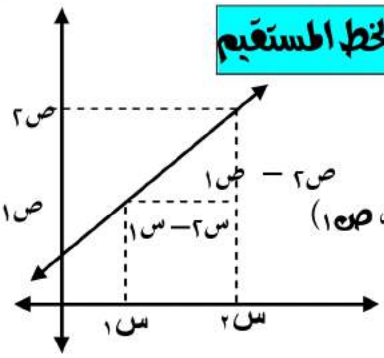
٣ س + ص = ١ ص = – س – ٣

ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم :.

(١) بمعلومية نقطتين :.

المستقيم المار بالنقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ يكون ميله



$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

مثال (١) أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٥ ، ٧)

الحـــــل

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٧ - ٢}{٥ - ١} = \frac{٥}{٤}$$

مثال (٢) أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــل

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٥ - ٢}{٣ - (-١)} = \frac{٣}{٤}$$

مثال (٣) أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٧ ، ٤)

الحـــــل

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٤ - ٤}{٧ - ٣} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$$

مثال (٤) أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (٣ ، ٥)

الحـــــل

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٧ - ٥}{٣ - ٣} = \frac{٢}{\text{صفر}} = \text{غير معرف}$$

مثال (٥) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ص) يساوي ٢ أوجد قيمة ص

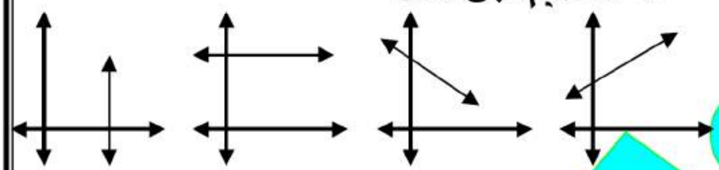
الحـــــل

$م = ٢$ ∴ $\frac{ص - ٣}{٥ - ١} = ٢$

∴ $\frac{ص - ٣}{٤} = ٢$ ∴ $ص - ٣ = ٨$ ∴ $ص = ١١$

ملاحظات هامة

- ميل أي مستقيم ثابت لا يتوقف على النقطتين
- لا ثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة أو تنتمي لمستقيم واحد نثبت أن ميل أ ب = ميل ب جـ
- ميل محور السينات = ميل أي مستقيم أفقي = صفر
- ميل أي مستقيم يوازي محور السينات = صفر
- ميل محور الصادات = ميل أي مستقيم رأسي = غير معرف
- ميل أي مستقيم يوازي محور الصادات = غير معرف
- معادلة محور السينات ص = ٠
- معادلة محور الصادات س = ٠
- معادلة أي مستقيم يوازي محور السينات هي ص = ثابت
- معادلة أي مستقيم يوازي محور الصادات هي س = ثابت
- المستقيم الذي شكله



ميله موجب — ميله سالب — ميله = صفر — ميله غير معرف

مثال (٦) اثبت أن النقط أ = (١ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٤) ، جـ = (٤ ، ٨) تقع على استقامة واحدة

الحـــــل

∵ ميل أ ب = $\frac{٤ - ٢}{٢ - ١} = \frac{٢}{١} = ٢$ ، ميل ب جـ = $\frac{٨ - ٤}{٤ - ٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

أي أن ميل أ ب = ميل ب جـ

∴ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال (٧) إذا كانت النقط أ(−١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (٧ ، ك) تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحـــــل

∵ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

∴ ميل أ ب = ميل ب جـ ∴ $\frac{١ - ٢}{٣ + ١} = \frac{ك - ١}{٧ - ٣}$

∴ $\frac{-١}{٤} = \frac{ك - ١}{٤}$

∴ ك − ١ = −١ ∴ ك = −١ + ١ = صفر

Mr.Morad

مثال (٨) إذا كانت النقط أ(٤ ، −٣) ، ب = (−٦ ، ك) ، ج = (٥ ، −٤) تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحل

∵ أ ، ب ، ج تقع على أستقامة واحدة

∴ ميل أ ب = ميل ب ج ∴ $\frac{ك + ٣}{-٦ - ٤} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤}$

∴ $\frac{ك + ٣}{-١٠} = \frac{-١}{١}$

∴ ك + ٣ = ١٠ ∴ ك = ١٠ − ٣ = ٧

مثال (٩) إذا كانت النقط أ(−٢ ، ك) ، ب = (٢ ، ٤) ، ج = (٦ ، −٤) تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحل

∵ أ ، ب ، ج تقع على أستقامة واحدة

∴ ميل أ ب = ميل ب ج ∴ $\frac{ك - ٤}{-٢ - ٢} = \frac{-٤ - ٤}{٦ - ٢}$

∴ $\frac{ك - ٤}{-٤} = \frac{-٨}{٤}$

∴ ٤ك − ١٦ = ٣٢ ∴ ٤ك = ٣٢ + ١٦ = ٤٨

∴ ك = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢

مثال (١٠) من الشكل المقابل اكمل بوضع الكلمة المناسبة :

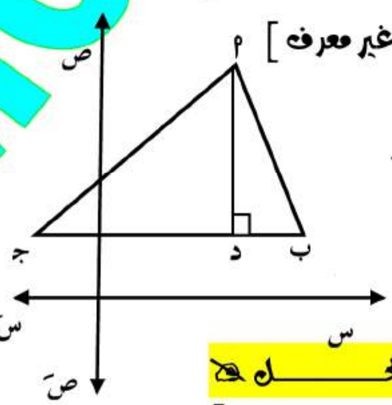
[موجب ، سالب ،صفر ، غير معرف]

(١) ميل أ ب ....

(٢) ميل ب ج ....

(٣) ميل أ ج ....

(٤) ميل أ ب ....



الحل

[سالب ، صفر ، موجب ، غير معرف]

حاول بنفسك

* اوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يلي :

(١) (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤) (٢) (−٤ ، ٢) ، (٣ ، −٥)

(٣) (−٦ ، ٣) ، (−٤ ، ٢) (٤) (−٣ ، −١) ، (٠ ، ١)

* إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −١) ، (٧ ، أ) هو $\frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة أ .

* اثبت ان : ج(−١ ، ٢) ∈ أ ب حيث ان أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٤)

تمارين على ميل الخط المستقيم

[١] عين ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط الاتية

(١) (٢ ، ١) ، (٤ ، ٥) (٢) (−١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

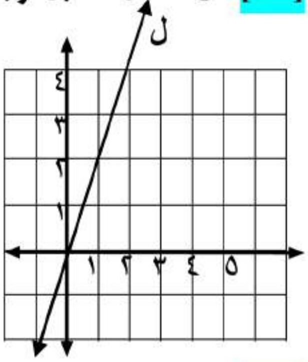
(٣) (٠ ، ٤) ، (٥ ، ٠) (٤) (−١ ، −٢) ، (−٣ ، ٥)

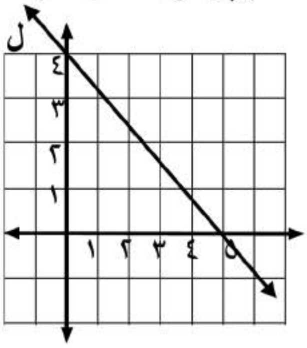
(٥) (٠ ، ٣) ، (٤ ، ٧) (٦) (٣ ، −١) ، (−٢ ، ٤)

(٧) (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٤) (٨) (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

(٩) (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٦) (١٠) (١ ، ٢) ، (٥ ، ٠)

[٢] من الشكل المقابل اوجد ميل المستقيم ل فى الحالات الآتية

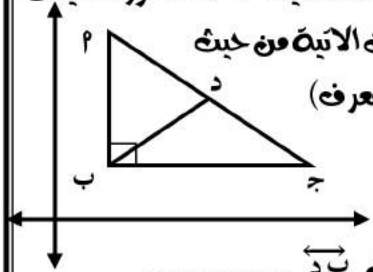




[٣] فى الشكل المقابل أ ب ج مثلث فيه ب ج // محور السينات

حدد نوع ميل كلا من المستقيمات الاتية من حيث

(موجب – سالب – صفر – غير معرف) :



ميل أ ب ....

ميل أ ج ....

ميل ب ج .... ميل ب د ....

[٤] اذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ك) يساوى ٢ أوجد قيمة ك

[٥] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ٤) ، (١ ، ك) يساوى ٥ أوجد قيمة ك

[٦] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ك) يوازى محور السينات أوجد قيمة ك [٥]

[٧] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (ك ، ٦) يوازى محور الصادات أوجد قيمة ك [٣]

[٨] أثبت أن أ ، ب ، ج تقع على أستقامة واحدة

أ(١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، ج(٦ ، ٦)

[٩] إذا كانت النقط أ (١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٤) ، ج(٤ ، ص)

تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ص

[١٠] إذا كانت النقط أ (−١ ، ٢) ، ب(٢ ، ص) ، ج(٤ ، ٧)

أوجد قيمة ك

Mr Morad

[١١] أكمل ما يأتي

(١) ميل محور السينات وأي مستقيم يوازيه (أفقي) = ...

(٢) ميل محور الصادات وأي مستقيم يوازيه (رأسي) = ...

(٣) المستقيم ص = ٣ يوازي محور .... ويكون ميله = ...

(٤) المستقيم س = ٤ يوازي محور .... ويكون ميله = ...

(٥) إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بج}$ فإن أ ، ب ، ج ....

(٦) ميل المستقيم العمودي على محور السينات = ...

(٧) ميل المستقيم العمودي على محور الصادات = ...

(٨) المستقيم ص = ٢ س يمر بنقطة ....

(٩) إذا كان المستقيم ص= ٣ س+ ك يمر بنقطة الاصل ....

(١٠) المستقيم ص = ٣ يقطع محور الصادات في النقطة ....

(١١) المستقيم س = ٣ يقطع محور السينات في النقطة ....

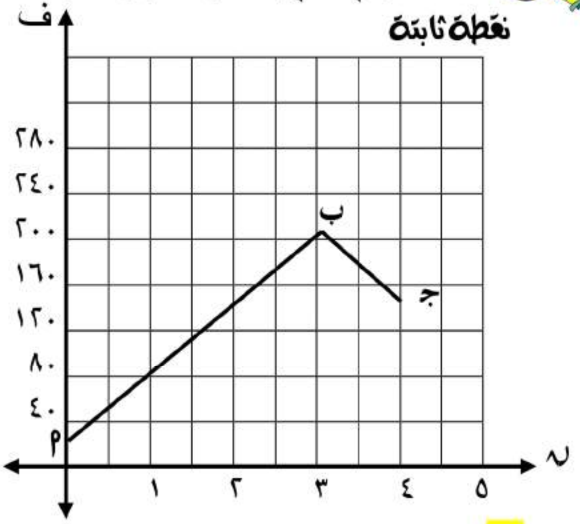
تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

السرعة المنتظمة : هو قطع مسافات متساوية في ازمنة متساوية واذا رمزنا للسرعة بالرمز ع والمسافة بالرمز ف

فيكون ع = $\frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{ف - ف}{ن - ن}$

وذلك يمثل ميل المستقيم الذي يمثل العلاقة بين ف ، ن

1 الشكل البياني الاتي يمثل حركة سيارة بسرعة ثابتة من نقطة ثابتة



اوجد : (١) سرعة السيارة خلال الساعات الثلاثة الاولى .

(٢) سرعة السيارة خلال الساعة الرابعة .

الحـــل

(١) نختار أي نقطتين على $\overleftrightarrow{أب}$ لإيجاد ميله ويمثل السرعة

أ (٠ ، ٢٠) ، ب (٣ ، ٢٠٠)

∴ ع = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{٢٠٠ - ٢٠}{٣ - ٠} = \frac{١٨٠}{٣} = ٦٠$ كم/ساعة

(٢) نختار أي نقطتين على $\overleftrightarrow{بج}$ لإيجاد ميله ويمثل السرعة خلال الساعة الرابعة

ب(٣ ، ٢٠٠) ، ج (٤ ، ١٤٠)

∴ ع = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{١٤٠ - ٢٠٠}{٤ - ٣} = \frac{-٦٠}{١} = -٦٠$ كم/ساعة

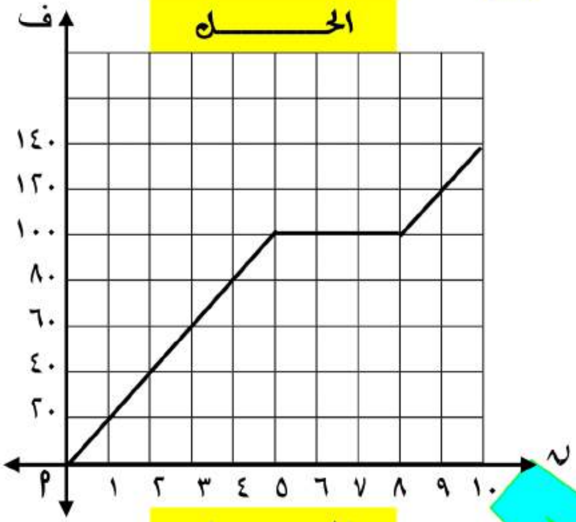
2 الشكل البياني الاتي يمثل حركة دراجة تتحرك من نقطة البداية (نقطة ثابتة)

اوجد : (١) سرعة الدراجة خلال الثواني الخمس الاولى .

(٢) سرعة الدراجة خلال اخر ثانيتين .

(٣) ما دلالة القطعة المستقيمة الافقية .

الحـــل



الحـــل

(١) سرعة الدراجة خلال الثواني الخمس الاولى .

أ (٠ ، ٠) ، ب (٥ ، ١٠٠)

ع = $\frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{١٠٠ - ٠}{٥ - ٠} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$ م/ثانية

(٢) سرعة الدراجة خلال اخر ثانيتين .

ج (٠ ، ٠) ، د (٥ ، ١٠٠)

$ع_٢ = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{١٤٠ - ١٠٠}{١٠ - ٨} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$ م/ثانية

(٣) القطعة الافقية تشير على انه توقف او استراح لمدة ٣ ثوان

3 الشكل البياني الاتي يمثل كمية الوقود داخل خزان ح باللتر وزمن استهلاك الوقود ن بالدقيقة.

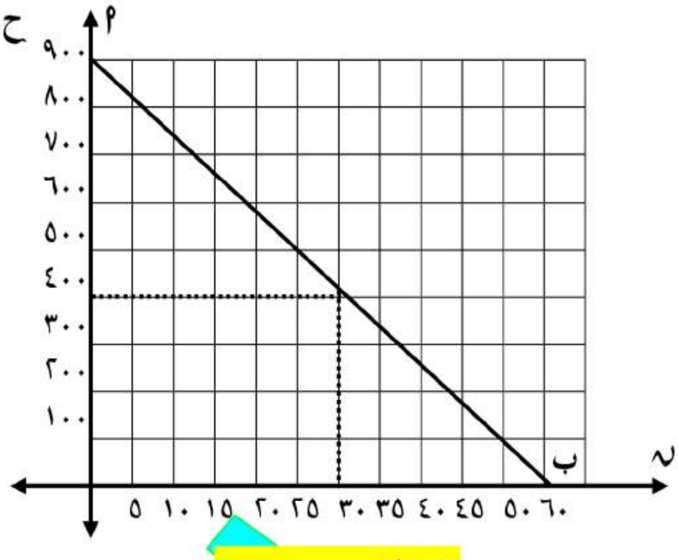
اوجد : (١) سعة الخزان.

(٢) متوسط استهلاك الوقود في الدقيقة .

(٣) كمية الوقود المتبقية بعد ٣٠ دقيقة .

(٤) العلاقة الخطية بين ح ، ن .

Mr.Morad



الحـــــل

(١) سعة الخزان = ٩٠٠ لتر

(٢) متوسط استهلاك الوقود في الدقيقة = ميل $\overleftrightarrow{مب}$

م (٠ ، ٩٠٠) ، ب (٦٠ ، ٠)

$$∴ م = \frac{ح_٢ - ح_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{٠ - ٩٠٠}{٦٠ - ٠} = \frac{-٩٠٠}{٦٠} = -١٥ \text{ لتر/دقيقة}$$

(٣) كمية الوقود المتبقية بعد ٣٠ دقيقة = ٤٠٠ لتر

(٤) العلاقة الخطية بين ح ، ن .

ح = الميل × ن + الجزء المقطوع من المحور الرأسي

ح = − ١٥ ن + ٩٠٠

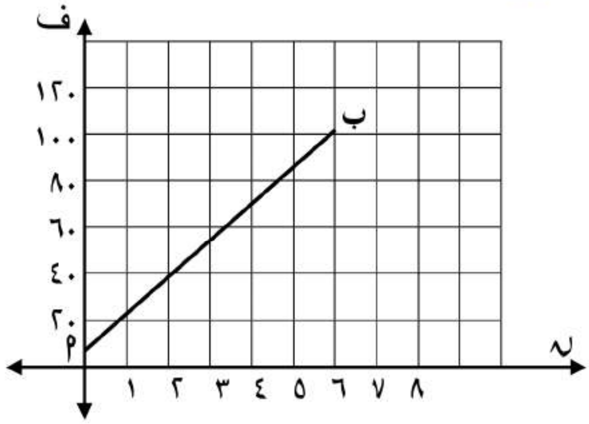
تمارين على تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

[١] الشكل البياني الاتي يمثل حركة سيارة بسرعة ثابتة من نقطة ثابتة

اوجد : (١) سرعة السيارة عندما ن = ٠

(٢) السرعة المنتظمة للسيارة .

