المصفوفات

تعريف المصفوفة ← هى طريقة تنظيم للبيانات أو المعلومات فى شكل صفوف (افقية) و اعمدة (رأسية) توضع بين قوسين قوسين من النوع ( )

نظم المصفوفة ← إذا كان عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد أعمدة المصفوفة = ن

تكون المصفوفة على النظم = م × ن

أمثـــــــــــلة

① أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ على النظم : ٢ × ٣

② س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم : ٢ × ٢

③ ص = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ على النظم : ١ × ٣

تسمية المصفوفة : تسمى المصفوفة بأحد الأحرف الكبيرة (أ ، س ، ص ، ....)

أمثـــــــــــلة

① محلان لبيع الأدوات الكهربائية : فى احد الأيام باع المحل الأول ٥ خلاطات ، ٦ مراوح ، ٣ ثلاجات و باع المحل الثانى ٤ خلاطات ، ٩ مراوح ، ٣ ثلاجات اكتب مصفوفة المبيعات على النظم ٢ × ٣

الحـــــــــــل

أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$ (لاحظ أن : عدد الصفوف = ٢ ، عدد الأعمدة = ٣)

② اذا كان احد المصانع له فرعان و ينتج ثلاثة أنواع من السلع (تلفزيون ، غسالة ، ثلاجة) و كان الفرع (س) ينتج : ٥٠ تلفزيون ، ٤٠ غسالة ، ٣٥ ثلاجة و كان الفرع (ص) ينتج : ٧٠ تلفزيون ، ٣٠ غسالة ، ٢٥ ثلاجة أكتب هذا المصنع على شكل مصفوفة بطريقتين

الحـــــــــــل

أ = $\begin{pmatrix} ٣٥ & ٤٠ & ٥٠ \\ ٢٥ & ٣٠ & ٧٠ \end{pmatrix}$ أو أ = $\begin{pmatrix} ٧٠ & ٥٠ \\ ٣٠ & ٤٠ \\ ٢٥ & ٢٥ \end{pmatrix}$

موقع العناصر فى المصفوفة : فى المصفوفة (أ) يكون العنصر ($أ_{ص ع}$) الذى يقع فى الصف (ص) ، العمود (ع)

أمثـــــــــــلة

① إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ اكتب نظم المصفوفة (أ) ثم أوجد : $أ_{٢١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{١٣}$

الحـــــــــــل

المصفوفة (أ) على النظم : ٣ × ٣

$أ_{٢١} = ٣$ $أ_{٢٣} = ٥$ $أ_{٢٢} = ٩$ $أ_{١٣}$ ع $= -٢$

تدريـــــب :-

فى المصفوفة (أ) = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ ١٠ & ٧ & ٤ \\ ٠ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة : $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $أ_{٣٢}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٣٣}$

② أكتب بطريقة السرد للمصفوفة (أ ص ع) حيث : أ ص ع = ع − ص　و للمصفوفة (أ) على النظم ٢ × ٣

الحـــــــــــــــــــل

$أ_{١١}$ = ١ − ١ = ٠　　$أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١　　$أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ٢ − ١ = ١　　$أ_{٢٢}$ = ٢ − ٢ = ٠　　$أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$　　(لاحظ أن : عدد الصفوف = ٢ ، عدد الأعمدة = ٣)

③ أكتب المصفوفة (أ ص ع) على النظم ٣ × ٣ حيث : أ ص ع =
- ص + ع　عندما : ص < ع
- ٢　عندما : ص = ع
- ع − ص　عندما : ص > ع

الحـــــــــــــــــــل

$أ_{١١}$ = ٢　　$أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١　　$أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ٢ + ١ = ٣　　$أ_{٢٢}$ = ٢　　$أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

$أ_{١٣}$ = ٣ + ١ = ٤　　$أ_{٢٣}$ = ٣ + ٢ = ٥　　$أ_{٣٣}$ = ٢

∴ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

بعض المصفوفات الخاصة

١ مصفوفة الصف : هى المصفوفة التى تتكون من صف واحد و أى عدد من الأعمدة (م = ١)

أمثـــلة : ① س = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ١ \end{pmatrix}$　② ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

٢ مصفوفة العمود : هى المصفوفة التى تتكون من أى عدد من الصفوف و عمود واحد فقط (ن = ١)

أمثـــلة :

① س = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$　② ص = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

٣ المصفوفة المربعة : هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة　بحيث (م = ن)

أمثـــلة :

① س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$　② ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$

٤ المصفوفة الصفرية : هى المصفوفة التى كل عناصرها أصفار و رمزها ☐ "مستطيل صغير"

مثـــال : ☐ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$　مصفوفة صفرية على النظم (٢ × ٣)

٥ المصفوفة القطرية : هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى أحدهم على الأقل لا يساوى صفر　$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

٦ **مدور المصفوفة :** لأى مصفوفة على النظم (م × ن) إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مدور المصفوفة (أ) و رمزها ($أ^{مد}$) و تكون على النظم (ن × م)

مُـــلاحظة : ① $(أ^{مد})^{مد} = أ$　② المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان : $أ = أ^{مد}$

③ المصفوفة أ تكون شبه متماثلة إذا كان : $أ = -أ^{مد}$

٧ **مصفوفة الوحدة :** هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسى فهى تساوى واحد و يرمز لها بالرمز (I)

أمثـــلة :

① $I_{٢×٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$　② $I_{٣×٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

أمثـــــــــــــــلة

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

أوجد : $أ^{مد}$ ، $ب^{مد}$ ، $ج^{مد}$

الحـــــــــــــــل

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٠ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $ج^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$

