اجابات اختبارات التفاضل و التكامل
الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[ا] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) أى الدوال التالية تحقق العلاقة : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} = ص$

(أ) $ص = \frac{١}{١٢}(س + ١)^{٤}$ (ب) $ص = حا\,س$

(حـ) $ص = هـ^{س}$ (ء) $ص = \frac{س}{س - ١}$

الحل

بايجاد المشتقة الثالثة للدوال نجد أن : الدالة $ص = هـ^{س}$ تحقق العلاقة حيث :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} = هـ^{س}$ " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

(٢) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{١}{\pi}$ سم / ث فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل .... سم / ث

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) ٢   (حـ) π (ء) ٢π

الحل

$\because م = ٢\pi نق \quad \therefore \frac{ءم}{ءن} = ٢\pi \frac{ءنق}{ءن} = ٢\pi \times \frac{١}{\pi} = ٢$

(٣) منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$ محدب لأعلى عندما $س \in$ ....

(أ) $]-\infty ، ٠[$ (ب) $]-\infty ، ١[$

(حـ) $]١ ، ٣[$ (ء) $]١ ، \infty[$

الحل

$\because د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢ \quad \therefore د'(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

، $د''(س) = ٦س - ٦ = ٦(س - ١)$

عندما : $د''(س) = ٠$ فإن : $س = ١$

من الجدول المقابل الذى يبين إشارة $د''$

ينتج : المنحنى محدب لأعلى

فى $]-\infty ، ١[$

س	$-\infty$	١	∞
إشارة $د''$	$-$	٠	$+$
تحدب منحنى د	لأعلى		لأسفل

(٤) $\int_{-\frac{١}{٢}\pi}^{\frac{١}{٢}\pi} (حا\,س + حتا\,س)\,ءس$ يساوى ....

(أ) ٤   (ب) ٢   (حـ) صفر   (ء) π

الحل

$\int_{-\frac{١}{٢}\pi}^{\frac{١}{٢}\pi} (حا\,س + حتا\,س)\,ءس = ٢\int_{٠}^{\frac{١}{٢}\pi} (حا\,س + حتا\,س)\,ءس$

$= [-حتا\,س + حا\,س]_{٠}^{\frac{١}{٢}\pi} = (-حتا\frac{١}{٢}\pi + حا\frac{١}{٢}\pi) -$

$(-حتا\,٠ + حا\,٠) = (-٠ + ١) - (-١ + ٠) = ٢$

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{٣}^{٥} ٢\,د(س)\,ءس = ٨$ ،

$\int_{٣}^{٤} ٣\,د(س)\,ءس = ٩$ فإن $\int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس =$ ....

(أ) صفر   (ب) ١   (حـ) ٣   (ء) ٥

الحل

$\because \int_{٣}^{٥} ٢\,د(س)\,ءس = ٨ \quad \therefore ٢ت(٥) - ٢ت(٣) = ٨$

$\therefore ت(٥) - ت(٣) = ٤$ و منها : $ت(٣) = ت(٥) - ٤$ (ا)

، $\because \int_{٣}^{٤} ٣\,د(س)\,ءس = ٩ \quad \therefore ٣ت(٤) - ٣ت(٣) = ٩$

$\therefore ت(٤) - ت(٣) = ٣$ ، و بالتعويض من (ا) ينتج :

$ت(٤) - ت(٥) + ٤ = ٣ \quad \therefore ت(٤) - ت(٥) = -١$

$\therefore ت(٥) - ت(٤) = ١ \quad \therefore \int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس = ٥$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى ....

(أ) ١٦ π (ب) ١٢ π (جـ) ٨ π (ء) ٤ π

الحل

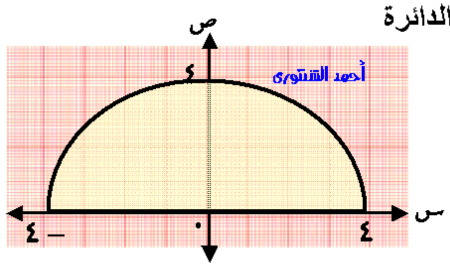
للحل المباشر :

∵ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ بالتربيع : ص^{٢} = ١٦ − س^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ و هى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها = ٤ وحدات طول فتكون : مساحتها = ١٦ π وحدات مربعة

∴ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ تمثل نصف هذه الدائرة

فتكون : مساحتها = ٨ π وحدات مربعة



الحل بالتكامل :

نضع : ص = ٠ ∴ ١٦ − س^{٢} = ٠

و منها : س = ٤ ، س = −٤

و هما حدا التكامل

∴ المساحة المطلوبة (م) = $\int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ءس = ٢ $\int_{٠}^{٤} \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ءس

نضع : س = ٤ حا θ ∴ ءس = ٤ حتا θ ءθ

، عندما : س = ٠ فإن : حا θ = ٠ ∴ θ = ٠

، عندما : س = ٤ فإن : حا θ = ١ ∴ θ = $\frac{١}{٢}$ π

، ١٦ − س^{٢} = ١٦ − ١٦ حا^{٢} θ = ١٦ (١ − حا^{٢} θ) = ١٦ حتا^{٢} θ

∴ $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ = ٤ حتا θ

∴ م = ٢ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٤ حتا θ × ٤ حتا θ ءθ = ١٦ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٢ حتا^{٢} θ ءθ

= ١٦ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ (حتا ٢θ + ١) ءθ = ١٦ [$\frac{١}{٢}$ حا ٢θ + θ]$_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= ١٦ [$\frac{١}{٢}$ حا π + $\frac{١}{٢}$ π − $\frac{١}{٢}$ حا ٠ − ٠] = ١٦ × $\frac{١}{٢}$ π = ٨ π وحدات مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : ∫ حا س حتا^{٣} س ءس

الحل

∫ حا س حتا^{٣} س ءس = − ∫ حتا^{٣} س (− حا س) ءس

= − ∫ حتا^{٣} س (حتا س)$'$ ءس = − $\frac{١}{٤}$ حتا^{٤} س + ث

(ب) إذا كان : هـ$^{س ص}$ − س^{٢} + ص^{٣} = ٠ .

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٠ .

الحل

∵ هـ$^{س ص}$ − س^{٢} + ص^{٣} = ٠ . باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ ص هـ$^{س ص}$ + س هـ$^{س ص}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ س + ٣ ص^{٢} × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ . (١)

عند : س = ٠ فإن : هـ^{٠} − ٠ + ص^{٣} = ٠ .

∴ ١ + ص^{٣} = ٠ . و منها : ص = −١ بالتعويض من (١) ينتج :

(−١) × هـ^{٠} + ٠ × هـ^{٠} × $\frac{ءص}{ءس}$ −٢ × ٠ + ٣ × (−١)^{٢} × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ .

∴ (−١) × ٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ . و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$

[٣] (أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى :

س^{٢} − ٣ س ص − ص^{٢} + ٣ = ٠ . عند النقطة (−١ ، ٤)

الحل

∵ س^{٢} − ٣ س ص − ص^{٢} + ٣ = ٠ . باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

أحمد الشنتورى

$٢ س - ٣ ص - ٣ س \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢ ص \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

∴ م (ميل المماس) $= \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(-١ ، ٤)} = -\frac{١٤}{٥}$

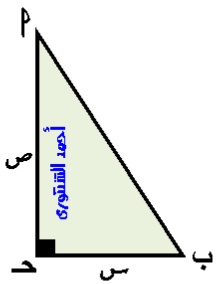
∴ معادلة المماس هى : ص − ٤ = $-\frac{١٤}{٥}$ (س + ١)

أى : ١٤ س + ٥ ص − ٦ = ٠

(ب) مثلث قائم الزاوية ، فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٣٠ سم ، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم / د ، و طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم / د : أوجد

١ − معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق

٢ − الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث



الحل

نفرض أن : س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد ن دقيقة

، م مساحة المثلث حينئذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن

∴ س = ٦ + $\frac{١}{٢}$ ن ، ص = ٣٠ − ن

∴ م = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ (٦ + $\frac{١}{٢}$ ن) (٣٠ − ن)

= ٩٠ + ٢ ن − $\frac{١}{٤}$ ن^{٢} ، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢ − $\frac{١}{٢}$ ن

بعد ٣ دقائق : ∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢ − $\frac{١}{٢}$ × ٣ = ١ سم / د

يتوقف تزايد المساحة عندما : $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٠

أى عندما : ٢ − $\frac{١}{٢}$ ن = ٠　　و منها : ن = ٦ دقائق

[٤] (أ) حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

د (س) = س + ٢ حا س ، ٠ < س < ٢ π

الحل

∵ د (س) = س + ٢ حا س　　∴ د′ (س) = ١ + ٢ حتا س

بوضع د′ (س) = ٠　　يكون : حتا س = $-\frac{١}{٢}$

∴ د′ (س) = ٠　عندما : س = $\frac{٢}{٣}$ π ، س = $\frac{٤}{٣}$ π

∴ إشارة د′ (س) كما بالجدول التالى و تكون :

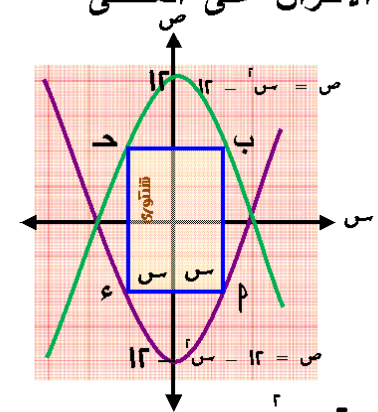
س	٠		$\frac{٢}{٣}$ π		$\frac{٤}{٣}$ π		٢ π
إشارة د′		+	٠	−	٠	+	
سلوك د		↗		↘		↗	

د (س) متزايدة فى الفترة] ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ π [

د (س) متناقصة فى الفترة] $\frac{٢}{٣}$ π ، $\frac{٤}{٣}$ π [

د (س) متزايدة فى الفترة] $\frac{٤}{٣}$ π ، ٢ π [

(ب) رسم مستطيل بحيث يقع رأسان متجاوران منه على المنحنى ص = س^{٢} − ١٢ و الرأسان الآخران على المنحنى ص = ١٢ − س^{٢} أحسب أكبر مساحة لهذا المستطيل



الحل

بفرض أن : أ ء = ٢ س　وحدة طول

و من هندسة الشكل نجد :

أ (س ، س^{٢} − ١٢) ،

ب (س ، ١٢ − س^{٢})

∴ أ ب = ١٢ − س^{٢} − س^{٢} + ١٢ = ٢٤ − ٢ س^{٢}

∴ مساحة المستطيل م = أ ء × أ ب = ٢ س (٢٤ – ٢ $س^{2}$)

أى أن : م = د(س) = ٤٨ س – ٤ $س^{3}$

، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

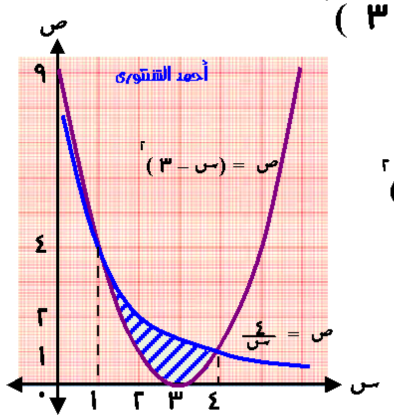
∴ $د^{/}$(س) = ٤٨ – ١٢ $س^{2}$ = – ١٢ ($س^{2}$ – ٤) ، $د^{//}$(س) = – ٢٤ س

عند $د^{/}$(س) = ٠ ∴ س = ٢ ، س = – ٢ مرفوض

، ∵ $د^{//}$(٢) = – ٤٨ $<$ ٠ ∴ عند س = ٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

∴ م = ٤٨ × ٢ – ٤ × ٨ = ٦٤ وحدة مربعة

[٥] (أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = $(س - ٣)^{2}$ دورة كاملة حول محور السينات



الحل

بفرض : $ص_{1}$ = $\frac{٤}{س}$ ، $ص_{2}$ = $(س - ٣)^{2}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_{1}$ = $ص_{2}$

∴ س $(س - ٣)^{2}$ = ٤

∴ $س^{3}$ – ٦ $س^{2}$ + ٩ س – ٤ = ٠

∴ ($س^{3}$ – ١) – (٦ $س^{2}$ – ٩ س + ٣) = ٠

∴ (س – ١)($س^{2}$ + س + ١) – (س – ١)(٦ س – ٣) = ٠

∴ (س – ١) ($س^{2}$ + س + ١ – ٦ س + ٣) = ٠

∴ (س – ١)($س^{2}$ – ٥ س + ٤) = ٠

∴ (س – ١)(س – ١)(س – ٤) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٤ لاحظ : نقط التقاطع من الشكل

، ∵ $ص_{1}$ ≤ $ص_{2}$ لكل : س ∈ [١ ، ٤]

∴ ح = $\pi \int_{1}^{4}$ ($ص_{1}^{2}$ – $ص_{2}^{2}$) ء س

= $\pi \int_{1}^{4}$ ($\frac{١٦}{س^{2}}$ – $(س - ٣)^{4}$) ء س

= π $\left[- \frac{١٦}{س} - \frac{١}{٥} (س - ٣)^{5} \right]_{1}^{4}$

= π [(– ٤ – $\frac{١}{٥}$ × ١) – (– ١٦ – $\frac{١}{٥}$ × – ٣٢)]

= $\frac{٢٧}{٥}\pi$ وحدة مكعبة

(ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د الذى يحقق الخواص التالية :

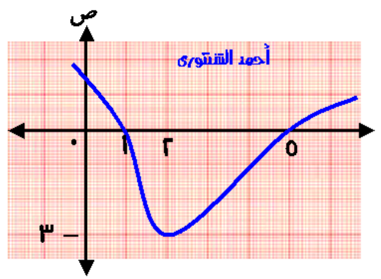
د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = – ٣ ،

$د^{//}$(س) $>$ ٠ لكل س ≠ ٠ ،

$د^{/}$(س) $<$ ٠ لكل س $<$ ٢ ،

$د^{/}$(س) $>$ ٠ لكل س $>$ ٢

الحل



∵ د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = – ٣

∴ المنحنى يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٢ ، – ٣)

∵ $د^{//}$(س) $>$ ٠ لكل س ≠ ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى فى] – ∞ ، ٢ [،] ٢ ، ∞ [

∵ $د^{/}$(س) $<$ ٠ لكل س $<$ ٢ ، $د^{/}$(س) $>$ ٠ لكل س $>$ ٢

∴ (٢ ، – ٣) نقطة صغرى محلية ، د(س) متناقصة فى] – ∞ ، ٢ [

، د(س) متزايدة فى] ٢ ، ∞ [

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث : د(س) = هـ$^{٢س+١}$ عند النقطة (− $\frac{١}{٢}$ ، ١) هى ....

(أ) ٢ ص = س + ١　　(ب) ص = ٢ س + ٢

(جـ) ص = ٢ س − ٣　　(ء) ٢ ص = ٣ س + ١

الحل

∵ د(س) = هـ$^{٢س+١}$　　∴ د$'$(س) = ٢ هـ$^{٢س+١}$

∴ م (ميل المماس) = [د$'$(س)]$_{(- \frac{١}{٢} ، ١)}$ = ٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ = ٢ (س + $\frac{١}{٢}$)

أى : ص = ٢ س + ٢

(٢) إذا كان ص = ٤ ن^{٣} + ٤ ، ع = ٣ ن^{٢} − ٢ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوى ....

(أ) ٢ ن　　(ب) ٢　　(جـ) $\frac{١}{٢ن}$　　(ء) ٤

الحل

∵ ص = ٤ ن^{٣} + ٤ ، ع = ٣ ن^{٢} − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ١٢ ن^{٢} ، $\frac{ءع}{ءن}$ = ٦ ن

∴ $\frac{ءع}{ءص}$ = $\frac{ءع}{ءن}$ ÷ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{١}{٢ن}$

(٣) أكبر قيمة للمقدار : ٨ س − س^{٢} حيث س ∈ ح هى ....

(أ) ٨　　(ب) ١٦　　(جـ) ٣٢　　(ء) ٦٤

الحل

بفرض أن : د(س) = ٨ س − س^{٢}　　∴ د$'$(س) = ٨ − ٢ س

، د$''$(س) = − ٢　　عندما : د$'$(س) = ٠　فإن : س = ٤

، ∵ د$''$(٤) = − ٢ < ٠　　∴ عند س = ٤ يكون للمقدار أكبر قيمة

∴ د(٤) = ٣٢ − ١٦ = ١٦

(٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س - ٢}$ و كان المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) فإن د (هـ^{٢} + ٢) تساوى ....

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) لو$_{هـ}$ ٢　　(ء) لو$_{هـ}$ ٣

الحل

∵ د$'$(س) = $\frac{١}{س - ٢}$　　∴ د(س) = $\int$ $\frac{١}{س - ٢}$ ء س

∴ د(س) = لو$_{هـ}$ | س − ٢ | + ث　　، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠)

∴ ٠ = لو$_{هـ}$ | ١ | + ث　　و منها : ث = ٠

∴ د(س) = لو$_{هـ}$ | س − ٢ |

، د (هـ^{٢} + ٢) = لو$_{هـ}$ | هـ^{٢} + ٢ − ٢ | = لو$_{هـ}$ | هـ^{٢} | = ٢ لو$_{هـ}$ هـ = ٢

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{١}^{٢}$ د(س) ء س = ٩ ، $\int_{٦}^{٢}$ د(س) ء س = − ٧ فإن $\int_{١}^{٦}$ د(س) ء س = ...

(أ) ٢   (ب) ٨   (جـ) ١٦   (ء) -٦٣

الحل

$\because \int_{1}^{2} د(س)\,ءس = ٩ \quad \therefore ت(٢) - ت(١) = ٩$ (١)

، $\because \int_{6}^{2} د(س)\,ءس = -٧ \quad \therefore ت(٢) - ت(٦) = -٧$ (٢)

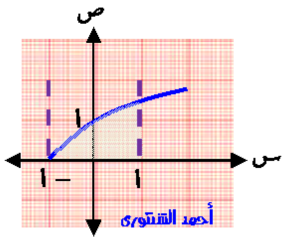
بطرح (٢) من (١) ينتج : $ت(٦) - ت(١) = ١٦$

$\therefore \int_{1}^{6} د(س)\,ءس = ١٦$

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \sqrt{س + ١}$ و المستقيمات $ص = ٠$ ، $س = -١$ ، $س = ١$ تساوى ....