(٣) العلاقة الخطية بين ف ، ن .



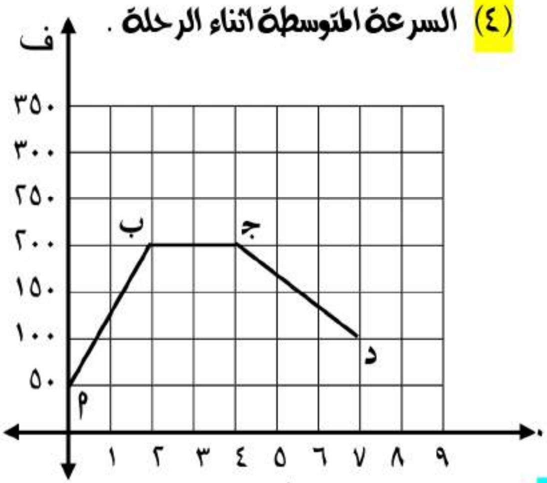
[٢] الشكل البياني الاتي يمثل حركة سيارة بسرعة ثابتة من نقطة ثابتة

اوجد : (١) سرعة السيارة خلال الثلاث ساعات الاولى .

(٢) سرعة السيارة خلال اخر ثلاث ساعات .

(٣) ما دلالة القطعة المستقيمة الافقية .

(٤) السرعة المتوسطة اثناء الرحلة .



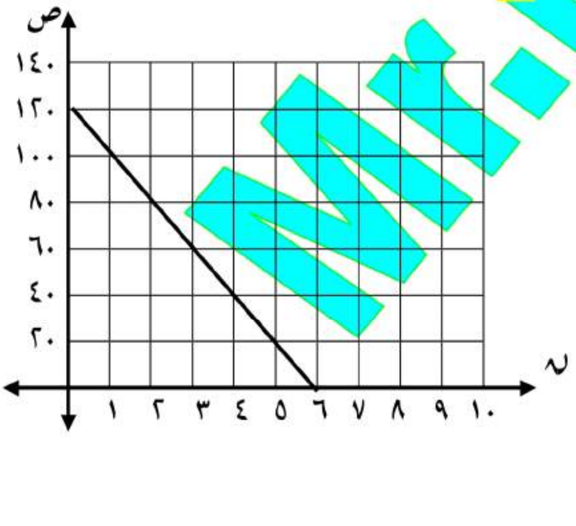
[٣] قرأ شخص كتاب و الشكل البياني الاتي يمثل العلاقة بين الزمن ن وعدد الصفحات المتبقية ص

اوجد : (١) عدد صفحات الكتاب .

(٢) زمن قراءة الكتاب كاملا .

(٣) متى ينتهي الشخص من قراءة الكتاب .

(٤) معدل عدد الصفحات التي تقرأ في الساعة .



Mr.Morad

الاحصـــــاء

في العام الماضي درسنا كيفية عرض البيانات العددية والوصفية وتفريغ هذه البيانات في جدول بسيط وكذلك درسنا تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات .

مثال (١) الجدول الآتي يبين درجات ٥٠ تلميذ في مادة الرياضيات التي درجتها النهائية ٥٠ كون منها الجدول التكراري المتجمع و النازل .

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	المجموع
التكرار	٤	٧	١١	١٣	٨	٥	٢	٥٠

الجدول الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من	صفر
٢٠ //	٤
٣٠ //	١١
٤٠ //	٢٢
٥٠ //	٣٥
٦٠ //	٤٣
٧٠ //	٤٨
٨٠ //	٥٠

الجدول النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار
١٠ فاكثر	٥٠
٢٠ //	٤٩
٣٠ //	٣٩
٤٠ //	٢٨
٥٠ //	١٥
٦٠ //	٧
٧٠ //	٢
٨٠ //	٠

المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

يجب تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد ثم تحديد نقطه على الشبكة التربيعية لتكوين المنحنى التكراري .

مثال (٢) ارسم المنحنى التكراري الصاعد والهابط للجدول الاتي:

المجموعات	١٨-	٢٤-	٣٠-	٣٦-	٤٢-	٤٨-	٥٤-	المجموع
التكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

الجدول الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من ١٨	صفر
٢٤ //	٢
٣٠ //	٦
٣٦ //	١٦
٤٢ //	٣٤
٤٨ //	٤٢
٥٤ //	٤٨
٦٠ //	٥٠

الجدول النازل

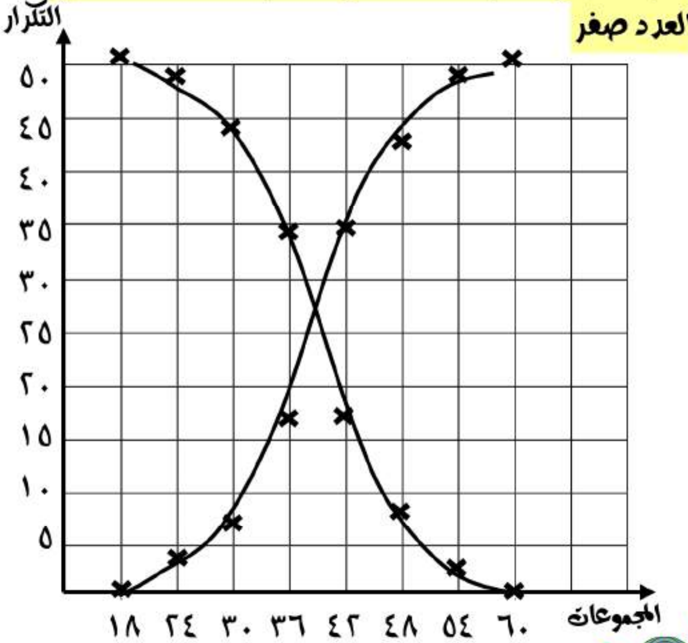
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار
١٨ فاكثر	٥٠
٢٤ //	٤٨
٣٠ //	٤٤
٣٦ //	٣٤
٤٢ //	١٦
٤٨ //	٨
٥٤ //	٢
٦٠ //	٠

يلاحظ أن في الجدول الصاعد :

التكرار يبدأ بالعدد صفر ثم نجمع أول تكرار في جدول التوزيع مع أول تكرار في الجدول الصاعد و هكذا حتى تصل إلي مجموع التكرار

يلاحظ أن في الجدول النازل:

التكرار المتجمع النازل يبدأ بمجموع التكرار ثم نطرح أول تكرار في جدول التوزيع من أول تكرار متجمع نازل و هكذا حتى تصل إلي العدد صفر



اذا اعتبرنا ان هذا التوزيع لدرجات ٥٠ طالب في احدى المواد أوجد

(١) عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٣٠ درجة .

(٢) عدد الطلبة الذين تقل درجاتهم عن ٤٢ درجة .

(٣) اذا كانت درجة النجاح ٣٠ درجة فما هي النسبة المئوية للطلبة الناجحين .

الحـــــل

(١) عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٣٠ درجة وذلك من الجدول النازل ٣٠ درجة فاكثر = ٤٤ طالب

(٢) عدد الطلبة الذين تقل درجاتهم عن ٤٢ درجة وذلك من الجدول الصاعد أقل من ٤٢ = ٣٤ طالب

(٣) اذا كانت درجة النجاح ٣٠ درجة فان النسبة المئوية للطلبة الناجحين = (عدد الطلبة الحاصلين على ٣٠ درجة فاكثر ÷ العدد الكلى للطلبة) × ١٠٠

$= \frac{٤٤}{٥٠} \times ١٠٠ = ٨٨ \%$

وعلى ذلك فان النسبة المئوية للطلبة الراسبين

$= \frac{٦}{٥٠} \times ١٠٠ = ١٢ \%$ أو $١٠٠ - ٨٨ = ١٢$

Mr Morad

تمارين المنحنى التكراري المتجمع الصاعد

[١] الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالباً في إحدى المواد

الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	المجموع
عدد الطلاب	٣	١٣	١٧	٢٣	٤	٦٠

أرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل ومن الرسم ثم أوجد (١) عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٣٠ درجة .

(٢) عدد الطلبة الذين تقل درجاتهم عن ٢٠ درجة .

(٣) اذا كانت درجة النجاح ٣٠ درجة فما هي النسبة المئوية للطلبة الناجحين .

[٢] الجدول الاتي يوضح مجموعة من الاشخاص عددهم ٦٠ حسب وزنهم بالكجم .

الوزن	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	المجموع
التكرار	٩	١٢	١٨	١١	٦	٤	٦٠

أرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد و النازل

ثم أوجد (١) عدد الاشخاص الذين يزيد وزنهم عن ٧٠ كجم .

(٢) عدد الاشخاص الذين يقل وزنهم عن ٧٥ كجم .

(٣) النسبة المئوية لعدد الاشخاص الذين يزيد وزنهم عن ٧٠ كجم .

(٤) النسبة المئوية لعدد الاشخاص الذين يقل وزنهم عن ٧٥ كجم .

[٣] الجدول التالي يبينا الاجر اليومي ل ١٠٠ عامل أرسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد و النازل للتوزيع التكراري

المجموعات	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٢٤	١٧	٩	١٠٠

ثم أوجد

(١) عدد العمال الذين يزيد اجرهم عن ٧٠ كجم .

(٢) عدد الاشخاص الذين يقل اجرهم عن ٨٠ كجم .

(٣) النسبة المئوية لعدد الاشخاص الذين يزيد اجرهم عن ٧٠ كجم .

(٤) النسبة المئوية لعدد الاشخاص الذين يقل اجرهم عن ٨٠ كجم .

مقاييس النزعة المركزية

أولاً : الوسط الحسابي

تعريف : الوسط الحسابي (المتوسط أو التوقع) هو القيمة التي تتمركز عندها قيم التوزيع .

$$\text{الوسط الحسابي لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

مثال ١ أوجد الوسط الحسابي لمجموعة القيم

{ ١٢، ١٤، ٩، ١١، ١٣، ١٦ }

الحل

مجموع القيم ١٢ + ١٤ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٦ = ٧٥

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \frac{٧٥}{٦} = ١٢,٥$$

مثال ٢ أوجد المتوسط للقيم { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }

الحل

مجموع القيم ٢ + ٣ + ٥ + ٦ = ١٦

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \frac{١٦}{٤} = ٤$$

مثال ٣ الجدول الاتي يبين توزيع تكراري بسيط لأعمار ١٥ شخصا اوجد الوسط الحسابي لهذه الاعمار .

العمر	١١	١٥	١٧	٢١	٢٣	٢٧	المجموع
عدد الاشخاص		٤	٥	٥	٢	١	٢٠

الحل

الوسط الحسابي =

$$\frac{٣ \times ١١ + ٤ \times ١٥ + ٥ \times ١٧ + ٥ \times ٢١ + ٢ \times ٢٣ + ١ \times ٢٧}{٢٠}$$

$$= \frac{٣٣ + ٦٠ + ٨٥ + ١٠٥ + ٤٦ + ٢٧}{٢٠} = \frac{٣٥٦}{٢٠} = ١٧,٨$$

ثانيا : الوسط الحسابي لتوزيع تكراري

مثال ٤ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٢٠ طالباً في إحدى المواد . احسب الوسط الحسابي لدرجات التلاميذ .

المجموعات	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	المجموع
التكرار	٣	٤	٥	٦	٢	٢٠

الحل

نحدد مراكز المجموعات تبعا للقانون

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الادنى} + \text{الحد الاعلى}}{٢}$$

$$\text{مركز المجموعة الاولى} = \frac{٤ + ٨}{٢} = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

وهكذا مع كل مجموعة . ثم نكون الجدول الاتي

Mr.Morad

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	م × ك
٤ –	٦	٣	١٨
٨ –	١٠	٤	٤٠
١٢ –	١٤	٥	٧٠
١٦ –	١٨	٦	١٠٨
٢٠ –	٢٢	٢	٤٤
المجموع		٣٠	٢٨٠

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{٢٨٠}{٣٠}$ = ١٤ درجة

(٥) الجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لدرجات ٥٠ طالباً في إحدى ا لمواد . احسب الوسط الحسابي لدرجات التلاميذ .

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	٨	١٢	١٤	٩	٧	٥٠

الحـــــــل

نحدد مراكز المجموعات تبعا للقانون

مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الادنى + الحد الاعلى}}{٢}$

مركز المجموعة الاولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢}$ = $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥

وهكذا مع كل مجموعة . ثم نكون الجدول الاتي

المجموعة	مركز المجموعة م	التكرار ك	م × ك
١٠ –	١٥	٨	١٢٠
٢٠ –	٢٥	١٢	٣٠٠
٣٠ –	٣٥	١٤	٤٩٠
٤٠ –	٤٥	٩	٤٠٥
٥٠ –	٥٥	٧	٣٨٥
المجموع		٥٠	١٧٠٠

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{١٧٠٠}{٥٠}$ = ٣٤ درجة

الجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لدرجات ١٠ طلاب في إحدى ا لمواد .

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	١	٢	.....	٢	١	١٠

اكمل الجدول ثم احسب الوسط الحسابي لدرجات التلاميذ .

تمارين على الوسط الحسابي

[١] اكمل ما يأتي :

(١) الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = ...

(٢) مركز المجموعة = ...

(٣) الوسط الحسابي للقيم : ٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٦ هو ....

(٤) اذا كان الحد الادنى لمجموعة هو ٨ والحد الاعلى لنفس المجموعة هو ١٤ فإن مركزها = ...

(٥) اذا كان الحد الادنى لمجموعة هو ٤ ومركزها ٩ فإن حدها الاعلى = ...

(٦) اذا كان الوسط الحسابي لثلاث قيم هو ٦ فإن مجموع هذه القيم = ...

(٧) الوسط الحسابي للقيم : ٥ + س، ٤ ، ٣ – س هو ....

(٨) اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع تكراري هو ٣٩,٤ ومجموع تكراراته ١٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة في مركزها = ...

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) الوسط الحسابي للقيم : ٢ – م، ٤ ، ١، ٥ ، ٣ + م هو .... [١ ، ٢ ، ٣ ، ١٥]

(٢) اذا كان الوسط الحسابي لدرجات خمسة طلاب هو ٢٠ درجة فإن مجموع درجاتهم = ... [٤ ، ١٥ ، ٢٥ ، ١٠٠]

(٣) مركز المجموعة من المجموعات ٧– ، ١٣– ، ١٩– ، ٢٥– هو .... [٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣]

(٤) اذا كان الحد الاعلى لمجموعة هو ١٤ ومركزها ١٠ فإن حدها الادنى = ... [٦ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٤]

(٥) اذا كانت بداية مجموعة هي ٥ ومركزها ٧,٥ فإن طول المجموعة هو = ... [٧,٥ ، ٥ ، ١٠ ، ١٢,٥]

[٣] اوجد قيمة ك ثم احسب الوسط الحسابي لكل مما يأتي :

(١)

المجموعات	٠ –	٤ –	٨ –	١٢ –	١٦ –	٢٠ –	ا لمجموع
التكرار	٦	٧	٨	١٢	ك	٣	٤٠

(٢)

المجموعات	٦ –	١٢ –	١٨ –	٢٤ –	٣٠ –	٣٦ –	ا لمجموع
التكرار	١٥	ك	٢٨	١٩	١٢	٥	١٠٠

Mr.Morad

ثانياً : الوسيط

تعريف : الوسيط هو القيمة الوسطى بين القيم أو القيمة التي تتراكم عندها القيم بحيث عدد المفردات قبلها يساوي عدد المفردات بعدها

إيجاد الوسيط لمجموعة من القيم

- ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً
- إذا كان عدد القيم فردياً فإن ترتيب (رتبة) الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$

وتكون القيمة الوسيطة = القيمة التي تقابل هذا الترتيب

- إذا كان عدد القيم زوجياً فإن ترتيب (رتبة) الوسيط $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن+٢}{٢}$

و تكون القيمة الوسطية = متوسط القيمتين المقابلتين للترتيب

مثال ١ أوجد الوسيط للقيم { ٦ ، ٩ ، ٤ ، ١١ ، ٨ }

الحل : الترتيب التصاعدي : ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١١

عدد القيم فردي ن = ٥

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{٥+١}{٢}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ (الثالث) ∴ الوسيط = ٨

مثال ٢ أوجد الوسيط للأعداد : ١١ ، ٧ ، ١٥ ، ٢٤

الحل : الترتيب التصاعدي : ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ٢٤

عدد القيم زوجي ن = ٤

∴ ترتيب الوسيط هما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن+٢}{٢}$ أي $\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٤+٢}{٢}$ أي ٢ ، ٣ (الثاني و الثالث)

∴ الوسيط = $\frac{١١+١٥}{٢}$ = $\frac{٢٦}{٢}$ = ١٣

حاول بنفسك أكمل ما يأتي :

(١) الوسيط لمجموعة القيم ٥ ، ٩ ، ٦ ، ٤ ، ٧ هو ....