تساوى مصفوفتين

تتساوى مصفوفتين إذا كانتا : ① لهما نفس النظم

② كل عنصر فى أ يساوى نظيره فى ب أى أن :- $أ_{ص ع} = ب_{ص ع}$

أمثـــــــــــــــلة

١ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٣ & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & س & ٠ \\ ص & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$　أوجد قيمة : س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــل

س = ٢　،　ص = ٥　،　ع = ٤

٢ إذا كان : $\begin{pmatrix} ٣ & ج - ء \\ ٢ & ١ \\ هـ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ج + ء \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$　أوجد قيمة : ج ، ء ، هـ

الحـــــــــــــــل

ج − ء = ٥
ج + ء = ١
بالجمع ــــــــــــــــ
٢ج = ٦

∴ ج = ٣
∴ ء = −٢
∴ هـ = ٧

[٣] إذا كان: $\begin{pmatrix} \text{س}-١ & \text{ع} \\ ٣\text{ص} & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٥ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد قيمة: س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــــــل

$\therefore$ س $-$ ١ = ٣　$\Leftarrow$　س = ٣ + ١ = ٤

$\therefore$ ٣ص = ١٥　$\Leftarrow$　ص = $\frac{١٥}{٣}$ = ٥

$\therefore$ ع = ٢

[٤] إذا كان: $\begin{pmatrix} -١ & \text{س} & ٦ \\ ٠ & ٦ & \text{ع} \\ \text{ص} & ٥ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٤ \\ ٨ & ٦ & ٥ \\ ٦ & ٢ & ٩ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ أوجد قيمة: س ، ص ، ع

الحـــــــــــــــــــل

$\begin{pmatrix} -١ & \text{س} & ٦ \\ ٠ & ٦ & \text{ع} \\ \text{ص} & ٥ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٨ & ٦ \\ ٠ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٩ \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ أوجد قيمة: س ، ص ، ع

س = ٨　،　ص = ٤　،　ع = ٢

[٥] أوجد قيمتي: س ، ص ، ع　اذا كان: أ = ب$^{\text{مد}}$ حيث:

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & ٥ \end{pmatrix}$　،　ب = $\begin{pmatrix} \text{س} \\ -\text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــــــــل

$\because$ أ = ب$^{\text{مد}}$　$\Leftarrow$　$\begin{pmatrix} ٢ & -٤ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} & -\text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix}$

س = ٢　،　$-٤ = -$ص $\Leftarrow$ ص = ٤　،　ع = ٥

تدريـــــــــب

أوجد قيمتي: س ، ص　اذا كان: أ = ب$^{\text{مد}}$ حيث:

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$　　ب = $\begin{pmatrix} ٢ & \text{ص} \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

[٦] إذا كانت : ٢ = $\begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فاثبت أن : المصفوفة ٢ متماثلة

الحــــــــــــــل

$٢^{مد} = \begin{pmatrix} -٣ & -١ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$　　∴ $٢ = ٢^{مد}$

∴ المصفوفة ٢ متماثلة

[٧] إذا كانت : ب = $\begin{pmatrix} ٤ & \frac{١}{٢} & ٠ \\ -٢ & -٤ & -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ فاثبت أن : المصفوفة ب شبه متماثلة

الحــــــــــــــل

$ب^{مد} = \begin{pmatrix} -٤ & -\frac{١}{٢} & ٠ \\ ٢ & -٤ & \frac{١}{٢} \\ ٠ & -٢ & ٤ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} ٤ & \frac{١}{٢} & ٠ \\ -٢ & ٤ & -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

∴ $ب^{مد} = -ب$

∴ المصفوفة ب شبه متماثلة

تدريــــــــب

[١] إذا كانت : ٢ = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢س & ٥ \\ ٦ & -٣ & -٤ \\ ٤ & ٦ & س + ٢ص \end{pmatrix}$ متماثلة فأوجد قيمتي س ، ص

[٢] إذا كانت : ٢ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٣س & ٠ \\ -٢ع & ٠ & ع + ٣ \\ ٠ & ٦ & ٣ص - س \end{pmatrix}$ شبه متماثلة فأوجد قيمة س ، ص ، ع

العمليات على المصفوفات

أولاً : الجمع

إذا كانت : س ، ص مصفوفتان لهما نفس النظم فإن : عملية الجمع تكون ممكنة و يكون ناتج عملية الجمع عبارة عن مصفوفة من نفس النظم و كل عنصر فيها يساوى ناتج جمع العنصرين المتناظرين

أمثـــــــــلة

[١] إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ **أوجد :** س + ص

الحـــــــــــــل

$$\text{س} + \text{ص} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

[٢] إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **أوجد :** $\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحـــــــــــــل

$$\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة :-

إذا كانت : س على النظم (م × ن) فإن : ضرب أى عدد حقيقى (ك) حيث (ك ≠ ٠) فى المصفوفة س هو المصفوفة (ع = ك س) من النظم (م × ن) و ذلك ضرب العدد الحقيقى فى كل عنصر من عناصر المصفوفة س

[٣] إذا كانت : $\text{س} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ، ك = ٣ **فأوجد :** ع = ٣س

الحـــــــــــــل

$$\text{ع} = 3\text{س} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

خواص عملية جمع المصفوفات

نفرض أن : س ، ص ، ع ثلاثة مصفوفات من النظم (م × ن) فإن :-

① خاصية الإنغلاق : س + ص تكون مصفوفة من نفس النظم (م × ن)

