جمهورية مصر العربية

وزارة التربية والتعليم

المركز القومي للامتحانات
والتقويم التربوي

دليل تقويم الطالب
فى مادة الرياضيات
التفاضل والتكامل

إجابة دليل تقويم الطالب
فى (التفاضل والتكامل)
منتدى توجيه الرياضيات

٢٠١٦/٢٠١٧م

تصميم
د/سهير عبدربه

النموذج الاسترشادي الأول

أجب عن الأسئلة التالية

٣ إذا كان $ص = هـ^{(١ + لو_{هـ} س)}$ فأثبت أن $\frac{دص}{دس}$ ثابتة لجميع قيم س الحقيقية الموجبة (٢)

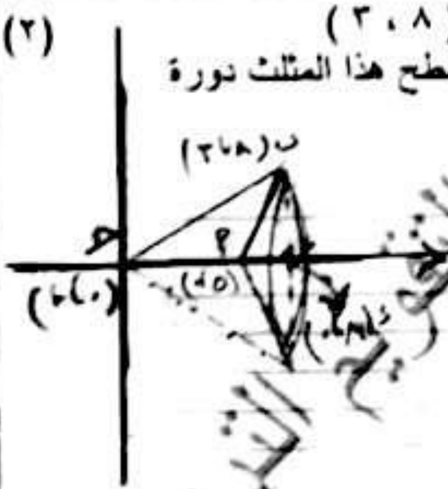
$$\frac{دص}{دس} = هـ^{١ + لو_{هـ} س} \times \left(صفر + \frac{1}{س}\right)$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = هـ \times هـ^{لو_{هـ} س} \times \frac{1}{س}$$

$$\because هـ^{لو_{هـ} س} = س$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = هـ \times س \times \frac{1}{س} = هـ \quad ثابت$$

٤ أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٨ ، ٣) أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشئ من دوران سطح هذا المثلث دورة واحدة كاملة حول محور السينات (٢)



معادلة جـ ب: $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{٣}{٨}$

$\therefore ٨ص = ٣س \Leftarrow ص = \frac{٣س}{٨}$

معادلة أ ب: $\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٥} = \frac{٣}{٣} = ١$

$ص = س - ٥$

$$ح = \pi \left| \int (ص_1^2 - ص_2^2)\, دس \right|$$

$$ح = \pi \left| \int_{٠}^{٨} \left(\frac{٣س}{٨}\right)^2 دس - \pi \int_{٥}^{٨} (س - ٥)^2 دس \right|$$

$$ح = \pi \left| \left[\frac{٣س^3}{٦٤}\right]_{٠}^{٨} - \frac{1}{3}\left[(س-٥)^3\right]_{٥}^{٨} \right| = \pi \left| ٢٤ - \frac{٢٧}{٣} \right|$$

$$ح = \pi(٢٤ - ٩) = ١٥\pi \quad وحدة حجم$$

م يحيى/ محمد لطفي

(١)

إذا كانت ص = π ظتا (π س) ، فإن $\frac{دص}{دس}$ تساوي

أ) π + π قتا² (π س)

ب) π − π قتا² (π س)

ج) π قتا² (π س)

د) − π² قتا² (π س)

$\frac{دص}{دس} = \pi \times -$ قتا² $(\pi س) \times \pi$

$\frac{دص}{دس} = -\pi^2$ قتا² $(\pi س)$

د

(٢)

أسطوانة دائرية قائمة من المعدن فإذا علم أن نصف قطر قاعدتها ٥ سنتيمتر ، ويزداد بمعدل ٠,٢ سنتيمتر / ثانية وارتفاعها ١٠ سنتيمتر وينقص بمعدل ٠,٣ سنتيمتر / ثانية ،أوجد معدل زيادة حجم الأسطوانة ، متى يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن ؟

نق = ٥ سم ، $\frac{دنق}{دن}$ = ٠,٢ سم/ث

ع = ١٠ سم ، $\frac{دع}{دن}$ = −٠,٣ سم/ث

ح = π نق² ع

$\frac{دح}{دن} = \pi$ [نق² × $\frac{دع}{دن}$ + ع × ٢ نق × $\frac{دنق}{دن}$]

$\frac{دح}{دن} = \pi$ [٢٥ × −٠,٣ + ١٠ × ٢ × ٥ × $\frac{٢}{١٠}$]

$\frac{دح}{دن} = \pi$ [−٧,٥ + ٢٠] = ١٢,٥ π سم³/ث

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

ح = π نق² ع = π (٥ + $\frac{٢}{١٠}$ ن)² (١٠ − $\frac{٣}{١٠}$ ن)

ح = π (−٣٦ن³ − ٤٠٠ن² + ١٢٥٠٠) ← بوضع ح' = صفر

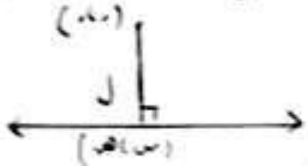
إما ن = $\frac{١٢٥}{٩}$ أو ن = −٢٥ مرفوض

∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما ن = $\frac{١٢٥}{٩}$ ≃ ١٣,٩

م / محمد عثماني

٧) الإحداثي السيني لأقرب نقطة على المستقيم ٤ س + ٣ ص = ٧ من نقطة الأصل يساوي (١)

أ) صفر
ب) ١
ج) ١٫١٢
د) ١٫٩٢



ل = $\sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٠)^2}$

ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

∵ ص = $\frac{٧ - ٤س}{٣}$

∴ ل = $\sqrt{س^2 + \left(\frac{٧-٤س}{٣}\right)^2} = \sqrt{\frac{٢٥س^2 - ٥٦س + ٤٩}{٩}}$

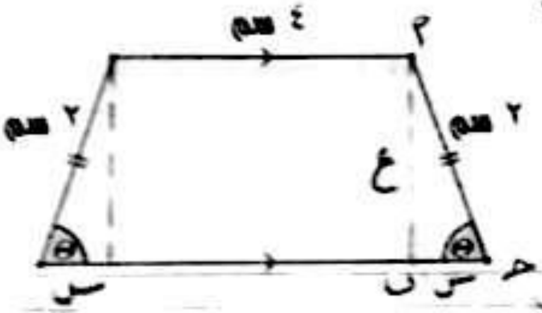
ل = $\frac{١}{٣}\sqrt{٢٥س^2 - ٥٦س + ٤٩}$

بوضع ل' = صفر

٥٠س − ٥٦ = ٠

ل' = $\frac{١}{٣} \times \frac{٥٠س - ٥٦}{٢\sqrt{٢٥س^2 - ٥٦س + ٤٩}}$ ⟸ ٥٠س = ٥٦ ∴ س = ١٫١٢

٨) أوجد قياس θ التي تجعل مساحة شبه المنحرف متساوي الساقين الموضح بالشكل أكبر ما يمكن (٢)



ع = ٢ جا θ

س = ٢ جتا θ

مساحة شبه المنحرف = م

م = $\left[\frac{٤ + ٤ + ٢س}{٢}\right] \times$ ع

م = (٤ + س) × ع

م = (٤ + ٢ جتا θ) × ٢ جا θ

م = ٨ جا θ + ٤ جا θ جتا θ

= ٨ جا θ + ٢ جا ٢θ

م' = ٨ جتا θ + ٤ (− جتا ٢θ) = ٨ جتا θ − ٤ جتا ٢θ

م' = ٨ جتا θ − ٤ (٢ جتا² θ − ١) = ٨ جتا θ − ٨ جتا² θ + ٤

عندما م' = ٠ ∴ (٨ جتا² θ − ٨ جتا θ − ٤) = ٠ ÷ ٤

٢ جتا² θ − ٢ جتا θ − ١ = ٠ ⟸ جتا θ = $\frac{١ + \sqrt{٣}}{٢}$ مرفوض

جتا θ = $\frac{١ - \sqrt{٣}}{٢}$ =

جتا θ = −٠٫٣٦ ⟸ ق(θ) = ١٨٠ − ٦٨ ٤٢ = ١١١ ٤٢ ٦٨

مع تحياتي محمد نعمان

(١)

٩. $\lim_{س \to ٠} \frac{لو_ه(١+س)}{٣^س - ١}$

① $لو_ه ٣$ ② $ه^٣$ ③ $\frac{١}{لو_ه ٣}$ ④ $\frac{١}{ه^٣}$

نقسم كل من البسط والمقام ÷ س

$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{لو_ه(١+س)}{س}}{\frac{٣^س - ١}{س}} = ١ ÷ لو_ه ٣ = \frac{١}{لو_ه ٣}$ ج

(٢)