(٢) الوسيط للقيم ٦ ، ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٧ هو ....

(٣) أوجد الوسيط لمجموعة القيم الآتية : { ١٢ ، ١٥ ، ٨ ، ١٧ ، ١٠ ، ٩ }

إيجاد الوسيط لتوزيع تكراري ذي مجموعات (الطريقة البيانية)

- نكون جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد (أو النازل)
- نرسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) لهذا التوزيع
- نوجد ترتيب الوسيط علي المحور الرأسي و يساوي $\frac{ن}{٢}$ (زوجي أو فردي) [ن = مجموع التكرارات]
- من نقطة ترتيب الوسيط نرسم خطاً يقابل المنحنى المرسوم عند نقطة
- من نقطة التقابل تسقط عمودا علي المحور الأفقي فيقابله عند الوسيط

مثال ٣ الجدول الآتي أوزان ١٠٠ طفل بالكيلوجرام

الوزن	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٢٤	١٧	٩	١٠٠

أرسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل و أوجد الوسيط

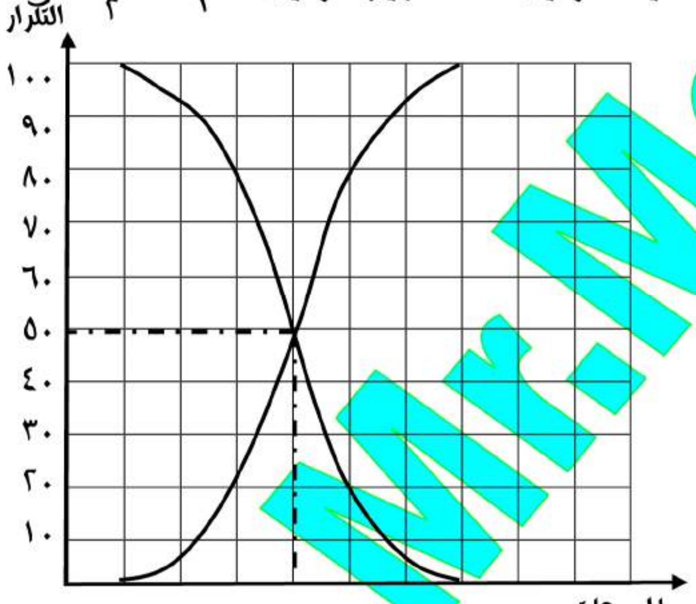
الحل : الجدول الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار
أقل من ١٠	صفر
// // ١٤	٥
// // ١٨	٢٠
// // ٢٢	٥٠
// // ٢٦	٧٤
// // ٣٠	٩١
// // ٣٤	١٠٠

الجدول النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار
١٠ فأكثر	١٠٠
١٤ //	٩٥
١٨ //	٨٠
٢٢ //	٥٠
٢٦ //	٢٦
٣٠ //	٩
٣٤ //	صفر

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ ، قيمة الوسيط = ٢٢



حاول بنفسك

أحسب الوسيط للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
التكرار	٤	٦	٢٠	١٦	٢	١	٥٠

Mr.Morad

ثالثاً : المنــــوال

تعريف : المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً في القيم المعطاة أو القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها .

مثال (١) أوجد المنوال للقيم ٧ ، ٩ ، ٢ ، ٧ ، ٧ ، ٥ ، ٧

الحـــل

القيمة الأكثر تكرار هي ٧ ∴ المنوال هو ٧

مثال أوجد المنوال للقيم ١٠ ، ٤ ، ١٠ ، ٨ ، ٤ ، ٣

الحـــل

يوجد منوالين هما ١٠ ، ٤

أوجد المنوال للقيم ٦ ، ٨ ، ٢ ، ٩ (إن وجد)

الحـــل

لا يوجد منوال

إيجاد المنوال في حالة التوزيع التكراري ذي المجموعات :

يمكن الحصول علي المنوال بإحدى الطريقتين :

باستخدام المنحنى التكراري :

بعد رسم المنحنى و من أعلى نقطة للمنحنى نسقط عموداً علي المحور الأفقي

فتكون نقطة تقاطع هذا العمود مع المحور الأفقي هي القيمة المنوالية .

باستخدام المدرج التكراري :

- نصل الرأس الأيمن العلوي لأطول مستطيل بالرأس الأيمن العلوي للمستطيل السابق .
- نصل الرأس الأيسر العلوي لأطول مستطيل بالرأس الأيسر العلوي للمستطيل التالي له .
- يتقاطع المستقيمان اللذان تم تعيينهما في الخطوتين السابقتين .
- نسقط من نقطة التقاطع عموداً علي المحور الأفقي فتكون نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي هي قيمة المنوال .

فيما يلي التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ تلميذ في أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠

أحسب المنوال (أو الدرجة المنواليه)

الحل : يمكن إيجاد المنوال برسم المدرج التكراري أو المنحنى التكراري

من الرسم

نجد أن : المنوال = ١٣

[١] اكمل ما يأتي :

(١) الوسيط لمجموعة القيم ٩ ، ٤ ، ٨ ، ١ ، ٣ هو ......

(٢) الوسيط لمجموعة القيم ٣ ، ٧ ، ٢ ، ٩ ، ٥ ، ١١ هو ......

(٣) ترتيب الوسيط لمجموعة القيم ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ ، ٤ هو ......

(٤) اذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم = ...

(٥) اذا كان الوسيط لمجموعة القيم ك+١ ، ك+٢ ، ك+٥ ، ك+٤ ، ك+ ٣ حيث ك عدد صحيح موجب هو ١٣ فإن ك=........

(٦) نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والنازل تعين ....على محور المجموعات (الأفقي) و تعين ......على محور التكرار (الرأسي)

[٢]

(١) أرسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل و أوجد الوسيط

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

(٢) اوجد قيمة كل من س ، ك

ثم أرسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل و أوجد الوسيط

المجموعات	١٠-	٢٠-	س-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك+٢	٤	١٠٠

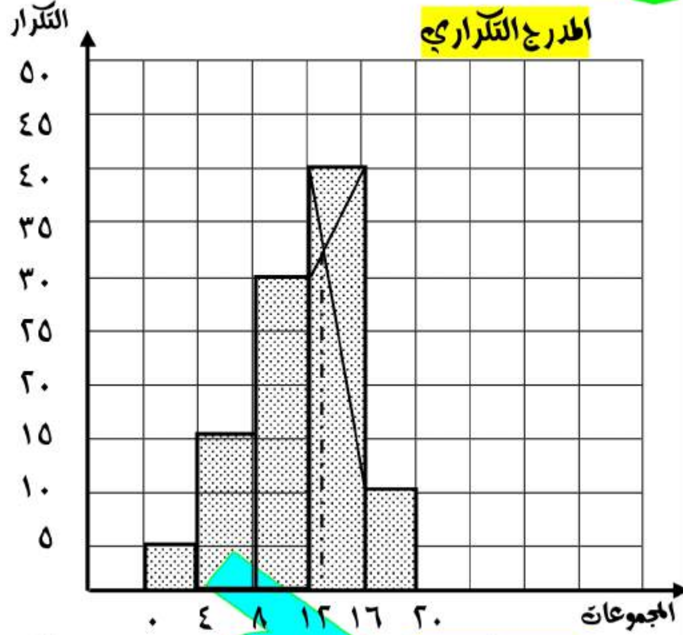
(٣) أرسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل و أوجد الوسيط

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجموع
التكرار	٤	٦	٢٠	١٦	٢	١	٤	٥٠

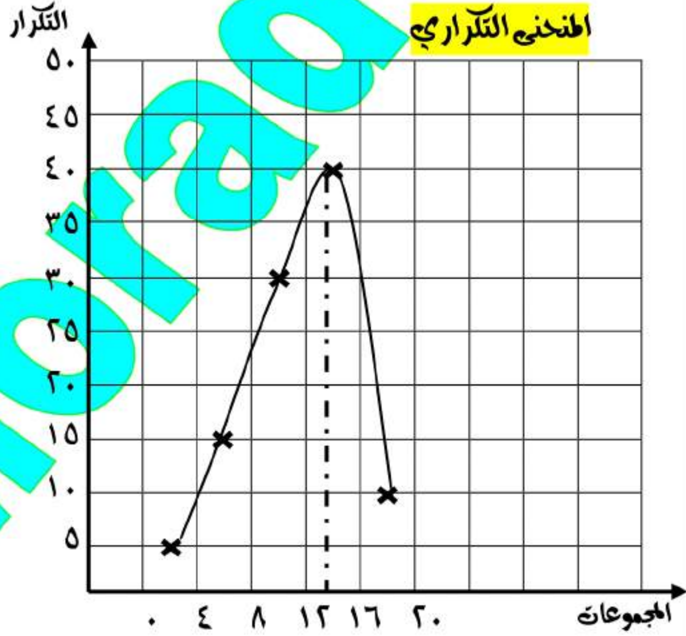
(٤) أرسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل و أوجد الوسيط

المجموعات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
التكرار	٤	٦	٢٠	١٦	٢	١	٥٠

المدرج التكراري



المنحنى التكراري



حاول بنفسك

(١) أوجد الدرجة المنوالية للتوزيع الآتي :

المجموعات	١-	٢-	٣-	٤-	٥-	٦-	المجموع
التكرار	٥	١٢	١٨	٢٥	٢٧	١٣	١٠٠

(٢) الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ٥٠ طالباً في أحد الامتحانات

المجموعات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	١٠	١٢	١٨	٥	٣	٢

أوجد (أ) الوسط الحسابي (ب) أوجد المنوال

تمارين على المنـــوال

[١] اكمل ما يأتي :

(١) المنوال لمجموعة من القيم هو ......

(٢) المنوال لمجموعة القيم ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٩ ، ٥ ، ١١ هو ......

(٣) المنوال لمجموعة القيم ٨، ٨، ٧، ٧ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٨ هو ......

(٤) اذا كان المنوال للقيم أ ، ٤ ، ٣ ، ٥ هو ٣ فإن أ =......

(٥) إذا كان المنوال للقيم : ٢ ، ٥ ، س ، ٣ هو ٢ فإن س =......

(٦) اذا كان المنوال للقيم ٤ ، ١١ ، $٢^{س}$ ، ٨ هو ٤

فإن س =......

(٧) اذا كان المنوال للقيم ١٢ ، ٧ ، س +١ ، ٧ ، ١٢ هو ٧

فإن س =......

[٢]

(١) أرسم المنحنى المدرج التكراري و أوجد المنوال

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

(٢) اوجد قيمة كل من ك

ثم أرسم المنحنى التكراري وأوجد المنوال

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك+٢	٤	١٠٠

(٣) أرسم المنحنى التكراري وأوجد المنوال

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجموع
التكرار	٤	٦	٢٠	١٦	٩	١	٤	٦٠

(٤) أرسم المنحنى المدرج التكراري و أوجد المنوال

المجموعات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
التكرار	٣	٧	٢٠	١٥	٣	٢	٥٠

Mr.Morad

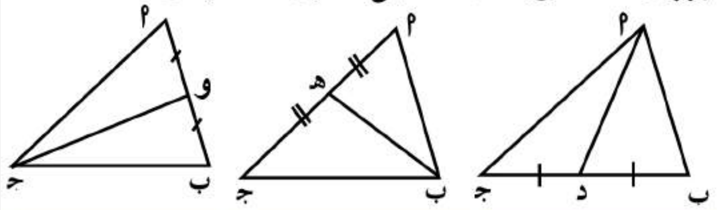
الهندسة للصف الثانى الاعدادى الفصل الدراسى الأول

Mr.Morad

متوســطات المثلث

تعــريف

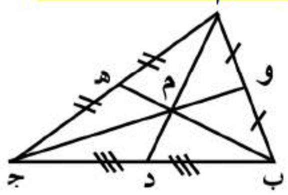
متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أى رأس من رؤوس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس



إذا كان د منتصف ب جـ فان أ د يسمى متوسط	إذا كان هـ منتصف أ جـ فان ب هـ يسمى متوسط	إذا كان و منتصف أ ب فان جـ و يسمى متوسط

نظرية (١) متوسطات المثلث تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة

أ د ∩ ب هـ ∩ جـ و = { م }



التعبير الرمزي

∵ ب هـ ، جـ و متوسطان

فى Δ أ ب جـ ،

ب هـ ∩ جـ و = { م } ∴ م هى نقطة تلاقى المتوسطات

∴ أ د متوسط فى Δ أ ب جـ

نظرية (٢)

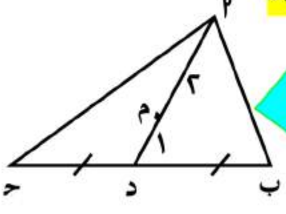
نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

أى أن

أ م : م د = ٢ : ١

أ م = ٢ م د = $\frac{٢}{٣}$ أ د

م د = $\frac{١}{٢}$ أ م = $\frac{١}{٣}$ أ د



لاحظ إذا كان أ د متوسط طوله ٦سم ، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث فإن أ م = ٤ سم ، م د = ٢سم

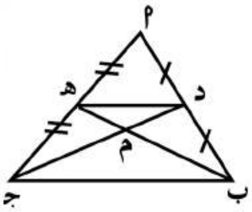
لاحظ أن: نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

حقيقة :-

النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

مثال (١)

في الشكل المقابل



د، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ

ب م = ٦ سم، ب جـ = ١٠ سم

د جـ = ١٢ سم أوجد محيط △ د م هـ

البرهان

∵ د منتصف أ ب ∴ جـ د متوسط

∴ م د = ١/٣ جـ د = ١/٣ × ١٢ = ٤ سم

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ب هـ متوسط

∴ م هـ = ١/٢ ب م = ١/٢ × ٦ = ٣ سم

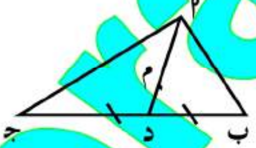
∵ د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

∴ د هـ = ١/٢ ب جـ = ١/٢ × ١٠ = ٥ سم

∴ محيط △ د م هـ = م د + م هـ + د هـ = ٤ + ٣ + ٥ = ١٢ سم

مثال (٢)

من الشكل المقابل إذا كانت



م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فأكمل

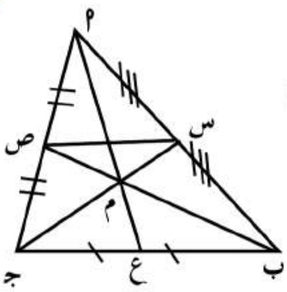
(١) أ م / م د = ... (٢) أ م / أ د = ...

(٣) م د / أ د = ...

(٤) إذا كان أ د = ٩ سم فإن أ م = ... ، م د = ...

مثال (٣)

في الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث فيه س منتصف أ ب

ص ∈ أ جـ ، س ص // ب جـ

جـ س ∩ ب ص = {م} فإذا كان

أ م ∩ ب جـ = {ع} اثبت أن

ب ع = ١/٢ ب جـ

البرهان

س منتصف أ ب ، س ص // ب جـ ∴ ص منتصف أ جـ

س منتصف أ ب ∴ جـ س متوسط ،

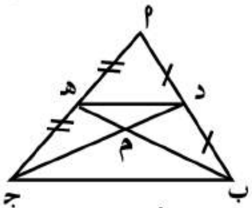
ص منتصف أ جـ ∴ ب ص متوسط

∵ أ ع ∩ ب ص ∩ جـ س = { م }

∴ أ ع متوسط ∴ ب ع = ١/٢ ب جـ

مثال (٤)

في الشكل المقابل إذا كان



د ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ،

أ ب ∩ أ جـ = { م } فأكمل

(١) إذا كان د جـ = ١٢ سم فإن د م = ... سم ، م جـ = ... سم

(٢) إذا كان د م = ٥ سم فإن م جـ = ... سم ، د جـ = ... سم

(٣) إذا كان م جـ = ١٢ سم فإن د م = ... سم ، د جـ = ... سم

(٤) إذا كان ب م = ٤ سم فإن م هـ = ... سم ، ب هـ = ... سم

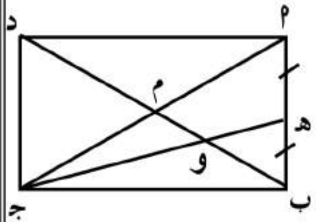
(٥) إذا كان د هـ = ١٠ سم فإن ب جـ = ... سم

(٦) إذا كان ب جـ = ٨ سم فإن د هـ = ... سم

(٧) د هـ : ب جـ = ... : ......