(أ) π (ب) $\frac{٣}{٢}\pi$ (جـ) ٢π (ء) $\frac{٥}{٢}\pi$

الحل



$ع = \pi \int_{-1}^{1} ص^{2}\,ءس$

$= \pi \int_{-1}^{1} (س + ١)\,ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} س^{2} + س\right]_{-1}^{1}$

$= \pi \left[\left(\frac{١}{٢} + ١\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right] = ٢\pi$ وحدة مكعبة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int س(٢س - ١)^{3}\,ءس$ ،

(٢) $\int س\, هـ^{-٢س}\,ءس$

الحل

(١) $\int س(٢س - ٣)^{3}\,ءس = \frac{١}{٢}\int ٢س(٢س - ١)^{3}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س - ١ + ١)(٢س - ١)^{3}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\int (٢س - ١)^{4}\,ءس + \frac{١}{٢}\int (٢س - ١)^{3}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} \times (٢س - ١)^{5} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} \times (٢س - ١)^{4} + ث$

$= \frac{١}{٢٠}(٢س - ١)^{5} + \frac{١}{١٦}(٢س - ١)^{4} + ث$

$= \frac{١}{٨٠}(٢س - ١)^{4}\left[٤(٢س - ١) + ٥\right] + ث$

$= \frac{١}{٨٠}(٢س - ١)^{4}(٨س + ١) + ث$

حل آخر

نضع : $ص = ٢س - ١ \quad \therefore ءص = ٢\,ءس$

$\therefore ءس = \frac{١}{٢}\,ءص$ ، $س = \frac{١}{٢}(ص + ١)$

$\therefore$ المقدار $= \int \frac{١}{٢}(ص + ١) \times ص^{3} \times \frac{١}{٢}\,ءص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص^{4} + ص^{3})\,ءص = \frac{١}{٤}\left[\frac{١}{٥}ص^{5} + \frac{١}{٤}ص^{4}\right] + ث$

$= \frac{١}{٢٠}ص^{5} + \frac{١}{١٦}ص^{4} + ث = \frac{١}{٨٠}ص^{4}(٤ص + ٥) + ث$

$= \frac{١}{٨٠}(٢س - ١)^{4}\left[٤(٢س - ١) + ٥\right] + ث$

$= \frac{١}{٨٠}(٢س - ١)^{4}(٨س + ١) + ث$

(٢) نضع : $ص = س \quad \therefore ءص = ءس$ ،

$ءع = هـ^{-٢س}\,ءس \quad \therefore ع = -\frac{١}{٢}هـ^{-٢س}$

$\therefore$ المقدار $= -\frac{١}{٢}س\,هـ^{-٢س} + \frac{١}{٢}\int هـ^{-٢س}\,ءس$

$= -\frac{1}{2}\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}^2} - \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{-\text{س}^2} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{هـ}^{-\text{س}^2}\,(2\,\text{س} + 1) + \text{ث}$

(ب) أوجد معدل تغير $\sqrt{16 + \text{س}^2}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} - 2}$ عندما س = −٣

الحل

نضع : $\text{ص} = \sqrt{16 + \text{س}^2} = (16 + \text{س}^2)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2}(16 + \text{س}^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2\,\text{س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{16 + \text{س}^2}}$

، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} - 2}$ $\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 2)\times 1 - \text{س} \times 1}{(\text{س} - 2)^2} = \frac{-2}{(\text{س} - 2)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{16 + \text{س}^2}} \times \frac{(\text{س} - 2)^2}{-2}$

، عندما س = −٣ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -\frac{3}{5} \times -\frac{25}{2} = \frac{15}{2}$

[٣] (أ) إذا كان : س حتا ص + ص حتا س = ١ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

∵ س حتا ص + ص حتا س = ١ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

$\text{حتا ص} - \text{س حا ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\text{حتا س} - \text{ص حا س} = 0$

$\therefore (\text{حتا س} - \text{س حا ص})\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص حا س} - \text{حتا ص}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{حتا س} - \text{س حا ص}}{\text{ص حا س} - \text{حتا ص}}$

(ب) أوجد القيم القصوى للدالة د فى الفترة [−١ ، ١]

حيث : $\text{د}(\text{س}) = 2\,\text{س}^3 + 6\,\text{س}^2 + 5$

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = 2\,\text{س}^3 + 6\,\text{س}^2 + 5$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = 6\,\text{س}^2 + 12\,\text{س} = 6\,\text{س}\,(\text{س} + 2)$

نضع : $\text{د}'(\text{س}) = 0$ $\therefore \text{س} = 0 \in [-1 ، 1]$

، $\text{س} = -2 \notin [-1 ، 1]$ " مرفوض "

$\therefore \text{د}(0) = 5$ ، $\text{د}(-1) = 9$ ، $\text{د}(1) = 13$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٥

[٤] (أ) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2\,\text{س} + \text{س}^2 & \text{عندما س} < 0 \\ 2\,\text{س} - \text{س}^2 & \text{عندما س} \geq 0 \end{cases}$ أوجد :

(١) القيم العظمى و الصغرى المحلية للدلة د

(٢) $\int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\ \text{ءس}$

الحل

(١) $\because \text{د}(0^+) = \text{د}(0^-) = \text{د}(0) = 0$

∴ د(س) متعددة التعريف مجاها ح و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على ح

، ∵ عندما : س < ٠ فإن : $\text{د}(0 + \text{و}) - \text{د}(0) = 2(0 + \text{و}) + (0 + \text{و})^2 - 0$

$= 2\,\text{و} + \text{و}^2 = \text{و}\,(2 + \text{و})$

$\therefore \text{د}'(0^+) = \lim_{\text{و} \to 0^+} \frac{\text{د}(0 + \text{و}) - \text{د}(0)}{\text{و}} = \lim_{\text{و} \to 0^+} \frac{\text{و}\,(2 + \text{و})}{\text{و}} = 2$

، ∵ عندما : س > ٠ فإن : $\text{د}(0 + \text{و}) - \text{د}(0) = 2(0 + \text{و}) - (0 + \text{و})^2 - 0$

= ٢و − و^{٢} = و (٢ − و)

، د$^{/}_{-}$(٠) = نهـــا$_{و \to ٠^{-}}$ $\frac{د(٠ + و) - د(٠)}{و}$ = نهـــا$_{و \to ٠^{-}}$ $\frac{و(٢ - و)}{و}$ = ٢

∴ د$^{/}_{+}$(٠) = د$^{/}_{-}$(٠) = ٢ ∴ د$^{/}$(س) = { ٢ + ٢س عندما س < ٠ ، ٢ عندما س = ٠ ، ٢ − ٢س عندما س > ٠ }

بوضع : د$^{/}$(س) = ٠ ∴ ٢ + ٢س = ٠ عندما س < ٠ و منها : س = −١

، ٢ − ٢س = ٠ عندما س > ٠ و منها : س = ١

∴ (١ ، ١) ، (−١ ، −١) نقطتان حرجتان من الجدول التالى :

س	−∞		−١		٠		١		∞
إشارة د$^{/}$		−	·	+	·	+	·	−	
سلوك د		↘		↗		↗		↘	

د(١) = ١ قيمة عظمى محلية ، د(−١) = −١ قيمة صغرى محلية

(٢) $\int_{-١}^{٣}$ د(س) ء س = $\int_{-١}^{٠}$ (٢س + س^{٢}) ء س + $\int_{٠}^{٣}$ (٢س − س^{٢}) ء س = [س^{٢} + $\frac{١}{٣}$س^{٣}]$_{-١}^{٠}$ + [س^{٢} − $\frac{١}{٣}$س^{٣}]$_{٠}^{٣}$ = (٠ − ١ + $\frac{١}{٣}$) + (٩ − ٩ − ٠) = − $\frac{٢}{٣}$

(ب) يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله بمعدل ٢٧ سم^{٣}/ د ، أوجد معدل الزيادة فى مساحة أوجهه عند اللحظة التى يكون فيها طول حرفه ٣ سم

الحل

بفرض أن : طول حرف المكعب = ل وحدة طول

∴ حجم المكعب ح = ل^{٣} وحدة مكعبة ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٣ ل^{٢} × $\frac{ءل}{ءن}$

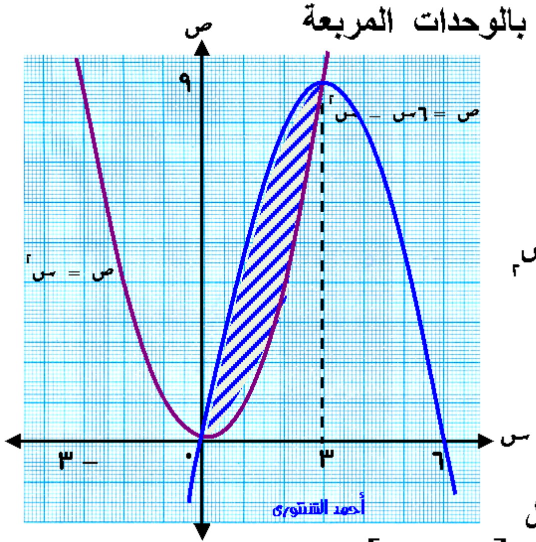
∴ ٢٧ = ٣ × ٩ × $\frac{ءل}{ءن}$ و منها : $\frac{ءل}{ءن}$ = ١ سم / د

، ∵ مساحة أوجه المكعب م = ٦ ل^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ١٢ ل × $\frac{ءل}{ءن}$ = ١٢ × ٣ × ١ = ٣٦ سم^{٢}/ د

[٥] (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^{٢} ، ص = ٦ س − س^{٢} بالوحدات المربعة

الحل



بفرض : ص$_{١}$ = س^{٢} ،

ص$_{٢}$ = س − س^{٢}

لايجاد نقط التقاطع نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

∴ س^{٢} = ٦س − س^{٢}

∴ ٢ س^{٢} − ٦ س = ٠

∴ ٢ س (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣

لاحظ : نقط التقاطع من الشكل المقابل

، ∵ ص$_{٢}$ ≥ ص$_{١}$ لكل : س ∈ [٠ ، ٣]

∴ م = $\int_{٠}^{٣}$ (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$) ء س = $\int_{٠}^{٣}$ (٦س − س^{٢} − س^{٢}) ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ (٦س − ٢س^{٢}) ء س = [٣ س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{٣}$

= (٢٧ − ١٨) − (٠) = ٩ وحدة مربعة

(ب) إذا كان للدالة د حيث د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س نقطة إنقلاب عند (٢ ، ٢) فأوجد قيمتى الثابتين أ ، ب ثم إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة

أحمد الشنتورى

الحل

∵ د(س) = س^{3} + ا س^{2} + ب س　　∴ د$'$(س) = ٣ س^{2} + ٢ ا س + ب

، د$''$(س) = ٦ س + ٢ ا

، ∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب للدالة

∴ د$''$(٢) = ٠　　∴ ١٢ + ٢ ا = ٠　　و منها : ا = −٦

، المنحنى للدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٢)　　∴ د(٢) = ٢

∴ ٨ − ٢٤ + ٢ ب = ٢　　و منها : ب = ٩

∴ د(س) = س^{3} − ٦ س^{2} + ٩ س

∴ د$'$(س) = ٣ س^{2} − ١٢ س + ٩ = ٣ (س − ٣) (س − ١)

، د$''$(س) = ٦ س − ١٢ = ٦ (س − ٢)

عندما : د$'$(س) = ٠ فإن : س = ٣ ، س = ١

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٣ ، س = ١

و تكون الدالة متزايدة فى] ٣ ، ∞ [، و فى] −∞ ، ١ [

و متناقصة فى] ١ ، ٣ [

، عندما : د$''$(س) = ٠ فإن : س = ٢

، ∵ د$''$(٣) = ٦ > ٠　　∴ د(٣) = ٠ قيمة صغرى محلية

، ∵ د$''$(١) = −٦ < ٠　　∴ د(١) = ٤ قيمة عظمى محلية

، ∵ د$''$(س) < ٠ فى] −∞ ، ٢ [يكون المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$''$(س) > ٠ فى] ٢ ، ∞ [يكون المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

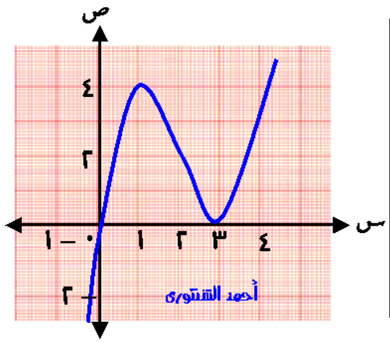
، النقطة (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب

، نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٠)

نقط إضافية : (٤ ، ٤) ، (−١ ، −١٦)

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	−∞		١		٢		٣		∞
إشارة د$'$		+	٠	−		−	٠	+	
سلوك د		↗		↘		↘		↗	
إشارة د$''$		−		−	٠	+		+	
تحدب د		لأعلى		لأعلى		لأسفل		لأسفل	
ص			٤		٢		٠		
			قيمة عظمى محلية		نقطة إنقلاب		قيمة صغرى محلية		



الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[ا] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) ميل المماس لمنحنى الدائرة س^{2} + ص^{2} = ٢٥ عند س = ٣ يساوى ....

(ا) $-\frac{٤}{٣}$　　(ب) $-\frac{٣}{٤}$　　(ح) $\frac{٥}{١٢}$　　(ء) $\frac{٤}{٣}$

الحل

∵ س^{2} + ص^{2} = ٢٥　　باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠　　و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $-\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

، س = ٣　فإن : ص = ± ٤　　∴ ميل المماس = $\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{\text{س} = ٣}$ = $-\frac{٣}{٤}$

(٢) إذا كان د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$　فإن د$'''$(٣) = ...

(ا) −٣٦　　(ب) −١٢　　(ح) ٦　　(ء) ٤

الحل

∵ د(س) = س (س − ٢)$^{-١}$

∴ د$'$(س) = (س − ٢)$^{-١}$ − س (س − ٢)$^{-٢}$

= (س − ٢)$^{-٢}$ (س − ٢ − س) = − ٢ (س − ٢)$^{-٢}$

∴ د$''$(س) = ٤ (س − ٢)$^{-٣}$ ، د$'''$(س) = − ١٢ (س − ٢)$^{-٤}$

∴ د$'''$(٣) = − ١٢

(٣) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتا^{٢}س ، ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٤}\pi$

فإن ص = ...

(أ) − (٢ + طتا س) (ب) − (٣ + طتا س)

(حـ) ٢ − طتا س (ء) ٣ − طتا س

الحل

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتا^{٢}س ∴ ص = ∫ قتا^{٢}س ءس = − طتا س + ث

، ∵ ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٤}\pi$ ∴ ٢ = − ١ + ث و منها : ث = ٣

∴ ص = − طتا س + ٣

(٤) إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ءس = ٧ ، $\int_{٤}^{٢}$ ر(س) ءس = ٢

فإن $\int_{٢}^{٤}$ [٢ د(س) − ٣ ر(س) − ٥] ءس تساوى ....

(أ) − ١٨ (ب) − ٨ (حـ) ١٠ (ء) ١٤

الحل

∵ $\int_{٤}^{٢}$ ر(س) ءس = ٢ ∴ $\int_{٢}^{٤}$ ر(س) ءس = − ٢

∴ $\int_{٢}^{٤}$ [٢ د(س) − ٣ ر(س) − ٥] ءس = ٢ $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ءس

− ٣ $\int_{٢}^{٤}$ ر(س) ءس − ٥ $\int_{٢}^{٤}$ ءس

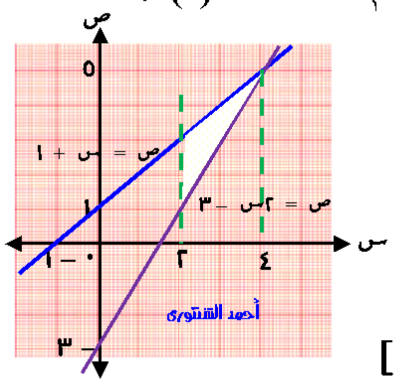
= ٢ × ٧ − ٣ × (− ٢) − ٥ [س]$_{٢}^{٤}$

= ١٤ + ٦ − ٥ × (٤ − ٢) = ٢٠ − ١٠ = ١٠

(٥) مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات ص = ٢ س − ٣ ، ص = س + ١ ، س = ٢ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) $\frac{٩}{٢}$ (ء) ٦

الحل



بفرض : ص$_{١}$ = ٢ س − ٣ ،

ص$_{٢}$ = س + ١

لايجاد نقط التقاطع نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

∴ ٢ س − ٣ = س + ١

∴ س = ٤

، ∵ ص$_{١}$ ≤ ص$_{٢}$ لكل : س ∈ [٢ ، ٤]

∴ م = $\int_{٢}^{٤}$ (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$) ءس = $\int_{٢}^{٤}$ (س + ١ − ٢ س + ٣) ءس

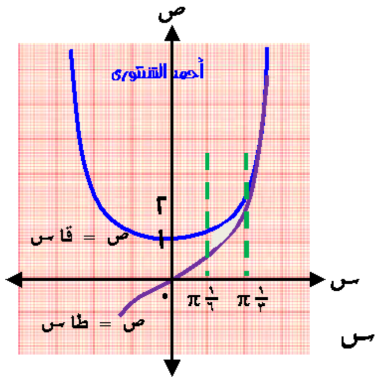
= $\int_{٢}^{٤}$ (٤ − س) ءس = [٤ س − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٢}^{٤}$

= (١٦ − ٨) − (٨ − ٢) = ٢ وحدة مربعة

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = طا س ، ص = قا س و المستقيمين س = $\frac{١}{٦}\pi$ ، س = $\frac{١}{٣}\pi$ دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}\pi$ (ب) $\frac{١}{٣}\pi$ (جـ) $\frac{٢}{٥}\pi$ (ء) ٢π

الحل



$ص_١ = طا\,س$ ، $ص_٢ = قا\,س$

، ∵ $ص_٢ \geq ص_١$ لكل : $س \in [\frac{١}{٦}\pi ، \frac{١}{٣}\pi]$

∴ $ح = \pi \int_{\frac{١}{٦}\pi}^{\frac{١}{٣}\pi} (ص_٢^٢ - ص_١^٢)\, ءس$

$= \pi \int_{\frac{١}{٦}\pi}^{\frac{١}{٣}\pi} (قا^٢ س - طا^٢ س)\, ءس$

$= \pi \int_{\frac{١}{٦}\pi}^{\frac{١}{٣}\pi} ءس = \pi [\,س\,]_{\frac{١}{٦}\pi}^{\frac{١}{٣}\pi}$

$= \pi [\frac{١}{٣}\pi - \frac{١}{٦}\pi] = \frac{١}{٦}\pi^٢$ وحدة مكعبة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث : $ص = س^٢ لو_هـ س$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ س لو_هـ س + س^٢ \times \frac{١}{س} = ٢ س لو_هـ س + س$

$= س (٢ لو_هـ س + ١) = س (لو_هـ س^٢ + ١)$

(ب) إذا كانت $د(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢}$ فأوجد فترات التحدب إلى أعلى و إلى أسفل و نقط الأنقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د

الحل

∵ $د(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٤)^{-\frac{١}{٣}}$

، $د''(س) = -\frac{٢}{٩}(س - ٤)^{-\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(س - ٤)^٤}}$

س	∞ −	٤	∞
إشارة د''	−	غير موجودة	−
تحدب د	لأعلى		لأعلى

عندما : س < ٤ فإن : د''(س) < ٠ .