١٠. أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيات

ص = س^٢ ، ص = $\frac{١}{س^٢}$ ، س = ٠ ، س = ٣ ، ص = ٠

$م = \left| \int_٠^٣ (ص_٢ - ص_١) ء س \right|$

$م = \left| \int_٠^٣ (\frac{١}{س^٢} - س^٣) ء س \right|$

$م = \left| \left[\frac{-١}{٢ س^٢} - \frac{س^٤}{٤} \right]_٠^٣ \right| = \left| \frac{-١}{١٨} - \frac{٨١}{٤} \right|$

$م = \left| \frac{-٢ - ٧٢٩}{٣٦} \right| = \left| \frac{-٧٣١}{٣٦} \right| = \frac{٧٣١}{٣٦}$ وحدة مربعة

م عن / محمد ليمان

(١)

$\int_{\cdot}^{١٠\pi} |جا س| \, ء س = ١٠ \int_{\cdot}^{\pi} |جا س| \, ء س$

$= ١٠ \left| [-جا س]_{\cdot}^{\pi} \right| = ١٠ |-جا \pi + جا ٠|$

$= ١٠ |١ + ١| = ١٠ \times ٢ = ٢٠$ (جـ)

أ) ١٠

ب) ١٠π

جـ) ٢٠

د) ٢π

(٢) إذا كان س = ن ٢ + ٣ ، ص = ن ٣ + ٢ ، فأوجد $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ عندما ن = ٢

$\frac{ء س}{ء ن} = ٢ ن$ ، $\frac{ء ص}{ء ن} = ٣ ن^٢$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \div \frac{ء س}{ء ن}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣ ن^٢}{٢ ن} = \frac{٣}{٢} ن$

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{ء ن}{ء س} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢ ن}$

عندما ن = ٢

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٨}$

مع تمنياتي أحمد إبراهيم

١٣) إذا كانت ص = جتا س ، فإن ص$^{(١٠٠٠)}$ تساوى (١)

- (أ) جتا س ●
- (ب) - جتا س
- (ج) جا س
- (د) - جا س

ص = جتا س ⟸ ص$^{(١٠٠٠)}$ = جتا ١٠٠٠ س

ص$^{(١٠٠٠)}$ = جتا (٢ × ٣٦٠ + ٢٨٠) س

ص$^{(١٠٠٠)}$ = جتا (٢٨٠ س) ⟸ تقع في الربع الرابع

ص$^{(١٠٠٠)}$ = جتا س (أ)

١٤) أكبر مساحة لمستطيل مرسوم داخل نصف الدائرة ص = $\sqrt{٤ - س^٢}$ (١)

- (أ) ١٠٫٤
- (ب) $\sqrt{٢}$
- (ج) $٢\sqrt{٢}$
- (د) ٤ ●

نفرض أ = طول المستطيل = ٢س ، عرضه = ص

∴ مساحة المستطيل = م

م = ٢س × ص

م = ٢س $\sqrt{٤ - س^٢}$

م = $\sqrt{١٦س^٢ - ٤س^٤}$

∴ م' = $\frac{١ \times ٣٢س - ١٦س^٣}{٢\sqrt{١٦س^٢ - ٤س^٤}}$ بوضع م' = صفر

∴ ٣٢س = ١٦س^٣ ÷ ١٦س

٢ = س^٢

∴ س = ± $\sqrt{٢}$ ∴ بالتعويض ⟸ ص = $\sqrt{٤ - ٢}$ = $\sqrt{٢}$

∴ م = $\sqrt{١٦ \times ٢ - ٤ \times ٤}$ = $\sqrt{٣٢ - ١٦}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ (د)

مع تمنياتي / محمد نعمان

١٥. إذا كانت د : [٠ ، π] ← ح ، حيث د (س) = جتا س + $\frac{س}{٢}$ (٢)

فعين فترات التزايد والتناقص للدالة د

وكذلك عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب للدالة د

على الفترة المعطاة

د َ(س) = − جا س + $\frac{١}{٢}$ ⇐ د ً(س) = − جتا س

بوضع د َ(س) = صفر ⇐ جا س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ س = ٣٠° أو ١٥٠°

بوضع د ً(س) = صفر ⇐ جتا س = ٠ ⇐ س = ٩٠°

س	٠		٣٠		٩٠		١٥٠		١٨٠
إشارة د َ(س)		+		−		−		+	
سلوك د (س)									
إشارة د ً(س)									
التحدب									
ص									

∴ الدالة تزايدية [٠، ٣٠[∪]١٥٠، ١٨٠]

ومتناقصة]٣٠، ١٥٠[، الانقلاب (٩٠، ٤٥)

١٦. إذا كان حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنى ص = س² ، والمستقيم ص = ك س حول محور الصادات دورة واحدة كاملة يساوي $\frac{٨\pi}{٢١}$ وحدة مكعبة فاحسب قيمة ك . (٢)

نحل المعادلتين ل س = س² ⇐ س = ± √ك

ح = $\pi \left| \int_{-\sqrt{ك}}^{\sqrt{ك}} (ل س)^2 - (س^2)^2 \right|$ ∵ الدالة زوجية

= $2\pi \int_{0}^{\sqrt{ك}}$ = $\left| 2\pi \int_{0}^{\sqrt{ك}} (ل^2 س^2 - س^4) ء س \right|$

ح = $2\pi \left| \left[\frac{ل^2 س^3}{٣} - \frac{س^7}{٧} \right]_{0}^{\sqrt{ك}} \right|$ = $2\pi \left| \frac{ل^2 \sqrt{ك}^3}{٣} - \frac{ل^4 \sqrt{ك}}{٧} \right|$

$\frac{٨\pi}{٢١}$ = $2\pi \left(\frac{٧ ل^4 \sqrt{ك} - ٣ ل^4 \sqrt{ك}}{٢١} \right)$ = $\frac{2\pi \times ٤ ل^4 \sqrt{ك}}{٢١}$

١ = ل² × ل⁴ ⇐ ل⁴ = (١)⁴ ⇐ ل = ١

مع تحياتي
محمد نعمان

(١)

١٧ نهـــا (١ + جا س)^(١/س) عندما س ← ٠

أ) صفر
ب) ١
ج) ه ●
د) ١/ه

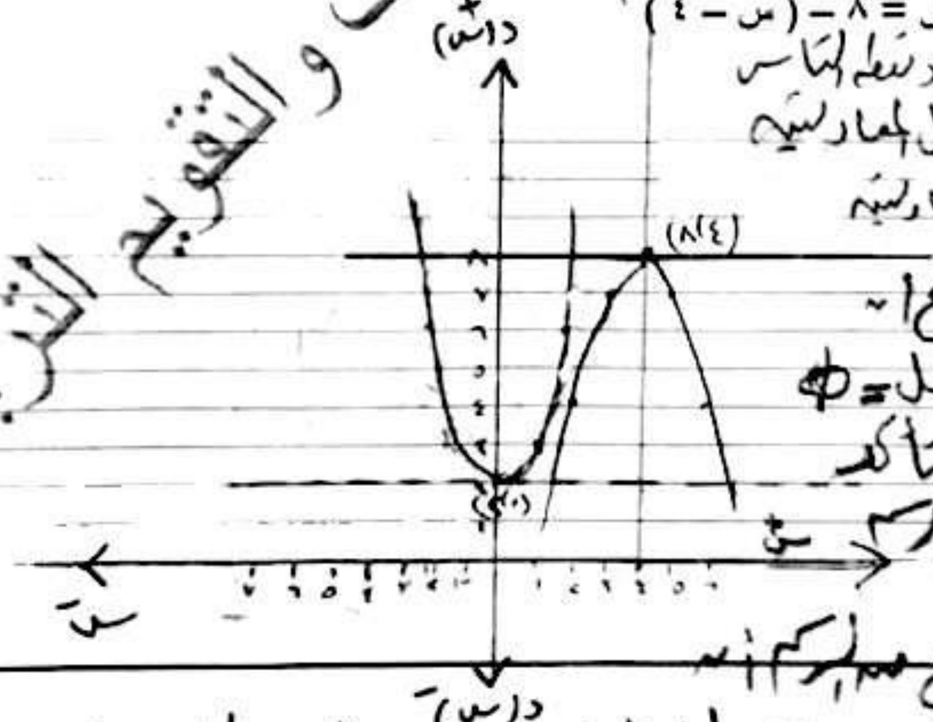
= نها (س ← ٠) [(١ + جا س)^(١/جا س)]^(جا س / س)

= (ه)^(جا س / س) = ه^١ = ه

(٢)

١٨. أوجد معادلة المماس المشترك للمنحنيين ص = ٢ + س^٢ ، ص = ٨ − (س − ٤)^٢

لا يجاد نقط التماس نحل المعادلتين ونحل المعادلتين حيث ينتج أ = معدومة الحل = ∅ لذا للتأكد نحاول الرسم وواضح من الرسم أن



المنحنيات لا يتقاطعا (فيوجد خطأ بالمطلوب) مع تحياتي / محمد الحلبي

(٢)