مثال (٥)

في الشكل المقابل



أ ب جـ د مستطيل تقاطع قطراه

في م ، هـ منتصف أ ب

جـ هـ ∩ ب د = { و }

(١) اثبت أن و هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

(٢) إذا ب و = ٤ سم أوجد طول أ م

البرهان

∵ هـ منتصف أ ب ∴ جـ هـ متوسط في △ أ ب جـ

∵ م منتصف أ جـ (القطران ينصف كلا منهما الاخر)

∴ ب م متوسط

∵ جـ هـ ∩ ب د = { و } ∴ و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

∵ ب و = ٤ سم ∴ و م = ٢ سم ∴ ب م = ٦ سم

في المستطيل القطران متساويان وينصف كلا منهما الاخر

∴ أ م = ب م = ٦ سم

حاول بنفسك

اكمل مما يأتي :

(١) في △ أ ب جـ إذا كان د منتصف ب جـ فإن أ د يسمى..........

(٢) عدد متوسطات المثلث هو ....

(٣) متوسطات المثلث تتقاطع جميعا في..............

(٤) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ...... : ...... من جهة القاعدة .

(٥) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ...... : ...... من جهة الرأس .

(٦) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ...... من جهة القاعدة .

Mr.Morad

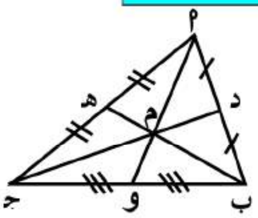
تمارين على متوسطات المثلث

[١] في الشكل المقابل △ أ ب جـ

م نقطة تقاطع متوسطاته

فإذا كان م د = ٣ سم ، ب م = ٤ سم

، ب جـ = ٩ سم فإن:



(١) ب و = ... سم

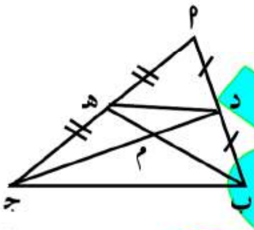
(٢) م جـ = ... سم

(٣) م هـ = ... سم

---

[٢] اذا كان ب جـ = ١٢ سم ،

ب هـ = ٩ سم ، م جـ = ٨ سم ، فإن:



(١) د هـ = ... سم

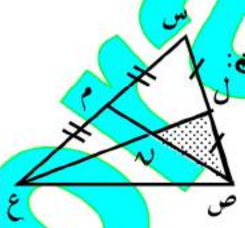
(٢) م هـ = ... سم

(٣) م د = ... سم

---

[٣] اذا كان ل ع = ١٥ سم ،

ص م = ١٨ سم ، س ص = ٢٠ سم ، فإن:



(١) ن ل = ... سم

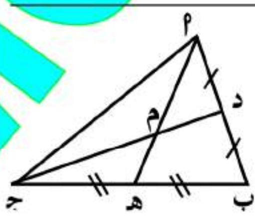
(٢) ن ص = ... سم

(٣) محيط △ ن ل ص = ... سم

---

[٤] اذا كان جـ م = ٨ سم

، م هـ = ٣ سم فإن:



(١) أ م = ... سم

(٢) م د = ... سم

(٣) م هـ = ... أ هـ (٤) م جـ = ... جـ د

---

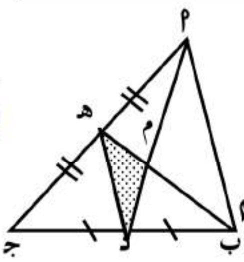
[٥] في الشكل المقابل

△ أ ب جـ فيه د منتصف ب جـ ،

هـ منتصف أ جـ ، جـ س ∩ ب ص = {م}

فاذا كان أ د = ٦ سم ، أ ب = ب هـ = ٩ سم

فاحسب محيط △ م د هـ



---

[٦] في الشكل المقابل

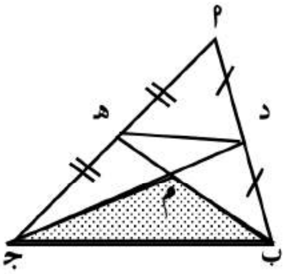
د ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ،

ب هـ ∩ جـ د = { م }

فاذا كان د هـ = ٤ سم ،

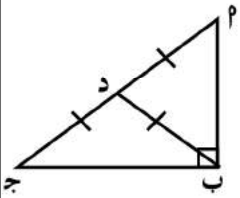
د م = ٣ سم ، ب هـ = ٦ سم

فاحسب محيط △ ب م جـ



نظرية (٣)

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث .



فمثلا في الشكل المقابل

إذا كان د منتصف أ جـ

، ب جـ = ١٠ سم فإن ب د = ٥ سم

و العكس صحيح

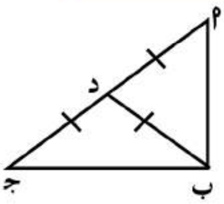
إذا كان د منتصف أ جـ وكان ب د = ٣ سم فإن أ جـ = ٦ سم

لاحظ أن ب د = أ د = د جـ وبالتالي فإن

- المثلث أ ب د يكون مثلث متساوي الساقين
- المثلث ب د جـ يكون مثلث متساوي الساقين

عكس نظرية (٣)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



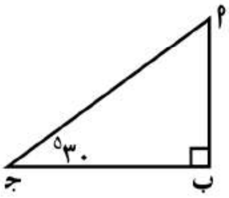
فمثلا في الشكل المقابل

∵ ب د متوسط في △ أ ب جـ

، ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ ق∠(ب) = ٩٠°

نتيجة

في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوي نصف طول الوتر



∵ ق∠(ب) = ٩٠° ، ق∠(جـ) = ٣٠°

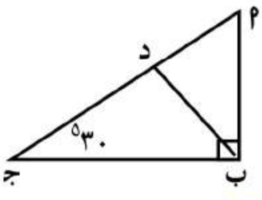
∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

إذا كان أ جـ = ١٠ سم فإن أ ب = ٥ سم

إذا كان أ ب = ٦ سم ، فإن أ جـ = ١٢ سم

---

(١) في الشكل المقابل



أ جـ = ١٠ سم ، ق∠(جـ) = ٣٠°

ق∠(ب) = ٩٠° ، د منتصف أ جـ

أوجد محيط △ أ ب د

البرهان

∵ د منتصف أ جـ ، ق∠(ب) = ٩٠° ∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ٥ سم

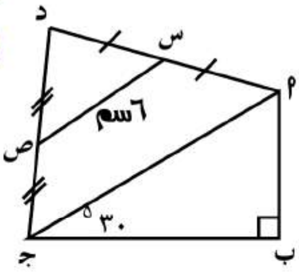
∵ ق∠(جـ) = ٣٠° ، ق∠(ب) = ٩٠° ∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ٥ سم

∴ محيط △ أ ب د = أ ب + ب د + أ د

= ٥ + ٥ + ٥ = ١٥ سم

Mr.Morad

(٢) في الشكل المقابل



س ، ص منتصفا $\overline{أد}$ ، $\overline{جـ د}$ ،

س ص = ٦ سم ، ق∠(ب) = ٩٠° ،

ق∠(أ جـ ب) = ٣٠° ،

أوجد طول $\overline{أب}$

البرهان

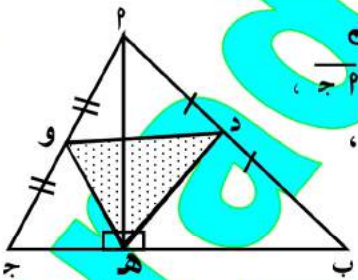
∵ س منتصف $\overline{أد}$ ، ص منتصف $\overline{جـ د}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ أ جـ = ١٢ سم

في △ أ ب جـ ق∠(ب) = ٩٠° ، ق∠(أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ٦ سم

(٣) في الشكل المقابل



د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$ ،

$\overline{أهـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أ جـ = ٦ سم ،

أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

احسب محيط △ د هـ و

البرهان

في △ أ ب جـ ∵ ق∠(أ هـ ب) = ٩٠° ، $\overline{هـ د}$ متوسط

∴ هـ د = $\frac{1}{2}$ أ ب ∴ هـ د = ٥ سم

في △ أ هـ جـ ∵ ق∠(أ هـ جـ) = ٩٠° ، $\overline{هـ و}$ متوسط

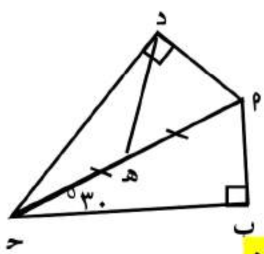
∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ هـ و = ٣ سم

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$

∴ د و = $\frac{1}{2}$ ب جـ ∴ د و = ٤ سم

∴ محيط △ د هـ و = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ سم

(٤) في الشكل المقابل



ق∠(أ د جـ) = ٩٠° ، $\overline{د هـ}$ متوسط

، ق∠(جـ) = ٣٠° ، د هـ = ٦ سم

أوجد طول $\overline{أب}$

البرهان

في △ أ د جـ ∵ ق∠(أ د جـ) = ٩٠° ، $\overline{د هـ}$ متوسط

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ أ جـ = ١٢ سم

في △ أ ب جـ ق∠(ب) = ٩٠° ، ق∠(أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ٦ سم

(٥) في الشكل المقابل

ق∠(أ د جـ) = ٩٠° ، $\overline{د هـ}$ متوسط

، ق∠(جـ) = ٣٠°

برهن أن أ ب = د هـ

البرهان

في △ أ د جـ ∵ ق∠(أ د جـ) = ٩٠° ، $\overline{د هـ}$ متوسط

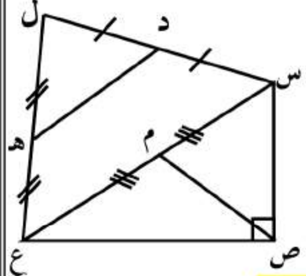
∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ ....(١)

في △ أ ب جـ ق∠(ب) = ٩٠° ، ق∠(أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ ب = د هـ

(٦) في الشكل المقابل



د ، هـ ، م منتصفا

$\overline{لس}$ ، $\overline{لع}$ ، $\overline{سع}$ على الترتيب

، ق∠(ص) = ٩٠°

برهن أن ص م = د هـ

البرهان

في △ س ص ع ∵ ق∠(س ص ع) = ٩٠° ،

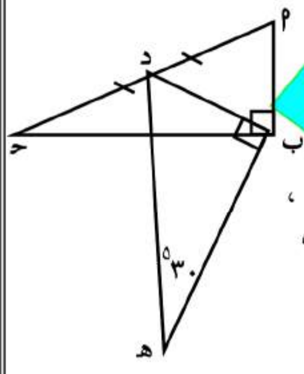
$\overline{ص م}$ متوسط ∴ ص م = $\frac{1}{2}$ س ع ....(١)

في △ ل س ع ∵ د منتصف $\overline{لس}$ ، هـ منتصف $\overline{لع}$

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ س ع ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ص م = د هـ

في الشكل المقابل



ق∠(أ ب جـ) = ق∠(د ب هـ) = ٩٠° ،

د منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق∠(هـ) = ٣٠°

اثبت أن أ جـ = د هـ

Mr. Morad

تمارين على نظرية (٣) وعكسها

[١] اكمل مما يأتي :

(١) عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية هو ....

(٢) عدد متوسطات المثلث المتساوي الساقين هو ....

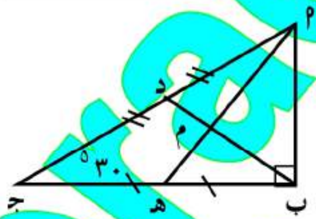
(٣) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي...............

(٤) إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون ....

(٥) في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي ....

(٦) طول الوتر في المثلث الثلاثيني ستيني يساوي ....طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° .

[٢] من الشكل المقابل:



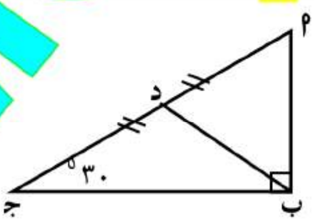
اذا كان أ ب = ٩ سم
، ق(∠ جـ) = ٣٠°

فإن:

(١) أ جـ =............ سم (٢) ب د =............ سم

(٣) م د =............ ب د (٤) م د =............ سم

[٣] من الشكل المقابل:



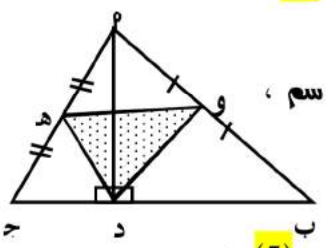
اذا كان أ جـ = ١٠ سم
، ق(∠ جـ) = ٣٠°

فإن:

(١) ب د =............ سم (٢) أ ب =............ سم

(٣) محيط △ أ ب د =...... سم (٤) ب جـ =............ سم

[٤] من الشكل المقابل:



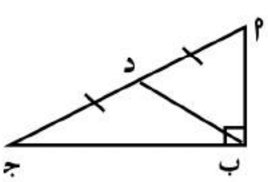
اذا كان أ ب = ١٦ سم ، أ جـ = ١٨ سم ،
ب جـ = ٢٠ سم ، $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

فإن:

(١) د و =............ سم (٢) د هـ =............ سم

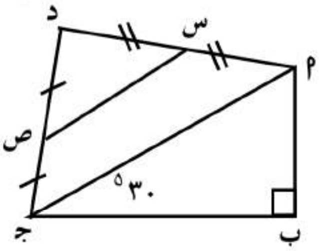
(٣) محيط △ د هـ و =...... سم (٤) و هـ =............ سم

[٥] من الشكل المقابل:



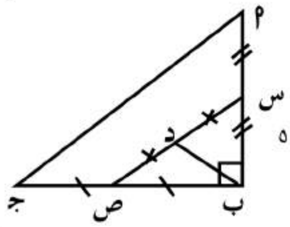
اثبت أن △ أ ب د مثلث متساوي الاضلاع

[٦] في الشكل المقابل:



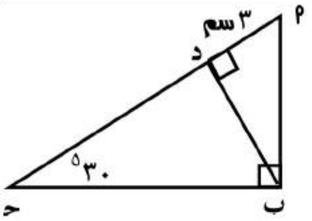
س ، ص منتصفا $\overline{أد}$ ، $\overline{جـد}$ ،
، ق(∠ب) = ٩٠°
ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠° ،
اثبت ان أ ب = س ص

[٧] في الشكل المقابل:



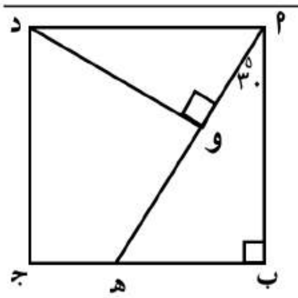
س ، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ ،
، د منتصف $\overline{سص}$ ، ق(∠ب) = ٩٠°
اثبت ان ب د = $\frac{1}{4}$ أ جـ

[٨] في الشكل المقابل:



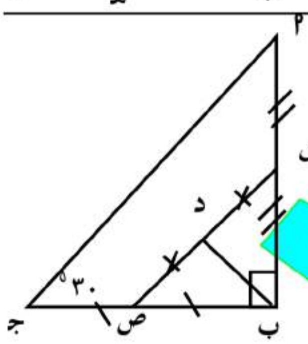
△ أ ب جـ فيه ق(∠ب) = ٩٠°
ق(∠جـ) = ٣٠° ، $\overline{بد} \perp \overline{أجـ}$
فإذا كان أ د = ٣ سم
أحسب طول $\overline{أب}$ ، $\overline{دجـ}$

[٩] في الشكل المقابل:



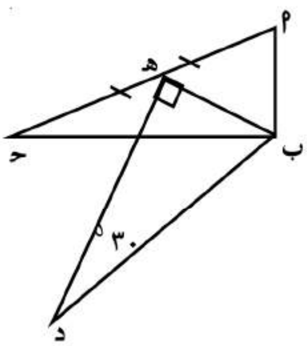
أ ب جـ د مربع ، هـ ∈ $\overline{بجـ}$ بحيث
ق(∠ب أ هـ) = ٣٠° ، $\overline{دو} \perp \overline{أهـ}$
فاذا كان أو = ٤ سم
احسب مساحة المربع أ ب جـ د

[١٠] في الشكل المقابل:



△ أ ب جـ فيه ق(∠ب) = ٩٠°
ق(∠جـ) = ٣٠° ،
س، ص، د منتصفات $\overline{أب}$، $\overline{بجـ}$ ،
، $\overline{سص}$ على الترتيب
فإذا كان أ جـ = ٨ سم
أحسب طول $\overline{أب}$ ، $\overline{سص}$ ، $\overline{بد}$

[١١] في الشكل المقابل:



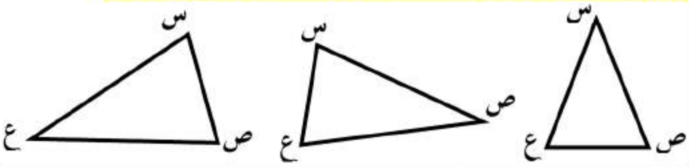
هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠ د) = ٣٠° ،
ق(∠ب هـ د) = ٩٠° ، أ جـ = ب د
اثبت ان ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

Mr.Morad

المثلث المتساوي الساقين

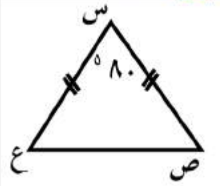
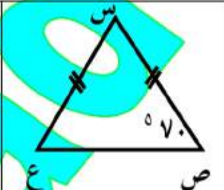
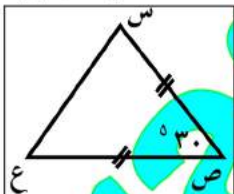
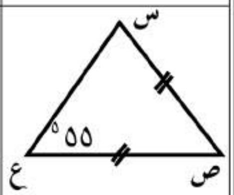
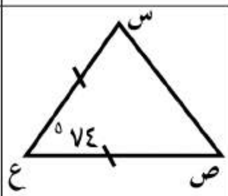
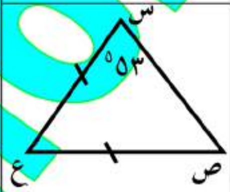
نظرية (٤)

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



إذا كان س ص = س ع فإن ق(∠ص) = ق(∠ع)	إذا كان س ص = ع ص فإن ق(∠س) = ق(∠ع)	إذا كان س ع = ص ع فإن ق(∠س) = ق(∠ص)

(١) في كل شكل من الأشكال الآتية أكمل حسب المطلوب

 ق(∠ص) = ... ق(∠ع) = ...	 ق(∠س) = ... ق(∠ع) = ...	 ق(∠س) = ... ق(∠ع) = ...
 ق(∠ص) = ... ق(∠س) = ...	 ق(∠س) = ... ق(∠ص) = ...	 ق(∠ص) = ... ق(∠ع) = ...