، عندما : س > ٤ فإن : د''(س) < ٠ .

أى أن : د''(س) < ٠ . لكل س ∈ ح − { ٤ }

لاحظ أن : د''(س) غير موجودة عندما : س = ٤

∴ منحنى الدالة د محدب لأعلى لكل س ∈ ح − { ٤ }

أى على :] ٤ ، ∞ [،] − ∞ ، ٤ [و لا توجد نقط إنقلاب

[٣] (أ) أوجد : (١) $\int س (س - ٥)^٣ ءس$ ،

(٢) $\int ٤ س هـ^{٢ س^٢} ءس$

الحل

(١) $\int (س - ٥ + ٥) (س - ٥)^٣ ءس = \int (س - ٥)^٤ ءس$

$+ ٥ \int (س - ٥)^٣ ءس = \frac{١}{٥} (س - ٥)^٥ + \frac{٥}{٤} (س - ٥)^٤ + ث$

$= \frac{١}{٢٠} (س - ٥)^٤ (٤ س - ٢٠ + ٢٥)$

$= \frac{١}{٢٠} (س - ٥)^٤ (٤ س + ٥)$

حل آخر

نضع : ص = س − ٥ ∴ ءص = ءس ، س = ص + ٥ .... أكمل

(٢) نضع : $ص = ٤ س$ ∴ $ءص = ٤ ءس$ ،

$ءع = هـ^{٢ س^٢} ءس$ ∴ $ع = \frac{١}{٢} هـ^{٢ س^٢}$

$\therefore$ المقدار $= ٤\,\text{س} \times \frac{١}{٢}\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \int ٤ \times \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ء}\,\text{س}$

$= ٢\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ء}\,\text{س} = ٢\,\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,(٢\,\text{س} - ١) + \text{ث}$

(ب) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٤\,\text{س}^{٣}$ على الفترة $[\,٠ ، ٤\,]$

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٤\,\text{س}^{٣}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{٣} - ١٢\,\text{س}^{٢} = ٤\,\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ٣)$

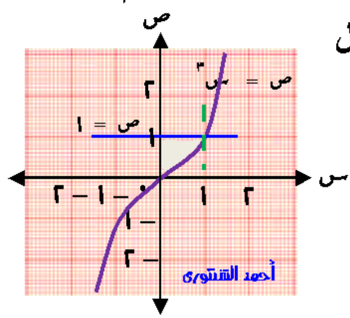
نضع : $\text{د}'(\text{س}) = ٠$ $\quad \therefore \text{س} = ٠ \in [\,٠ ، ٤\,]$

، $\text{س} = ٣ \in [\,٠ ، ٤\,]$

، $\because \text{د}(٠) = ٠$ ، $\text{د}(٣) = -٢٧$ ، $\text{د}(٤) = ٠$

$\therefore$ القيمة العظمى المطلقة = صفر ، القيمة الصغرى المطلقة = -٢٧

[٤] (أ) إذا كان حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ و المستقيمين $\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ١$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك إسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة طول فما طول نصف قطر السلك



الحل

$\text{ص}_{١} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{ص}_{٢} = ١$

نضع : $\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$ $\quad \therefore \text{س}^{٣} = ١$

و منها : $\text{س} = ١$

، $\because \text{ص}_{٢} \geq \text{ص}_{١}$ لكل : $\text{س} \in [\,٠ ، ١\,]$ ، الدوران حول محور السينات

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{٠}^{١} (\text{ص}_{٢}^{٢} - \text{ص}_{١}^{٢})\,\text{ء}\,\text{س} = \pi \int_{٠}^{١} (١ - \text{س}^{٦})\,\text{ء}\,\text{س}$

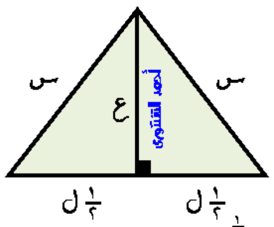
$= \pi\,[\,\text{س} - \frac{١}{٧}\,\text{س}^{٧}\,]_{٠}^{١} = \pi\,[\,١ - \frac{١}{٧}\,] = \frac{٦}{٧}\,\pi$ وحدة مكعبة

، $\because$ حجم السلك = حجم الجسم الدورانى

$\therefore \pi\,\text{نق}^{٢} \times ٤٢ = \frac{٦}{٧}\,\pi$ و منها : $\text{نق} = \frac{١}{٧}$ وحدة طول

(ب) يتناقص الضلعان المتساويان فى مثلث متساوى الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم / د ، ما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث متساوى الأضلاع

الحل



بفرض أن : طول كل من الساقين = س سم

$\therefore \frac{\text{ء}\,\text{س}}{\text{ء}\,\text{ن}} = -٣$ سم / د ، من هندسة الشكل :

$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢}$ $\quad \therefore \text{ع} = (\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ مساحة المثلث $\text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{ع} = \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,(\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

، $\frac{\text{ء}\,\text{م}}{\text{ء}\,\text{ن}} = \frac{١}{٤}\,\text{ل}\,(\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\,\text{س}\,\frac{\text{ء}\,\text{س}}{\text{ء}\,\text{ن}}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{ل}\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (-٣)$

$= -\frac{٣}{٢}\,\text{ل}\,\text{س}\,(\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{ل}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

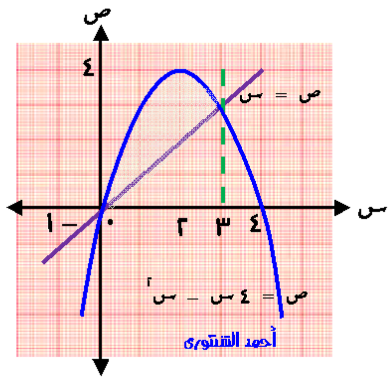
ليصبح المثلث متساوى الأضلاع نضع : $\text{س} = \text{ل}$ فيكون :

$\frac{\text{ء}\,\text{م}}{\text{ء}\,\text{ن}} = -\frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}\,(\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\,\text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}\,(\frac{٣}{٤}\,\text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{-\frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}}{\frac{١}{٢}\sqrt{٣}\,\text{س}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\sqrt{٣}\,\text{س}$

أى أن : المساحة تتناقص بمعدل $\sqrt{٣}\,\text{س}$ سم^{٢} / د

[٥] (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين س − ص = ٠ ، ص = ٤ س − $س^{٢}$



الحل

بفرض : $ص_{١}$ = س ، $ص_{٢}$ = ٤ س − $س^{٢}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_{١}$ = $ص_{٢}$

∴ ٤ س − $س^{٢}$ = س

∴ $س^{٢}$ − ٣ س = ٠

∴ س (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣

، ∵ $ص_{٢}$ ≥ $ص_{١}$ لكل : س ∈ [٠ ، ٣]

∴ م = $\int_{٠}^{٣}$ ($ص_{٢}$ − $ص_{١}$) ء س = $\int_{٢}^{٤}$ (٤ س − $س^{٢}$ − س) ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ (٣ س − $س^{٢}$) ء س = $[\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}]_{٠}^{٣}$

= ($\frac{٢٧}{٢}$ − ٩) − (٠) = $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

(ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية : د(٠) = ٣ ، د′(٢) = د′(−٢) = ٠ ،

د′(س) > ٠ عندما : −٢ < س < ٢ ،

د″(س) < ٠ عندما : س > ٠ ،

د″(س) > ٠ عندما : س < ٠ .

الحل

∵ د(٠) = ٣ ∴ المنحنى يمر بالنقط (٠ ، ٣)

، ∵ د′(٢) = د′(−٢) = ٠

∴ للمنحنى نقط حرجة عند س = ٢ ، س = −٢

و عند هاتين النقطتين المماس // محور السينات

، ∵ د′(س) > ٠ عندما : −٢ < س < ٢

∴ د(س) تزايدية فى] −٢ ، ٢ [

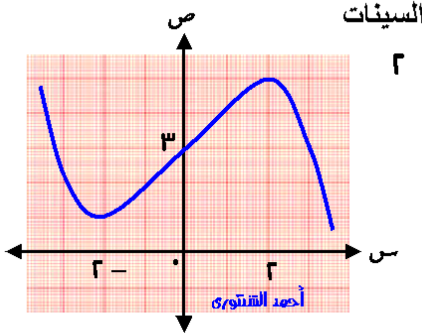
، ∵ د″(س) < ٠ عندما س > ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى فى] ٠ ، ∞ [

، ∵ د″(س) > ٠ عندما س < ٠

∴ المنحنى محدب لأسفل فى] −∞ ، ٠ [

، النقطة (٠ ، ٣) نقطة إنقلاب



الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان ص = $\frac{٣ س − ٥}{س − ٢}$ فإن عند س = ١ ، $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ يساوى ....

(أ) −١٢ (ب) −٦ (حـ) ٦ (ء) ١٢

الحل

∵ ص = (٣ س − ٥) $(س − ٢)^{−١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $(س − ٢)^{−١}$ − $(س − ٢)^{−٢}$ (٣ س − ٥)

= $(س − ٢)^{−٢}$ [٣ (س − ٢) − (٣ س − ٥)]

= $(س − ٢)^{−٢}$ [٣ س − ٦ − ٣ س + ٥] = − $(س − ٢)^{−٢}$

، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ $(س − ٢)^{−٣}$ ،

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = -٦ (\text{س} - ٢)^{-٤} = \frac{-٦}{(\text{س} - ٢)^{٤}}$ ∴ $\left[\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}\right]_{\text{س} = ١} = -٦$

(٢) $\int \text{قا}^{٣}\text{س طاس ءس} = ...$

(أ) $\frac{١}{٤}\text{ قا}^{٤}\text{س} + \text{ث}$ (ب) $\frac{١}{٣}\text{ قا}^{٣}\text{س} + \text{ث}$

(حـ) $\frac{١}{٢}\text{ قا}^{٢}\text{س} + \text{ث}$ (ء) $-\frac{١}{٢}\text{ قا}^{٢}\text{س} + \text{ث}$

الحل

$\int \text{قا}^{٣}\text{س طاس ءس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س (قاس طاس) ءس} =$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س (قاس)}' \text{ ءس} = \frac{١}{٣}\text{ قا}^{٣}\text{س} + \text{ث}$

(٣) العمودى للدائرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٢$ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة ....

(أ) (٢ ، ٣)   (ب) (١ ، ١)

(حـ) (٠ ، ٠)   (ء) (−٢ ، −٢)

الحل

∵ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ ∴ $٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ ومنها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

، بفرض أن : النقطة (حـ ، ء) على الدائرة

∴ ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(\text{حـ ، ء})} = -\frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ ∴ ميل العمودى = $\frac{\text{ء}}{\text{حـ}}$

، معادلة العمودى هى : $\text{ص} - \text{ء} = \frac{\text{ء}}{\text{حـ}} (\text{س} - \text{حـ})$

أى : حـ ص − حـ ء = ء س − حـ ء   أى : ء س − حـ ص = ٠ .

وهى معادلة مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)   " معادلة قطر الدائرة "

أى أن : العمودى على الدائرة بالنقطة (٠ ، ٠)

(٤) منحنى الدالة د حيث $\text{د(س)} = (\text{س} - ٢)\text{ هـ}^{\text{س}}$ يكون محدباً لأسفل على الفترة ....

(أ)] −∞ ، ∞ [(ب)] −١ ، ٢ [

(حـ)] ٠ ، ٢ [(ء)] ٠ ، ∞ [

الحل

∵ $\text{د(س)} = (\text{س} - ٢)\text{ هـ}^{\text{س}}$

∴ $\text{د}'\text{(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} + (\text{س} - ٢)\text{ هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}} (١ + \text{س} - ٢)$

$= \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - ١)$

، $\text{د}''\text{(س)} = \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - ١) + \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} - ١ + ١)$

$= \text{س هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{د}''\text{(س)} = ٠$ عندما : س = ٠ .

، ∵ $\text{د}''\text{(س)} > ٠$ عندما : س > ٠ .

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل فى] ٠ ، ∞ [

س	−∞	٠	∞
إشارة د″	−	٠	+
تحدب منحنى د	لأعلى		لأسفل

(٥) $\int_{-١}^{٣} ٣\text{س} \,|\text{س} - ٤|\, \text{ءس}$ يساوى ....

(أ) −٢٧   (ب) −٢٠   (حـ) ٢٠   (ء) ٢٧

الحل

$\int_{-١}^{٣} ٣\text{س} \,|\text{س} - ٤|\, \text{ءس} = \int_{-١}^{٣} ٣\text{س} (-\text{س} + ٤)\text{ ءس}$

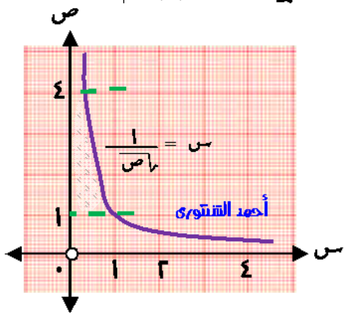
$= \int_{-١}^{٣} (-٣\text{س}^{٢} + ١٢\text{س})\text{ ءس} = \left[-\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٣}$

$= (-٢٧ + ٥٤) - (١ + ٦) = ٢٠$

(٦) عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $س = \frac{١}{\sqrt{ص}}$ ، $١ \le ص \le ٤$ ، و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) $٣\sqrt{٢}\,\pi$ (جـ) ٢π لو$_{هـ}٢$ (د) $\frac{٢}{٣}\pi$ لو٣

الحل



∵ الدوران حول محور الصادات :

∴ $ح = \pi \int_{١}^{٤} س^{٢}\, ءص = \pi \int_{١}^{٤} \frac{١}{ص}\, ءص$

$= \pi\,[\,لو_{هـ} ص\,]_{١}^{٤} = \pi\,[\,لو_{هـ}٤ - لو_{هـ}١\,]$

$= ٢\pi$ لو$_{هـ}٢$ وحدة مكعبة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int (٣س^{٢} - ٤هـ^{٢س})\, ءس$ ،   (٢) $\int \frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣}}\, ءس$

الحل

(١) $\int (٣س^{٢} - ٤هـ^{٢س})\, ءس = ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ث$

$= س^{٣} - ٢هـ^{٢س} + ث$

(٢) نضع : $ص = س + ٣$ ∴ $ءص = ءس$ ، $س - ١ = ص - ٤$

∴ المقدار $= \int (ص - ٤) \times ص^{-\frac{١}{٢}}\, ءص = \int (ص^{\frac{١}{٢}} - ٤ص^{-\frac{١}{٢}})\, ءص$

$= \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} - ٤ \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣}(س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} - ٨(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣}(س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\,[\,س + ٣ - ١٢\,] + ث$

$= \frac{٢}{٣}(س + ٣)^{\frac{١}{٢}}(س - ٩) + ث$

حل آخر

ضع : $س - ١ = (س + ٣) - ٤$ ثم أكمل

(ب) إذا كان : $حا ص + حتا ٢س = ٠$ فأثبت أن :

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} طا ص = ٤ حتا ٢س قا ص$$

الحل

∵ $حا ص + حتا ٢س = ٠$ باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س

∴ $حتا ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ حا ٢س = ٠$

، $حتا ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - حا ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} - ٤ حتا ٢س = ٠$

بالقسمة ÷ حتا ص ينتج : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} طا ص = ٤ حتا ٢س قا ص$

[٣] (أ) إذا كان $\int_{١}^{٤} د(س)\, ءس = ٧$ ، $\int_{٤}^{١} ر(س)\, ءس = ٣$

أحسب قيمة $\int_{١}^{٤} [\,د(س) + ٢ر(س) - ٤\,]\, ءس$

الحل

∵ $\int_{٤}^{١} ر(س)\, ءس = ٣$ ∴ $\int_{١}^{٤} ر(س)\, ءس = -٣$

∴ $\int_{١}^{٤} [\,د(س) + ٢ر(س) - ٤\,]\, ءس = \int_{١}^{٤} د(س)\, ءس + ٢\int_{١}^{٤} ر(س)\, ءس - ٤\int_{١}^{٤} ءس$

$= ٧ + ٢ \times (-٣) - ٤\,[\,س\,]_{١}^{٤}$

$= ٧ - ٦ - ٤ \times (٤ - ١) = ١ - ١٢ = -١١$

(ب) إذا كان منحنى للدالة د حيث :

د(س) = أ س^{3} + ب س^{2} + حـ س + ء له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤) و له نقطة إنقلاب عند (١ ، ٢)
أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ د(س) = أ س^{3} + ب س^{2} + حـ س + ء

∴ د$'$(س) = ٣ أ س^{2} + ٢ ب س + حـ ، د$''$(س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ (١ ، ٢) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة

∴ د$''$(١) = ٠ ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠ و منها : ب = −٣ أ (١)

، ∵ (٢ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية لمنحنى الدالة

∴ د$'$(٢) = ٠ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + حـ = ٠ ، بالتعويض من (١) ينتج :

١٢ أ − ١٢ أ + حـ = ٠ و منها : حـ = ٠ (٢)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة (١ ، ٢) ∴ د(١) = ٢

∴ أ + ب + حـ + ء = ٢ ، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ أ − ٣ أ + ء = ٢ ∴ −٢ أ + ء = ٢ (٣)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٤) ∴ د(٢) = ٤

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ء = ٤ ، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ ٨ أ − ١٢ أ + ء = ٤ ∴ −٤ أ + ء = ٤ (٤)

، بطرح (٤) من (٣) ينتج : ٢ أ = −٢ ∴ أ = −١

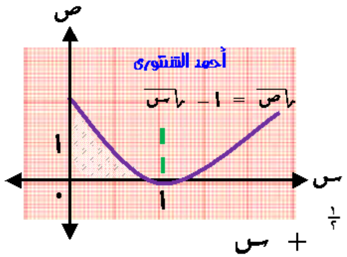
، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ٣

، بالتعويض فى (٣) ينتج : ٢ + ء = ٢ و منها : ء = ٠

∴ د(س) = − س^{3} + ٣ س^{2}

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة بالمنحنى $\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{\text{ص}}$ = ١
و المستقيمين س = ٠ ، ص = ٠

الحل



∵ ص = ٠ ∴ $\sqrt{\text{س}}$ = ١ ∴ س = ١

∴ حدود التكامل هى : س = ٠ ، س = ١

، ∵ $\sqrt{\text{ص}}$ = ١ − $\sqrt{\text{س}}$ بالتربيع :

∴ ص = ١ − ٢ $\sqrt{\text{س}}$ + س = ١ − ٢ س$^{\frac{1}{2}}$ + س

∴ م = $\int_{0}^{1}$ (١ − ٢ س$^{\frac{1}{2}}$ + س) ء س = [س − $\frac{4}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{1}{2}$ س^{2}]$_{0}^{1}$

= ١ − $\frac{4}{3}$ + $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{6}$ وحدة مربعة

(ب) ارسم منحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية :

د(٤) = ٢ د(٣) = ٤ ، د(٢) = ٠

د$'$(س) < ٠ عندما : س > ٤ أو < ٢ ،

د$''$(س) < ٠ عندما : س > ٣ ،

د$''$(س) > ٠ عندما : س < ٣

الحل

∵ د(٤) = ٤ ∴ المنحنى يمر بالنقط (٤ ، ٤)

، ∵ ٢ د(٣) = ٤ ∴ د(٣) = ٢ ∴ المنحنى يمر بالنقط (٣ ، ٤)

، ∵ د(٢) = ٠ ∴ المنحنى يمر بالنقط (٢ ، ٠)

، ∵ د$'$(س) < ٠ عندما : س > ٤ أو س < ٢

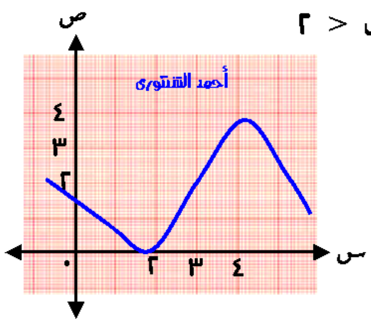
∴ د(س) تناقصية فى]−∞ ، ٢[

،]٤ ، ∞[

، ∵ د$''$(س) < ٠ عندما س > ٣

∴ المنحنى محدب لأعلى فى]٣ ، ∞[

، ∵ د$''$(س) > ٠ عندما س < ٣

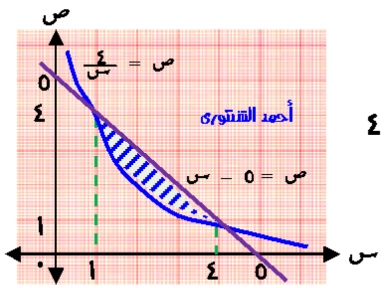


∴ المنحنى محدب لأسفل فى] – ∞ ، ٣ [

، النقطة (٣ ، ٢) نقطة إنقلاب

[٥] (أ) أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = ٥ – س دورة كاملة واحدة حول محور السينات يساوى ٩ π من الوحدات المكعبة

الحل



ص١ = $\frac{٤}{س}$ ، ص٢ = ٥ – س

نضع : ص١ = ص٢ ∴ ٥ س – س² = ٤

∴ س² – ٥ س + ٤ = ٠

∴ (س – ١) (س – ٤) = ٠

و منها : س = ١ ، س = ٤

∵ ص٢ ≥ ص١ لكل : س ∈ [١ ، ٤] ، الدوران حول محور السينات

∴ ح = π $\int_{١}^{٤}$ (ص٢² – ص١²) ء س

= π $\int_{١}^{٤}$ (٢٥ – ١٠ س + س² – $\frac{١٦}{س^٢}$) ء س

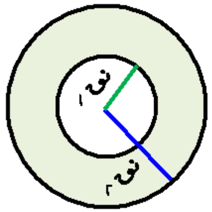
= π [٢٥ س – ٥ س² + $\frac{١}{٣}$ س³ + $\frac{١٦}{س}$]$_{١}^{٤}$

= π [(١٠٠ – ٨٠ + $\frac{٦٤}{٣}$ + ٤) – (٢٥ – ٥ + $\frac{١}{٣}$ + ١٦)]

= ٩ π وحدة مكعبة

(ب) إذا كانت ع مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولا نصفا قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ أوجد معدل تغير ع بالنسبة للزمن فى اللحظة التى يكون فيها نق٢ = ١٠ سم ، نق١ = ٦ سم ، إذا علم أن عند هذه اللحظة نق١ يتزايد بمعدل ٠,٣ سم / ث ، نق٢ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم / ث

الحل



من الشكل : ع = π (نق٢² – نق١²)

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = π (٢ نق٢ $\frac{ءنق٢}{ءن}$ – ٢ نق١ $\frac{ءنق١}{ءن}$)

= π (٢ × ١٠ × (– ٠,٢) – ٢ × ٦ × ٠,٣)

= – ٧,٦ π سم² / د   أى أن : ع تتناقص بمعدل ٧,٦ π سم² / د

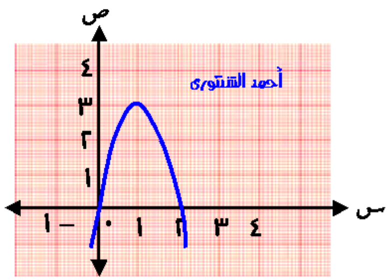
الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] يوضح الشكل المقابل : منحنى د/(س) للدالة د حيث :

د (س) = أ س³ + ب س²

، أ ، ب ثابتان أكمل



(١) الدالة متناقصة لكل س ∈ ....

(٢) لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ ....

(٣) منحنى د محدب لأعلى على الفترة ....

(٤) توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ...

(٥) د (١) = ...

(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٢ ، س = ٠ بالوحدات المربعة يساوى ....

الحل

∵ $د(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}$ ∴ $د'(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س$

، ∵ منحنى $د'(س)$ يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٠)

∴ $٣ أ + ٢ ب = ٣$ ، $١٢ أ + ٤ ب = ٠$ و بحل المعادلتين ينتج :

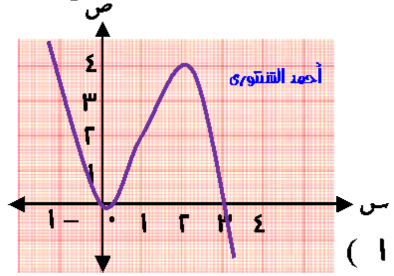
$أ = -١$ ، $ب = ٣$

∴ $د(س) = -س^{٣} + ٣ س^{٢}$

، $د'(س) = -٣ س^{٢} + ٦ س$

$= -٣ س (س - ٢)$

، $د''(س) = -٦ س + ٦ = -٦ (س - ١)$



الشكل المقابل يبين منحنى $د(س)$

(١) ∵ $د'(س) < ٠$ عندما : $س < ٠$ أو > ٢

∴ الدالة متناقصة لكل س ∈]-∞ ، ٠[، س ∈]٢ ، ∞[

(٢) ∵ $د'(س) = ٠$ عندما : $س = ٠$ ، $س = ٢$

∴ لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ { ٠ ، ٢ }

(٣) ∵ $د''(س) < ٠$ عندما : $س > ١$

∴ منحنى د محدب لأعلى على الفترة]١ ، ∞[

(٤) ∵ $د'(س) < ٠$ عندما : $س < ٠$ ، $د'(س) > ٠$ عندما : $س > ٠$

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند $س = ٠$ " لاحظ : $د''(٠) > ٠$ "

(٥) $د(١) = ٢$

(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين $س = ٢$ ، $س = ٠$

$م = \int_{٠}^{٢} (-س^{٣} + ٣ س^{٢}) ء س = \left[-\frac{١}{٤} س^{٤} + س^{٣} \right]_{٠}^{٢}$

$= -٤ + ٨ = ٤$ وحدات مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int قتا^{٢} \frac{س + ٥}{٢} ء س$ ، (٢) $\int \frac{٥ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س$

الحل

(١) $\int قتا^{٢} \frac{س + ٥}{٢} ء س = -٢ ظتا \frac{س + ٥}{٢} + ث$

(٢) $\int \frac{٥ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س = \frac{٥}{٦} \int \frac{٦ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س = \frac{٥}{٦} \int \frac{(٣ س^{٢} - ١)'}{٣ س^{٢} - ١} ء س$

$= \frac{٥}{٦} لو_{هـ} | ٣ س^{٢} - ١ | + ث$

(ب) للدالة د حيث $د(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س - ١$

(١) عين فترات التزايد و التناقص للدالة د

(٢) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢]

الحل

س	-∞ ١ ٣ ∞		
إشارة د'	+	٠ - ٠	+
سلوك د	↗	↘	↗

∵ $د(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س - ١$

∴ $د'(س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩$

$= ٣ (س^{٢} - ٤ س + ٣)$

$= ٣ (س - ١)(س - ٣)$

، $د(س) = ٠$ عندما : $س = ١$ ، $س = ٣$

∴ الدالة متزايدة على]-∞ ، ١[،]٣ ، ∞[، متناقصة على]١ ، ٣[

، ∵ $د(س) = ٠$ عندما : $س = ١$ ∈ [٠ ، ٢] ،

$س = ٣$ ∉ [٠ ، ٢]

، ∵ $د(٠) = -١$ ، $د(١) = ٣$ ، $د(٢) = ١$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = -١

[٣] (أ) إذا كان د(س) = ٤ + طتا س − قا^{٢} س أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة د عند نقطة تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤}\pi$

الحل

∵ د(س) = ٤ + طتا س − قا^{٢} س

عندما : س = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن : د(س) = ٤ + ١ − ٢ = ٣

، د$^{/}$(س) = − قتا^{٢} س − ٢ قا س × قا س طا س

= − قتا^{٢} س − ٢ قا^{٢} س طا س

، ميل المماس = $[$د$^{/}$(س)$]_{\frac{١}{٤}\pi}$ = −٢ − ٢ × ٢ × ١ = −٦

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

، معادلة العمودى هى : ص − ٣ = $\frac{١}{٦}$ (س − $\frac{١}{٤}\pi$)

أى : س − ٦ ص + ١٨ − $\frac{١}{٤}\pi$ = ٠

(ب) خزان فارغ سعته ١٠ أمتار مكعبة يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل (٢ ن + ٣) متر مكعب / دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

الحل

نفرض أن : حجم الخزان = ح ∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٣

∴ ح = ∫ (٢ ن + ٣) ءن = ن^{٢} + ٣ ن + ث

عندما يكون الخزان فارغاً فإن : ح = ٠ ، ن = ٠ ∴ ث = ٠

∴ ح = ن^{٢} + ٣ ن ، عندما يمتلئ الخزان فإن : ح = ١٠ م^{٣}

∴ ١٠ = ن^{٢} + ٣ ن ∴ ن^{٢} + ٣ ن − ١٠ = ٠

∴ (ن − ٢) (ن + ٥) = ٠ ∴ ن = − ٥ مرفوض

، ن = ٢ أى أن : الزمن اللازم لامتلاء الخزان = ٢ دقيقة

[٤] (أ) أوجد نهـا$_{\text{س} \to \infty}$ $\left(\frac{\text{٢س} - ١}{\text{٢س} + ١}\right)^{\text{٢س}}$

الحل

بوضع : ص = ٢ س + ١ ∴ ٢ س = ص − ١

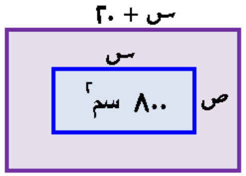
، ٢ س − ١ = ص − ٢ ، عندما : س ← ∞ فإن : ص ← ∞

∴ المقدار = نهـا$_{\text{ص} \to \infty}$ $\left(\frac{\text{ص} - ٢}{\text{ص}}\right)^{\text{ص} - ١}$

= نهـا$_{\text{ص} \to \infty}$ $\left(١ - \frac{٢}{\text{ص}}\right)^{\text{ص}}$ + نهـا$_{\text{ص} \to \infty}$ $\left(١ - \frac{٢}{\text{ص}}\right)^{-١}$

= هـ$^{-٢}$ × ١ = هـ$^{-٢}$

(ب) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم^{٢} من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى و السفلى ١٠ سم ، كل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن



الحل

نفرض أن : بعدا المادة المطبوعة هما س سم ، ص سم

∴ بعدا الملصق هما : س + ٢٠ سم ، ص + ١٠ سم ،

س ص = ٨٠٠ سم^{٢} ومنها : ص = $\frac{٨٠٠}{\text{س}}$

∴ مساحة الملصق م = د(س) = (س + ٢٠) (ص + ١٠)

∴ د(س) = (س + ٢٠) ($\frac{٨٠٠}{\text{س}}$ + ١٠) = ١٠ س + $\frac{١٦٠٠٠}{\text{س}}$ + ١٠٠٠

∴ د/(س) = ١٠ − $\frac{١٦٠٠٠}{س^٢}$ ، د//(س) = $\frac{٣٢٠٠٠}{س^٣}$

، د/(س) = ٠ عندما : ١٠ س^٢ = ١٦٠٠٠ ومنها : س = ٤٠

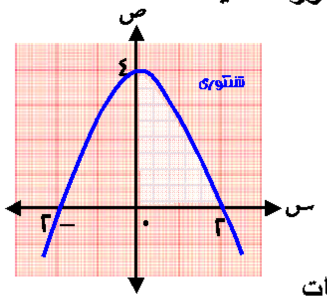
، ∵ د//(٤٠) > ٠ ∴ س = ٤٠ تجعل مساحة الملصق أصغر ما يمكن

∴ ص = ٢٠ و تكون أبعاد الملصق هى :

٤٠ + ٢٠ = ٦٠ سم ، ٢٠ + ١٠ = ٣٠ سم

[٥] (أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٤ − س^٢ و الجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات دورة كاملة حول محور السينات

الحل



∵ ص = ٤ − س^٢ ، ص = ٠

∴ ٤ − س^٢ = ٠ ∴ س^٢ − ٤ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ٢) = ٠

و منها : س = ٢ ، س = − ٢ مرفوض

حيث المنطقة محددة بالجزأين الموجبين لمحورى الإحداثيات

، الدوران حول محور السينات

∴ ح = π $\int_{٠}^{٢}$ ص^٢ ء س = π $\int_{٠}^{٢}$ (١٦ − ٨ س^٢ + س^٤) ء س

= π [١٦ س − $\frac{٨}{٣}$ س^٣ + $\frac{١}{٥}$ س^٥]$_{٠}^{٢}$

= π (٣٢ − $\frac{٦٤}{٣}$ + $\frac{٣٢}{٥}$) = $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة مكعبة

(ب) إذا كان د(س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان أوجد قيمتى أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، و نقطة إنقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د

الحل

∵ د(س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س + ٤

∴ د/(س) = ٣ س^٢ + ٢ أ س + ب ، د//(س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة إنقلاب ∴ د//(١) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ أ و منها : أ = − ٣

، ∵ عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية ∴ د/(٢) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ × (− ٣) × ٢ + ب و منها : ب = ٠

∴ د(س) = س^٣ − ٣ س^٢ + ٤

∴ د/(س) = ٣ س^٢ − ٦ س = ٣ س (س − ٢)

∴ د/(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٠ ، س = ٢

و تكون الدالة متزايدة فى] ٢ ، ∞ [، و فى] − ∞ ، ٠ [

و متناقصة فى] ٠ ، ٢ [

، د//(س) = ٦ س − ٦ = ٦ (س − ١)

، ∵ د//(٠) < ٠ ∴ د(٠) = ٤ قيمة عظمى محلية

، ∵ د//(٢) > ٠ ∴ د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

، ∵ د//(س) = ٠ عندما : س = ١

، ∵ د//(س) < ٠ فى] − ∞ ، ١ [∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د//(س) > ٠ فى] ١ ، ∞ [∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

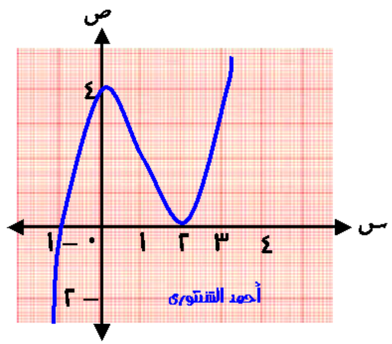
، النقطة (١ ، ٢) نقطة إنقلاب

، نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (−١ ، ٠)

نقط إضافية : (٣ ، ٤) ، (−٢ ، −١٦)

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	$-\infty$		٠		١		٢		∞
إشارة د′		+	٠		−		٠	+	
سلوك د		↗			↘			↗	
إشارة د″				−	٠	+			
تحدب د			لأعلى				لأسفل		
ص			٤		٢		٠		
			قيمة عظمى محلية		نقطة إنقلاب		قيمة صغرى محلية		



الاختبار السادس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(١) القيمة العظمى المحلية للدالة أكبر من القيمة الصغرى المحلية