١٩. إذا كانت د : ح ← ح ، حيث د (س) = س $هـ^{-س^2}$

عين النقط الحرجة للدالة د

ثم بين أي من هذه النقط يكون نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية

$ص' = س \times -٢س\, هـ^{-س^2} + هـ^{-س^2} \times ١$

$ص' = هـ^{-س^2} [-٢س^2 + ١]$

بوضع ص' = صفر

$هـ^{-س^2} [-٢س^2 + ١] = ٠ \Leftarrow س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$- \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -$

عند $س = \frac{1}{\sqrt{2}}$ يوجد عظمى محلية $= \frac{1}{\sqrt{2هـ}}$

عند $س = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ يوجد صغرى محلية $= \frac{-1}{\sqrt{2هـ}}$

(١)

٢٠. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{٤س + جاس}{س^2 + جتاس} \, ءس$

(أ) $-\pi$
(ب) صفر
(جـ) π
(د) ٢π

دالة البسط = ٤س + جاس فردية

دالة المقام $س^2$ + جاس

= زوجي + فردي = فردي

$\therefore د(س) = \frac{فردي}{فردي}$ = دالة زوجية

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{٤س + جاس}{س^2 + جاس} \, ءس$ = صفر لأن الدالة فردية

مع تحياتي/ محمد نعمان

نموذج للاسترشاد الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية:

[illegible]

[illegible]

٣. إذا كان د : $\left[\frac{1}{هـ} ، هـ\right]$ ← ح وكان د(س) = س − لوهـ س (٢)

ابحث فترات التزايد والتناقص ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة.

الحل: د(س) = س − لوهـ س ⇐ د′(س) = ١ − $\frac{1}{س}$ بوضع د′(س) = ٠

∴ س = ١

س	$\frac{1}{هـ}$	١	هـ
إشارة د′(س)	−		+
سلوك د(س)	↘		↗

[$\frac{1}{هـ}$ ، ١] الدالة متناقصة

[١ ، هـ] الدالة متزايدة

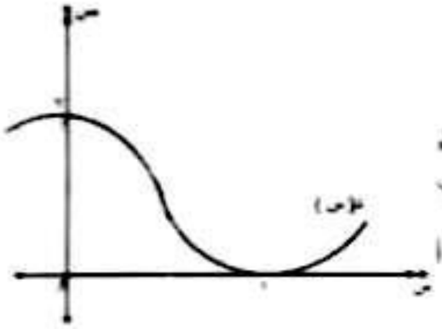
د($\frac{1}{هـ}$) = ١ + $\frac{1}{هـ}$ عظمى مطلقة

د(١) = ١ صغرى مطلقة

د(هـ) = هـ − ١

٤. في الشكل المقابل أوجد (٢)

$\int_{0}^{1} [د(س)]^{2} \, د'(س) \, ءس$



الحل:

$\int_{0}^{1} [د(س)]^{2} \, د'(س) \, ءس$

$= \left[\frac{[د(س)]^{3}}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}\left[[د(س)]^{3}\right]_{0}^{1}$

عندما س = ٠ فإن د(س) = ٢

عندما س = ١ فإن د(س) = ٠

$\frac{1}{3}\left[(د(1))^{3} - (د(0))^{2}\right]$

$\frac{1}{3}\left[(0)^{2} - (2)^{2}\right] = \frac{1}{3}(0-8) = \frac{-8}{3}$

(١)

$\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٥}{س + ٢}\right)^{س} = \dots\dots\dots$

① هـ ② $هـ^{٢}$ ③ $\frac{١}{هـ}$ ④ $\frac{٢}{هـ}$

$\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س+٣+٢}{س+٢}\right)^{س} = \lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٢}{س+٣}\right)^{س}$

بوضع $\frac{٢}{س+٣} = ص \Leftarrow س = \frac{٢-٣ص}{ص}$ ، عندما س ← ∞ فإن ص ← ٠

$\therefore \lim\limits_{ص \to ٠} [١ + ص]^{\frac{٢-٣ص}{ص}} = \lim\limits_{ص \to ٠} \left[(١+ص)^{\frac{١}{ص}}\right]^{٢} \times \lim\limits_{ص \to ٠} (١+ص)^{-٣}$

$هـ^{٢} \times ١ = هـ^{٢}$ (ب)

(٢)

١. باستخدام طرق التكامل اوجد

$\int_{٠}^{لو_{هـ} ٣} (هـ^{٢س} + هـ^{س}) \, ء س$

الحل:

$\left[\frac{١}{٢} هـ^{٢س} + هـ^{س}\right]_{٠}^{لو_{هـ} ٣}$

$= \left[\frac{١}{٢} هـ^{٢ لو_{هـ} ٣} + هـ^{لو_{هـ} ٣}\right] - \left[\frac{١}{٢} + ١\right]$

$= ٣ \left[\frac{١}{٢} \times ٣ + ١\right] - \frac{٣}{٢}$

$= ٣ \left(\frac{٥}{٢}\right) - \frac{٣}{٢} = \frac{١٢}{٢}$

م/ محمد نعمان

٧. (١) قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني ص = لوهـ $\left(\frac{هـ^{٢س}}{س^{٣}+٢}\right)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ يساوي ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$
(ب) $\frac{\pi}{٣}$
(جـ) $\frac{\pi}{٦}$
(د) $\frac{\pi}{٤}$

ص = لوهـ هـ^٢س − لوهـ (س^٣ + ٢)

ص = ٢س لوهـ هـ − لوهـ (س^٣ + ٢)

ص = ٢س − لوهـ (س^٣ + ٢)

$\frac{دص}{دس}$ = م = طا هـ = ٢ − $\frac{١ × ٣س^٢}{س^٣ + ٢}$ عندما س = ١

طا هـ = ٢ − $\frac{٣}{٣}$ = ١ ∴ هـ = $\frac{\pi}{٤}$ (د)

(٢) اوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ٢ + لوهـ ص . لوهـ س = س^٢ + ص عند النقطة التي احداثيها السيني = ١

الحل: عندما س = ١ ⟸ ٢ + لوهـ ص (صفر) = ١ + ص
ص = ١
∴ النقطة (١، ١)

الميل ⟸ صفر + لوهـ ص × $\frac{١}{س}$ + لوهـ س × $\frac{ص'}{ص}$ = ٢س + ص'

عند النقطة (١، ١) بالتعويض ٢(١) + ص' = ٠

∴ م = −٢ ∴ $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{٢}$

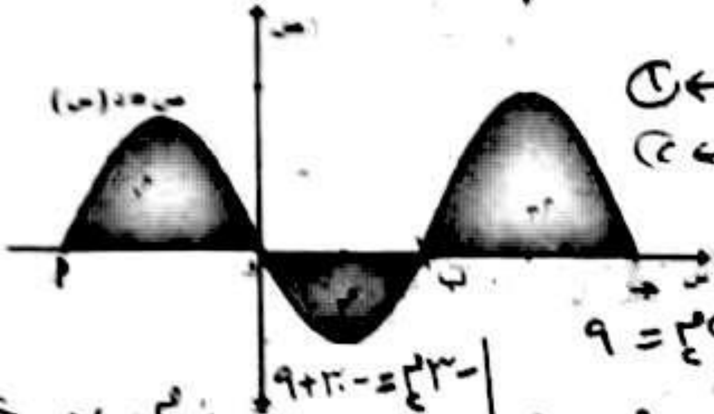
معادلة المماس ص − ١ = −٢ (س − ١)

معادلة العمودي ص − ١ = $\frac{١}{٢}$ (س − ١)

(١)

٩. في الشكل المقابل اذا كان $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = ٧$ ، $\int_{و}^{جـ} د(س)\,ءس = ٢$

وكان م١ + م٢ + م٣ = ٣٠ وحدة مربعة فإن م٢ = ... وحده مربعة



(أ) ٢١
(ب) ٩
(جـ) ١٠
(د) ٧

الحل

$م_١ - م_٢ = ٧ \leftarrow (١)$

$م_٣ - م_٢ = ٢ \leftarrow (٢)$

$(١) + (٢)$

$\therefore \underbrace{م_١ + م_٣}_{} - ٢م_٢ = ٩$

$٣٠ - م_٢ - ٢م_٢ = ٩$

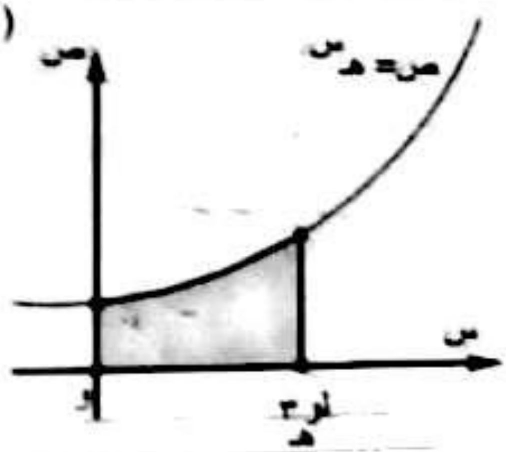
$-٣م_٢ = -٣٠ + ٩$

$-٣م_٢ = -٢١$

$\therefore م_٢ = ٧$ (د)

(٢)

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات



$ح = \pi \int_{٠}^{لو_{هـ}٣} ص^٢\,ءس$

$ح = \pi \int_{٠}^{لو_{هـ}٣} (هـ^{س})^٢\,ءس$

الحل :

$ح = \frac{١}{٢}\pi \left[هـ^{٢س} \right]_{٠}^{لو_{هـ}٣}$

$ح = \frac{١}{٢}\pi \left[هـ^{٢لو_{هـ}٣} - هـ^{صفر} \right]$

$ح = \frac{١}{٢}\pi \left[هـ^{لو_{هـ}٩} - ١ \right]$ وحدة حجم

$= \frac{١}{٢}\pi \left[٩ - ١ \right] = \frac{٨\pi}{٢} = ٤\pi$ وحدة حجم

١١. (١)

اذا كان د (س) = (جا س)^س فإن د' (π/٢) = ...