نتيجة

المثلث المتطابق (المتساوي) الأضلاع زواياه متطابقة وكل منها يساوي ٦٠ درجة

(٢) اكمل ما يأتي :

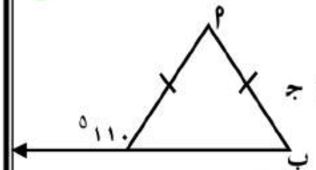
(١) مثلث متساوي الساقين قياس زاوية رأسه ٧٠° فإن قياس احدى زاويتي القاعدة = ...

(٢) مثلث متساوي الساقين قياس احدى زاويتي القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه = ...

(٣) مثلث متساوي الساقين قياس احدى زواياه ١٠٠° فإن قياس احدى الزاويتين الاخريين = ...

(٤) مثلث متساوي الساقين طولا ضلعين فيه ٧ سم ، ٣ سم فإن طول الضلع الثالث = ...

(٣) في الشكل المقابل:



إذا كانت د ∈ ب ج ، أ ب = أ ج

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ج

البرهان

∵ ق(∠أ ج ب) + ق(∠أ ج د) = ١٨٠°

[زاويتان متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

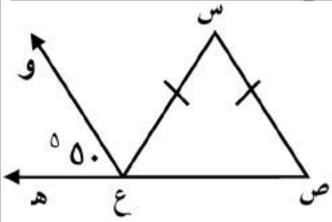
∴ ق(∠أ ج ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

∵ أ ب = أ ج ∴ ق(∠ب) = ق(∠ج) = ٧٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

(٤) في الشكل المقابل:



ص س ∥ ع و ، س ص = س ع أوجد قياسات زوايا المثلث س ص ع

البرهان

∵ ص س ∥ ع و

∴ ق(∠ص) = ق(∠و ع هـ) = ٥٠° [متناظرتان]

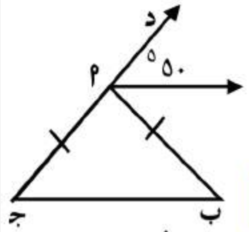
∵ س ص = س ع ∴ ق(∠ص) = ق(∠س ع ص) = ٥٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠س) = ١٨٠° − [٥٠° + ٥٠°]

= ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

في الشكل المقابل:



أ ب = أ ج ، أ هـ ∥ ج ب

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ج

البرهان

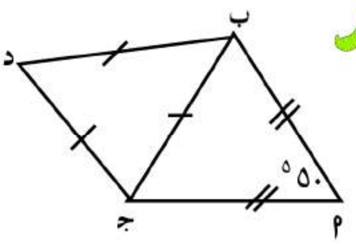
∵ أ هـ ∥ ج ب ∴ ق(∠د أ هـ) = ق(∠ج) = ٧٠° [متناظرتان]

∵ أ ب = أ ج ∴ ق(∠ب) = ق(∠ج) = ٧٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ ج) = ١٨٠° − [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

في الشكل المقابل:



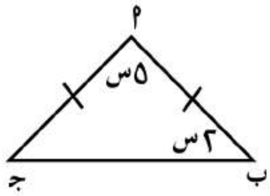
ق(∠أ) = ٥٠° ، أ ب = أ ج

Δ د ب ج متساوي الأضلاع

أوجد ق(∠أ ب د) ....

Mr Morad

مثال (٦) في الشكل المقابل:



أ ب = أ جـ ، ق(∠أ) = ٥س°

، ق(∠ب) = ٢س°

أحسب قياسات زوايا △ أ ب جـ

البرهان

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٢س°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

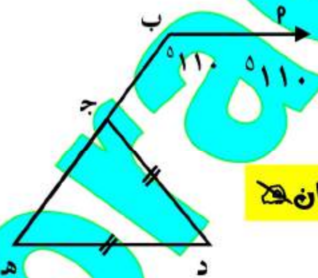
∴ ٥س° + ٢س° + ٢س° = ١٨٠°

∴ ٩ س° = ١٨٠° ∴ س° = ٢٠°

∴ ق(∠أ) = ٥ × ٢٠° = ١٠٠°

، ق(∠ب) = ٢ × ٢٠° = ٤٠° ، ق(∠جـ) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

مثال في الشكل المقابل:



ب أ ⃖ // د هـ ، ق(∠ب) = ١١٠°

، جـ د = د هـ أوجد ق(∠د)

البرهان

∵ ب أ ⃖ // د هـ ، ب هـ قاطع لهما

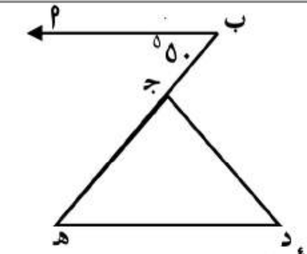
ق(∠ب) + ق(∠هـ) = ١٨٠° [متكاملتان]

∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

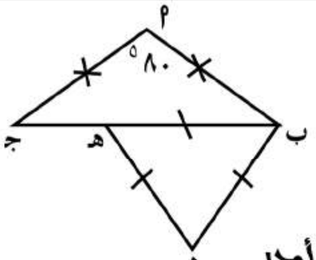
∵ جـ د = د هـ ∴ ق(∠د جـ هـ) = ق(∠هـ) = ٧٠°

∴ ق(∠د) = ١٨٠° − [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

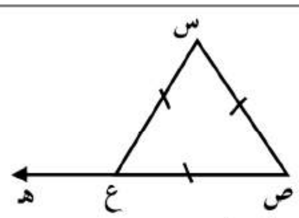
حاول بنفسك



أوجد ق(∠ د جـ هـ)

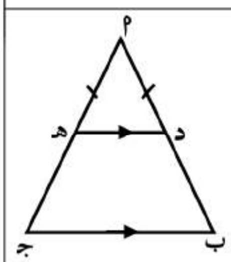


أوجد ق(∠أ ب د)



ق(∠ص) = ...

ق(∠س ع هـ) = ...



أثبت ان ق(∠ب) = ق(∠جـ)

تمارين على نظرية المثلث المتساوي الساقين

[١] اكمل مما يأتي:

(١) زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ....

(٢) قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الاضلاع = ...

(٣) اذا كان د هـ و مثلث فيه د هـ = د و فإن ق(∠هـ) = ق(∠.....)

(٤) في المثلث المتساوي الساقين اذا كان قياس زاوية رأسه ٤٠° فإن قياس احدى زاويتي القاعدة = ...

(٥) في المثلث المتساوي الساقين اذا كان قياس احدى زاويتي القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه = ...

(٦) في △ أ ب جـ اذا كان أ ب = أ جـ ، ق(∠أ) = ٨٠° فإن ق(∠ب) = ق(∠.....) = ...°

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

(١) في △ س ص ع اذا كان س ص = ص ع = س ع فان ق(∠س) = ...° [٣٠ ، ٦٠ ، ٩٠ ، ١٨٠]

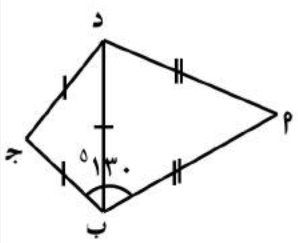
(٢) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الاضلاع = ...° [٦٠ ، ٩٠ ، ١٢٠ ، ١٨٠]

(٣) اذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، أ ب = أ جـ فان ق(∠ب) = ...° [٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠]

(٤) اذا كان قياس احدى زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ٣٠° كان المثلث .... [منفرج الزاوية ، قائم الزاوية ، حاد الزوايا ، متساوي الاضلاع]

(٥) في △ س ص ع اذا كان س ص = س ع فان الزاوية الخارجة عند الراس ع تكون .... [منفرجة ، قائمة ، حادة ، منعكسة]

[٣] في الشكل المقابل



أ د = أ ب ، △ ب د جـ متساوي الاضلاع ، ق(∠ أ ب جـ) = ١٣٠°

أكمل

(١) ق(∠ د ب جـ) = ...

(٢) ق(∠أ ب د) = ...

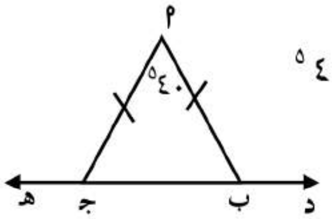
(٣) ق(∠أ د ب) = ...

(٤) ق(∠ ب د جـ) = ...

(٥) ق(∠ ب أ د) = ...

Mr.Morad

[٤] فى الشكل المقابل



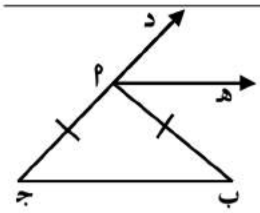
ا ب = ا جـ ، ق∠(ا) = ٤٠°

(١) اوجد ق∠(ا ب جـ)

(٢) اثبت أن

ق∠(ا ب د) = ق∠(ا جـ هـ)

[٥] فى الشكل المقابل

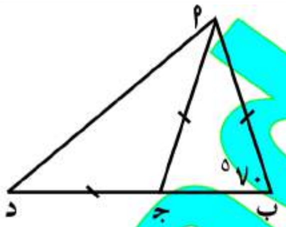


ا ب = ا جـ $\overrightarrow{اهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

اثبت أن

$\overrightarrow{اهـ}$ ينصف ∠(د ا هـ)

[٦] فى الشكل المقابل

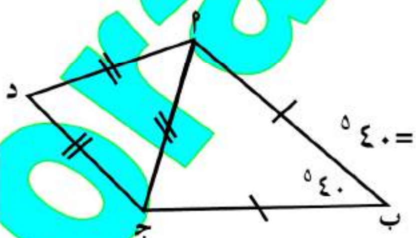


ا ب = ا جـ ، ق∠(ب) = ٧٠°

أوجد بالبرهان

ق∠(ب ا د)

[٧] فى الشكل المقابل



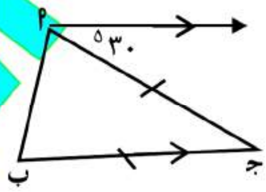
ا د = د جـ = ا جـ ،

ا ب = ا جـ ، ق∠(ا ب جـ) = ٤٠°

أوجد بالبرهان

ق∠(ب ا د)

[٨] فى الشكل المقابل

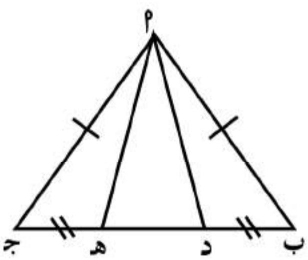


△ ا ب جـ فيه ا جـ = ب جـ ،

$\overleftrightarrow{ا د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق∠(د ا جـ) = ٣٠°

أوجد بالبرهان قياسات زوايا △ ا ب جـ

[٩] فى الشكل المقابل



△ ا ب جـ فيه ا ب = ا جـ ،

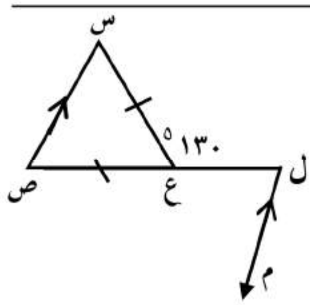
$\overline{ب د}$ ≡ $\overline{جـ هـ}$

اثبت ان

(١) △ ا د هـ متساوى الساقين

(٢) ∠(ا هـ د) ≡ ∠(ا د هـ)

[١٠] فى الشكل المقابل



ع ∈ $\overline{ل ص}$ ، س ع = ص ع ،

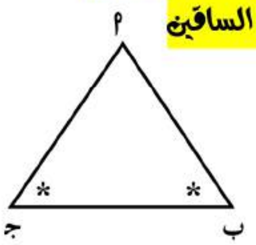
ق∠(ل ع س) = ١٣٠° ،

$\overrightarrow{ل م}$ // $\overline{س ص}$

أوجد بالبرهان ق∠(م ل ص)

عكس نظرية (٤) عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتان يتطابقان ويكون المثلث متساوى الساقين



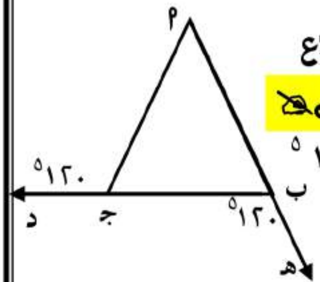
فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان ق∠(ب) = ق∠(جـ)

فان ا ب = ا جـ

نتيجة إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الاضلاع

مثال (١) فى الشكل المقابل:



اثبت أن △ ا ب جـ متساوى الاضلاع

البرهان

∵ ق∠(ا ب جـ)+ق∠(هـ ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق∠(ا ب جـ) = ١٨٠° − ١٢٠°

= ٦٠°

∵ ق∠(ا جـ ب)+ق∠(ا جـ د) = ١٨٠°

∴ ق∠(ا جـ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

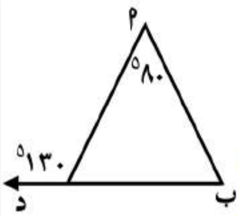
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق∠(ا) = ١٨٠° − [٦٠° + ٦٠°] = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق∠(ا) = ق∠(ا ب جـ) = ق∠(ا جـ ب)

∴ △ ا ب جـ متساوى الاضلاع #

مثال (٢) فى الشكل المقابل:



اثبت أن المثلث ا ب جـ

متساوى الساقين

البرهان

∵ ق∠(ا جـ ب)+ق∠(ا جـ د) = ١٨٠°

[متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

∴ ق∠(ا جـ ب) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق∠(ب) = ١٨٠° − [٨٠° + ٥٠°] = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

∴ ق∠(ب) = ق∠(ا جـ ب)

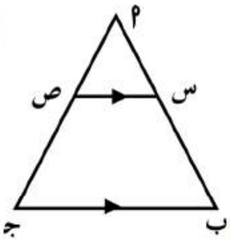
∴ △ ا ب جـ متساوى الاضلاع #

Mr Morad

مثال (٣) في الشكل المقابل:

أ ب = أ جـ ، س ص // ب جـ

اثبت أن المثلث أ س ص متساوي الساقين



البرهان

في △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق∠(ب) = ق∠(جـ) .... (١)

∵ س ص // ب جـ

∴ ق∠(ب) = ق∠(أ س ص) ..... بالتناظر .... (٢)

∴ ق∠(جـ) = ق∠(أ ص س) ..... بالتناظر .... (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

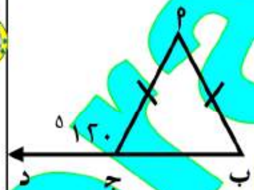
∴ ق∠(أ س ص) = ق∠(أ ص س)

∴ △ أ س ص متساوي الساقين #

مثال (٤) في الشكل المقابل:

اثبت ان أ ب جـ

متساوي الاضلاع



البرهان

∵ ق∠(أ جـ د) + ق∠(أ جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق∠(أ جـ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

في △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق∠(أ ب جـ) = ق∠(أ جـ ب) = ٦٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق∠(أ) = ١٨٠° − [٦٠° + ٦٠°] = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق∠(أ) = ق∠(أ ب جـ) = ق∠(أ جـ ب)

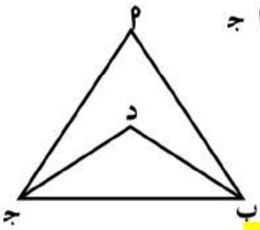
∴ △ أ ب جـ متساوي الاضلاع #

مثال (٥) في الشكل المقابل: أ ب = أ جـ

ب د ينصف ∠ أ ب جـ

جـ د ينصف ∠ أ جـ د

اثبت أن △ د ب جـ متساوي الساقين



البرهان

في △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق∠(أ ب جـ) = ق∠(أ جـ ب)

∵ ب د ينصف ∠ أ ب جـ ∴ ق∠(د ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق∠(ب)

∵ جـ د ينصف ∠ أ جـ د ∴ ق∠(د جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق∠(جـ)