(ب) (أ)

الحل

(١) (ب) ، التصحيح : القيمة العظمى المطلقة للدالة أكبر من القيمة الصغرى المطلقة

(٢) معدل تغير $\sqrt{ن^{٢}+٣}$ بالنسبة إلى $\frac{ن}{ن+١}$ هو $\frac{ن(ن+١)^{٢}}{\sqrt{ن^{٢}+٣}}$

(ب) (أ)

الحل

(٢) (أ) لأن : بوضع : $ص = \sqrt{ن^{٢}+٣} = (ن^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٢}(ن^{٢}+٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ن = \frac{ن}{\sqrt{ن^{٢}+٣}}$ ،

$ع = \frac{ن}{ن+١} \quad \therefore \frac{ءع}{ءن} = \frac{(ن+١)\times ١ - ن \times ١}{(ن+١)^{٢}} = \frac{١}{(ن+١)^{٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءع}{ءن} = \frac{ن(ن+١)^{٢}}{\sqrt{ن^{٢}+٣}}$

(٣) إذا كان $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٢$ فإن : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{-١}{س\sqrt{س}}$

(ب) (أ)

الحل

(٣) (أ) لأن : $\because \sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٢ \quad \therefore ص^{\frac{١}{٢}} = ٢ - س^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{١}{٢} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} \quad \therefore \frac{ءص}{ءس} = س^{-\frac{١}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{ءس}$

$= -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}} \times س^{-\frac{١}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}}$

$= -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{-١} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} \times (٢ - س^{\frac{١}{٢}}) + \frac{١}{٢} س^{-١}$

$= -س^{-\frac{٣}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{-١} = -س^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{-١}{س\sqrt{س}}$

(٤) $\int \frac{س-٤}{(س-٢)^{٦}} ءس = \frac{٧(س-٤)^{٢}}{٢(س-٢)^{٧}} + ث$ (أ) (ب)

الحل

(٤) (ب) ، التصحيح :

الطرف الأيمن $= \int (س-٤)(س-٢)^{-٦} ءس$

$= \int (س-٢-٢)(س-٢)^{-٦} ءس$

$= \int (س-٢)^{-٥} ءس - ٢\int (س-٢)^{-٦} ءس$

$= -\frac{١}{٤}(س-٢)^{-٤} - ٢ \times \left(-\frac{١}{٥}\right)(س-٢)^{-٥} + ث$

$= -\frac{١}{٤}(\text{س}-٢)^{-٤} + \frac{١}{٣}(\text{س}-٢)^{-٥} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٢}(\text{س}-٢)^{-٥}\left[-٣(\text{س}-٢)+٤\right] + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٢}(\text{س}-٢)^{-٥}(-٣\text{س}+٦+٤) + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٢}(\text{س}-٢)^{-٥}(١٠-٣\text{س}) + \text{ث}$

(٥) إذا كان $\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

(ب) (أ)

الحل

(٥) (أ) لأن : ∵ $\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} - ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ١ - ١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

(٦) إذا كانت (أ ، د(أ)) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة د فإن $\text{د}''(\text{أ}) = \text{صفر}$

(ب) (أ)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : إذا كانت (أ ، د(أ)) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة فإن $\text{د}''(\text{أ}) = \text{صفر}$ أو $\text{د}''(\text{أ})$ غير موجودة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلي :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٧\text{س}^٣}{٢-٥\text{س}^٤}\,\text{ء س}$ ، (٢) $\int \left(٣\,\text{هـ}^{-٥\text{س}} + \frac{\pi}{\text{س}}\right)\text{ء س}$

الحل

(١) المقدار $= \frac{٧}{٢٠}\int \frac{٢٠\text{س}^٣}{٢-٥\text{س}^٤}\,\text{ء س} = \int \frac{(٢-٥\text{س}^٤)'}{٢-٥\text{س}^٤}\,\text{ء س}$

$= \frac{٧}{٢٠}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|٢-٥\text{س}^٤\right| + \text{ث}$

(٢) المقدار $= ٣\int \text{هـ}^{-٥\text{س}}\,\text{ء س} + \pi\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ء س}$

$= -\frac{٣}{٥}\,\text{هـ}^{-٥\text{س}} + \pi\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ث}$

(ب) إذا كان : $\text{ص} = \text{أ هـ}^{\text{س}^٢-١}$ حيث : أ ثابت أثبت أن :

$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = ٤\text{س ص}(٣+٢\text{س}^٢)$

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س أ هـ}^{\text{س}^٢-١}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٢\text{أ هـ}^{\text{س}^٢-١} + ٤\text{س}^٢\text{أ هـ}^{\text{س}^٢-١}$

$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = ٤\text{س أ هـ}^{\text{س}^٢-١} + ٨\text{س أ هـ}^{\text{س}^٢-١} + ٨\text{س}^٣\text{أ هـ}^{\text{س}^٢-١}$

$= ١٢\text{س أ هـ}^{\text{س}^٢-١} + ٨\text{س}^٣\text{أ هـ}^{\text{س}^٢-١}$

$= ٤\text{س أ هـ}^{\text{س}^٢-١}(٣+٢\text{س}^٣) = ٤\text{س ص}(٣+٢\text{س}^٣)$

[٣] (أ) أوجد : $\int \text{طتا س قتا}^٣\text{س}\,\text{ء س}$

الحل

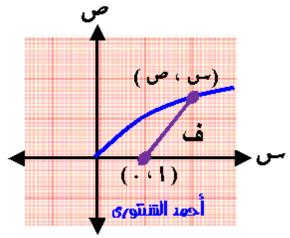
المقدار $= \int \text{قتا}^٢\text{س}\,(\text{طتا س قتا س})\,\text{ء س}$

$= -\int \text{قتا}^٢\text{س}\,(-\text{طتا س قتا س})\,\text{ء س}$

$= -\int \text{قتا}^٢\text{س}\,(\text{قتا س})'\,\text{ء س} = -\frac{١}{٣}\text{قتا}^٣\text{س} + \text{ث}$

(ب) إذا كانت ف بعد النقطة (١ ، ٠) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ فأوجد إحداثى النقطة (س ، ص) التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل



ف^{٢} = (س − ١)^{٢} + (ص − ٠)^{٢}

= س^{٢} − ٢ س + ١ + ص^{٢}

، ∵ ص = $\sqrt{\text{س}}$ ∴ ص^{٢} = س

∴ ف^{٢} = س^{٢} − ٢ س + ١ + س = س^{٢} − س + ١

∴ ف = (س^{٢} − س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} − س + ١)$^{-\frac{١}{٢}}$ (٢ س − ١)

بوضع $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

س	∞ − $\frac{١}{٢}$ ∞	
إشارة د$'$	− ٠ +	
سلوك د	↘	↗

، ∵ عندما : س < $\frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ < ٠ .

، عندما : س > $\frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}}$ > ٠ .

∴ عند س = $\frac{١}{٢}$ تكون ف أصغر ما يمكن ، و عندها ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ إحداثى النقطة التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن هى ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

[٤] (أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث :

د (س) = | س | (س − ٤) فى الفترة [−١ ، ٣]

الحل

د (س) = { س^{٢} − ٤ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ − س^{٢} + ٤ س عندما −١ ≤ س < ٠ } " لاحظ : الفترة المعطاة "

∵ د (٠)$^{+}$ = د (٠)$^{-}$ = د (٠) = ٠ .

∴ د (س) متعددة التعريف مجاها فى الفترة [−١ ، ٣] " الفترة المعطاة "

و متصلة عند س = ٠ . أى متصلة على فى الفترة [−١ ، ٣]

، ∵ عندما : ٠ ≤ س ≤ ٣

فإن : د (٠ + و) − د (٠) = (٠ + و)^{٢} − ٤ (٠ + و) − ٠

= و^{٢} − ٤ و = و (و − ٤)

∴ د$'$ (٠)$^{+}$ = $\lim_{\text{و} \to ٠^{+}}$ $\frac{\text{د (٠ + و) − د (٠)}}{\text{و}}$ = $\lim_{\text{و} \to ٠^{+}}$ $\frac{\text{و (و − ٤)}}{\text{و}}$ = − ٤

، ∵ عندما : − ١ ≤ س < ٠ .

فإن : د (٠ + و) − د (٠) = − (٠ + و)^{٢} + ٤ (٠ + و) − ٠

= − و^{٢} + ٤ و = و (− و + ٤)

∴ د$'$ (٠)$^{-}$ = $\lim_{\text{و} \to ٠^{-}}$ $\frac{\text{د (٠ + و) − د (٠)}}{\text{و}}$ = $\lim_{\text{و} \to ٠^{-}}$ $\frac{\text{و (− و + ٤)}}{\text{و}}$ = ٤

∴ د$'$ (٠)$^{+}$ ≠ د$'$ (٠)$^{-}$ ∴ د$'$ (٠) غير موجودة

∴ د$'$ (س) = { ٢ س − ٤ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ غير موجودة عندما س = ٠ ؛ −٢ س + ٤ عندما − ١ ≤ س < ٠ } بوضع : د$'$ (س) = ٠ .

∴ ٢ س − ٤ = ٠ . عندما س > ٠ و منها : س = ٢ ∈ [−١ ، ٣]

، −٢ س − ٤ = ٠ . عندما س < ٠ و منها : س = − ٢ ∉ [−١ ، ٣]

، ∵ د (−١) = − ٥ ، د (٢) = − ٤ ، د (٣) = − ٣ ، د (٠) = ٠ .

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٠ ، القيمة الصغرى المطلقة = − ٥

(ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ س^{٢} + ب س ، و كان د (٠) = ٥ ، د (٢) = − ٣ أوجد قيمة الثابت ب ثم أرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

الحل

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ∫ (٦ س^{٢} + ب س) ء س ∴ ص = ٢ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ ب س^{٢} + ث

، ∵ د (٠) = ٥ ∴ ث = ٥

، ∵ د (٢) = − ٣ ∴ − ٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥ ، و منها : ب = − ١٢

∴ ص = د (س) = ٢ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

∴ د$'$(س) = ٦ س^{٢} − ١٢ س = ٦ س (س − ٢)

∴ د$'$(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى] ٢ ، ∞ [، وفى] −∞ ، ٠ [

و متناقصة فى] ٠ ، ٢ [، د$''$(س) = ١٢ س − ١٢ = ١٢ (س − ١)

، ∵ د$''$(٠) < ٠ ∴ د(٠) = ٥ قيمة عظمى محلية

، ∵ د$''$(٢) > ٠ ∴ د(٢) = −٣ قيمة صغرى محلية

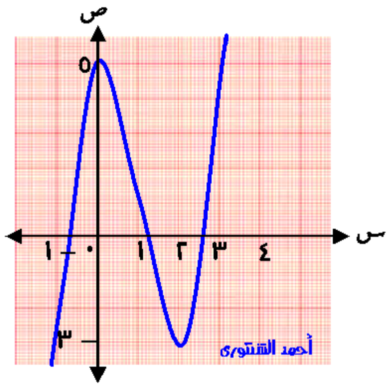
، ∵ د$''$(س) = ٠ عندما : س = ١

، ∵ د$''$(س) < ٠ فى] −∞ ، ١ [∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$''$(س) > ٠ فى] ١ ، ∞ [∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة (١ ، ١) نقطة إنقلاب ، و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	−∞	٠	١	٢	∞
إشارة د$'$	+	٠	−	٠	+
سلوك د	↗		↘		↗
إشارة د$''$	−		٠		+
تحدب د	لأعلى				لأسفل
ص		٥	١	−٣	
		قيمة عظمى محلية	نقطة إنقلاب	قيمة صغرى محلية	



[٥] (أ) أوجد معدل تغير لو$_{هـ}$ | ٩ + س^{٣} | بالنسبة إلى س^{٢} + ٣ عندما س + ١

الحل

نضع : ص = لو$_{هـ}$ | ٩ + س^{٣} | ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{٩ + \text{س}^{٣}}$

، ع = س^{٢} + ٣ ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{٩ + \text{س}^{٣}} \times \frac{١}{٢\,\text{س}}$

، عندما س = ١ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢٠}$

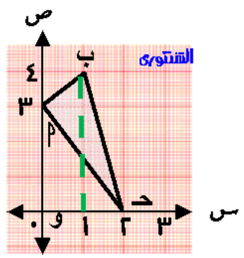
(ب) إذا كانت أ (٠ ، ٣) ، ب (١ ، ٤) ، حـ (٢ ، ٠)

أوجد باستخدام التكامل :

أولاً : مساحة سطح المثلث أ ب حـ

ثانياً : حجم الجسم من دوران المثلث أ و حـ دورة كاملة حول محور الصادات

الحل



أولاً : معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٣}{١ - ٠}$

أى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س}} = ١$ ∴ ص$_{١}$ = س + ٣

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٢} = \frac{٤ - ٠}{١ - ٢}$

أى : $\frac{\text{ص}}{\text{س} - ٢} = ١$ ∴ ص$_{٢}$ = ٨ − ٤ س

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٠}$

أى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س}} = -\frac{٣}{٢}$ ∴ ص$_{٣}$ = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س

م (△ أ ب حـ) = $\int_{٠}^{١}$ (ص$_{١}$ − ص$_{٣}$) ءس + $\int_{١}^{٢}$ (ص$_{٢}$ − ص$_{٣}$) ءس

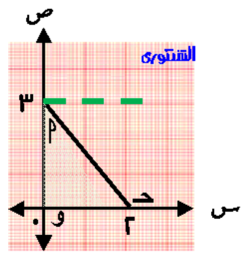
= $\int_{٠}^{١}$ (س + ٣ − ٣ + $\frac{٣}{٢}$ س) ءس + $\int_{١}^{٢}$ (٨ − ٤ س − ٣ + $\frac{٣}{٢}$ س) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ $\frac{٥}{٢}$ س ءس + $\int_{١}^{٢}$ (٥ − $\frac{٥}{٢}$ س) ءس

= $\left[\frac{٥}{٤} \text{س}^{٢} \right]_{٠}^{١}$ + $\left[٥\,\text{س} - \frac{٥}{٤} \text{س}^{٢} \right]_{١}^{٢}$

= [٥/٤ − .] + [(١٠ − ٥) − (٥ − ٥/٤)] = ٥/٢ وحدة مربعة

ثانياً : الدوران حول محور الصادات



، ص٣ = ٣ − ٣/٢ س ∴ س٣ = ٢ − ٢/٣ ص

، ح = π ∫ من . إلى ٣ س٣² ء ص

= π ∫ من . إلى ٣ (٢ − ٢/٣ ص)² ء ص

= π ∫ من . إلى ٣ (٤ − ٨/٣ ص + ٤/٩ ص²) ء ص

= π [٤ ص − ٤/٣ ص² + ٤/٢٧ ص³] من . إلى ٣

= π [(١٢ − ١٢ + ٤) − (.)] = ٤ π وحدة مكعبة

الاختبار السابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(١) إذا كان : ص² = ٣ س² − ٧ فإن : ءص/ءس = ص/٣س

(أ) (ب)

الحل

(١) (ب) ، التصحيح :

∵ ص² = ٣ س² − ٧ ∴ ٢ ص ءص/ءس = ٦ س ∴ ءص/ءس = ٣س/ص

(٢) للدالة د : د(س) = س³ − ٣ س + ١ نقطة إنقلاب هى (. ، ١)

(أ) (ب)

الحل

(٢) (أ) لأن : ∵ د(س) = س³ − ٣ س + ١

∴ د/(س) = ٣ س² − ٣ ، د//(س) = ٦ س

، ∵ د//(س) = . عندما : س = . ∴ د(.) = ١

، ∵ د//(س) < . عندما س < . ، د//(س) > . عندما س > .