أ صفر

ب ١

جـ ٢

د π/٢

بأخذ لو_هـ للطرفين

لو_هـ ص = س لو_هـ جا س

$\frac{ص'}{ص}$ = س × $\frac{جتا س}{جا س}$ + لو_هـ جا س × ١

$\frac{ص'}{ص}$ = $\frac{\pi}{2}\left(\frac{صفر}{١}\right)$ + لو_هـ ١ ⇐ $\frac{ص'}{ص}$ = صفر

ص' = صفر (أ)

١٢. (٢)

أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $\frac{لو_هـ س}{س}$ والتي عندها المماس لهذا المنحنى يوازي محور السينات .

الحل :

ص' = $\frac{س × \frac{١}{س} - لو_هـ س × ١}{س^٢}$

ص' = $\frac{١ - لو_هـ س}{س^٢}$ ∵ المماس // محور السينات ⇐ ص' = صفر

$\frac{١ - لو_هـ س}{س^٢}$ = صفر ⇐ لو_هـ س = ١

س = هـ^١ ⇐ س = هـ بالتعويض في معادلة المنحنى

ص = $\frac{لو_هـ هـ}{هـ}$ = $\frac{١}{هـ}$

∴ النقطة (هـ ، $\frac{١}{هـ}$)

(١) ١٣

$\int_{-1}^{1} \frac{س^٣}{س^٤ + جتاس} \, ء(س) = \dots\dots$

البسط = س٣ دالة فردية

المقام = س٤ + جتاس = زوجية + زوجية = دالة زوجية

$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{س^٣}{س^٤ + جتاس} \, ء(س) = \int_{-1}^{1} \frac{فردية}{زوجية} = دالة فردية$

$\int_{-1}^{1} \frac{س^٣}{س^٤ + جتاس} = صفر$ (ب)

(أ) -٢

(ب) صفر

(ج) ١

(د) ٤

(١) ١٤

اذا كان د (س) = $هـ^{٨س - س^٢}$ فإن الدالة تزايدية على الفترة ....

$دَ(س) = (هـ^{٨س - س^٢})(٨ - ٢س)$

بوضع دَ (س) = صفر

$(هـ^{٨س - س^٢})(٨ - ٢س) = ٠$

$\Leftarrow ٨ - ٢س = صفر \Leftarrow س = ٤$

تزايدية]-∞ ، ٤[(د)

+ + + ٤ - - -

(أ)]-∞ ، صفر[

(ب)]صفر ، ∞[

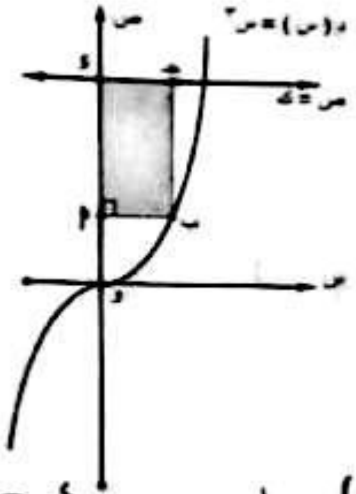
(ج)]٤ ، ∞[

(د)]-∞ ، ٤[

م يحيى / محمد نعمان

(٢)

في الشكل المقابل :
اذا كانت اكبر مساحة للمستطيل ا ب جـ ء يساوي ٤٨ وحدة مربعة اوجد قيمة ك

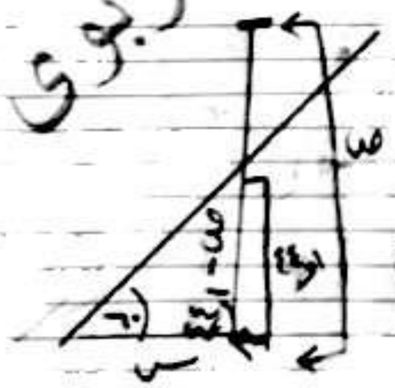


معادلة المنحنى المرسوم ص = س٣
نفرض أن ب (س، ص) ⇐ ب (س، س٣)
احداثي ا (٠، س٣)
احداثي ء (٠، ك)
∵ ا ء = و ء - و ا
ا ء = ك - س٣
ا ب = س
∴ مساحة المستطيل = م = س(ك - س٣) = ك س - س٤ ①
بالتفريق ① ∴ م' = ك - ٤ س٣ ، بوضع م' = صفر ⇐ ك = ٤ س٣ ②
بالتعويض في ① ٤٨ = س × ٤ س٣ - س٤
٤٨ = ٣ س٤ ⇐ س٤ = ١٦ ⇐ س = ٢±
بالتعويض في ② ك = ٤(٢)٣ = ٤ × ٨ = ٣٢

(٢)

كرة تسقط من ارتفاع ٤٤,١ متر وكانت اشعة الشمس تميل علي الافقي بزاوية قياسها ٦٠°
أوجد المعدل الزمني الذي يتحرك به ظل الكرة علي الارض في اللحظة التي تلمس فيها الكرة سطح الارض .

الحل : ظا ٦٠ = $\frac{٤٤,١ - ص}{س}$



$\sqrt{٣}$ س = ٤٤,١ - ص
$\sqrt{٣} \times \frac{ءس}{ءن} = - \frac{ءص}{ءن}$ ①
ع. = ٠ ، ء = ٩,٨ ، ف = ٤٤,١ م
ع٢ = ع.٢ + ٢ ء ف = ٢ × ٩,٨ × ٤٤,١
ع = $\sqrt{٢ \times ٩,٨ \times ٤٤,١}$ = ٢٩,٤ ⇐ ع = $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢٩,٤ ②

بالتعويض من ② في ① $\sqrt{٣}$ × ٢٩,٤ = $-\frac{ءص}{ءن}$ ⇐ $\frac{ءص}{ءن}$ = - ٢٩,٤ $\sqrt{٣}$

(١)

١٧. اذا كان ص = ٣^ع ، ع = جا ن ، ن = لوهـ س وكان $\frac{دص}{دس}$ = د'(س)

فإن د'(١) = ...

(أ) ٢ لوهـ ٣

(ب) لوهـ ٣

(ج) − ٢ لوهـ ٣

(د) ١

ص = $٣^{ع}$ = $٣^{جا ن}$ = $٣^{جا لوهـ س}$

ص' = جتا لوهـ س × $\frac{1}{س}$ × $٣^{جا لوهـ س}$ × لوهـ ٣

د'(١) = جتا(لو١) × $\frac{1}{1}$ × $٣^{جا لو١}$ × لوهـ ٣

د'(١) = جتا صفر × ١ × $٣^{جا صفر}$ × لوهـ ٣

∴ د'(١) = ١ × ١ × $٣^{٠}$ × ١ لوهـ ٣

∴ د'(١) = لوهـ ٣ (ب)

(٢)

١٨. ارسم الشكل العام للمنحنى د(س) = ٢ س^٣ − ٩ س^٢ + ١٢ س − ٢ مبينا عليه القيم القصوى المحلية ونقط الانقلاب ان وجدت

الحل:

د'(س) = ٦ س^٢ − ١٨ س + ١٢

د''(س) = ١٢ س − ١٨ ⇐ د''(س) = صفر ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$

بوضع د'(س) = ٠ ⇐ س^٢ − ٣ س + ٢ = ٠

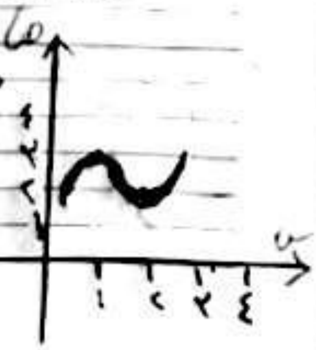
س = ٢ ، س = ١ ⇐ (١ ، ٣) عظمى ، (٢ ، ٢) صغرى

($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) انقلاب

تزايد]−∞ ، ١[،]٢ ، ∞[

تناقص]١ ، ٢[

س	−∞		١		١,٥		٢		∞
د'(س)		+		−		−		+	
سلوك د(س)		↗		↘		↘		↗	
د''(س)		−		−		+		+	
التحدب		∩		∩		∪		∪	
ص			٣		٢,٥		٢		
			ع ص		انقلاب		ص ص		



مع تحياتي / محمد نعمان

(٢)

١٩. أوجد ميل المماس لمنحني الدالة د : د (س) = لوهـ س² - (لوهـ س)² عند س = هـ .