∴ ق∠(د ب جـ) = ق∠(د جـ ب)

∴ △ د ب جـ متساوي الساقين #

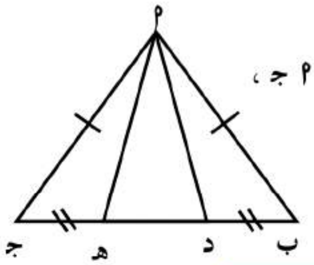
مثال (٦) في الشكل المقابل:

△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ،

ب د ≡ جـ هـ

اثبت ان

△ أ د هـ متساوي الساقين



البرهان

△ △ أ ب د ، أ جـ هـ

فيهما:
- أ ب = أ جـ
- ب د = هـ جـ
- ق∠(ب) = ق∠(جـ) لان [أ ب = أ جـ]

∴ △ أ ب د ≡ △ أ جـ هـ

ومن التطابق ينتج أن أ د = أ هـ

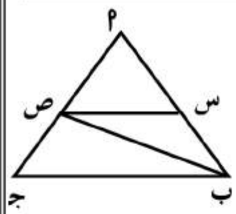
∴ △ أ د هـ متساوي الساقين #

مثال (٧) في الشكل المقابل:

س ص // ب جـ

ب ص ينصف ∠(أ ب جـ)

اثبت أن △ س ب ص متساوي الساقين



البرهان

∵ س ص // ب جـ ∴ ق∠(س ص ب) = ق∠(ص ب جـ) (١)

∵ ب ص ينصف ∠(أ ب جـ)

∴ ق∠(س ب ص) = ق∠(ص ب جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ∴ ق∠(س ص ب) = ق∠(س ب ص)

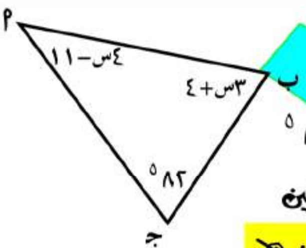
∴ △ س ب ص متساوي الساقين

مثال (٨) في الشكل المقابل:

اذا كان ق∠(أ) = ٤س − ١١ ،

ق∠(ب) = ٣ س + ٤ ، ق∠(جـ) = ٨٢°

اثبت أن △ أ ب جـ متساوي الساقين



البرهان

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٤ س − ١١ + ٣ س + ٤ + ٨٢° = ١٨٠°

∴ ٤ س + ٧٥ = ١٨٠ ∴ ٧ س = ١٠٥ ∴ س = ١٥

∴ ق∠(أ) = ٤ × ١٥ − ١١ = ٤٩°

، ق∠(ب) = ٤ × ١٥ + ٤ = ٤٩°

∴ ق∠(أ) = ق∠(ب) ∴ ب جـ = أ جـ

∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين #

Mr.Morad

تمارين عكس نظرية (٤)

[١] اكمل ما يأتي :

(١) إذا تطابقت زاويتان في مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتان يكونان ....

(٢) إذا تطابقت زاويا مثلث فانه يكون ....

(٣) في △ ٢ ب جـ اذا كان ق(∠ ٢) = ٥٠°، ق(∠ب) = ٨٠° كان المثلث ....

(٤) اذا كان قياس احدى زوايا مثلث قائم الزاوية ٤٥° فان المثلث ....

(٥) اذا كان قياس احدى زوايا مثلث متساوي الساقين ٦٠° كان المثلث ....

(٦) في △ ٢ ب جـ اذا كان ق(∠ ٢) = ٦٠°، ٢ ب = ٢ جـ ، محيط المثلث = ١٨ سم فان ب جـ = ... سم .

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) في △ ٢ ب جـ اذا كان جـ ٢ = جـ ب ، ق(∠جـ) = ق(∠ ٢) فان ق(∠ب) = ...° [٣٠ ، ٦٠ ، ٩٠ ، ١٨٠]

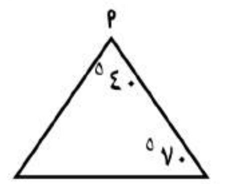
(٢) اذا كان مجموع قياسي زاويتين متطابقتين في مثلث $\frac{2}{3}$ مجموع قياسات زواياه كان المثلث ....

[قائم الزاوية ، متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، مختلف الاضلاع]

(٣) اذا كان △ ٢ ب جـ ق(∠ ٢) = ٣٠° ، ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ١ : ٤ فان △ ٢ ب جـ يكون ....

[قائم الزاوية ، متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، مختلف الاضلاع] .

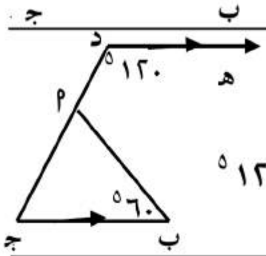
[٣] في الشكل المقابل:



اذا كان ق(∠ ٢) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٧٠°

اثبت أن △ ٢ ب جـ متساوي الساقين

[٤] في الشكل المقابل:

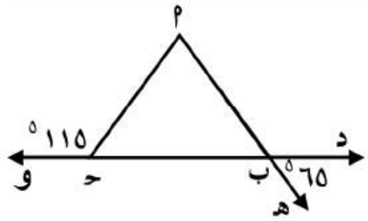


د هـ // ب جـ

ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠ هـ د ٢) = ١٢٠°

اثبت أن △ ٢ ب جـ متساوي الاضلاع

[٥] في الشكل المقابل:

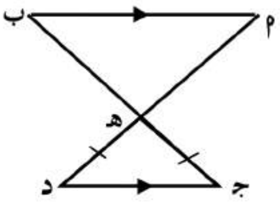


ق(∠ ٢ جـ و) = ١١٥° ،

ق(∠ دب هـ) = ٦٥°

اثبت أن △ ٢ ب جـ متساوي الساقين

[٦] في الشكل المقابل:

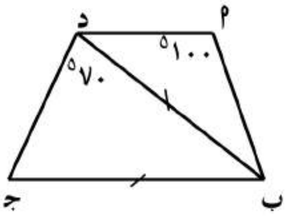


هـ جـ = هـ د

٢ ب // جـ د

اثبت أن ٢ هـ = ب هـ

[٧] في الشكل المقابل:



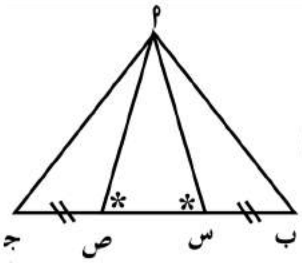
ب د = ب جـ ، ٢ د // ب جـ

ق(∠ ب د جـ) = ٧٠° ،

ق(∠ ب ٢ د) = ١٠٠°

اثبت أن ٢ ب = ٢ د

[٨] في الشكل المقابل:

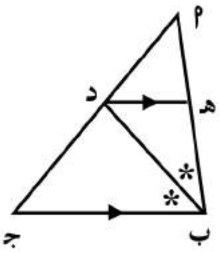


ب س = جـ ص ،

ق(∠ ٢ س ص) = ق(∠ ٢ ص س)

اثبت ان △ ٢ ب جـ متساوي الساقين

[٩] في الشكل المقابل:

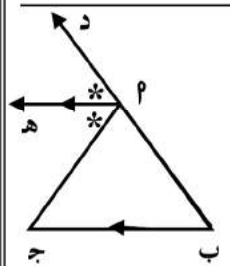


ب د ينصف ∠ ٢ ب جـ ،

يقطع ٢ جـ في د ، هـ د // ب جـ

اثبت ان △ هـ ب د متساوي الساقين

[١٠] في الشكل المقابل:

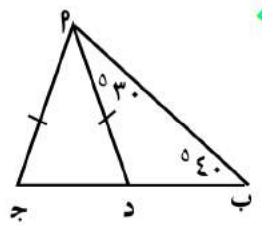


٢ ∈ ب د ، ٢ هـ // ب جـ ،

٢ هـ ينصف ∠ جـ ٢ د ،

اثبت ان △ ٢ ب جـ متساوي الساقين

[١١] في الشكل المقابل:



٢ د = ٢ جـ ،

ق(∠ب) = ٤٠° ،

ق(∠ ب ٢ د) = ٣٠°

اثبت ان ٢ ب = جـ ب

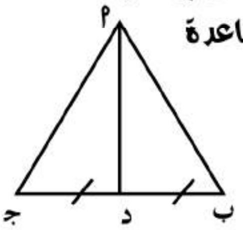
Mr.Morad

نتائج المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة

في الشكل المقابل



إذا كان $\overline{أد}$ متوسط (د منتصف $\overline{بجـ}$)

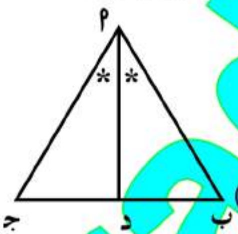
فإن (١) $\overline{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

(٢) $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

نتيجة (٢)

منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها

في الشكل المقابل



إذا كان $\overline{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

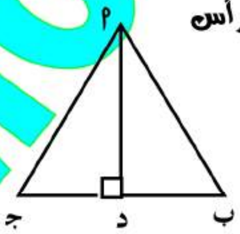
فإن (١) $\overline{أد}$ متوسط (د منتصف $\overline{بجـ}$)

(٢) $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

نتيجة (٣)

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

في الشكل المقابل



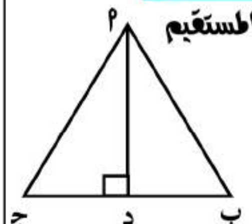
إذا كان $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

فإن (١) $\overline{أد}$ متوسط (د منتصف $\overline{بجـ}$)

(٢) $\overline{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

تعريف محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين

محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديا على القاعدة

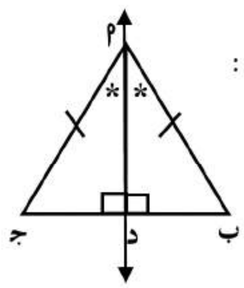


في الشكل المقابل إذا كان $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

فان $\overline{أد}$ يسمى محور تماثل للمثلث أ ب جـ

ملخص ما سبق

في الشكل المقابل توجد اربع معطيات هي :



(١) △ أ ب جـ متساوى الساقين

(٢) $\overleftrightarrow{أد}$ ينصف $\overline{بجـ}$

(٣) $\overleftrightarrow{أد}$ ينصف ∠ (ب أ جـ)

(٤) $\overleftrightarrow{أد}$ ⊥ $\overline{بجـ}$

فإذ توفر أي شرطان من الاربع شروط فإننا نستنتج باقي الشروط

ملاحظة

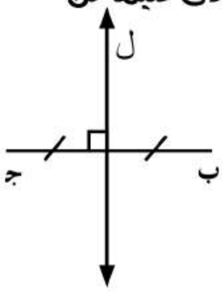
(١) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الساقين = ١

(٢) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الاضلاع = ٣

(٣) عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الاضلاع = ٠

تعريف محور القطعة المستقيمة

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها



إذا كان المستقيم ل ⊥ $\overline{بجـ}$

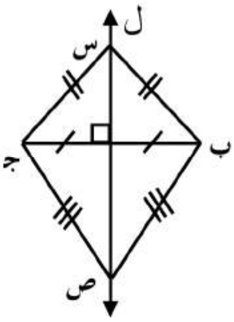
من منتصفها فان ل يسمى

محور تماثل القطعة المستقيمة $\overline{بجـ}$

ملاحظة هامة :

أي نقطة ∈ لمحور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

في الشكل المقابل



اذا كان المستقيم ل هو محور تماثل $\overline{بجـ}$ ،

س ∈ المستقيم ل ، ص ∈ المستقيم ل

∴ س ب = س جـ

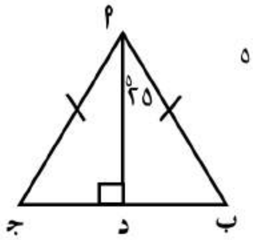
ص ب = ص جـ

معلومات هامة جدا

الشكل	عدد المحاور
القطعة المستقيمة	١
المثلث المتساوى الساقين	١
المثلث المتساوى الاضلاع	٣
المثلث المختلف الاضلاع	٠
متوازي الاضلاع	٠
المعين	٢
المستطيل	٢
المربع	٤
شبه المنحرف	٠
شبه المنحرف المتساوى الساقين	١
الخماسي المنتظم	٥
السداسي المنتظم	٦
الشكل البيضاوي	٢
الدائرة	لا نهائي
ربع الدائرة	١
نصف الدائرة	١

Mr.Morad

مثال (١) في الشكل المقابل:



أ ب = أ ج ، ق(∠ب أ د) = ٢٥°

أ د ⊥ ب ج ، ب ج = ٦ سم

أوجد

(١) طول د ج (٢) ق(∠أ ج ب)

البرهان

∵ أ ب = أ ج ، أ د ⊥ ب ج

∴ أ د متوسط ، أ د ينصف ∠(ب أ ج)

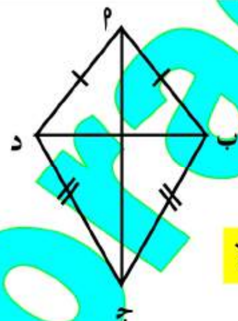
∴ ب د = د ج = ٣ سم ،

ق(∠ب أ د) = ق(∠ج أ د) = ٢٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ د ج الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ج) = ١٨٠° − [٩٠° + ٢٥°] = ٦٥° #

مثال في الشكل المقابل:



أ ب = أ د ، ب ج = د ج

أثبت بدون استخدام التطابق أن أ ج ⊥ ب د وينصفها

البرهان

∵ أ ب = أ د

∴ أ ∈ لمحور تماثل القطعة المستقيمة ب د ----- (١)

∵ ب ج = د ج

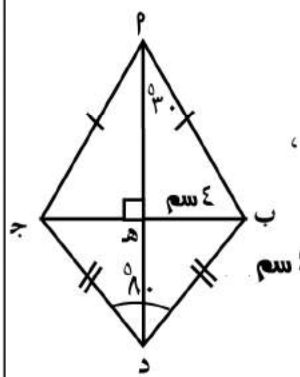
∴ ج ∈ لمحور تماثل القطعة المستقيمة ب د ----- (٢)

من (١) ، (٢)

ينتج أن أ ج هو محور تماثل القطعة المستقيمة ب د

∴ أ ج ⊥ ب د وينصفها #

مثال في الشكل المقابل:



أ ب = أ ج ، ب د = ج د

أ د ⊥ ب ج ، أ د ∩ ب ج = {هـ} ،

ق(∠ب أ د) = ٣٠°

ق(∠ب د ج) = ٨٠° ، ب هـ = ٤ سم

اكمل ما يأتي:

(١) ق(∠د أ ج) = ... °

(٢) ق(∠ب د هـ) = ... °

(٣) ق(∠أ ج ب) = ... °

(٤) هـ ج = ... سم

(٥) أ ج = ... سم

تمارين على نتائج المثلث المتساوي الساقين

[١] اكمل مما يأتي:

(١) المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عموديا على القاعدة يسمى ....

(٢) عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الاضلاع = ...

(٣) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوي الاضلاع = ...

(٤) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوي الساقين = ...

(٥) متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من الرأس..........

(٦) منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين..........

(٧) المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عموديا على القاعدة ....

(٨) محور القطعة المستقيمة هو...........

(٩) أي نقطة ∈ لمحور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها

(١٠) اذا كانت ج ∈ لمحور تماثل القطعة المستقيمة أ ب فان .... = ...

(١١) في △ أ ب ج اذا كان ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٦٠° فان عدد محاور تماثل △ أ ب ج = ...

(١٢) في △ أ ب ج اذا كان ق(∠أ) = ق(∠ب) ≠ ٦٠° فان عدد محاور تماثل △ أ ب ج = ...

(١٣) في △ أ ب ج اذا كان أ ب = أ ج ، ق(∠أ) = ٦٠° فان عدد محاور تماثل △ أ ب ج = ...

(١٤) اذا كان قياس احدى زوايا مثلث قائم هو ٤٥° فان عدد محاور تماثله = ...

(١٥) اذا كان △ أ ب ج له محور تماثل واحد فقط ، ق(∠أ ب ج) = ١٢٠° فان ق(∠أ) = ...