② خاصية الإبدال : س + ص = ص + س

③ خاصية الدمج : (س + ص) + ع = س + (ص + ع) = س + ص + ع

④ خاصية المحايد الجمعي : س + □ = □ + س = س حيث : □ مصفوفة صفرية من نفس نظم س

⑤ خاصية المعكوس " النظير " الجمعي : لأى مصفوفة س توجد مصفوفة (− س) من نفس النظم بحيث : س + (− س) = □

ثانيا : الطرح :-

إذا كانت المصفوفتين س ، ص على نفس النظم (م × ن) فإن :

س − ص = س + (− ص) على نفس النظم (م × ن)

④ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد : س − ص

الحـــــــــــــــل

س − ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & -٥ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

⑤ إذا كانت : س = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد : ٣س − ٢ص

الحـــــــــــــــل

٣س − ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ − ٢ $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٠ \\ ٦ & ٠ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٨ & ٢ & -٤ \\ -١٤ & -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٥ & ٨ & -٤ \\ -٨ & -٢ & ١١ \end{pmatrix}$

٦ إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : $2\text{ب} + \text{س}^{\text{مد}} = 3\text{أ}$

الحــــــــــــــــل

$\because 2\text{ب} + \text{س}^{\text{مد}} = 3\text{أ} \quad \Leftarrow \quad \text{س}^{\text{مد}} = 3\text{أ} - 2\text{ب}$

$$\text{س}^{\text{مد}} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ -6 & 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -10 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 21 \\ -16 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{س} = (\text{س}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 3 & 11 \\ 21 & 4 \end{pmatrix}$$

٧ إذا كانت : $2\text{أ}^{\text{مد}} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \end{pmatrix} = \square$ فأوجد : أ

الحــــــــــــــــل

$$2\text{أ}^{\text{مد}} = \square - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{\text{مد}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

أ = (أ $^{\text{مد}}$) $^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

⑧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

اثبت أن : (أ + ب) $^{\text{مد}}$ = أ $^{\text{مد}}$ + ب $^{\text{مد}}$

الحـــــــــــــــل

أ + ب = $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -4 & -3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

(أ + ب) $^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 9 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

أ $^{\text{مد}}$ + ب $^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 9 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

∴ (أ + ب) $^{\text{مد}}$ = أ $^{\text{مد}}$ + ب $^{\text{مد}}$

تدريـــــــــــب

أكمـــــــل مايلى :-

① (س ص) $^{\text{مد}}$ = ... × ....　　② (س + ص) $^{\text{مد}}$ = ... + ...

③ (س $^{\text{مد}}$) $^{\text{مد}}$ = ...　　④ (س − ص) $^{\text{مد}}$ = ... − ....

⑤ **لأى مصفوفة أ يكون :** أ + (−أ) = ...

ضرب المصفوفات

إذا كانت س ، ص مصفوفتان فإن : س ، ص تكونان قابلتان للضرب إذا كان عدد أعمدة المصفوفة س يساوي عدد صفوف المصفوفة ص

أي أن :- إذا كانت س مصفوفة على النظم (م × ن) ، ص مصفوفة على النظم (ن × ل)

فإن :- حاصل الضرب (س × ص = ع) تكون مصفوفة على النظم (م × ل)

ملاحظة هامة :- عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة في حالة واحدة فقط إذا وفقط إذا كان : عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

أمثلة

[١] إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ **فأوجد : أ ب ، ب أ**

الحل

المصفوفة أ على النظم (٢ × ٣) ، المصفوفة ب على النظم (٣ × ٢)

فتكون المصفوفة الناتجة على النظم (٢ × ٢)

$$\text{أ}\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times ٢ + ١ \times ٣ & ٢ \times ١ + ٣ \times ٤ + ١ \times ١ \\ ١ \times ٢ + ١ \times ٢ + ٢ \times ٣ & ١ \times ١ + ١ \times ٤ + ٢ \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب}\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ١ \times ١ & ٢ \times ٣ + ١ \times ١ & ٢ \times ١ + ١ \times ٢ \\ ٢ \times ٢ + ٤ \times ١ & ٢ \times ٣ + ٤ \times ١ & ٢ \times ١ + ٤ \times ٢ \\ ٣ \times ٢ + ١ \times ١ & ٣ \times ٣ + ١ \times ١ & ٣ \times ١ + ١ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ٤ \\ ٨ & ١٠ & ١٠ \\ ٧ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$$

[٢] إذا كان : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ **فأوجد قيمة :** $\text{أ}^٢ - ٣\text{ب}$

الحل

المصفوفة أ على النظم (٢ × ٢) ، المصفوفة ب على النظم (٢ × ٢)

فتكون المصفوفة الناتجة على النظم (٢ × ٢)

$$\text{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times ٣ + ١ \times ٢ & ٣ \times ١ + ١ \times ٥ \\ ٢ \times ٣ + ٥ \times ٢ & ٢ \times ١ + ٥ \times ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^٢ - ٣\text{ب} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} - ٣ \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ٠ \\ -١٥ & -٢٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

[٣] إذا كان : $م = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : $م^٤$

الحـــــــــــل

$$م^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ + ١ \times ٠ & ٢ \times ١ + ١ \times ٥ \\ ٠ \times ٢ + ٥ \times ٠ & ٠ \times ١ + ٥ \times ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix}$$

$$م^٤ = \begin{pmatrix} ٤ & ٢٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤ & ٢٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \times ٤ + ٢٧ \times ٠ & ٤ \times ٢٧ + ٢٧ \times ٢٥ \\ ٠ \times ٤ + ٢٥ \times ٠ & ٠ \times ٢٧ + ٢٥ \times ٢٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٦ & ٧٨٣ \\ ٠ & ٦٢٥ \end{pmatrix}$$