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^2} - ٢(لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$$

عندما س = هـ

$$م = \frac{٢هـ}{هـ^2} - ٢(لو_{هـ} هـ) \times \frac{١}{هـ}$$

$$م = \frac{٢}{هـ} - ٢(١) \times \frac{١}{هـ} = \frac{٢}{هـ} - \frac{٢}{هـ} = صفر$$

(١)

. اذا كان المماس لمنحني الدالة د (س) = لو₂ (س² - ٤ س + ٨) يوازي محور السينات عند س = ك فإن د (ك) = ...

(أ) ٣
(ب) -١
(ج) ٢
(د) ٤

$$د'(س) = \frac{٢س - ٤}{(س^2 - ٤س + ٨) لو_{هـ} ٢}$$

بوضع د'(س) = ٠

⇐ ٢س - ٤ = ٠

س = ٢ عندما س = ك

م س = ك = ٢ ⇐ د(ك) = لو₂ (٤ - ٨ + ٨)

$$د(ك) = لو_2 ٤ = لو_2 ٢^2 = ٢ لو_2 ٢ = ٢ \times ١ = ٢$$ (ج)

النموذج الاسترشادي الثالث

(١) إذا كانت ص = هـ$^{-٢س}$ فإن $\frac{د^٧ ص}{د س^٧}$ = ...

(أ) -١٤ هـ$^{-٢س}$
(ب) ١٢٨ هـ$^{-٢س}$
(ج) -١٢٨ هـ$^{-٢س}$
(د) -١٢٨ هـ^{٢س}

ص' = (-٢) هـ$^{-٢س}$

ص'' = $(-٢)^٢$ هـ$^{-٢س}$

ص''' = $(-٢)^٣$ هـ$^{-٢س}$

$\frac{د^٧ ص}{د س^٧} = (-٢)^٧$ هـ$^{-٢س}$ = -١٢٨ هـ$^{-٢س}$ (ج)

(١) نهـا$_{س \to ٠}$ لو$_هـ$ $(١ + ٥س)^{-\frac{٢}{س}}$ =

(أ) هـ$^{-١٠}$
(ب) -١٠ هـ
(ج) -١٠ لو هـ
(د) -١٠

= نها$_{س \to ٠}$ لو$_هـ$ $\left[(١+٥س)^{\frac{١}{س}}\right]^{-٢}$

= نها$_{س \to ٠}$ لو$_هـ$ $\left[(١+٥س)^{\frac{١}{٥س}}\right]^{-١٠}$

= لو$_هـ$ هـ$^{-١٠}$ = -١٠ (د)

(١) $\int \frac{س}{س^٢ + ١}$ دس = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ لو$_هـ$ $(س^٢ + ١)$ + ث
(ب) ٢ لو$_هـ$ $(س^٢ + ١)$ + ث
(ج) $\frac{١}{٢}$ س^٢ + لو$_هـ$ س + ث
(د) لو$_هـ$ $(س^٢ + ١)$ + ث

$\int \frac{س}{س^٢+١}$ دس = $\frac{١}{٢} \int \frac{٢س}{س^٢+١}$ دس = $\frac{١}{٢}$ لو$_هـ$ $(س^٢+١)$ + ث (أ)

(١) إذا كانت ص = لوهـ (٩ + س²)، ع = س² + ٣ فإن $\frac{د^2ص}{دع^2}$ = ...

(أ) $\frac{1}{9+س^2}$

(ب) $\frac{1}{(9+س^2)^2}$

(جـ) $\frac{-3س^2}{(9+س^2)^2}$

(د) $\frac{-1}{(9+س^2)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{2س}{9+س^2}$ ، $\frac{دع}{دس} = 2س$

$\frac{دص}{دع} = \frac{2س}{9+س^2} \times \frac{1}{2س} = \frac{1}{9+س^2}$

$\frac{د^2ص}{دع^2} = \frac{-1 \times 2س}{(9+س^2)^2} \times \frac{دس}{دع}$

$\frac{د^2ص}{دع^2} = \frac{-2س}{(9+س^2)^2} \times \frac{1}{2س} = \frac{-1}{(9+س^2)^2}$ (د)

(١) ∫ (قتا⁴ س − قتا² س ظتا² س) د س = ...

(أ) $\frac{قتا^5 س}{5} - \frac{ظتا^3 س}{3}$ + ث

(ب) − ظا س + ث

(جـ) − ظتا س + ث

(د) $\frac{1}{3}$ قتا³ س + ث

∫ قتا² س (قتا² س − ظتا² س) د س

= ∫ قتا² س × ١ × د س = ∫ قتا² س د س

= − ظتا س + ث (جـ)

(١) إذا كان س³ + ٣ س² ص + ٣ س ص² + ص³ = ١٥ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

(أ) ١

(ب) −١

(جـ) ٣

(د) −٣

٣س² + ٣س² صَ + ٦س ص + ٣ص² + ٦س ص صَ + ٣ص² صَ = صفر

صَ (٣س² + ٦س ص + ٣ص²) = −(٣س² + ٦س ص + ٣ص²)

صَ = −١ (ب)

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

٧ إذا كانت د(س) دالة زوجية متصلة على ح وكان $\int_{0}^{2}$ د(س) ءس = ٧ ، (١)

$\int_{-2}^{8}$ د(س) ءس = ١٩ فإن $\int_{2}^{8}$ د(س) ءس = ...

(أ) ٥
(ب) ١٢
(ج) ٢٦
(د) ١٩

−٢ ، ٠ ، ٢ ، ٨ ، ١٤

$\int_{-2}^{2}$ د(س)ءس = ٢ $\int_{0}^{2}$ د(س)ءس = ٢ × ٧ = ١٤

∵ $\int_{-2}^{8}$ د(س)ءس = $\int_{-2}^{2}$ د(س)ءس + $\int_{2}^{8}$ د(س)ءس

١٩ = ١٤ + $\int_{2}^{8}$ د(س)ءس ⟸ $\int_{2}^{8}$ د(س)ءس = ١٩ − ١٤ = ٥ (أ)

٨ إذا كانت دَ(س) = أ $س^2$ + ٨س ، وعند س = ١ توجد نقطة انقلاب للدالة (١)

فإن قيمة الثابت أ = ...

(أ) ٨
(ب) −٨
(ج) ٤
(د) −٤

دً(س) = ٢أس + ٨ ⟸ دً(س) = صفر ⟸ ٢أس + ٨ = ٠

عندما س = ١ ⟸ ٢أ × ١ = −٨

أ = −٤ (د)

٩ مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $س^3$ ، والمستقيمان س = −١ ، س = ٢ (١)

تساوي ...... وحدة مربعة

(أ) $\frac{1}{4}$
(ب) $\frac{17}{4}$
(ج) $\frac{15}{4}$

م = − $\int_{-1}^{0}$ $س^3$ ءس + $\int_{0}^{2}$ $س^3$ ءس

م = − $\left[\frac{س^4}{4}\right]_{-1}^{0}$ + $\left[\frac{س^4}{4}\right]_{0}^{2}$ = −[صفر − $\frac{1}{4}$] + [٤]

= ٤ $\frac{1}{4}$ = $\frac{17}{4}$ (ب)

ⓓ ٤

٤٠. إذا كانت دَ(س) = ٣ س^{٢} − أس حيث أ ثابت وكانت (٢ ، ٥) نقطة حرجة للدالة د(س) فإن هذه النقطة تكون نقطة ..... للدالة (١)

ⓐ عظمى محلية
ⓑ صغرى محلية ●
ⓒ قصوى مطلقة
ⓓ انقلاب

بوضع دَ(س) = صفر والتعويض عن س = ٢

∴ أ = ٦

∴ دَ(س) = ٣س^{٢} − ٦ س ⟸ بوضع دَ(س) = ٠

٣س (س − ٢) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٢

وبدراسة إشارة دَ(س) عند طرفي الصفر ٢ ينتج :