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

(١) اذا كان أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ب = أ د ، ب ج = د ج فان أ ج ...... ب د

[يوازي ، يساوي ، محور تماثل ، يطابق]

(٢) المثلث الذي اطوال أضلاعه ٣ سم ، (س+٣) سم ، ٥ سم يكون متساوي الساقين عندما س = ... سم

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

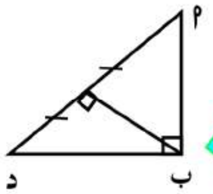
Mr.Morad

(٣) اذا كان طول ضلع في في مثلث = $\frac{1}{3}$ محيط المثلث
فان عدد محاور التماثل للمثلث = ...
[١ ، ٢ ، ٣ ، صفر]

(٤) اذا كان $\overleftrightarrow{سص}$ هو محور تماثل $\overline{أب}$ فان
[أس = ب ص، أس = ب س، ب ص = س ص ، أص = ب س]

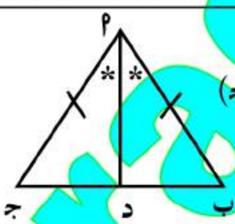
(٥) في المعين أ ب جـ د يكون محور تماثل $\overline{أجـ}$ هو ....
[$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أد}$ ، $\overline{جـد}$]

[٣] في الشكل المقابل:



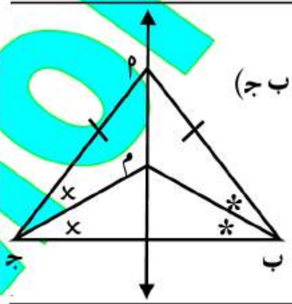
$\overline{بد} \perp \overline{أجـ}$ ، د منتصف $\overline{أجـ}$
ق(∠ ب) = ٩٠°
اوجد ق(∠ أ ب د)

[٤] في الشكل المقابل:



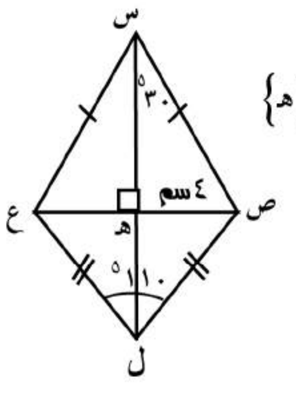
أ ب = أ جـ ، $\overline{أد}$ ينصف ∠(ب أ جـ)
، ب جـ = ١٥ سم
اوجد طول $\overline{بد}$

[٥] في الشكل المقابل:



أ ب = أ جـ ، $\overline{بم}$ ينصف ∠(أ ب جـ)
$\overline{جـم}$ ينصف ∠(أ جـ ب)
بدون استخدام التطابق اثبت ان
$\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{بجـ}$ وينصفها

[٦] في الشكل المقابل:



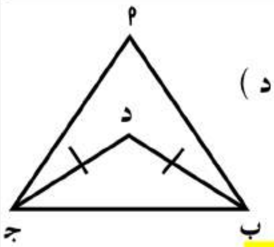
س ص = س ع، ل ص = ل ع
$\overline{سل} \perp \overline{صع}$ ، $\overline{سل} \cap \overline{صع} = \{هـ\}$
ق(∠ ص س ل) = ٣٠°،
ق(∠ ص ع ص) = ١١٠°
ص هـ = ٤ سم اكمل ما يأتي :
(١) ق(∠ ل س ع) = ...°
(٢) ق(∠ ص ل هـ) = ...°
(٣) ق(∠ س ع ص) = ...° (٤) س ع = ... سم
(٥) هـ ع = ... سم (٦) س هـ = ... سم
(٧) عدد محاور التماثل للمثلث س ص ع = ...
(٨) عدد محاور التماثل للمثلث ص ل ع = ...
(٩) مساحة △ س ص ع = ... سم٢

التباين في المثلثات

مسلمات التباين

بفرض ان س ، ص ، ع اعداد فان
(١) إذا كان س > ص فان س + ع > ص + ع
(٢) إذا كان س > ص فان س − ع > ص − ع
(٣) إذا كان س > ص ،ع(عدد موجب) فان س ع > ص ع
(٤) إذا كان س > ص ،ع(عدد سالب) فان س ع < ص ع
(٥) إذا كان س > ص ، ص > ع فان س > ع
(٦) إذا كان س > ص ، أ > ب فان س+أ > ص+ ب

مثال ١ في الشكل المقابل:



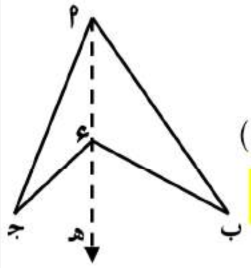
ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د)
د ب = د جـ
اثبت أن ق(∠ ب) > ق(∠ جـ)

البرهان

∵ ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د) .... (١)
، ∵ د ب = د جـ
∴ ق(∠ د ب جـ) = ق(∠ د جـ ب) .... (٢)
بجمع ١ ، ٢
∴ ق(∠ أ ب د) + ق(∠ د ب جـ) > ق(∠ أ جـ د) + ق(∠ د جـ ب)
∴ ق(∠ ب) > ق(∠ جـ) #

ملحوظة هامة :
قياس الزاوية الخارجة عن المثلث اكبر من قياس أي زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها

مثال ٢ في الشكل المقابل:



اثبت أن ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ أ)

البرهان

العمل نرسم $\overrightarrow{أد}$
∵ ق(∠ ب د هـ) > ق(∠ ب أ د)
[لأنها خارجة عن △ أ ب د] .... (١)
، ق(∠ جـ د هـ) > ق(∠ د أ جـ)
[لأنها خارجة عن △ أ د جـ] .... (٢)
بجمع ١ ، ٢ نجد أن
∴ ق(∠ ب د هـ) + ق(∠ جـ د هـ) > ق(∠ ب أ د) + ق(∠ د أ جـ)
∴ ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ أ) #

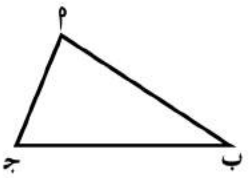
Mr Morad

المقارنة بين زوايا مثلث

نظرية (٥)

إذا اختلف طولا ضلعين من مثلث فأكبرهما في الطول يقابله زاوية أكبر في القياس من الزاوية المقابلة للضلع الآخر .

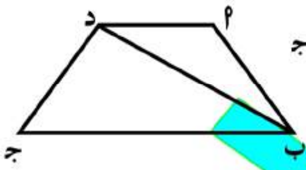
ففي الشكل المقابل



إذا كان أ ب > أ جـ

فإن ق(∠جـ) > ق(∠ب)

مثال (١) في الشكل المقابل:



أب > أد ، ب جـ > د جـ

أثبت أن

ق(∠ أ د جـ) > ق(∠ أ ب جـ)

البرهان

في △ أ ب د ∵ أب > أد

∴ ق(∠ أ د ب) > ق(∠ أ ب د) .... (١)

في △ ب جـ د ∵ ب جـ > جـ د

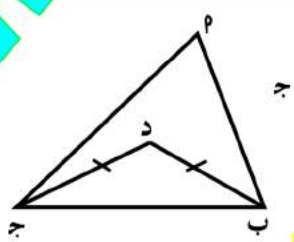
∴ ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ د ب جـ) .... (٢)

بجمع ١ ، ٢

∴ ق(∠ أ د ب) + ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ أ ب د) + ق(∠ د ب جـ)

∴ ق(∠ أ د جـ) > ق(∠ أ ب جـ) #

مثال في الشكل المقابل:



أ جـ > أ ب ، ب د = د جـ

أثبت أن

ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د)

البرهان

في △ أ ب جـ ∵ أ جـ > أ ب

∴ ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) .... (١)

في △ د ب جـ ∵ ب د = د جـ

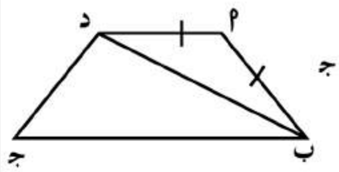
∴ ق(∠ د ب جـ) = ق(∠ د جـ ب) .... (٢)

بطرح ٢ من ١

∴ ق(∠ أ ب جـ − ق(∠ د ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ د جـ ب)

∴ ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د) #

مثال في الشكل المقابل:



أب = أد ، ب جـ > د جـ

أثبت أن

ق(∠ أ د جـ) > ق(∠ أ ب جـ)

البرهان

في △ أ ب د ∵ أب = أد

∴ ق(∠ أ د ب) = ق(∠ أ ب د) .... (١)

في △ ب جـ د ∵ ب جـ > جـ د

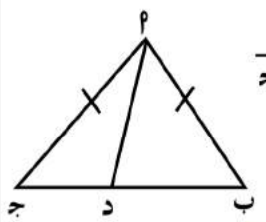
∴ ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ د ب جـ) .... (٢)

بجمع ١ ، ٢

∴ ق(∠ أ د ب) + ق(∠ ب د جـ) > ق(∠ أ ب د) + ق(∠ د ب جـ)

∴ ق(∠ أ د جـ) > ق(∠ أ ب جـ) #

مثال في الشكل المقابل:



أب = أ جـ ، د ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

برهن أن

ق(∠ أ د ب) > ق(∠ب)

البرهان

في △ أ ب جـ ∵ أب = أ جـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) .... (١)

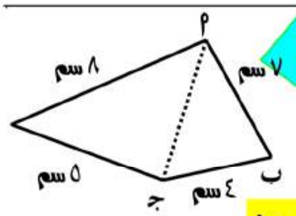
∵ ق(∠ أ د ب) > ق(∠جـ) .... (٢)

[خارجة عن △ أ د جـ]

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(∠ أ د ب) > ق(∠ب) #

مثال في الشكل المقابل:



برهن أن

ق(∠ ب جـ د) > ق(∠ ب أ د)

البرهان

في △ أ ب جـ ∵ أ ب > ب جـ

∴ ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ ب أ جـ) .... (١)

في △ أ جـ د ∵ أ د > جـ د

∴ ق(∠ أ جـ د) = ق(∠ جـ أ د) .... (٢)

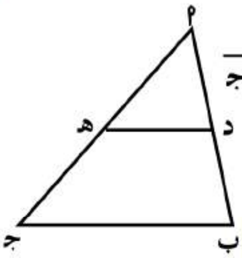
بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ أ جـ د) > ق(∠ ب أ جـ) + ق(∠ جـ أ د)

∴ ق(∠ ب جـ د) > ق(∠ ب أ د) #

Mr.Morad

مثال ٦ في الشكل المقابل:



ا جـ > ا ب ، د ، هـ منتصفا $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$

اثبت أن

ق∠(ا د هـ) > ق∠(ا هـ د)

البرهان

في △ ا ب جـ ∵ ا جـ > ا ب

∴ ق∠(ب) > ق∠(جـ) .... (١)

∵ د منتصف $\overline{\text{اب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{اجـ}}$

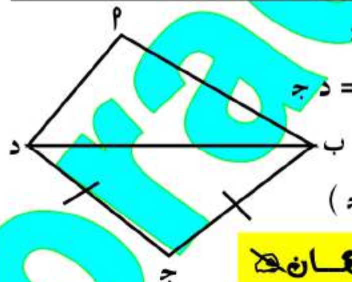
∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق∠(ا د هـ) = ق∠(ب) بالتناظر .... (٢)

، ق∠(ا هـ د) = ق∠(جـ) بالتناظر .... (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق∠(ا د هـ) > ق∠(ا هـ د)

مثال ٧ في الشكل المقابل:



ا ب > ا د ، ب جـ = د جـ

اثبت أن

ق∠(ا د جـ) > ق∠(ا ب جـ)

البرهان

في △ ا ب د ∵ ا ب > ا د

∴ ق∠(ا د ب) > ق∠(ا ب د) .... (١)

في △ ب جـ د ∵ ب جـ = جـ د

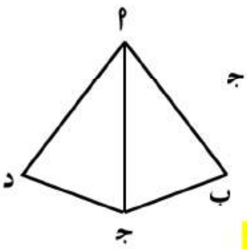
∴ ق∠(جـ ب د) = ق∠(جـ د ب) .... (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق∠(ا د ب) + ق∠(ب د جـ) > ق∠(ا ب د) + ق∠(د ب جـ)

∴ ق∠(ا د جـ) > ق∠(ا ب جـ) #

مثال ٨ في الشكل المقابل:



ا ب > ب جـ ، ا د > د جـ

برهن أن

ق∠(ب جـ د) > ق∠(ب ا د)

البرهان

في △ ا ب جـ ∵ ا ب > ب جـ

∴ ق∠(ا جـ ب) > ق∠(ب ا جـ) .... (١)

في △ ا جـ د ∵ ا د > جـ د

∴ ق∠(ا جـ د) > ق∠(جـ ا د) .... (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن ق∠(ب جـ د) > ق∠(ب ا د)

تمارين على المقارنة بين زوايا مثلث

[١] اكمل مما يأتي :

(١) إذا اختلف طولا ضلعين من مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية ....

(٢) في △ ا ب جـ اذا كان ا ب = ٧سم، ب جـ = ٥ سم، ا جـ = ٦ سم فان اصغر زوايا المثلث قياسا هي ....

(٣) في △ د هـ و اذا كان د هـ > هـ و فان ق∠(و) > ....

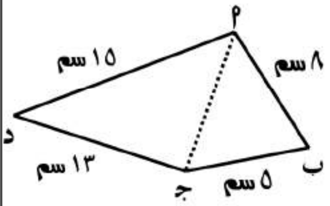
(٤) في أي مثلث ا ب جـ اذا كان ا ب > ا جـ > ب جـ فان ق∠(.....) > ق∠(.....) > ق∠(.....)

[٢] رتب قياسات زوايا المثلث ا ب جـ في الحالات الاتية :

(١) ا ب = ١٢ سم، ب جـ = ١٥ سم، ا جـ = ١٠ سم

(٢) ا ب = ٥,٧ سم، ب جـ = ٨,٥ سم، ا جـ = ٦ سم

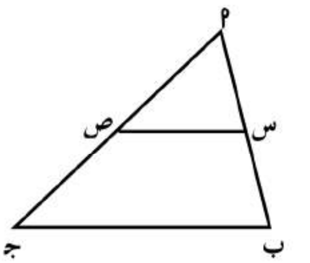
[٣] في الشكل المقابل:



برهن أن

ق∠(ب ا د) > ق∠(ب جـ د)

[٤] في الشكل المقابل:



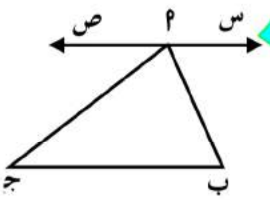
في الشكل المقابل:

ا جـ > ا ب ، س ، ص منتصفا $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$

اثبت أن

ق∠(ا س ص) > ق (ا ص س)

[٥] في الشكل المقابل:

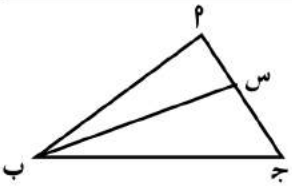


ا جـ > ا ب ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

اثبت أن

ق∠(س ا ب) > ق∠(ص ا جـ)

[٦] في الشكل المقابل:

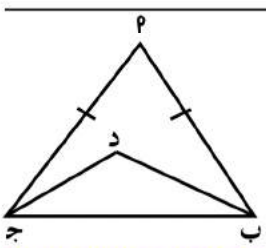


ا ب > ا جـ

اثبت أن

ق∠(ا س ب) > ق∠(ا ب جـ)

[٧] في الشكل المقابل:



ا ب = ا جـ ، د ب > د جـ

اثبت أن

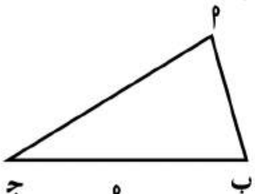
ق∠(ا ب د) > ق∠(ا جـ د)

Mr.Morad

٥)

إذا أختلف قياسا زاويتين من مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الضلع المقابل للزاوية الاخرى

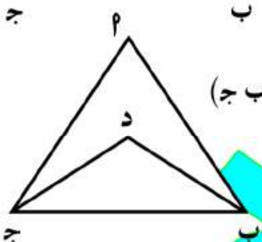
ففي الشكل المقابل



إذا كان ق∠(ب) > ق∠(ج)

فان أ ج > أ ب

مثال (١) في الشكل المقابل:



أ ب > أ ج ، $\overline{ب د}$ ينصف ∠(أ ب ج)

، $\overline{ج د}$ ينصف ∠(أ ج ب)

اثبت أن د ب > د ج

البرهان

∵ أ ب > أ ج ∴ ق∠(ج) > ق∠(ب) .... (١)

∵ $\overline{ب د}$ ينصف ∠(أ ب ج)

∴ ق∠(د ب ج) = ½ ق∠(ب) .... (٢)

∵ $\overline{ج د}$ ينصف ∠(أ ج ب)

∴ ق∠(د ج ب) = ½ ق∠(ج) .... (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق∠(د ج ب) > ق∠(د ب ج) ∴ د ب > د ج

نتيجة (١)

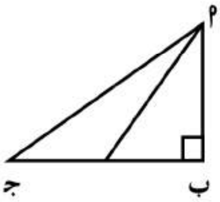
في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو اطول اضلاع المثلث

مثال (٢) في الشكل المقابل:

△ أ ب ج قائم الزاوية في ب ،

د ∈ $\overline{ب ج}$

اثبت أن أ ج > أ د



البرهان

في △ أ ب ج ∵ ق∠(ب) = ٩٠°

∴ ق∠(ب) > ق∠(ج) .... (١)

∵ ق∠(أ د ج) > ق∠(ب) .... (٢)

[لأنها خارجة عن △ أ ب د]

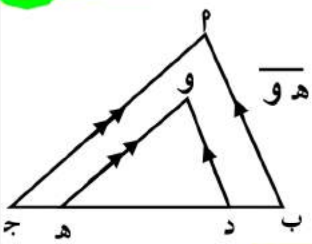
من ١ ، ٢ ينتج أن

ق∠(أ د ج) > ق∠(ج)