> **لاحظ أن :-**
> $م^٤ = م^٢ \times م^٢$

خواص عملية الضرب

نفرض أن : س ، ص ، ع ثلاثة مصفوفات من النظم $(م \times ن)$ فإن :-

① خاصية الدمج : (س ص) ع = س (ص ع)

② خاصية المحايد الضربي :- $س \times I = I \times س = س$

③ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على الجمع

س (ص + ع) = س ص + س ع ، (س + ص) ع = س ع + ص ع

[٤] إذا كان : $م = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $م^٢ - ٥م + ٢I = \square$

الحـــــــــــل

$$م^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \times ٢ - ١ \times -٤ & ٢ \times -١ - ١ \times ٣ \\ -٤ \times ٢ + ٣ \times -٤ & -٤ \times -١ + ٣ \times ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix}$$

المقدار $= أ^{٢} - ٥أ + ٢I = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - ٥\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٨ - ١٠ + ٢ & -٥ + ٥ + ٠ \\ -٢٠ + ٢٠ + ٠ & ١٣ - ١٥ + ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

٥ أوجد المصفوفة التي تحقق أن: $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \times ص = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل

حيث أن المصفوفة الأولى من النظم (٣ × ٢) و المصفوفة الناتجة من النظم (٣ × ١) فيجب أن تكون المصفوفة ص من النظم (٢ × ١)

نفرض أن: $ص = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \times أ - ١ \times ب \\ ٢ \times أ + ٠ \times ب \\ ٣ \times أ + ٥ \times ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ - ب \\ ٢أ \\ ٣أ + ٥ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٤ \\ ٢١ \end{pmatrix}$$

$\therefore ٢أ = ٤ \Leftarrow أ = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\therefore أ - ب = -١ \Leftarrow ٢ - ب = -١ \Leftarrow ب = ٢ + ١ = ٣$

تدريـــــــب

① إذا كانت: $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٩ \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من:

أب ، ب أ ، $(أ + ب)^{مد}$

② إذا كانت: $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فاثبت أن: $أ^{٢} - ٥أ + ٢٢I = \square$

المحددات

[١] أوجد قيمة المحددات التالية

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــــــــــل

(أ) $\Delta = ٢ \times ١ - ٣ \times ٥ = ٢ - ١٥ = -١٣$

(ب) $\Delta = ١ \times ٤ - ٢ \times -٣ = ٤ + ٦ = ١٠$

==================================

[٢] أوجد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــــــــــل

يمكن فك المحدد عن طريق اى صف (عمود) مع مراعاة قاعدة الإشارات ..... بأستخدام عناصر الصف الأول

$$\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

$= (٧ \times ٤ - ٢ \times ٣) - ٢(٤ \times ٤ - ٢ \times ٥) + ٣ (٤ \times ٣ - ٧ \times ٥)$

$= (٢٨ - ٦) - ٢(١٦ - ١٠) + ٣ (١٢ - ٣٥) = ٢٢ - ١٢ - ٦٩ = - ٥٩$

[٣] حل المعادلة : $\begin{vmatrix} س & صفر & صفر \\ ١ & س & س \\ ٥ & ٢ & س \end{vmatrix} = ٣س$

الحـــــــــــــــــــــل

إيجاد قيمة المحدد بإستخدام عناصر الصف الأول

$\Delta = س (س \times س - س \times ٢) - صفر (١ \times س - س \times ٥) + صفر (١ \times ٢ - س \times ٥)$

$= س (س^٢ - ٢س)$

$\therefore س (س^٢ - ٢س) = ٣س \Leftarrow س^٢ - ٢س = ٣$

$\therefore س^٢ - ٢س - ٣ = صفر \Leftarrow (س - ٣) (س + ١) = صفر$

$\therefore س = ٣$ أ، $س = -١$

محدد المصفوفة المثلثية

إذا كان : $\begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١} \\ ٠ & أ_{٢١} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢١} \end{vmatrix}$

فإن : $\Delta = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$ أو $\Delta = أ_{١١} \times أ_{٢٢}$ (قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسى)

٤ بدون فك المحدد أوجد قيمة : (أ) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــل

(أ) $\Delta = 3 \times 2 \times 5 = 30$ (ب) $\Delta = 3 \times -3 \times 2 = -18$

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

١ حل بطريقة كرامر المعادلتين الآتيتين : ٦س − ٥ص = −٢٣ ، ٣س + ٣ص = ١٦

الحـــــــــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 3 \times (-5) = 18 + 15 = 33$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -23 & -5 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = -23 \times 3 - (-5) \times 16 = -69 + 80 = 11$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 6 & -23 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = 6 \times 16 - (-23) \times 3 = 96 + 69 = 165$$

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \qquad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{165}{33} = 5$$

٢ حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

٢س + ص − ٢ع = ١٠ ، ٣س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

الحـــــــــــــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(2\times3 - 2\times4) - (3\times3 - 2\times5) - 2(3\times4 - 2\times5) = -4+1-4 = -7$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 10(2\times3 - 2\times4) - (1\times3 - 2\times4) - 2(1\times4 - 2\times4) = -20+5+8 = -7$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(1\times3 - 2\times4) - 10(3\times3 - 2\times5) - 2(3\times4 - 1\times5) = -10+10-14 = -14$$

$$\Delta_ع = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢(٢\times٤ - ١\times٤) - (٣\times٤ - ١\times٥) + ١٠(٣\times٤ - ٢\times٥) = ٨ - ٧ + ٢٠ = ٢١$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-٧}{-٧} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢ \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_ع}{\Delta} = \frac{٢١}{٧} = ٣$$