(٢ ، ٥) قيمة صغرى محلية

س	−∞	٠	٢	∞
دَ(س)	+		−	+
سلوك د(س)	↗		↘	↗

٤١. عند دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ حيث ١ ≤ ص ≤ ٤ ومحور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات أوجد حجم الجسم الناشئ من الدوران .

$$ح = \pi \int_{١}^{٤} س^{٢} \, ءص$$

$$ح = \pi \int_{١}^{٤} \left[\frac{ءص}{ص}\right]$$

$$ح = \pi \left[لوهـ |ص|\right]_{١}^{٤}$$

$$ح = \pi \left[لوهـ ٤ − لوهـ ١\right] = \pi \left[لوهـ ٤ − صفر\right]$$

$$ح = \pi \, لوهـ ٤ \simeq ١٫٤ \, \pi$$ وحدة مكعبة

(٢)

١٢. أوجد : $\int \sqrt[3]{س^4 - س^3}\ ءس$

$$\int س \sqrt[3]{س-١}\ ءس = \int (س-١+١)(س-١)^{\frac{1}{3}}\ ءس$$

$$= \int [(س-١)+١](س-١)^{\frac{1}{3}}\ ءس = \int (س-١)^{\frac{4}{3}}\ ءس + \int (س-١)^{\frac{1}{3}}\ ءس$$

$$\frac{3}{7}(س-١)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(س-١)^{\frac{4}{3}} + ث$$

١٣. منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ع سم وقاعدته مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه س سم فإذا كان طول ضلع القاعدة يزداد بمعدل ١ سم / ث بينما يتناقص ارتفاعه بمعدل ١ سم / ث . فأوجد العلاقة بين ع ، س عند اللحظة التي يكون فيها الحجم ثابتاً .

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = \frac{1}{2} س \times س \times جا ٦٠ \times ع$

$ح = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 ع$

$\frac{ءح}{ءن} = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 \times \frac{ءع}{ءن} + ع \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times ٢س \times \frac{ءس}{ءن}$

عندما يكون الحجم ثابتاً $\frac{ءح}{ءن} = $ صفر ، $\frac{ءس}{ءن} = ١$ ، $\frac{ءع}{ءن} = -١$

$صفر = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 \times (-١) + ع \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times ٢س (١)$

$\frac{\sqrt{3}}{4} س^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} ع \times ٢س \Leftarrow \boxed{س = ٢ع}$

(٢)

١٤ إذا كانت د (س) = س^٤ − ٤ س^٣ فإن :

(أ) د (س) متناقصة عندما س ∈ ....

(ب) منحنى د (س) محدباً لأعلى عندما س ∈ ....

دَ = ٤ س^٣ − ١٢ س^٢ ⇐ دَ = صفر ⇐ س = ٠ ، س = ٣

س	−∞	٠	٣	∞
إشارة دَ(س)	−	−	+	

د(س) متناقصة]−∞ ، ٣[

د(س) تزايدية]٣ ، ∞[

دً(س) = ١٢ س^٢ − ٢٤ س ⇐ دً(س) = صفر

عندما س = ٠ ، س = ٢

س	−∞	٠	٢	∞
إشارة دً(س)	+	−	+	
التحدب				

]−∞ ، ٠[∪]٢ ، ∞[التحدب لأسفل

]٠ ، ٢[تحدب لأعلى

١٥ أوجد : $\int \frac{س هـ^س}{(س+١)^٢}$ ء س باستخدام التجزئ

بوضع ف = س هـ^س ، ء ع = (س + ١)^{-٢} ء س

∴ ء ف = س هـ^س + هـ^س (١) ، ع = $\frac{(س+١)^{-١}}{-١} = \frac{-١}{(س+١)}$

ء ف = هـ^س (س+١)

∴ ∫ ف ء ع = ف ع − ∫ ع ء ف

∴ $\int \frac{س هـ^س}{(س+١)^٢} = س هـ^س \times \frac{-١}{س+١} + \int \frac{١}{(س+١)} \times هـ^س (س+١)$

$= \frac{-س هـ^س}{س+١} + هـ^س + ث$

١٦. أوجد المساحة الواقعة بين المنحنيين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س² (٤)

لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلتين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س²

∴ س = س⁴ ⇐ س − س⁴ = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = ١

$$م = \left| \int_{0}^{1} (ص_1 - ص_2)\, ءس \right|$$

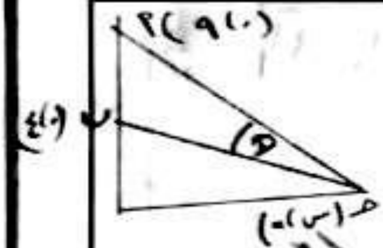
$$م = \left| \int_{0}^{1} (س^2 - \sqrt{س})\, ءس \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^3}{٣} - \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٣} - \frac{٢}{٣} \right| - صفر = \frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

١٧. إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٩) ، ب (٠ ، ٤) ، النقطة جـ ∈ و س

أوجد إحداثي جـ ليكون قياس (∠ أ جـ ب) أكبر ما يمكن



نفرض أن إحداثي جـ (س ، ٠)

ميل أ جـ = $\frac{٩ - ٠}{٠ - س} = \frac{-٩}{س}$ ، ميل ب جـ = $\frac{٤ - ٠}{٠ - س} = \frac{-٤}{س}$

∴ ظا هـ = $\frac{م_1 - م_2}{١ + م_1 م_2} = \left(\frac{-٩}{س} + \frac{٤}{س}\right) \div \left(١ + \frac{-٩}{س} \times \frac{-٤}{س}\right)$

ظا هـ = $\frac{-٥}{س} \div \left(١ + \frac{٣٦}{س^2}\right) = \frac{-٥}{س} \times \frac{س^2}{س^2 + ٣٦}$

ظا هـ = $\frac{-٥ س}{س^2 + ٣٦}$ ⇐ $\frac{ء}{ءس}$ (ظا هـ) = $\frac{(س^2 + ٣٦)(-٥) + ٥س(٢س)}{(س^2 + ٣٦)^2}$

− قا² هـ × $\frac{ءهـ}{ءس} = \frac{-٥س^2 - ١٨٠ + ١٠س^2}{(س^2 + ٣٦)^2}$ عندما هـ أكبر ما يمكن

فإن $\frac{ءهـ}{ءس}$ = صفر ⇐ ٥س² − ١٨٠ = ٠ ⇐ س = ± ٦ ونكون

هـ أكبر ما يمكن عندما س = + ٦ ∴ النقطة جـ (٦ ، ٠)

١٨. إذا كانت :

د (س) = { ٢ س + س² عندما س < ٠ ؛ ٢ س − س² عندما س ≥ ٠ }

فإن : (أ) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في [٠ ، ٥]

(ب) أوجد $\int_{-1}^{2}$ د (س) ءس

(أ) د(س) = ٢س + س² | د(س) = ٢س − س²

٠ ، ١ ، ٥ ، صفر

د(٠) = صفر ، د(٥) = ١٠ − ٢٥ = −١٥

د'(٠)⁺ = ٢ − ٢س = ٢

د'(٠)⁻ = ٢ + ٢س = ٢

د'(٠) = ٢ ⟸ س = ١ ، د(١) = ١ عظمى مطلقة

د(٠) = صفر

د(٥) = −١٥ صغرى مطلقة

(ب) $\int_{-1}^{2}$ د(س) ءس

= $\int_{-1}^{0}$ (٢س + س²) ءس + $\int_{0}^{2}$ (٢س − س²) ءس

= [٢س²/٢ + س³/٣] + [٢س²/٢ − س³/٣] = ٨ − ٢ = ٦

١٩. $\int$ هـ^ظاس / (٢ جتا² س) ءس = ... + ث

(أ) ٢ هـ^ظاس
(ب) ½ هـ^ظاس
(ج) ½ قاس هـ^ظاس
(د) ٢ قا²س هـ^ظاس

(١)

$\int$ هـ^ظاس × ½ قا²س ءس

= ½ $\int$ هـ^ظاس × قا²س ءس

= ½ هـ^ظاس + ث

(ب)

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

(١)

٢٠. د(س) = س^٣ − ٣ س^٢ + ٥ متناقصة عندما س ∈ ....

ⓐ]٠ ، ٣[

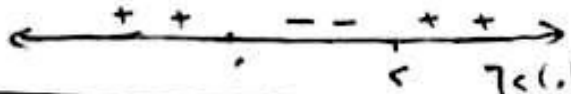
ⓑ [٠ ، ٢]

●]٠ ، ٢[

ⓓ ح − [٠ ، ٢]

دَ(س) = ٣س^٢ − ٦س بوضع دَ(س) = ٠

س [illegible]) س = ٢



∴ د(س) متناقصة]٠ ، ٢[

ج

النموذج الاسترشادي الرابع

(١)

نهـا ...