∴ أ ج > أ د

هـ . ط . ث

مثال (٣) في الشكل المقابل:



$\overline{أ ب}$ // $\overline{د و}$ ، $\overline{أ ج}$ // $\overline{هـ و}$

اذا كان أ ج > أ ب

برهن أن و هـ > و د

البرهان

في △ أ ب د ∵ أ ج > أ ب

∴ ق∠(ب) > ق∠(ج) .... (١)

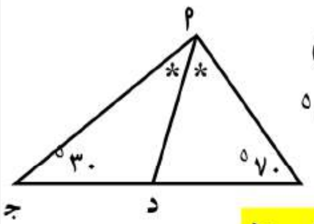
∵ $\overline{أ ب}$ // $\overline{د و}$ ∴ ق∠(و د هـ) = ق∠(ب) .... (٢)

∵ $\overline{أ ج}$ // $\overline{و هـ}$ ∴ ق∠(و هـ د) = ق∠(ج) .... (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق∠(و د هـ) > ق∠(و هـ د) ∴ و هـ > و د

مثال ( ) في الشكل المقابل:



$\overline{أ د}$ ينصف ∠(ب أ ج)

ق∠(ب) = ٧٠° ، ق∠(ج) = ٣٠°

اثبت أن أ د > ب د

البرهان

∵ مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق∠(ب أ ج) = ١٨٠° − [٧٠° + ٣٠°] = ٨٠°

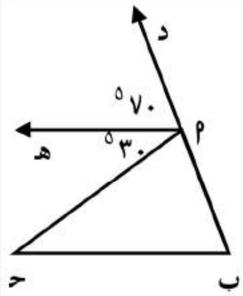
∵ $\overline{أ د}$ ينصف ∠(ب أ ج)

∴ ق∠(ب أ د) = ق∠(ج أ د) = ٤٠°

في △ أ ب د

∴ ق∠(ب) > ق∠(ب أ د) ∴ أ د > ب د هـ . ط . ث

مثال ( ) في الشكل المقابل:



اذا كان أ هـ // ب ج ،

ق∠(د أ هـ) = ٧٠° ،

ق∠(هـ أ ج) = ٣٠°

اثبت أن أ ج > أ ب

البرهان

∵ أ هـ // ب ج

∴ ق∠(ب) = ق∠(د أ هـ) = ٧٠° بالتناظر

، ق∠(ج) = ق∠(هـ أ ج) = ٣٠° بالتبادل

في △ أ ب ج

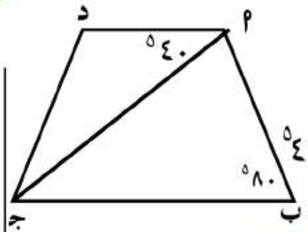
∵ ق∠(ب) > ق∠(ج)

∴ أ ج > أ ب

هـ . ط . ث

Mr.Morad

مثال (٦) في الشكل المقابل:



$\overline{أد} \parallel \overline{بج}$ ،

ق∠(أ ب ج) = ٨٠° ، ق∠(د أ ج) = ٤٠°

اثبت أن بج > أ ج

البرهـــان

∵ $\overline{أد} \parallel \overline{بج}$

∴ ق∠(أ ج ب) = ق∠(د أ ج) = ٤٠° بالتبادل

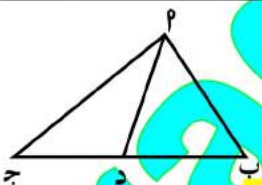
في △ أ ب ج ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق∠(ب أ ج) = ١٨٠° − [٨٠° + ٤٠°] = ٦٠°

∴ ق∠(أ ب ج) > ق∠(ب أ ج)

∴ أ ج > ب ج هـ . ط . ث

مثال (٧) في الشكل المقابل:



إذا كان أ ج > أ ب

اثبت أن أ ج > أ د

البرهـــان

∵ أ ج > أ ب ∴ ق∠(ب) > ق∠(ج) .... (١)

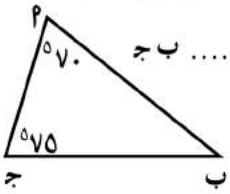
∵ ق∠(أ د ج) > ق∠(ب) .... (٢)

[لأنها خارجة عن △ أ ب د]

من ١ ، ٢ ينتج أن ق∠(أ د ج) > ق∠(ج)

∴ أ ج > أ د هـ . ط . ث

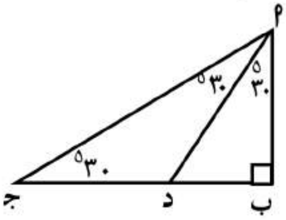
حاول بنفسك [١] من الشكل المقابل اكمل بوضع > أو <



(١) أ ب .... أ ج (٢) أ ب .... ب ج

(٣) أ ج .... ب ج

[٢] من الشكل المقابل اكمل بوضع > أو <



(١) أ ج .... ب ج

(٢) ب ج .... د ج

(٣) أ ج .... ب د

(٤) ج أ .... د ج

نتيجة (٢)

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم الى هذا المستقيم اصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة الى المستقيم المعلوم .

تعريف بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة الى المستقيم المعلوم .

تمارين على المقارنة بين أضلاع مثلث

[١] اكمل مما يأتي :

(١) إذا أختلف قياسا زاويتين من مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع.........................

(٢) اصغر زوايا المثلث قياسا يقابلها ....

(٣) اكبر اضلاع المثلث القائم الزاوية طولا هو ....

(٤) اقصر بعد بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم هو............

(٥) أ ب ج مثلث فيه ق∠(ج) = ١١٠° يكون اكبر أضلاعه طولا هو ....

(٦) أ ب ج مثلث فيه ق∠(أ) = ٥٠° ، ق∠(ب) = ٣٠° فان اصغر أضلاعه طولا هو ....

(٧) أ ب ج مثلث فيه ق∠(أ) = ق∠(ب) + ق∠(ج) يكون اكبر أضلاعه طولا هو ....

[٢] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(١) في △ أ ب ج اذا كان ق∠(ب) > ق∠(ج) فان ....

[أ ب > أ ج ، ب ج > أ ج ، أ ج > أ ب ، أ ب > ب ج]

(٢) في △ أ ب ج اذا كان ق∠(ب)=٩٠° فان ....

[أ ج > ج ب ، أ ب > أ ج ، ب ج > أ ج ، أ ب = أ ج]

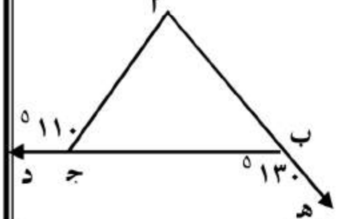
(٣) في △ أ ب ج اذا كان ق∠(ب)=٧٠° ، ق∠(أ)=٤٠° فان ....

[أ ب > أ ج ، أ ب < أ ج ، $\overline{أب} \perp \overline{أج}$ ، أ ب = أ ج]

[٣] △ س ص ع فيه ق∠(س) =٤٥° ، ق∠(ص) =٨٥° ، ق∠(ص) =٥٠° رتب اطوال اضلاع المثلث تصاعديا

[٤] △ أ ب ج فيه ق∠(أ) =٤٠° ، ق∠(ب) =٧٥° رتب اطوال اضلاع المثلث تنازليا

[٥] في الشكل المقابل:

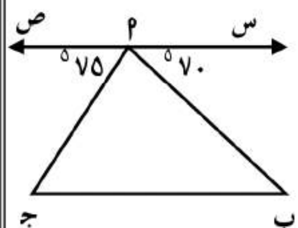


ق∠(هـ ب ج) =١١٠° ،

ق∠(أ ج د) =١٣٠°

رتب اطوال اضلاع المثلث تصاعديا

[٦] في الشكل المقابل:



$\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$

ق∠(ب أ س) =٧٠° ،

ق∠(ج أ ص) = ٧٥°

اثبت أن أ ج > أ ب

Mr.Morad

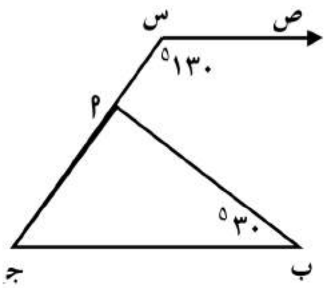
[٧] في الشكل المقابل:

س ص // ب جـ

ق∠(ص س جـ) = ١٣٠° ،

ق∠(ا ب جـ) = ٣٠°

اثبت أن جـ ب > ا ب



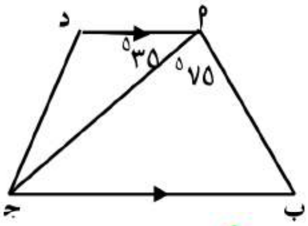
[٨] في الشكل المقابل:

ا د // ب جـ ،

ق∠(د ا جـ) = ٣٥° ،

ق∠(ب ا جـ) = ٧٥°

اثبت أن ا جـ > ا ب



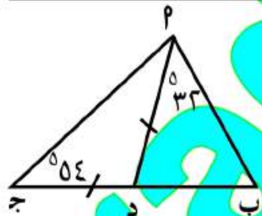
[٩] في الشكل المقابل:

ا د = د جـ ،

ق∠(ب ا د) = ٣٢° ،

ق∠(جـ) = ٥٤°

اثبت أن د جـ > د ب



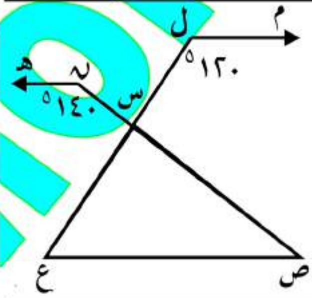
[١٠] في الشكل المقابل:

ل م // ن هـ // ص ع

ق∠(ل) = ١٢٠° ،

ق∠(ن) = ١٤٠°

اثبت أن س ص > س ع



[١١] في الشكل المقابل:

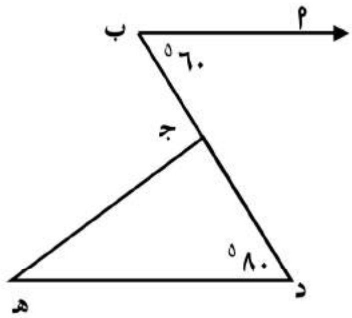
ا ب // د هـ ،

ق∠(ب) = ٦٠° ،

ق∠(د) = ٨٠°

رتب اطوال اضلاع المثلث

جـ د هـ تصاعديا



متباينة المثلث

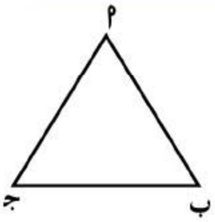
مجموع طولي أي ضلعين من مثلث أكبر من طول الضلع الاخر

أي أن في أي △ ا ب جـ

ا ب + ا جـ > ب جـ

ا ب + ب جـ > ا جـ

ا جـ + ب جـ > ا ب



مثال ١ بين أيا من الاطوال الاتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(١) ٢ ، ٥ ، ٣   (٢) ٣ ، ٧ ، ٥

(٣) ٧ ، ٣ ، ٢   (٤) ٤ ، ٩ ، ٦

الحـــل

(١) الاطوال ٢ ، ٥ ، ٣ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان مجموع ٢ + ٣ = ٥ وليس أكبر من ٥

(٢) الاطوال ٣ ، ٧ ، ٥ تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان مجموع أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

(٣) الاطوال ٧ ، ٣ ، ٢ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان ٣+٢ = ٥ وهو أصغر من الضلع الثالث وليس اكبر

(٤) الاطوال ٤ ، ٩ ، ٦ تصلح لان تكون أضلاع مثلث لان مجموع أي ضلعين اكبر من طول الضلع الثالث

مثال ٢ أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٤ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٢) الاطوال ٢ ، ٥ ، ٤ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٣) الاطوال ٣ ، ٦ ، ٢ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٤) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٥ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٥) الاطوال ٢ ، ٧ ، ٤ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٦) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٨ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٧) الاطوال ٥ ، ٦ ، ٤ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٨) الاطوال ٢ ، ٢ ، ٤ [تصلح ، لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

حقيقة هندسية

طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الاخرين وأكبر من الفرق بينهما

Mr Morad

③ أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) مجموع طولي أي ضلعين من مثلث .... طول الضلع الثالث
[أصغر من ، أكبر من ، يساوى ، نصف]

(٢) طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع الضلعين الاخرين
[> ، < ، = ، ضعف]

(٣) أى من الاضلاع الاتية لا تصلح لان تكون أضلاع مثلث
[٧ ، ٧ ، ٥ أو ٩ ، ٩ ، ٩ أو ٣ ، ٦ ، ١٢ أو ٣ ، ٤ ، ٥]

(٤) إذا كان طولا ضلعين ٧ ، ٤ فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون ....
[١ سم ، ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم]

(٥) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧سم فإن طول الضلع الثالث يساوى ....
[٧ سم ، ٣ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم]

(٦) مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ...
[١٦ سم أو ٢٠ سم ، ٢٤ سم أو ٣٠ سم]

اوجد الفترة التى ينتمى اليها الضلع الثالث اذا كان طولا ضلعين فى المثلث كالاتي :

(١) ٤ سم ، ٣ سم (٢) ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم
(٣) ٢ $\sqrt{٥}$ سم ، ٢ $\sqrt{٥}$ سم (٤) ٧,٥ سم ، ٧,٥ سم
(٥) ٦ سم ، ٥ سم (٦) ٥ سم ، ١٠سم

الحـــل

بفرض ان طول الضلع الثالث هو س سم

(١) ٤ − ٣ < س < ٤ + ٣ ∴ ١ < س < ٧
∴ س ∈]١ ، ٧[

(٢) ٧,٥ − ٤,٥ < س < ٧,٥ + ٤,٥
∴ ٣ < س < ١٢ ∴ س ∈]٣ ، ١٢[

(٣) ٢ $\sqrt{٥}$ − ٢ $\sqrt{٥}$ < س < ٢ $\sqrt{٥}$ + ٢ $\sqrt{٥}$
∴ ٠ < س < ٤ $\sqrt{٥}$ ∴ س ∈]٠ ، ٤ $\sqrt{٥}$[

(٤)

(٥)

(٦)

تمارين على متباينة المثلث

[١] هل يمكن رسم مثلث اطوال أضلاعه كما يلى مع ذكر السبب

(١) ٣ سم ، ٤ سم ، ٩ سم (٢) ٥ سم ، ٧ سم ، ٨ سم
(٣) ١٠ سم ، ٤ سم ، ٦ سم (٤) ١٣ سم ، ٨ سم ، ٦ سم
(٥) ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم (٦) ٩ سم ، ٩ سم ، ١٩ سم

[٢] اوجد الفترة التى ينتمى اليها الضلع الثالث اذا كان طولا ضلعين فى المثلث كالاتي :

(١) ٦ سم ، ٩ سم (٢) ٥,٧ سم ، ٧,٣ سم
(٣) ٣ سم ، ٣ سم (٤) ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم

[٣] أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) مجموع طولي أي ضلعين من مثلث .... طول الضلع الثالث
[> ، < ، = ، ضعف]

(٢) طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع الضلعين الاخرين
[> ، < ، = ، نصف]

(٣) أى من الاضلاع الاتية لا تصلح لان تكون أضلاع مثلث
[٧ ، ٢ ، ٤ أو ٩ ، ٥ ، ٤ أو ٣ ، ٦ ، ١٢ أو ٣ ، ٤ ، ٦]

(٤) إذا كان طولا ضلعين ٣ ، ٦ فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون ....
[٢ سم ، ٤ سم ، ٣ سم ، ١ سم]

(٥) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٢ سم ، ٨ سم فإن طول الضلع الثالث يساوى ....
[٨ سم ، ٣ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم]

(٦) مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٣ سم ، ٧ سم فإن محيطه = ...
[١٠ سم أو ٢١ سم ، ١٧ سم أو ١٣ سم]

(٧) فى △ ٩ ب جـ اذا كان ٩ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ٩ جـ = س سم فان س ∈ ....
( ]٣ ، ٥[،]٢ ، ٥[،]٥ ، ٨[،]٢ ، ٨[ )

(٨) اذا كان ١٠ سم ، ٥ سم ، طولا ضلعين فى مثلث فان طول الضلع الثالث ∈ ....
([٥ ، ١٥] ،]٥ ، ١٥[،]٥ ، ١٥] ، [٥ ، ١٥[ )

(٩) فى △ ٩ ب جـ يكون ٩ ب + ب جـ − ٩ جـ ....
[> صفر أو < صفر ، = صفر أو = محيط △ ٩ ب جـ]

عزيزي المعلم عزيزتي المعلمة

للأمانة العلمية والاخلاقية والدينية

يحذر تماما أي تعديل او تغيير بيانات المذكرة

اما اذا اردت الحصول على هذه المذكرة بجميع بياناتك الشخصية الخاصة بك من بدج خاص باسمك ورقم تليفونك واي بيانات انت تطلبها فعليك تحمل تكلفة المذكرة كتابة وطباعة وتعديل وهى

٢٥٠ ج

ومراسلتي على

٠١٢٢١٣٥٣١٣٩