∴ النقطة (. ، ١) نقطة إنقلاب

(٣) ء/ءس [طتا (حتا ٣ س)] = ٣ حا ٣ س قتا² (حتا ٣ س)

(أ) (ب)

الحل

(٣) (أ) لأن : ءص/ءس [طتا (حتا ٣ س)] =

− قتا² (حتا ٣ س) × (− ٣ حا ٣ س) =

٣ حا ٣ س قتا² (حتا ٣ س)

(٤) ∫ (١ − حتا س)⁴ حا س ء س = − ١/٥ (١ + حتا س)⁵ + ث

(أ) (ب)

(٤) (ب) ، التصحيح :

∫ (١ − حتا س)⁴ حا س ء س = ∫ (١ − حتا س)⁴ (١ − حتا س)/ ء س

= ١/٥ (١ − حتا س)⁵ + ث

حل آخر

نضع : ص = ١ − حتا س ∴ ء ص = حا س ء س ∴ ء س = ١/حا س ء ص

المقدار = ∫ ص⁴ حا س × ١/حا س ء ص = ∫ ص⁴ ء ص = ١/٥ ص⁵ + ث

= ١/٥ (١ − حتا س)⁵ + ث

حل ثالث

$\int (١ - \text{حتا } س)^٤ \text{ حا } س \text{ ءس} = \int (١ - ١ + ٢ \text{ حا}^٢ \frac{١}{٢} س)^٤ \times$

$٢ \text{ حا } \frac{١}{٢} س \text{ حتا } \frac{١}{٢} س \text{ ءس} = ٣٢ \int \text{حا}^٩ \frac{١}{٢} س \text{ حتا } \frac{١}{٢} س \text{ ءس} =$

$٦٤ \int \text{حا}^٩ \frac{١}{٢} س \left(\frac{١}{٢} \text{ حتا } \frac{١}{٢} س \right) \text{ءس} = ٦٤ \int \text{حا}^٩ \frac{١}{٢} س \left(\text{حا } \frac{١}{٢} س \right)' \text{ءس}$

$= ٦٤ \times \frac{١}{١٠} \text{ حا}^{١٠} \frac{١}{٢} س + ث = \frac{١}{٥} \left(٢ \text{ حا}^٢ \frac{١}{٢} س \right)^٥ + ث$

$= \frac{١}{٥} (١ - \text{حتا } س)^٥ + ث$

(٥) $\lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٥}{س} \right)^س = هـ^٥$ (أ) (ب)

الحل

(٥) (أ) لأن : العبارة صحيحة مباشرة

(٦) $\int \left(\frac{٢هـ}{س} + \frac{س}{هـ} \right) \text{ءس} = ٢ \text{ هـ لو}_{هـ} |س| - \frac{س^٢}{هـ} + ث$

(أ) (ب)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : المقدار = $٢ \text{ هـ} \int \frac{١}{س} \text{ ءس} + \text{هـ} \int س \text{ ءس} =$

$= ٢ \text{ هـ لو}_{هـ} |س| + \frac{س^٢}{٢هـ} + ث$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int س \text{ حا } س \text{ ءس}$ ،

(٢) $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^٤ + س^٢} \text{ ءس}$

الحل

(١) نضع : ص = س ∴ ءص = ءس ،

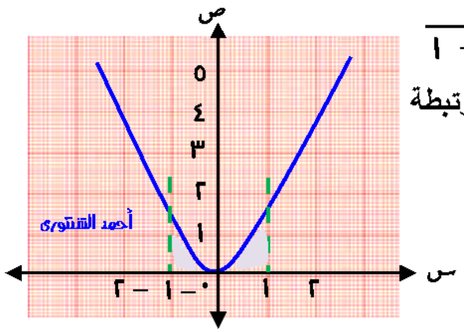
ءع = حا س ءس ∴ ع = − حتا س

∴ المقدار = − س حتا س + $\int$ حتا س ءس

= − س حتا س + حا س + ث

(٢) $\sqrt{س^٤ + س^٢} = |س| \sqrt{س^٢ + ١}$

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة المرتبطة



∴ $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^٤ + س^٢} \text{ ءس} =$

$٢ \int_{٠}^{١} س \sqrt{س^٢ + ١} \text{ ءس} =$

$\int_{٠}^{١} (س^٢ + ١)^{\frac{١}{٢}} \times (٢ س) \text{ ءس}$

$= \int_{٠}^{١} (س^٢ + ١)^{\frac{١}{٢}} \times (س^٢ + ١)' \text{ ءس} = \left[\frac{٢}{٣} (س^٢ + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٣} \left[(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (١)^{\frac{٣}{٢}} \right] = \frac{٢}{٣} \left(٢\sqrt{٢} - ١ \right)$

(ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = \text{لو}_{هـ} (٢ - \sqrt{٢} \text{ حتا } س)$ عند النقطة التى تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤} \pi$

الحل

∵ $ص = \text{لو}_{هـ} (٢ - \sqrt{٢} \text{ حتا } س)$

∴ عند : $س = \frac{١}{٤} \pi$ فإن : $ص = \text{لو}_{هـ} \left(٢ - \sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right) = \text{لو}_{هـ} ١ = ٠$

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{٢} \text{ حا } س}{٢ - \sqrt{٢} \text{ حتا } س}$

، ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right]_{(\frac{١}{٤}\pi ، ٠)} = \frac{\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{٢ - \sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = ١$

∴ معادلة المماس هى : $ص - ٠ = ١ \times \left(س - \frac{١}{٤} \pi \right)$

أى : $ص = س - \frac{١}{٤} \pi$

[٣] (أ) عين فترات التحدب لأعلى و فترات التحدب لأسفل و نقط الإنقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة د حيث :

د(س) = $(س - ١)^{٤} + ٣$

الحل

∵ د(س) = $(س - ١)^{٤} + ٣$ ∴ $د'(س) = ٤ (س - ١)^{٣}$

، $د''(س) = ١٢ (س - ١)^{٢}$

بوضع : $د''(س) = ٠$ ∴ س = ١

، عندما : س < ١ فإن : $د''(س) > ٠$

، عندما : س > ١ فإن : $د''(س) > ٠$

∴ منحنى الدالة د محدب لأسفل لكل س ∈ ح و لا توجد نقط إنقلاب

س	$-\infty$ ١	١ ..... ∞
إشارة د''	+	+
تحدب منحنى د	لأسفل	لأسفل

(ب) متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠,٤ سم / ث و تناقص الارتفاع بمعدل ٠,٥ سم / ث أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة بمعدل ٦ سم و الارتفاع بمعدل ٥ سم

الحل

نفرض أن : طول ضلع القاعدة = س سم ، الارتفاع = ع سم

∴ الحجم ح = $س^{٢}$ ع باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ن

∴ $\frac{ءح}{ءن} = ٢ س ع \frac{ءس}{ءن} + س^{٢} \frac{ءع}{ءن}$

= ٢ × ٦ × ٢ × ٠,٤ + ٣٦ × ٠,٥ = ٦ $سم^{٣}$ / ث

[٤] (أ) أوجد $\int_{٠}^{٣} س \sqrt{س + ١} \, ءس$

الحل

نفرض أن : ص = س + ١ ∴ ءص = ءس ، س = ص − ١

، عندما : س = ٠ فإن : ص = ١ ، عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤

∴ المقدار = $\int_{١}^{٤} (ص - ١) \times ص^{\frac{١}{٢}} \, ءص = \int_{١}^{٤} (ص^{\frac{٣}{٢}} - ص^{\frac{١}{٢}}) \, ءص$

$= \left[\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١}^{٤}$

$= (\frac{٢}{٥} \times ٣٢ - \frac{٢}{٣} \times ٨) - (\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٣}) = \frac{١١٦}{١٥}$

(ب) ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فإثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة ، و أوجد طول نصف قطرها

الحل

نفرض أن : طول المستطيل = ص متر

، عرض المستطيل = طول قطر الدائرة = ٢ س متر

أى أن : طول نصف قطر الدائرة = س متر

∵ محيط الملعب = ٤٠٠ متر

∴ ٢ س π + ٢ ص = ٤٠٠

و منها : ص = ٢٠٠ − س π

، مساحة الملعب = د(س)

= مساحة دائرة + مساحة مستطيل

= π $س^{٢}$ + س ص

∴ د(س) = π $س^{٢}$ + س (٤٠٠ − ٢ س π)

= π $س^{٢}$ + ٤٠٠ س − ٢ π $س^{٢}$ = ٤٠٠ س − $س^{٢}$ π

∴ $د'(س)$ = ٤٠٠ − ٢ س π ، $د''(س)$ = − ٢ π

بوضع : د/(س) = ٠ ∴ ٤٠٠ − ٢ س π = ٠ ومنها : س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$

، ∵ د//($\frac{٢٠٠}{\pi}$) < ٠ ∴ س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ تجعل مساحة الملعب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٢٠٠ − $\frac{٢٠٠}{\pi}$ × π = صفر

أى أن : الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$ متر

[٥] (أ) إذا كانت : د(س) = س^{٣} − ٣ س + ٣ أوجد :

أولاً : القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢]

ثانياً : مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمات س = ٠ ، س = ٢ ، ص = ٠

الحل

أولاً : ∵ د(س) = س^{٣} − ٣ س + ٣

∴ د/(س) = ٣ س^{٢} − ٣ = ٣ (س + ١) (س − ١)

نضع : د/(س) = ٠ ∴ س = ١ ∈ [٠ ، ٢]

، س = −١ ∉ [٠ ، ٢]

، ∵ د(٠) = ٣ ، د(١) = ١ ، د(٢) = ٥

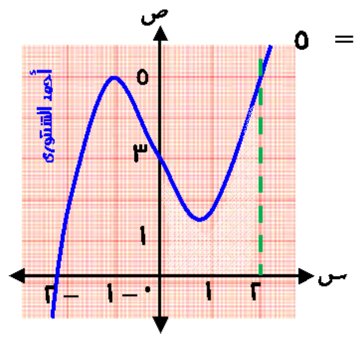
∴ القيمة العظمى المطلقة = ٥

، القيمة الصغرى المطلقة = ١

ثانياً : م = $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣} − ٣ س + ٣) ء س

= [$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + ٣ س]$_{٠}^{٢}$

= ٤ − ٦ + ٦ = ٤ وحدات مربعة



(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٢ و المستقيمان س = ١ ، س = ٢

الحل

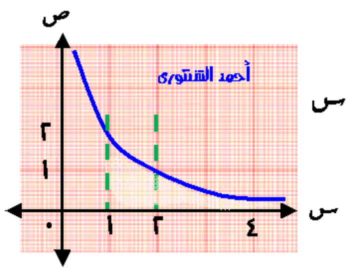
ص = $\frac{٢}{س}$ ، الدوران حول محور السينات

∴ ح = π $\int_{١}^{٢}$ ص^{٢} ء س = π $\int_{١}^{٢}$ $\frac{٤}{س^{٢}}$ ء س

= π $\int_{١}^{٢}$ (٤ س$^{-٢}$) ء س

= π [−٤ س$^{-١}$]$_{١}^{٢}$

= π [− $\frac{٤}{س}$]$_{١}^{٢}$ = π (−٢ + ٤) = ٢ π وحدة مكعبة



الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اكمل ما يلى :

(١) إذا كان : س^{٣} ص^{٢} = ١ فإن : [$\frac{ءص}{ءس}$]$_{س = ١}$ = ...

الحل

(١) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س : ٣ س^{٢} ص^{٢} + ٢ س^{٣} ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − $\frac{٣ص}{٢ س}$ ، عند : س = ١ فإن : ص = ١

∴ [$\frac{ءص}{ءس}$]$_{س = ١}$ = − $\frac{٣}{٢}$

(٢) $\frac{ء}{ءس}$ [٧ هـ^{قاس}] = ...

الحل

(٢) $\frac{ء}{ءس}$ [٧ هـ^{قاس}] = ٧ قاس طاس هـ^{قاس}

(٣) للدالة د : د(س) = س^{٣} − ٣ س − ١ نقطة إنقلاب هى ....

الحل

(٣) ∵ د(س) = س^{٣} − ٣ س − ١ ∴ د/(س) = ٣ س^{٢} − ٣

، $د^{//}(س) = ٦$ س ، ∵ $د^{//}(س) = ٠$ عندما : س = ٠ ∴ $(٠) = -١$

، ∵ $د^{//}(س) > ٠$ عندما س > ٠ ، $د^{//}(س) < ٠$ عندما س < ٠

∴ النقطة (٠ ، −١) نقطة إنقلاب

(٤) إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [٢ ، ٧] فإن :

$\int_{٢}^{٧}$ د(س) ء س + $\int_{٧}^{٤}$ د(س) ء س = ...

الحل

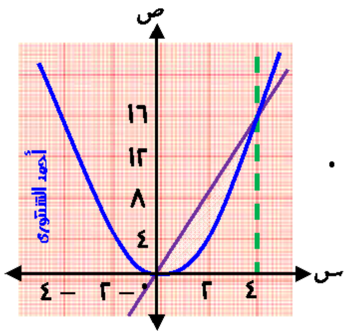
(٤) $\int_{٢}^{٧}$ د(س) ء س + $\int_{٧}^{٤}$ د(س) ء س = $\int_{٢}^{٧}$ د(س) ء س −

$\int_{٤}^{٧}$ د(س) ء س = $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ء س + $\int_{٤}^{٧}$ د(س) ء س −

$\int_{٤}^{٧}$ د(س) ء س = $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ء س

(٥) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $س^{٢}$ ، ص = ٤ س
تساوى .... وحدة مربعة

الحل



(٥) $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٤$ س

نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$ ∴ $س^{٢} = ٤$ س

∴ $س^{٢} - ٤$ س = ٠ ∴ س (س − ٤) = ٠

و منها : س = ٠ ، س = ٤

، ∵ $ص_{٢} \geq ص_{١}$ لكل : س ∈ [٠ ، ٤]

∴ م = $\int_{٠}^{٤}$ ($ص_{٢} - ص_{١}$) ء س

= $\int_{٠}^{٤}$ (٤ س − $س^{٢}$) ء س = $\left[٢ س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٤}$

= $\left[\left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣} \right) - (٠) \right] = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٦) إذا كانت ص = $س^{٢}$ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ ، أ ≠ ٠

فإن : $\left[\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} \right]_{س = ٤}$ = ...

الحل

(٦) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + $س^{٢}$ × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + س

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + ٢ س × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + ٢

$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ = ٢ × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{٢}{س}$ ∴ $\left[\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} \right]_{س = ٤} = \frac{١}{٢}$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{(س + ٣)^{٣} - ٢٧}{س}$ ء س ،

(٢) $\int س^{٢}$ $هـ^{-س}$ ء س

الحل

(١) ∵ $(س + ٣)^{٣} - ٢٧$ = (س + ٣ − ٣) [$(س + ٣)^{٢}$ + ٣ (س + ٣) + ٩]

= س ($س^{٢}$ + ٦ س + ٩ + ٣ س + ٩ + ٩)

= س ($س^{٢}$ + ٩ س + ٢٧)

∴ المقدار = $\int$ ($س^{٢}$ + ٩ س + ٢٧) ء س

= $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ + $\frac{٩}{٢}$ $س^{٢}$ + ٢٧ س + ث

(٢) نضع : ص = $س^{٢}$ ∴ ء ص = ٢ س ء س ،

ء ع = $هـ^{-س}$ ء س ∴ ع = − $هـ^{-س}$

∴ المقدار = − $س^{٢}$ $هـ^{-س}$ + ٢ $\int$ س $هـ^{-س}$ ء س

، نضع : و = س ∴ ء و = ء س ،

ءل = هـ^{−س} ءس　　　∴ ل = − هـ^{−س}

∴ المقدار = − س² هـ^{−س} + ٢ [− س هـ^{−س} + ∫ هـ^{−س} ءس]

= − س² هـ^{−س} − ٢ س هـ^{−س} − ٢ هـ^{−س} + ث

= − هـ^{−س} (س² + ٢ س + ٢) + ث

(ب) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث :

د (س) = ٢ طا³ س عند النقطة التى تقع على منحنى الدالة د و إحداثيها السينى يساوى $\frac{1}{4}\pi$

الحل

∵ د (س) = ٢ طا³ س　　　∴ د/ (س) = ٦ طا س قا² س

، عند : س = $\frac{1}{4}\pi$ فإن : د (س) = ٢ × (١)³ = ٢

، ميل المماس = [د/ (س)]$_{(\frac{1}{4}\pi ، ٢)}$ = ٦ × ١ × ٢ = ١٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١٢ × (س − $\frac{1}{4}\pi$)

أى : ٣ س − ص − ٢ − ٣ π = ٠

[٣] (أ) أوجد : ∫ من ٠ إلى ٥ | س − ٢ | ءس

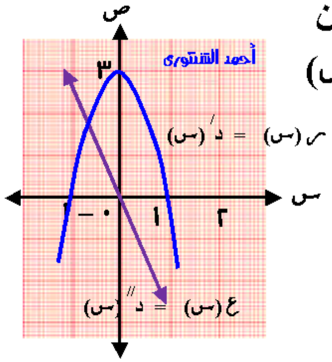
الحل

المقدار = ∫ من ٠ إلى ٢ (− س + ٢) ءس + ∫ من ٢ إلى ٥ (س − ٢) ءس

= [− $\frac{1}{2}$ س² + ٢ س]$_{٠}^{٢}$ + [$\frac{1}{2}$ س² − ٢ س]$_{٢}^{٥}$

= [(− ٢ + ٤) − ٠] + [($\frac{25}{2}$ − ١٠) − (− ٢ + ٤)] = $\frac{13}{2}$

(ب) يوضح الشكل المقابل : منحنيا الدالتين ر ، ع حيث : ر (س) = د/ (س) ، ع (س) = د// (س) ، د دالة كثيرة حدود فى المتغير س ، ارسم الشكل العام لمنحنى د علماً بأنه يمر بالنقطتين (− ١ ، ٠) ، (١ ، ٤)



الحل

∵ د (س) دالة كثيرة حدود ، د// (س) دالة من الدرجة الأولى كما بالشكل

، د/ (س) دالة من الدرجة الثانية كما بالشكل

∴ د (س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

بفرض أن : د (س) = أ س³ + ب س² + حـ س + ء

∴ د/ (س) = ٣ أ س² + ٢ ب س + حـ ، د// (س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ منحنى د// (س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠)　∴ د// (٠) = ٠

∴ ٠ = ٠ + ٢ ب　　و منها : ب = ٠

، ∵ منحنى د/ (س) يمر بالنقط (٠ ، ٣) ، (١ ، ٠)

∴ د/ (٠) = ٣ ، د/ (١) = ٠

∴ ٣ = ٠ + ٠ + حـ　و منها : حـ = ٣ ، ٠ = ٣ أ + ٢ ب + حـ

، ∵ حـ = ٣ ، ب = ٠　　∴ أ = − ١

، ∵ منحنى د (س) يمر بالنقطة (− ١ ، ٠) د (− ١) = ٠

∴ ٠ = − أ + ب − حـ + ء　　و منها : ء = ٢

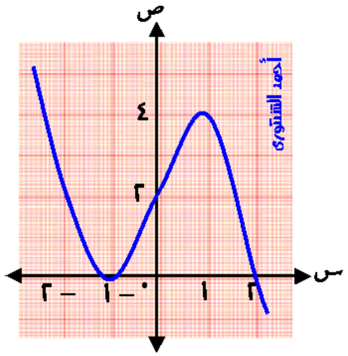
∴ د (س) = − س³ + ٣ س + ٢

∴ د/ (س) = − ٣ س² + ٣ = − ٣ (س − ١) (س + ١)

∴ د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = − ١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متناقصة فى] ١ ، ∞ [، و فى] − ∞ ، − ١ [
و متزايدة فى] − ١ ، ١ [
، $د^{//}(س) = − ٦ س$ ، ∵ $د^{//}(١) < ٠$ ∴ د (١) = ٤ قيمة عظمى محلية
، ∵ $د^{//}(−١) > ٠$ ∴ د (− ١) = ٠ قيمة صغرى محلية
، ∵ $د^{//}(س) = ٠$ عندما : س = ٠
، ∵ $د^{//}(س) > ٠$ فى] − ∞ ، ٠ [∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة
، ∵ $د^{//}(س) < ٠$ فى] ٠ ، ∞ [∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة
، النقطة (٠ ، ٢) نقطة إنقلاب ، المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٤)
و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	∞	١	٠	− ١	− ∞
إشارة $د^{/}$	+	٠	−	٠	+
سلوك د	↘		↗		↘
إشارة $د^{//}$	−		٠		+
تحدب د	لأعلى				لأسفل
ص		٤	٢	٠	
		قيمة عظمى محلية	نقطة إنقلاب	قيمة صغرى محلية	