تدريـــــــــــب

حل نظام المعادلات الآتية بطريقة كرامر :

① س + ٢ص − ٣ع = ٦ ، ٢س − ٢ص − ٤ع = ٢ ، ٤س + ٣ص − ٢ع = ١٤

② ٤س + ٣ص = −٤ ، ٣س − ص = −٣

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

١ باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقاط أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، −٤) ، ج(−٢ ، ٣)

الحـــــــــــــــل

$$م = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ -٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}\left[(٣\times٣ + ٤\times-٢) - (١\times٣ - ٢\times-٢) + (١\times-٤ - ٢\times٣)\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\left[١ - ٧ - ١٠\right] = -٨$$

∴ مساحة Δ أ ب ج = | م | = | −٨ | = ٨ وحدة مساحة

إثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة باستخدام المحددات

٢ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط أ(−٢ ، ٤) ، ب(٣ ، ٠) ، ج(٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة

الحـــــــــــــــل

$$\because \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٨ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = (٣\times-٤ - ٠\times٨) - (-٢\times-٤ - ٤\times٨) + (-٢\times٠ - ٤\times٣)$$

$$= -١٢ + ٢٤ - ١٢ = \text{صفر}$$

∴ **النقاط أ(−٢ ، ٤) ، ب(٣ ، ٠) ، ج(٨ ، −٤) تقع على استقامة واحدة**

تدريـــــــب

١ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط أ(٣ ، ٥) ، ب(٤ ، −١) ، ج(٥ ، −٧) تقع على استقامة واحدة

٢ باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقاط أ(٢ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٤) ، ج(٠ ، −٢)

المعكوس الضربي للمصفوفة (٢ × ٢)

إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة س التي يرمز لها بالرمز $س^{-١}$

يكون موجودا عندما تكون قيمة محدد المصفوفة ($\Delta \neq ٠$) لا تساوى صفر

ويكون : $س^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$

أمثـــــــــــــــلة

$\boxed{١}$ بين المصفوفات التي لها معكوس ضربي و أوجده (إن وجد)

① $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

الحـــــــــــــل

① $\Delta = ٢ \times ١ - ١ \times -١ = ٢ + ١ = ٣ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

المعكوس الضربي للمصفوفة $= \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & -\frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \end{pmatrix}$

② $\Delta = ٢ \times ٣ - ٦ \times -١ = ٦ + ٦ = ١٢ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

المعكوس الضربي للمصفوفة $= \frac{١}{١٢} \begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$

③ $\Delta = -١ \times ٤ - ٠ \times ٣ = -٤ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

المعكوس الضربي للمصفوفة $= -\frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

④ $\Delta = ٤ \times ١ - ٢ \times ٣ = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

المعكوس الضربي للمصفوفة $= -\frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & ١ \\ \frac{٣}{٢} & -٢ \end{pmatrix}$

[٢] ما قيم أ الحقيقية التي تجعل لكل من المصفوفات الآتية معكوس ضربي :

① $\begin{pmatrix} أ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} أ - ١ & -٢ \\ ١ & أ - ٢ \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

① $\Delta = أ \times ٣ - ١ \times ٦ = ٣أ - ٦$ بوضع $\Delta = ٠$ $\therefore ٣أ - ٦ = ٠ \Leftarrow أ = \frac{٦}{٣} = ٢$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربي $\therefore أ \in ح - \{٢\}$

② $\Delta = أ \times أ - ٩ \times ٤ = أ^{٢} - ٣٦$ بوضع $\Delta = ٠$ $\therefore أ^{٢} - ٣٦ = ٠ \Leftarrow أ = \sqrt{٣٦} = \pm ٦$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربي $\therefore أ \in ح - \{\pm ٦\}$

③ $\Delta = (أ - ١) \times (أ - ٢) + ٢ \times ١ = أ^{٢} - ٣أ + ٢ + ٢ = أ^{٢} - ٣أ + ٤$

بوضع $\Delta = ٠$ $\therefore أ^{٢} - ٣أ + ٤ = ٠$ م . ح $= \varnothing$

حتى يكون للمصفوفة معكوس ضربي $\therefore أ \in ح$

[٣] إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ فاثبت أن : $س^{-١} = س$

الحـــــــــل

$\Delta = ١ \times -١ - أ \times ٠ = -١ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

$س^{-١} = - \begin{pmatrix} -١ & -أ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & أ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$ $\therefore س^{-١} = س$

[٤] إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ فاثبت أن : $س^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = ٢ \times ٢ - ٠ \times ٠ = ٤ \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

$س^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

[٥] إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} س & -س ص \\ ٠ & ص \end{pmatrix}$ فاثبت أن : $ب^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

الحـــــــــل

$\Delta = س \times ص - (-س ص \times ٠) = س ص \neq ٠$ المصفوفة لها معكوس ضربي

$س^{-١} = \frac{١}{س ص} \begin{pmatrix} ص & س ص \\ ٠ & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{س} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{ص} \end{pmatrix}$

٦ **إذا كانت :** $س = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **فاثبت أن :** $(س\,ص)^{-1} = ص^{-1}\,س^{-1}$

الحـــــــــــل

$$س\,ص = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 - 3\times -1 & 2\times -1 - 3\times 3 \\ 0\times 1 + 1\times -1 & 0\times -1 + 1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|س\,ص| = 5\times 3 - (-11\times -1) = 15 - 11 = 4$$

$$(س\,ص)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$|س| = 2\times 1 - (-3\times 0) = 2 \qquad |ص| = 1\times 3 - (-1\times -1) = 3 - 1 = 2$$

$$س^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ص^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$ص^{-1}\,س^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 & \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 1 \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (س\,ص)^{-1} = ص^{-1}\,س^{-1}$$