ⓐ صفر
ⓑ ٢
ⓒ ١
ⓓ −١ ●

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{جتا س - ١}{س} - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{س}$$

$$١ - ٢ = -١ \quad (د)$$

(٢)

إذا كانت د(س) = لوهـ (٢ + √٢ قتا س) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$

فإن د′ ($\frac{\pi}{٤}$) = ...

ⓐ $-\frac{١}{٤}$
ⓑ $-\frac{١}{٢}$ ●
ⓒ $\frac{١}{٢}$
ⓓ ٤

$$د'(س) = \frac{١ \times \sqrt{٢}(- قتا س ظتا س)}{٢ + \sqrt{٢} قتا س}$$

$$\therefore د'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١}{٢ + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$$

$$\therefore د'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢} \quad (ب)$$

(٣)

إذا كان جتا ٢س = جا ص فإن ($\frac{دص}{دس}$) عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تساوي ....

ⓐ ±٢
ⓑ −٢ ●
ⓒ ٢
ⓓ −١

$$٢(- جا ٢س) = جتا ص \times ص'$$

$$ص' = \frac{-٢ جا ٢س}{جتا ص} \quad ، \text{ عندما س} = \frac{\pi}{٦} \text{ فإن ص} = \frac{\pi}{٦}$$

$$\therefore ص' = (-٢ جا ٦٠) \div جتا ٣٠$$

$$ص' = -٢ \frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = -٢ \quad (ب)$$

٤. إذا كانت ص = ٤ ن^٣ + ٤ ، ع = ٣ ن^٢ + ٢ (١)

فإن معدل تغير ع بالنسبة لـ ص تساوي ......

(أ) ٢ ن

(ب) -٢

(ج) $\frac{١}{٢ ن}$

(د) ٤

$\frac{دص}{دن} = ١٢ ن^٢$ ، $\frac{دع}{دن} = ٦ ن$

$\therefore \frac{دع}{دص} = \frac{دع}{دن} \div \frac{دص}{دن} = \frac{٦ ن}{١٢ ن^٢} = \frac{١}{٢ ن}$

٥. إذا كانت د(س) = م س^٢ - ٨ ب حيث م ، ب ثوابت وكان لمنحنى د (س) نقطة (١)

عظمى محلية هي (٢ ، ٥) فإن م ∈ ....

(أ)] ٢ ، ∞ [

(ب)] ٠ ، ∞ [

(ج)] -∞ ، ٠ [

(د)] -∞ ، ٢ [

∵ (٢ ، ٥) حرجة

∴ دَ(٢) = صفر ⟸ ٤م - ٨ب = ٠

∴ ٤م = ٨ب

∴ دَ(س) = م س^٢ - ٤م

دً(س) = ٢م س

∵ (٢ ، ٥) عظمى

∴ دً(٢) < صفر

٢م(٢) < صفر ⟸ ٤م < ٠

∴ م < صفر ⟸ م ∈] -∞ ، ٠ [

(ج)

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

٦. إذا كانت $\int_{٢}^{أ} (٤س + ١)\, ءس = ٤٥$ فإن أ ∈ .... (١)

(أ) $\{ \frac{١١}{٢} ، ٥ \}$

(ب) $\{ -\frac{١١}{٢} ، -٥ \}$

(ج) $\{ \frac{١١}{٢} ، -٥ \}$

(د) $\{ -\frac{١١}{٢} ، ٥ \}$

$$\left[\frac{٤س^{٢}}{٢} + س \right]_{٢}^{أ} = ٤٥$$

$$\left(\frac{٤أ^{٢}}{٢} + أ\right) - \left(\frac{١٦}{٢} + ٢\right) = ٤٥$$

$$٢أ^{٢} + أ - ١٠ = ٤٥$$

$(٢أ + ١١)(أ - ٥)$

$$\therefore ٢أ^{٢} + أ - ٥٥ = ٠ \Leftarrow أ = -\frac{١١}{٢} ، أ = ٥$$

$\{ -\frac{١١}{٢} ، ٥ \}$ (د)

٧. حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{س+١}$ والمستقيمات س = ١ ، س = −١ ، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات تساوي .... وحدة مكعبة (١)

(أ) $\frac{٣}{٢}\pi$

(ب) $\frac{١}{٢}\pi$

(ج) ٢π

(د) π

$$ح = \pi \int_{-١}^{١} ص^{٢}\, ءس = \pi \int_{-١}^{١} (س+١)\, ءس$$

$$\therefore ح = \pi \left[\frac{س^{٢}}{٢} + س \right]_{-١}^{١}$$

$$\therefore ح = \pi \left[\left(\frac{١}{٢} + ١\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right) \right]$$

$$\therefore ح = \pi \left[\frac{١}{٢} + ١ - \frac{١}{٢} + ١ \right]$$

$ح = ٢\pi$ وحدة مكعبة

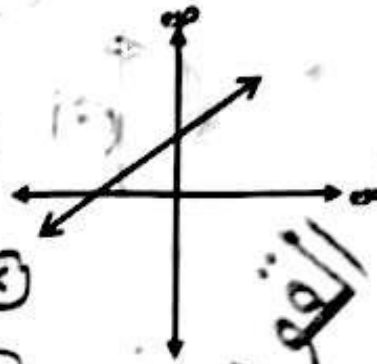
(ج)

٨. إذا كانت : ص = أ $س^{ن}$ − ب $س^{ن-١}$ + ٥ كثيرة حدود ، أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح (١)

فإن $\frac{ء^ن ص}{ء س^ن}$ يمكن أن يمثلها أحد الأشكال الآتية :

① $\frac{ء^ن ص}{ء س^ن}$ تمثل معادلة من الدرجة الأولى

(أ)

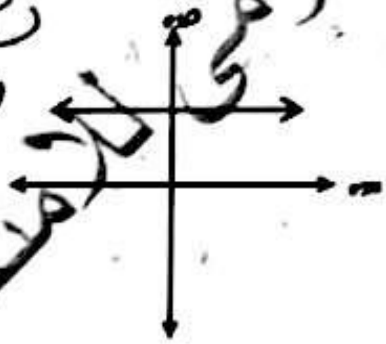


لذا يستبعد الرسم (ب) لأنه يمثل دالة ثابتة

② الإجابة تكون من بين أ ، جـ ، د

③ يستبعد أ لأن ميله موجب على الرسم وهو ينافي المعطى

(ب)

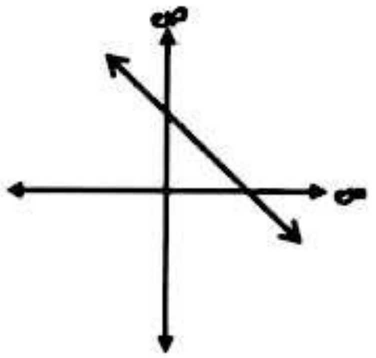


④ الاختيار بين جـ ، د

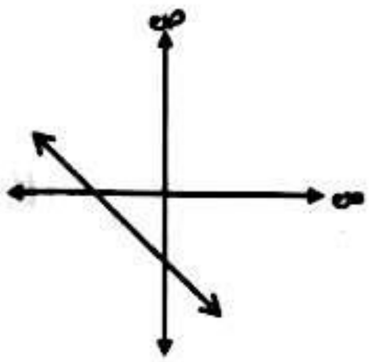
ويستبعد د لأن الجزء المقطوع سالب

⑤ الجواب الصحيح الشكل جـ

(جـ)



(د)



٩) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} − ٤ ومحور السينات .

بوضع ص = صفر ⟸ س = ٢ ، س = −٢

∴ م = $\left| \int_{-٢}^{٢} \text{ص}\ \text{ء}\text{س} \right| = \left| \int_{-٢}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٤)\ \text{ء}\text{س} \right|$

م = $\left| \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س} \right]_{-٢}^{٢} \right| = \left| \left(\frac{٨}{٣} - ٨\right) - \left(-\frac{٨}{٣} + ٨\right) \right|$

م = $\left| \frac{٨}{٣} - ٨ + \frac{٨}{٣} - ٨ \right| = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

١٠. باستخدام التكامل بالتعويض المناسب أوجد : $\int \text{س}^2 \sqrt{\text{٢ س} + ١}\ \text{ء س}$ (٣)

بوضع $\text{ع}^2 = \text{٢س} + ١ \Leftarrow \text{٢ع ءع} = \text{٢ ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \text{ع ءع}$