[٤] (أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [٠ ، ٢]
حيث : $د(س) = ٣ \sqrt{٤ − س^{٢}}$

الحل

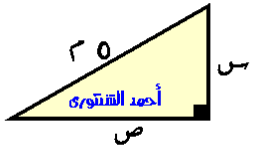
∵ $د(س) = ٣ \sqrt{٤ − س^{٢}} = ٣ (٤ − س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

∴ $د^{/}(س) = ٣ × \frac{١}{٢} × (− ٢ س) (٤ − س^{٢})^{− \frac{١}{٢}} = \frac{٣ س}{\sqrt{٤ − س^{٢}}}$

، ∵ $د^{/}(س) = ٠$ عندما : س = ٠ ∈ [٠ ، ٢]
، $د^{/}(س)$ غير موجودة عند : $٤ − س^{٢} = ٠$ أى عند : س = ٢ ∈ [٠ ، ٢]
، س = − ٢ ∉ [− ١ ، ١] " مرفوض "
∴ د (٠) = ٦ ، د (٢) = ٠
∴ القيمة العظمى المطلقة = ٦ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٠

(ب) قضيب طوله ٥ أمتار مثبت فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر / دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

الحل

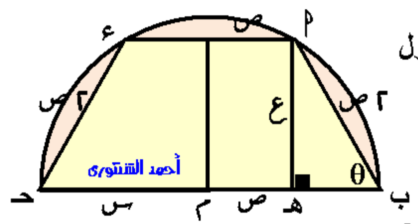


نفرض أن : ارتفاع طرف القضيب عن الأرض = س م
، طول مسقط القضيب على الأرض = ص م
من هندسة الشكل : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$
∴ عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤
، $٢ س × \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص × \frac{ءص}{ءن} = ٠$
∴ $٢ × ٣ × ١ + ٢ × ٤ × \frac{ءص}{ءن} = ٠$ و منها : $\frac{ءص}{ءن} = − \frac{٣}{٤}$ م / د

[٥] (أ) رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، طول قاعدته الصغرى يساوى طول كل من ساقيه يساوى مقدار ثابت عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

نفرض أن :
طول قاعدة شبه المنحرف الصغرى = طول ساقيه = ٢ ص وحدة طول ،



طول قاعدة شبه المنحرف الكبرى = طول قطر نصف الدائرة = ٢ س وحدة طول

، قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف = θ

من هندسة الشكل : ب هـ = س − ص ،

ع^{٢} = ٤ ص^{٢} − (س − ص)^{٢}

= ٤ ص^{٢} − (س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢})

= ٤ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص − ص^{٢} = ٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص

∴ ع = (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

، مساحة شبه المنحرف = د (س) = $\frac{١}{٢}$ × (٢ س + ٢ ص) × ع

∴ د (س) = (س + ص) (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ د$'$ (س) = ١ × (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$ +

$\frac{١}{٢}$ (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (− ٢ س + ٢ ص) (س + ص)

∴ د$'$ (س) = (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص

+ ص^{٢} − س^{٢}) =

∴ د$'$ (س) = (٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (٤ ص^{٢} + ٢ س ص − ٢ س^{٢})

= $\frac{\text{٤ ص}^{٢} + \text{٢ س ص} - \text{٢ س}^{٢}}{\sqrt{\text{٣ ص}^{٢} - \text{س}^{٢} + \text{٢ س ص}}}$

د$'$ (س) = ٠ عندما : ٤ ص^{٢} + ٢ س ص − ٢ س^{٢} = ٠

∴ ٢ (٢ ص − س) (ص + س) = ٠

و منها : س = ٢ ص أو : س = ص مرفوض " يصبح : ب هـ = ٠ "

، ∵ د$'$ (س) > ٠ عندما : س < ٢ ص ، د$'$ (س) < ٠ عندما : س > ٢ ص

∴ س = ٢ ص تجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن

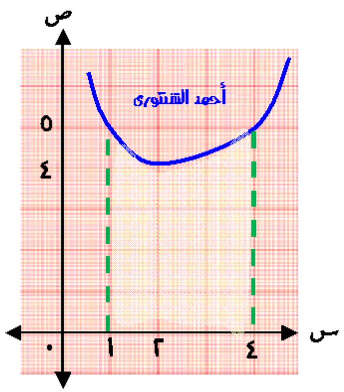
و عندها يكون : ب هـ = ص وحدة طول ، حتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = $\frac{١}{٣}$ π

(ب) إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٤ + س^{٢} و المستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ أوجد :

أولاً : مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة

ثانياً : حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات

الحل



ص = $\frac{\text{٤} + \text{س}^{٢}}{\text{س}}$ = $\frac{٤}{\text{س}}$ + س

م = $\int_{١}^{٤}$ ($\frac{٤}{\text{س}}$ + س) ء س

= [٤ لو$_{\text{هـ}}$ س + $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{١}^{٤}$

= ٤ لو$_{\text{هـ}}$ ٤ + ٨ − ٤ لو$_{\text{هـ}}$ ١ − $\frac{١}{٢}$

= ٤ لو$_{\text{هـ}}$ ٤ + $\frac{١٥}{٢}$ ≃ ١٣ وحدة مربعة

∴ ح = π $\int_{١}^{٤}$ ص^{٢} ء س

= π $\int_{١}^{٤}$ ($\frac{١٦}{\text{س}^{٢}}$ + ٨ + س^{٢}) ء س

= π [− $\frac{١٦}{\text{س}}$ + ٨ س + $\frac{١}{٣}$ س^{٣}]$_{١}^{٤}$

= π (− ٤ + ٣٢ + $\frac{٦٤}{٣}$) − (− ١٦ + ٨ + $\frac{١}{٣}$)

= ٥٧ π وحدة مكعبة

الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان $\text{س} = ٤\,\text{ن}^{٢} + ٧$ ، $\text{ص} = \sqrt{\text{ن}^{٣}}$ ، $\text{ن} = ١$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ...$

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٢ (ء) ٣

الحل

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٤\,\text{ن}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{ن}}$ عندما : ن = ١ فإن :

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٤$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢}$ ، $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{ن}=١} = \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right]_{\text{ن}=١} = \frac{٣}{٨}$

(٢) منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح إذا كان د (س) يساوى ....

(أ) $٢ - \text{س}^{٢}$ (ب) $٢ + \text{س}^{٣}$ (جـ) $٢ - \text{س}^{٤}$ (ء) $٢ + \text{س}^{٤}$

الحل

(ء) $٢ + \text{س}^{٤}$ لأن : ∵ $\text{د}(\text{س}) = ٢ + \text{س}^{٤}$ ∴ $\text{د}'(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{٣}$

، $\text{د}''(\text{س}) = ١٢\,\text{س}^{٢}$ ، $\text{د}''(\text{س}) > ٠$ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

(٣) إذا كان لمنحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{ك}\,\text{س}^{٢} + ٤$ ،

ك ∈ ح نقطة إنقلاب عند س = ٢ فإن ك = ...

(أ) −٦ (ب) −٣ (جـ) ٦ (ء) ٩

الحل

∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{ك}\,\text{س}^{٢} + ٤$ ∴ $\text{د}'(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ك}\,\text{س}$

، $\text{د}''(\text{س}) = ٦\,\text{س} + ٢\,\text{ك}$ ، ∵ نقطة إنقلاب عند س = ٢

عندما : $\text{د}''(٢) = ٠$ ∴ $١٢ + ٢\,\text{ك} = ٠$ و منها : ك = −٦

(٤) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٧$ ،

$\int_{٥}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -١١$ فإن : $\int_{-١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ يساوى ....

(أ) −٤ (ب) ١٨ (جـ) −١٨ (ء) ٧٧

الحل

∵ $\int_{٥}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -١١$ ∴ $\int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ١١$

∴ $\int_{-١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٣}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} =$

$= ٧ + ١١ = ١٨$

(٥) $\int_{-١}^{٣} |\text{س} - ١|\,\text{ءس} = ...$

(أ) −٦ (ب) ٠ (جـ) ٤ (ء) ١

الحل

$\int_{-١}^{٣} |\text{س} - ١|\,\text{ءس} = \int_{-١}^{١} (-\text{س} + ١)\,\text{ءس} + \int_{١}^{٣} (\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\right]_{-١}^{١} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{١}^{٣}$

$= \left[\left(-\frac{١}{٢} + ١\right) - \left(-\frac{١}{٢} - ١\right)\right] +$

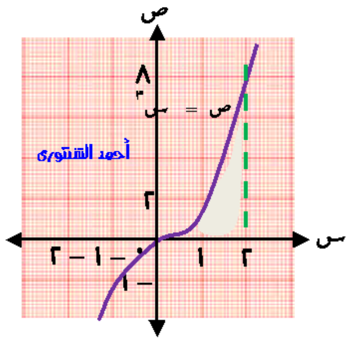
$\left[\left(\frac{٩}{٢} - ٣\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right] = ٤$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ و المستقيمين

ص = ٠ ، س = ٢ تساوى .... وحدة مربعة

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (ء) ٨

الحل



نضع : $\text{ص} = ٠ \quad \therefore \text{س}^{٣} = ٠$

و منها : $\text{س} = ٠$

$\therefore$ حدا التكامل هما : $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢$

$\therefore \text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٣}\, \text{ء}\text{س} = \left[\frac{١}{٤} \text{س}^{٤} \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٤$ وحدات مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} \,\text{ء}\text{س}$ ،

(٢) $\int ٩\text{س}^{٢} \text{هـ}^{٣\text{س}} \,\text{ء}\text{س}$

الحل

(١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} \,\text{ء}\text{س} = \frac{٣}{٢} \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١} \,\text{ء}\text{س} = \frac{٣}{٢} \int \frac{(\text{س}^{٢} - ١)'}{\text{س}^{٢} - ١} \,\text{ء}\text{س}$

$= \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} | \text{س}^{٢} - ١ |$

(٢) نضع : $\text{ص} = ٣\text{س}^{٢} \quad \therefore \text{ء}\text{ص} = ٦\text{س}\, \text{ء}\text{س}$ ،

$\text{ء}\text{ع} = ٣\text{هـ}^{٣\text{س}} \,\text{ء}\text{س} \quad \therefore \text{ع} = \text{هـ}^{٣\text{س}}$

$\therefore$ المقدار $= ٣\text{س}^{٢} \text{هـ}^{٣\text{س}} - \int ٦\text{س}\, \text{هـ}^{٣\text{س}} \,\text{ء}\text{س}$

، نضع : $\text{ن} = ٢\text{س} \quad \therefore \text{ء}\text{ن} = ٢\, \text{ء}\text{س}$ ،

$\text{ء}\text{ل} = ٣\, \text{هـ}^{٣\text{س}} \,\text{ء}\text{س} \quad \therefore \text{ل} = \text{هـ}^{٣\text{س}}$

$\therefore$ المقدار $= ٣\text{س}^{٢} \text{هـ}^{٣\text{س}} - \left[٢\text{س}\, \text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢ \int \text{هـ}^{٣\text{س}} \,\text{ء}\text{س} \right]$

$= ٣\text{س}^{٢} \text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢\text{س}\, \text{هـ}^{٣\text{س}} + \frac{٢}{٣} \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{٣\text{س}} \left(٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \frac{٢}{٣} \right) + \text{ث}$

(ب) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى $\text{ص}^{٣} = \text{س}^{٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $\text{س} = ٨$ لأقرب دقيقة

الحل

$\because \text{ص}^{٣} = \text{س}^{٢}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

$\therefore ٣\text{ص}^{٢} \times \frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = ٢\text{س} \quad \therefore \frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = \frac{٢\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}}$

عند : $\text{س} = ٨$ فإن : $\text{ص}^{٣} = ٦٤ \quad \therefore \text{ص} = ٤$

$\therefore \text{ظا}\, \theta = \left[\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} \right]_{(٨ ، ٤)} = \frac{١}{٣}$ ، $\theta = ١٨°$ لأقرب دقيقة

[٣] (أ) إذا كان : $\text{حا}\,\text{س} = \text{س}\,\text{ص}$ أثبت أن :

$\text{س}^{٢} (\text{ص} + \text{ص}'') + ٢\, \text{حتا}\,\text{س} = ٢\text{ص}$

الحل

$\because \text{حا}\,\text{س} = \text{س}\,\text{ص}$ (١) باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س ينتج :

$\therefore \text{حتا}\,\text{س} = \text{ص} + \text{س}\,\text{ص}'$ و منها : $\text{ص}' = \frac{١}{\text{س}} (\text{حتا}\,\text{س} - \text{ص})$ (٢)

، $- \text{حا}\,\text{س} = \text{ص}' + \text{ص}' + \text{س}\,\text{ص}''$ بالتعويض من (١) ينتج :

$- \text{س}\,\text{ص} = ٢\text{ص}' + \text{س}\,\text{ص}''$ بالتعويض من (٢) ينتج :

$- \text{س}\,\text{ص} = \frac{٢}{\text{س}} (\text{حتا}\,\text{س} - \text{ص}) + \text{س}\,\text{ص}''$ بالضرب × س ينتج :

$- \text{س}^{٢}\text{ص} = ٢\, \text{حتا}\,\text{س} - ٢\text{ص} + \text{س}^{٢}\text{ص}''$ و منها :

$\text{س}^{٢} (\text{ص} + \text{ص}'') + ٢\, \text{حتا}\,\text{س} = ٢\text{ص}$

(ب) إذا كان للمنحنى : $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٥$ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة $(- ١ ، ٢)$ أوجد معادلة المماس الآخر

الحل

∵ ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٢)}$ = ٤

، ∵ المماسان متوازيان　　∴ ميل المماس الآخر = ٤

∴ ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤ = ٤　　و منها : س = −١ ، س = ٠

، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج :

عند : س = −١　فإن : ص = ٢　　و هى النقطة المعطاة ،

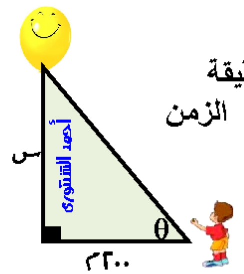
عند : س = ٠　فإن : ص = ٥　　و هى النقطة التى عندها المماس الآخر

و تكون معادلة المماس الآخر هى :

ص − ٥ = ٤ × (س − ٠)　　أى : ٤ س − ص + ٥ = ٠

[٤] (أ) يرتفع بالون رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ متر / دقيقة فإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ٢٠٠ متراً عن موقع إطلاق البالون ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠ متراً

الحل



نفرض أن : س ارتفاع البالون عن سطح الأرض بعد ن دقيقة

، θ قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد حيث س ، θ دوال فى الزمن

من الشكل المقابل : طا θ = $\frac{١}{٢٠٠}$ س

، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ قا^{٢} θ × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٢٠٠}$ × $\frac{ءس}{ءن}$

عندما : س = ٢٠٠ م　فإن : θ = $\frac{١}{٤}$ π^{ء} ، ∵ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢٨ م / د

∴ قا^{٢} $\frac{١}{٤}$ π^{ء} × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{٢٨}{٢٠٠}$　∴ ٢ × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{٢٨}{٢٠٠}$

و منها : $\frac{ءθ}{ءن}$ = ٠,٠٧ ء / د

(ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى هو ٣ (س^{٢} − ١) أوجد القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية لمنحنى الدالة د و نقط الإنقلاب إن وجدت ، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (−٢ ، −١) ، ثم أرسم شكلاً عاماً لهذا المنحنى

الحل

∵ د$^{/}$(س) = ٣ (س^{٢} − ١) = ٣ س^{٢} − ٣

∴ د(س) = ∫ (٣ س^{٢} − ٣) ءس = س^{٣} − ٣ س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (−٢ ، −١)　　∴ د(−٢) = −١

∴ −١ = −٨ + ٦ + ث　　و منها : ث = ١

∴ د(س) = س^{٣} − ٣ س + ١

، د$^{/}$(س) = ٣ س^{٢} − ٣ = ٣ (س^{٢} − ١) = ٣ (س − ١) (س + ١)

∴ د$^{/}$(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = −١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى] ١ ، ∞ [، وفى] −∞ ، −١ [

و متناقصة فى] −١ ، ١ [

، د$^{//}$(س) = ٦ س ، ∵ د$^{//}$(١) > ٠ ∴ د(١) = −١ قيمة صغرى محلية

، ∵ د$^{//}$(−١) < ٠ ∴ د(−١) = ٣ قيمة عظمى محلية

، ∵ د$^{//}$(س) = ٠ عندما : س = ٠

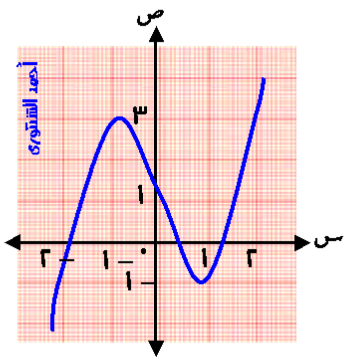
، ∵ د$^{//}$(س) < ٠ فى] −∞ ، ٠ [∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$^{//}$(س) > ٠ فى] ٠ ، ∞ [∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة (٠ ، ١) نقطة إنقلاب ، المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، (−٢ ، −١)

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	∞ −	١ −	٠	١	∞
إشارة د′	+	٠	−	٠	+
سلوك د	↗		↘		↗
إشارة د″	−		٠		+
تحدب د	لأعلى			لأسفل	
ص		٣	١	١ −	
		قيمة عظمى محلية	نقطة إنقلاب	قيمة صغرى محلية	



[٥] المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع منحنى الدالة د فى النقطة حـ (س ، ص)

حيث س > ٠ ، أ (٠ ، ٢) ، ب (٦ ، ٤) ، د (س) = $\frac{٩}{\text{س}}$

أوجد : (أ) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ب) إحداثى نقطة حـ

(حـ) معادلة العمودى على منحنى د عند النقطة حـ ، و أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

(ء) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودى $\overleftrightarrow{\text{وحـ}}$ و منحنى الدالى د و المستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

(أ) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٢}{٦ - ٠}$ أى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$

∴ س = ٣ ص − ٦ = ٠ (١)

(ب) ∵ ص = $\frac{٩}{\text{س}}$ بالتعويض من (١) ينتج : ص = $\frac{٩}{٣\,\text{ص} - ٦}$

و منها : ٣ ص^٢ − ٦ ص + ٩ = ٠ ∴ ٣ (ص^٢ − ٢ ص + ٣) = ٠

∴ ٣ (ص − ٣) (ص + ١) = ٠ و منها : ص = ٣ ، ص = − ١

، بالتعويض فى (١) ينتج : عندما : ص = ٣ فإن : س = ٣

، عندما : ص = − ١ فإن : س = − ٩ مرفوض (حيث : س > ٠)

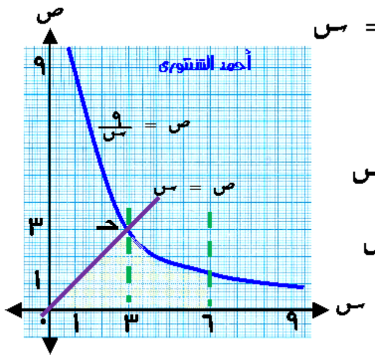
∴ إحداثى نقطة حـ (٣ ، ٣)

(حـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٩}{\text{س}^٢}$ ∴ ميل المماس عند حـ = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٣ ، ٣)} = -١$

∴ ميل العمودى عند حـ = ١ ، معادلة العمودى عند حـ هى :

ص − ٣ = ١ × (س − ٣) أى : ص = س

، ∵ هذه المعادلة لا تحتوى على حد مطلق فإن العمودى عند حـ يمر بنقطة الأصل



(ء) ح = $\pi \int_{٠}^{٣} \text{ص}_١^٢ \,\text{ءس} + \pi \int_{٣}^{٦} \text{ص}_٢^٢ \,\text{ءس}$

= $\pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^٢ \,\text{ءس} + \pi \int_{٣}^{٦} \frac{٨١}{\text{س}^٢} \,\text{ءس}$

= $\pi \left[\frac{١}{٣} \text{س}^٣ \right]_{٠}^{٣} + \pi \left[\frac{-٨١}{\text{س}} \right]_{٣}^{٦}$

= $\pi\,(٩ - ٠) + \pi\,(-\frac{٨١}{٦} + \frac{٨١}{٣}) = \frac{٤٥}{٢}\,\pi$ وحدة مكعبة

الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اكمل ما يلى :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س} + ٢}$ = ...