٧ **إذا كانت :** $ب = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $أ\,ب = I$ **فأوجد المصفوفة** أ

الحـــــــــــل

$$\because أ\,ب = I \qquad \therefore أ = I \times ب^{-1} = ب^{-1} \qquad \therefore |ب| = 2\times 1 - 4\times 3 = 2 - 12 = -10$$

$$\therefore ب^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = أ$$

تدريـــــب

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $أ\,ب = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ **فأوجد المصفوفة** ب

حل معادلتين آنيتين بإستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

خطوات الحل

① تضع معاملات المعادلتين فى صورة مصفوفة (مصفوفة المعاملات) و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}$

② تضع مصفوفة المجاهيل و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

③ تضع مصفوفة الثوابت و تكون على الصورة $\begin{pmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{pmatrix}$

④ تكتب على الصورة التالية : $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{pmatrix}$ ثم تحل بخطوات المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات

أمثـــــــــــــــــلة

حل كل من نظام المعادلات الخطية التالية بإستخدام المصفوفات

① ٣س + ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٣ ② ٢س − ٧ص = ٣ ، س − ٣ص = ٢

الحـــــــــــــــــل

① $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$|أ| = ٣ \times ١ - ٢ \times ٢ = ٣ - ٤ = -١$

$\therefore أ^{-١} = - \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $\because س = أ^{-١} جـ$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١\times٥ + ٢ \times ٣ \\ ٢\times٥ - ٣ \times ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ١ ، ص = ١ $\Leftarrow$ م . ح = $\{(١ ، ١)\}$

② $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $جـ = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$|أ| = ٢ \times -٣ + ٧ \times ١ = -٦ + ٧ = ١$

$\therefore أ^{-١} = - \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\because س = أ^{-١} جـ$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣\times٣ + ٧ \times ٢ \\ -١\times٣ + ٢ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ٥ ، ص = ١ $\Leftarrow$ م . ح = $\{(٥ ، ١)\}$

③ باستخدام المصفوفات أوجد عددين مجموعهما ١٠ و الفرق بينهما ٤

الحـــــــــل

نفرض العددين : س ، ص ∴ س + ص = ١٠ ، س − ص = ٤

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & −١ \end{pmatrix} ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ١ \times −١ − ١ \times ١ = −١ − ١ = −٢$$

$$\therefore \text{أ}^{−١} = −\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} −١ & −١ \\ −١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & −\frac{١}{٢} \end{pmatrix} ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{−١}\,\text{ج}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & −\frac{١}{٢} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \times ١٠ + \frac{١}{٢} \times ٤ \\ \frac{١}{٢} \times ١٠ − \frac{١}{٢} \times ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٥ ، ص = ١

∴ العددان هما ٧ ، ٣

④ يمر المنحنى : ص = أ س^{٢} + ب س بالنقطتين : (٣ ، ٠) ، (٤ ، ٨) استخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين أ ، ب

الحـــــــــل

بالتعويض بالنقطة (٣ ، ٠) ⇐ ٩أ + ٣ب = ٠

بالتعويض بالنقطة (٤ ، ٨) ⇐ ١٦أ + ٤ب = ٨

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ١٦ & ٤ \end{pmatrix} ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = ٩ \times ٤ − ٣ \times ١٦ = ٣٦ − ٤٨ = −١٢$$

$$\therefore \text{أ}^{−١} = −\frac{١}{١٢}\begin{pmatrix} ٤ & −٣ \\ −١٦ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} −\frac{١}{٣} & −\frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & −\frac{٣}{٤} \end{pmatrix} ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{−١}\,\text{ج}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} −\frac{١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{٤}{٣} & −\frac{٣}{٤} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ \\ ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} −\frac{١}{٣} \times ٠ + \frac{١}{٤} \times ٨ \\ \frac{٤}{٣} \times ٠ − \frac{٣}{٤} \times ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ −٦ \end{pmatrix}$$

∴ أ = ٢ ، ب = −٦

⑤ الخط المستقيم الذى معادلته : ص + أس = جـ يمر بالنقطتين (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) إستخدم المصفوفات لإيجاد الثابتين أ ، جـ

الحــــــــــــــــــل

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٥) ⇐ ٥ + أ = جـ ⇐ أ − جـ = −٥

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ١) ⇐ ١ + ٢أ = جـ ⇐ ٢أ − جـ = −١

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{جـ} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{جـ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = 1 \times -1 + 1 \times 2 = -1 + 2 = 1$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{جـ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times -5 + 1 \times -1 \\ -2 \times -5 + 1 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

∴ أ = ٤ ، جـ = ٩

⑥ إشترت أمل ٨كجم من الدقيق ، ٢كجم من الزيد بمبلغ ١٤٠ جنيها ، و اشترت صديقتها ريم ٤كجم من الدقيق ، ٣كجم من الزيد بمبلغ ١٧٠ جنيها ، استخدم المصفوفات فى إيجاد سعر الكيلوجرام من كلا النوعين

الحــــــــــــــــــل

نفرض سعر كيلوجرام الدقيق = س ، سعر كيلوجرام الزيد = ص

٨س + ٢ص = ١٤٠ ، ٤س + ٣ص = ١٧٠

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{جـ} = \begin{pmatrix} 140 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$$|\text{أ}| = 8 \times 3 - 4 \times 2 = 24 - 8 = 16$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ، \quad \because \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{جـ}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 140 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \times 140 - \frac{1}{8} \times 170 \\ -\frac{1}{4} \times 140 + \frac{1}{2} \times 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٥ ، ص = ٥٠