$\text{٢س} = \text{ع}^2 - ١ \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ع}^2 - ١}{٢}$

$$\therefore \int \text{س}^2 \sqrt{\text{٢س}+١}\ \text{ءس} = \int \left(\frac{\text{ع}^2-١}{٢}\right)^2 \times \sqrt{\text{ع}^2} \times \text{ع ءع}$$

$$= \int \left(\frac{\text{ع}^4 - \text{٢ع}^2 + ١}{٤}\right) \times \text{ع}^2\ \text{ءع} = \int \left(\frac{\text{ع}^6 - \text{٢ع}^4 + \text{ع}^2}{٤}\right) \text{ءع}$$

$$= \frac{١}{٤}\left[\frac{\text{ع}^7}{٧} - \frac{\text{٢ع}^5}{٥} + \frac{\text{ع}^3}{٣}\right] + \text{ث} = \frac{\text{ع}^7}{٢٨} - \frac{\text{ع}^5}{١٠} + \frac{\text{ع}^3}{١٢} + \text{ث}$$

١١. باستخدام التكامل بالتجزئ أوجد $\int \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{س ءس}$

بوضع $\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ، $\text{ءع} = \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$

$\text{ءف} = \text{س ءس}$ ، $\int \text{ءف} = \int \text{س ءس}$ ، $\therefore \text{ف} = \frac{\text{س}^2}{٢}$

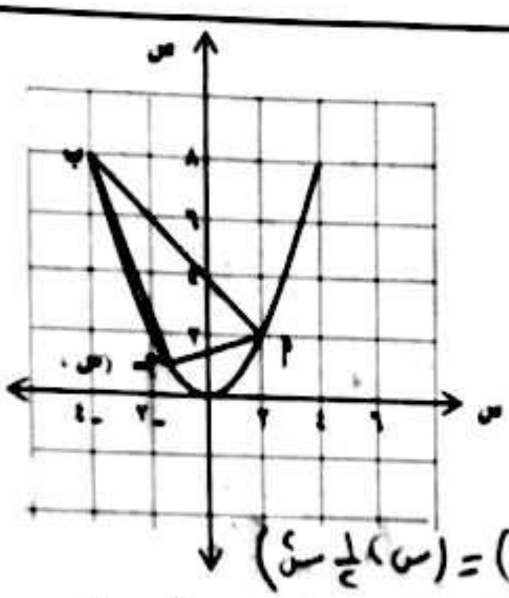
$$\because \int \text{ع ءف} = \text{ع ف} - \int \text{ف ءع}$$

$$\therefore \int \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{س ءس} = \frac{\text{س}^2}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \int \frac{\text{س}^2}{٢} \times \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$$

$$\therefore \int \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{س ءس} = \frac{١}{٢} \text{س}^2 \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{١}{٤} \text{س}^2 + \text{ث}$$

١٢. النقط م (٢ ، ٢) ، ب (−٤ ، ٨) ، جـ (س ، ص) جميعها تنتمي لمنحنى ص = $\frac{1}{2}$ س²

أوجد احداثيات النقطة جـ لتكون مساحة سطح Δ م ب جـ أكبر ما يمكن . (٢)



نفرض أن إحداثيات جـ (س، ص) = (س، $\frac{1}{2}$ س²)

مساحة Δ م ب جـ = م = $\frac{1}{2}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & س \\ 2 & 8 & \frac{1}{2}س^2 \end{vmatrix}$

م = $\frac{1}{2}$ [١(−٢س² − ٨س) − ١(س² − ٢س) + ١(١٦+٨)]

م = $\frac{1}{2}$ [−٢س² − ٨س − س² + ٢س + ٢٤]

م = $\frac{1}{2}$ (−٣س² − ٦س + ٢٤)

∴ م = $-\frac{3}{2}$ س² − ٣س + ١٢

م′ = $-\frac{3}{2}$ × ٢س − ٣

م′ = −٣س − ٣

عندما م أكبر ما يمكن ⟸ م′ = صفر

−٣س − ٣ = ٠ ⟸ س = −١

∴ إحداثي جـ (س، $\frac{1}{2}$ س²) = (−١، $\frac{1}{2}$)

مساحة Δ م ب جـ = $\frac{1}{2}$ [−٣(−١)² − ٦(−١) + ٢٤]

= $\frac{1}{2}$ (٢٧) = ١٣$\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

١٣. إذا كانت (١ ، ٥) نقطة انقلاب للمنحنى الذي معادلته ص = م س³ + ب س² + ٧

أوجد قيمة م ، ب

∵ (١ ، ٥) ∈ للمنحنى ⟸ ٥ = م + ب + ٧

∴ م + ب = −٢ ⟵ ①

ص' = ٣م س² + ٢ب س

ص'' = ٦م س + ٢ب   عند نقطة الانقلاب ص'' = ٠ ، س = ١

∴ ٦م (١) + ٢ب = صفر ⟵ ②

بضرب ① × −٢

−٢م − ٢ب = ٤ ⟵ ②

بالجمع

٤م = ٤ ⟸ $\boxed{م = ١}$

بالتعويض في ① $\boxed{ب = −٣}$

١٤. إذا كان ميل العمودي على المنحنى ص = د (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) (٣)
يساوي $\frac{١}{٤س - ٣س^٢}$ ، د (١) = ٥ أوجد معادلة المنحنى

∵ ميل العمودي = $\frac{١}{٤س - ٣س^٢}$ ⇐ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = −(٤س − ٣س^٢)

$\frac{ءص}{ءس}$ = −٤س + ٣س^٢

ءص = (٣س^٢ − ٤س) ءس بإيجاد التكامل للطرفين

ص = $\frac{٣س^٣}{٣}$ − $\frac{٤س^٢}{٢}$ + ث

ص = س^٣ − ٢س^٢ + ث

∵ د(١) = ٥ ⇐ ث = ٦

∴ معادلة المنحنى

ص = س^٣ − ٢س^٢ + ٦

١٠- إثبت أن : $\int \frac{س-١}{س+١}$ ء س = $لو_{هـ} \frac{هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ + ث

الحل

الأيمن $\int \frac{س-١}{س+١}$ ء س = $\int \frac{س-١+١-١}{س+١}$ ء س

= $\int \frac{س+١}{س+١}$ ء س $- \int \frac{٢}{س+١}$ ء س

= $\int$ ء س $- ٢ \int \frac{ء س}{س+١}$

الأيمن = س $- ٢\, لو_{هـ} (س+١)$ + ث ← (١)

الأيسر = $لو_{هـ} \frac{هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ = $لو_{هـ} هـ^{س} - لو_{هـ} (س+١)^{٢}$

الأيسر = س $لو_{هـ} هـ - ٢\, لو_{هـ} (س+١)$

الأيسر = س $- ٢\, لو_{هـ} (س+١)$ ← (٢)

من (١) ، (٢) الطرفان متساويان

١٦. إذا كان المستقيم ص − ٨س + جـ = ٠ يمس المنحنى ص = ٣ س^{٢} + ٢ س − ١ (٣)

أوجد قيمة الثابت جـ

ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س + ٢

٦س + ٢ = $\frac{-٨}{١}$ ⇐ ٦س + ٢ = ٨

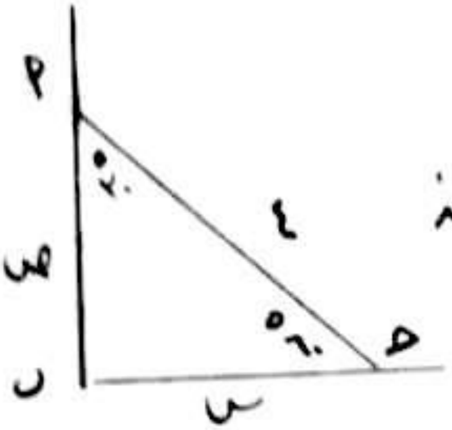
٦س = ٦ ⇐ س = ١ بالتعويض في معادلة المنحنى ص = ٣(١)^{٢} + ٢(١) − ١ = ٤

بالتعويض في معادلة المستقيم

٤ − ٨(١) + جـ = ٠

$\boxed{\text{جـ} = ٤}$

١٧. سلم طوله ٤ متر يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسي وبطرفه الآخر على أرضية أفقية فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢٠ سم / ث احسب معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{ط}{٣}$



من فيثاغورث

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$

$\therefore ٢س \times \frac{دس}{دن} + ٢ص \times \frac{دص}{دن} = صفر$

$\therefore ٢س \times \frac{دس}{دن} = -٢ص \times \frac{دص}{دن}$

$س \times \frac{دس}{دن} = -ص \times \frac{دص}{دن} \longrightarrow (١)$

عندما $ق(\hat{هـ}) = ٦٠° \Leftarrow ق(\hat{أ}) = ٣٠°$

$س = ٢ \text{ ، } ص = ٢\sqrt{٣}$

بالتعويض في (١)

$\cancel{٢} \times \frac{\cancel{٢٠}}{١٠٠} = -\cancel{٢}\sqrt{٣} \times \frac{دص}{دن}$

$٠,٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{دص}{دن}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٢}{١٠} \times \frac{-١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٣٠} = \frac{-\sqrt{٣}}{١٥}$