الحل

(١) المقدار = $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{٢}$ = هـ × ١ = هـ

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٥ − ٢ طتاس)^٣ = ...

الحل

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٥ − ٢ طتاس)^٣ = ٣ (٥ − ٢ طتاس)^٢ × (− ٢ قتا^{٢}س)

= (− ٦ قتا^{٢}س) (٥ − ٢ طتاس)^٢

(٣) إذا كان للدالة د : د(س) = ك س^{٣} + ٩ س^{٢} ، نقطة إنقلاب عند س = −١ فإن ك = ...

الحل

(٣) ∵ د(س) = ك س^{٣} + ٩ س^{٢} ∴ د$'$(س) = ٣ ك س^{٢} + ١٨ س

، د$''$(س) = ٦ ك س + ١٨

، ∵ للمنحنى نقطة إنقلاب عندما : س = −١

∴ د$''$(−١) = ٠ ∴ −٦ ك + ١٨ = ٠ ∴ ك = ٣

(٤) $\int_{١-}^{٣}$ (٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥) ء س = ...

الحل

(٤) المقدار = [س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٥ س]$_{١-}^{٣}$

= (٨١ − ٥٤ + ٥) − (١ + ٢ − ٥) = ٣٤

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [١ ، ٤] فإن :

$\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س + $\int_{٤}^{١}$ د(س) ء س = ...

الحل

(٥) ∵ $\int_{٤}^{١}$ د(س) ء س = − $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س ∴ المقدار = صفر

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س^{٤} + ١ ، ص = ٢ س^{٢} تساوى .... وحدة مربعة

الحل

(٥) ص$_{١}$ = س^{٤} + ١ ، ص$_{٢}$ = ٢ س^{٢}

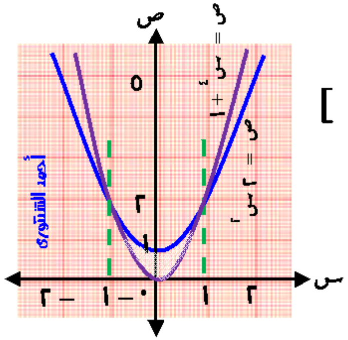
نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ ∴ س^{٤} + ١ = ٢ س^{٢}

∴ س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١ = ٠ ∴ (س^{٢} − ١)^{٢} = ٠

∴ (س − ١) (س + ١) = ٠

و منها : س = ١ ، س = −١

، ∵ ص$_{١}$ ≥ ص$_{٢}$ لكل : س ∈ [−١ ، ١]



∴ م = $\int_{١-}^{١}$ (ص$_{١}$ − ص$_{٢}$) ء س

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ (ص$_{١}$ − ص$_{٢}$) ء س

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س^{٤} + ١ − ٢ س^{٢}) ء س

= ٢ [$\frac{١}{٥}$ س^{٥} + س − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣}]$_{٠}^{١}$

= ٢ [($\frac{١}{٥}$ + ١ − $\frac{٢}{٣}$) − (٠)] = $\frac{١٦}{١٥}$ وحدة مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (ا) $\int$ ظا (٣ س + ١) ء س ،

(٢) $\int$ (١ − س^{٢}) (٣ س − س^{٣})^{٥} ء س

الحل

(ا) $\int$ ظا (٣ س + ١) ء س = $\int$ $\frac{\text{حا (٣ س + ١)}}{\text{حتا (٣ س + ١)}}$ ء س

= − $\frac{١}{٣}$ $\int$ $\frac{\text{−٣ حا (٣ س + ١)}}{\text{حتا (٣ س + ١)}}$ ء س = − $\frac{١}{٣}$ $\int$ $\frac{\text{حتا (٣ س + ١)}'}{\text{حتا (٣ س + ١)}}$ ء س

= − $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ | حتا (٣ س + ١) |

(٢) $\int$ (١ − س^{٢}) (٣ س − س^{٣})^{٥} ء س = $\frac{١}{٣}$ $\int$ (٣ س − س^{٣})^{٥} (٣ − ٣ س^{٢}) ء س

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ (٣ س − س^{٣})^{٥} (٣ − ٣ س^{٢}) ء س

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ (٣ س − س^{٣})^{٥} (٣ س − س^{٣})$'$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٦}$ (٣ س − س^{٣})^{٥} + ث = $\frac{١}{١٨}$ (٣ س − س^{٣})^{٦} + ث

(ب) إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للدالة د حيث ص = د (س)
هما : س = ٢ $ن^{٣}$ + ٣ ، ص = $ن^{٤}$ أوجد عند ن = ١
كل من : أولاً : معادلة مماس منحنى الدالة د
ثانياً : $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$

الحل

∵ س = ٢ $ن^{٣}$ + ٣　　∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = ٦ $ن^{٢}$

، ∵ ص = $ن^{٤}$　　∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = ٤ $ن^{٣}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \div \frac{ء س}{ء ن} = \frac{٢}{٣}$ ن

أولاً : ميل المماس = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{ن = ١} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ س = ٥ ، ص = ١ عند ن = ١

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٥)

أى : ٢ س − ٣ ص − ٧ = ٠

ثانياً : $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}} = \frac{ء}{ء ن}\left(\frac{ء ص}{ء س}\right) \times \frac{ء ن}{ء س} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦ ن^{٢}} = \frac{١}{٩ ن}$

∴ $\left[\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}\right]_{ن = ١} = \frac{١}{٩}$

[٣] (أ) أبحث تحدب منحنى الدالة د حيث د (س) = | $س^{٣}$ − ١ |
موضحاً نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

د (س) = $\begin{cases} س^{٣} - ١ & \text{عندما } س > ١ \\ -س^{٣} + ١ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$　　∵ د $(١)^{+}$ = د $(١)^{-}$ = د (١) = ٠

∴ د (س) متعددة التعريف مجاها ح و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على ح

، ∵ عندما : س > ١ فإن : د (١ + و) − د (١) = $(١ + و)^{٣}$ − ١ − ٠

= ١ + ٣ و + ٣ $و^{٢}$ + $و^{٣}$ − ١ = و (٣ + ٣ و + $و^{٢}$)

∴ $د^{/}(٠)^{+}$ = $\lim_{و \to ٠^{+}} \frac{د(١ + و) - د(١)}{و}$

= $\lim_{و \to ٠^{+}} \frac{و(٣ + ٣ و + و^{٢})}{و}$ = ٣

، ∵ عندما : س < ١ فإن : د (١ + و) − د (١) = − $(١ + و)^{٣}$ + ١ − ٠

= −١ − ٣ و − ٣ $و^{٢}$ − $و^{٣}$ + ١ = و (−٣ − ٣ و − $و^{٢}$)

، $د^{/}(٠)^{-}$ = $\lim_{و \to ٠^{-}} \frac{د(١ + و) - د(١)}{و}$

= $\lim_{و \to ٠^{-}} \frac{و(-٣ - ٣ و - و^{٢})}{و}$ = −٤

∴ $د^{/}(١)^{+} \neq د^{/}(١)^{-}$　　∴ $د^{/}$(١) غير موجودة

∴ $د^{/}$(س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} & \text{عندما } س > ١ \\ \text{غير موجودة} & \text{عندما } س = ١ \\ -٣ س^{٢} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$

، $د^{//}$(س) = $\begin{cases} ٦ س & \text{عندما } س > ١ \\ -٦ س & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$　　، ∵ $د^{//}$(س) = ٠ عندما س = ٠

، $د^{//}$(س) > ٠ عندما : س < ٠　∴ المنحنى محدب لأسفل فى] − ∞ ، ٠ [

، $د^{//}$(س) < ٠ عندما : ٠ < س < ١　∴ المنحنى محدب لأعلى فى] ٠ ، ١ [

، ∵ $د^{/}$(١) غير موجودة أى لا يوجد مماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، ٠)

∴ النقطة (١ ، ٠)
ليست نقطة إنقلاب

، ∵ $د^{//}$(س) > ٠
عندما : ١ < س < ∞
∴ المنحنى محدب لأسفل
فى] ١ ، ∞ [

و الجدول المقابل يوضح ذلك :

س	$-\infty$		٠		١		∞
إشارة $د^{//}$		+	٠	−	غير موجودة	+	
تحدب د		لأسفل		لأعلى		لأسفل	

(ب) إذا كان $\int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس = ٩$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س)\, ءس = ٤$

أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٥} [\,٣\, د(س) - ٦\, س\,]\, ءس$

الحل

، $\because \int_{٥}^{٣} د(س)\, ءس = ٤$ $\therefore \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = -٤$

، $\because \int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس = ٩$

$\therefore \int_{-٢}^{٥} د(س)\, ءس = \int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٩ - ٤ = ٥$

$\therefore \int_{-٢}^{٥} [\,٣\, د(س) - ٦\, س\,]\, ءس = ٣ \int_{-٢}^{٥} د(س)\, ءس$ $- ٦ \int_{-٢}^{٥} س\, ءس$

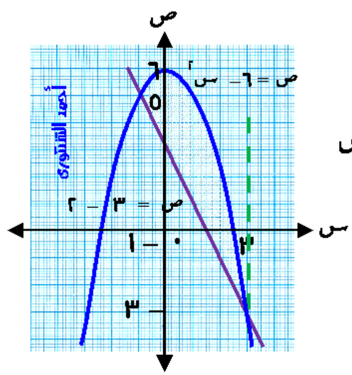
$= ٣ \times ٥ - ٦ \left[\frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{-٢}^{٥}$

$= ١٥ - ٦\left(\frac{٢٥}{٢} - ٢\right) = ١٥ - ٧٥ + ١٢ = -٤٨$

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين

$ص + س^{٢} = ٦$ ، $ص + ٢س - ٣ = ٠$

الحل



(٥) $ص_{١} = ٦ - س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٣ - ٢س$

نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$ $\therefore ٦ - س^{٢} = ٣ - ٢س$

$\therefore س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$\therefore (س - ٣)(س + ١) = ٠$

و منها : $س = ٣$ ، $س = -١$

، $\because ص_{١} \geq ص_{٢}$ لكل : $س \in [-١ ، ٣]$

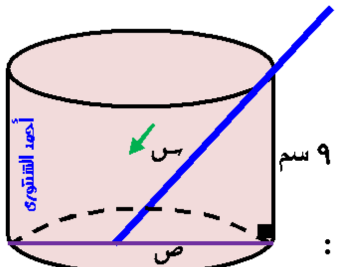
$\therefore م = \int_{-١}^{٣} (ص_{١} - ص_{٢})\, ءس = \int_{-١}^{٣} (٦ - س^{٢} - ٣ + ٢س)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٣} (٣ - س^{٢} + ٢س)\, ءس = \left[٣س - \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢}\right]_{-١}^{٣}$

$= (٩ - ٩ + ٩) - (-٣ + \frac{١}{٣} + ١) = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(ب) إناء على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم و طول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦ سم ، وضع ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم / ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها

الحل



بفرض أن : طول جزء الساق المنزلق مبتعداً عن حافة الاسطوانة = س سم

، بعد الساق على قاعدة الاسطوانة = ص سم

من هندسة الشكل :

$س^{٢} = ٨١ + ص^{٢}$ (١)

عندما تصل الساق إلى نهاية قاعدة الاسطوانة فإن :

$ص = ١٢$ سم بالتعويض فى (١) ينتج : $س = ١٥$ سم

، باشتقاق طرفى (١) بالنسبة لـ ن ينتج : $٢\, س\, \frac{ءس}{ءن} = ٢\, ص\, \frac{ءص}{ءن}$

$\therefore ٢ \times ١٥ \times ٢ = ٢ \times ١٢\, \frac{ءص}{ءن}$ و منها : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٥}{٢}$ سم / ث

[٥] (أ) إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند نقطة عليه (س ، ص) هو ٦ (١ − ٢ س) و كان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ و للدالة قيمة صغرى محلية تساوى ٤

أولاً : أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = − ١

ثانياً : ارسم شكلاً عاماً للمنحنى موضحاً القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

∵ $د''(س) = ٦(١ - ٢س) = ٦ - ١٢س$

∴ $د'(س) = \int (٦ - ١٢س) ء س = ٦س - ٦س^٢ + ث$

، ∵ للمنحنى نقطة حرجة عند : $س = -١$

∴ $د'(-١) = ٠$ ∴ $٠ = ٦ - ٦ + ث$ و منها : $ث = ٠$

∴ $د'(س) = ٦س - ٦س^٢ = ٦س (١ - س)$

، $د'(س) = ٠$ عندما : $س = ٠$ ، $س = ١$

، ∵ $د''(٠) > ٠$ ∴ عند : $س = ٠$ توجد قيمة صغرى محلية $= ٤$ " معطى "

∴ المنحى يمر بالنقطة $(٠ ، ٤)$

∴ $د(س) = \int (٦س - ٦س^٢) ء س = ٣س^٢ - ٢س^٣ + ث'$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة $(٠ ، ٤)$ ∴ $د(٠) = ٤$

∴ $٤ = ٠ - ٠ + ث'$ و منها : $ث' = ٤$

∴ $د(س) = ٣س^٢ - ٢س^٣ + ٤$

، $د'(س) = ٣س^٢ - ٣ = ٣(س^٢ - ١) = ٣(س - ١)(س + ١)$

، $د'(س) = ٠$ عندما : $س = ٠$ ، $س = ١$

∴ الدالة متناقصة فى]١ ، ∞[، و فى]−∞ ، −١[

و متزايدة فى]٠ ، ١[

، $د''(س) = ٦ - ١٢س$ ، ∵ $د''(٠) > ٠$ ∴ $د(٠) = ٤$ قيمة صغرى محلية

، ∵ $د''(١) < ٠$ ∴ $د(١) = ٥$ قيمة عظمى محلية

، ∵ $د''(س) = ٠$ عندما : $س = \frac{١}{٢}$

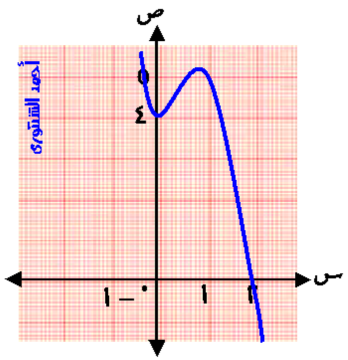
، ∵ $د''(س) > ٠$ فى]−∞ ، $\frac{١}{٢}$[∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، ∵ $د''(س) < ٠$ فى]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{٩}{٢})$ نقطة إنقلاب

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

س	−∞	٠	$\frac{١}{٢}$	١	∞
إشارة د′	−	٠	+	٠	−
سلوك د	↘		↗		↘
إشارة د″	+		٠		−
تحدب د	لأسفل				لأعلى
ص		٤	$\frac{٩}{٢}$	٥	
		قيمة صغرى محلية	نقطة إنقلاب	قيمة عظمى محلية	



(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات $ص = س^٣ + ١$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ١$ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

حدود التكامل هى : $س = ٠$ ، $س = ١$

و المنطقة تقع فوق محور السينات لأن : $ص = ٠$.

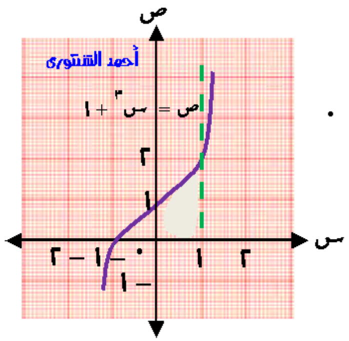
و الدوران حول محور السينات

∴ $ح = \pi \int_{٠}^{١} ص^٢ ء س$

$= \pi \int_{٠}^{١} (س^٦ + ٢س^٣ + ١) ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٧} س^٧ + \frac{١}{٢} س^٤ + س \right]_{٠}^{١}$

$= \pi \left[(\frac{١}{٧} + \frac{١}{٢} + ١) - (٠) \right] = \frac{٢٣}{١٤} \pi$ وحدة مكعبة



تم بحمد الله