سعر كيلوجرام الدقيق = ٥ ، سعر كيلوجرام الزيد = ٥٠

البرمجة الخطية

حل متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد

خواص التباين :-

إذا كان : س ، ص ، ع **أعداد حقيقية و كان :** س > ص **فإن :-**

① س + ع > ص + ع **سواء كانت ع موجبة أو سالبة** **(خاصية الإضافة)**

فمثلا : س > ٣ ⇐ س + ٤ > ٧

② **إذا كانت :** ع > ٠ **فإن :** س ع > ص ع **(الضرب فى عدد حقيقى موجب)**

فمثلا : س < ٥ ⇐ ٣س < ١٥

③ **إذا كانت :** ع < ٠ **فإن :** س ع < ص ع **(الضرب فى عدد حقيقى سالب)**

فمثلا : س < ٥ ⇐ −٣س > −١٥

أمثـــــــــــــــلة

١ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد : ٣س − ٤ < ٥

الحــــــــــــــــل

٣س − ٤ + ٤ < ٥ + ٤ ⇐ ٣س < ٩ ⇐ س < ٣

م . ح =] −∞ ، ٣ [

==============================

٢ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد : ٤ − ٢س ≤ ٦

الحــــــــــــــــل

٤ − ٢س − ٤ ≤ ٦ − ٤ ⇐ −٢س ≤ ٢ ⇐ س ≥ −١

م . ح = [−١ ، ∞ [

==============================

٢ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة و مثلها على خط الأعداد : س + ٨ < ٣س − ٢ ≤ س + ٤

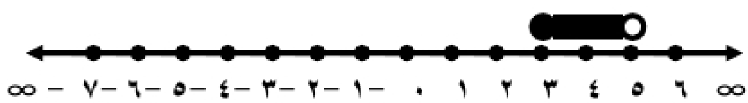
الحــــــــــــــــل

س − س + ٨ < ٣س − س − ٢ ≤ س − س + ٤ ⇐ ٨ < ٢س − ٢ ≤ ٣

∴ ٨ + ٢ < ٢س − ٢ + ٢ ≤ ٤ + ٢ ⇐ ١٠ < ٢س ≤ ٦

∴ $\frac{١٠}{٢}$ < $\frac{٢س}{٢}$ ≤ $\frac{٦}{٢}$ ⇐ ٥ < س ≤ ٣

م . ح =] ٣ ، ٥]



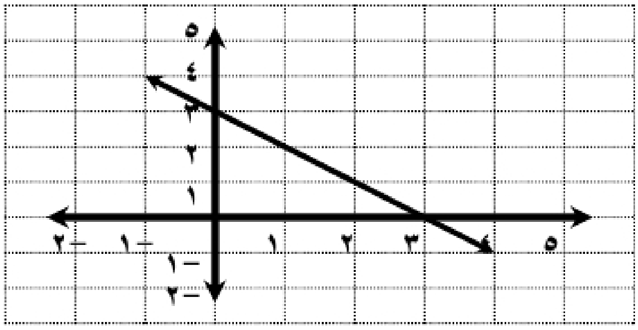
حل متباينة من الدرجة الأولى فى متغيرين

مقدمة : المعادلة أس + ب ص = جـ هى معادلة خطية "من الدرجة الأولى" يمثلها بيانيا خط مستقيم و مجموعة الحل لها عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحققها

مثـــال : أوجدمجموعة حل المعادلة : س + ص = ٣ بيانيا

الحـــــــــــل

س	٠	٣	٥
ص	٣	٠	٢−



مـــــــلاحظات هامة :

المستقيم (ل) يقسم المستوى الى ثلاث مجموعات من النقط

① مجموعة نقط المستقيم ل وهى مجموعة النقاط التى تحقق معادلته ويسمى المستقيم الحدى

② ف١ وهى مجموعة نقط المستوى و التى تقع على أحد جانبى المستقيم ل وهى نصف المستوى

③ ف٢ وهى مجموعة نقط المستوى و التى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ل وهى النصف الآخر

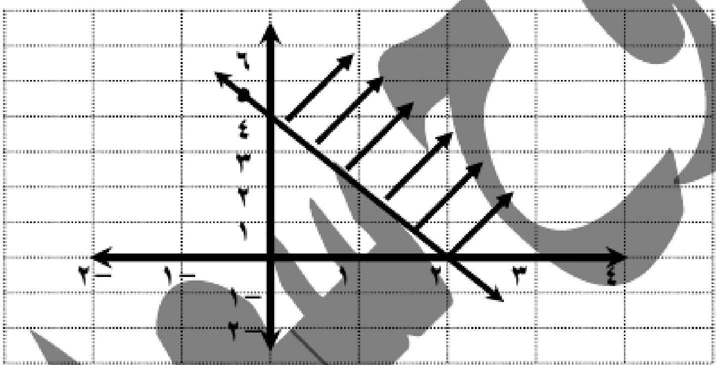
أمثـــــــلة

١ حل المتباينة : ٢س + ص ≥ ٤

الحـــــــــــل

نرسم المستقيم الحدى : ٢س + ص = ٤

س	٠	٢
ص	٤	٠



نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ لا تحقق المتباينة

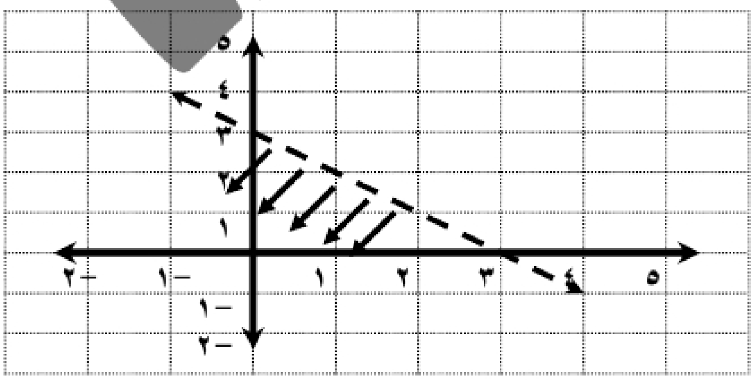
∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

٢ حل المتباينة : س + ص < ٣

الحـــــــــــل

نرسم المستقيم الحدى : س + ص = ٣

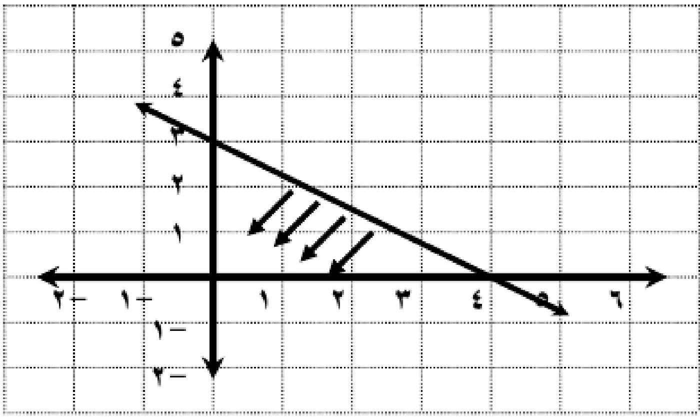
س	٠	٣
ص	٣	٠



نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)



[٣] حل المعادلة : $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٣} \geqslant ١$

الحـــــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : ٣س + ٤ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٣	٠

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ١٢   تحقق المتباينة

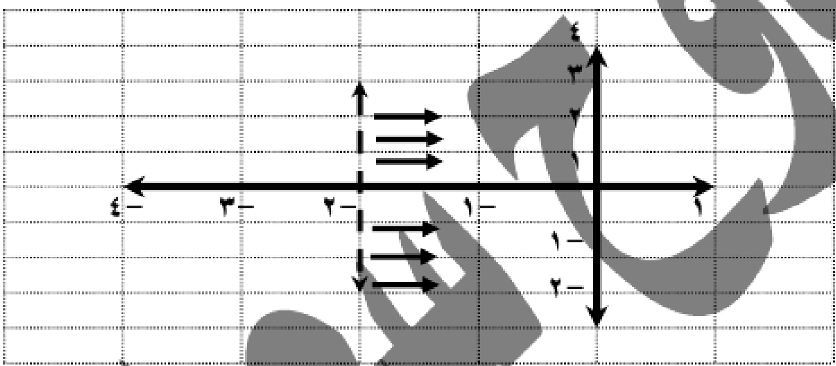
∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

مـــــــــلاحظات هامة

① إذا كانت النقطة المختارة للتعويض فى المتباينة تحققها فإن مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه هذه النقطة

② إذا كانت علامة التباين (> أ <) يكون الخط المستقيم متقطع

③ إذا كانت علامة التباين (⩾ أ ⩽) يكون الخط المستقيم متصل



[٤] حل المتباينة : س > −٢

الحـــــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : س = −٢

يوازى محور الصادات

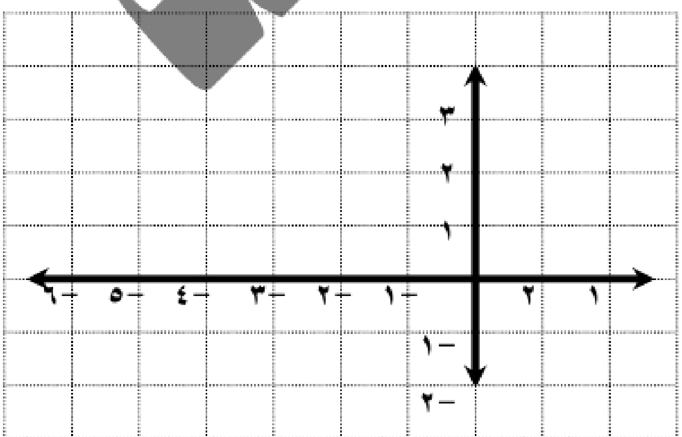
و يمر بالنقطة (−٢ ، ٠)

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ > −٢   تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

تدريـــــــــب



حل المتباينة : س ⩽ ٢ص − ٤

الحـــــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : ....

س	٠	....
ص	....	٠

نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ > −٢   تحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)

الحل البيانى لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى فى متغيرين

الحل البيانى للمتباينتين : ا$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص = جـ$_{١}$ ، ا$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص = جـ$_{٢}$

حيث : ا$_{١}$ ، ا$_{٢}$ ، ب$_{١}$ ، جـ$_{١}$ ، ا$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ ، جـ$_{٢}$ $\in$ ح

هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق كلا من المتباينتين معا :

أى إذا كان : ع$_{١}$ = مجموعة حل المتباينة الأولى ، ع$_{٢}$ = مجموعة حل المتباينة الثانية

فإن : مجموعة حل المتباينتين معا = ع$_{١}$ $\cap$ ع$_{٢}$

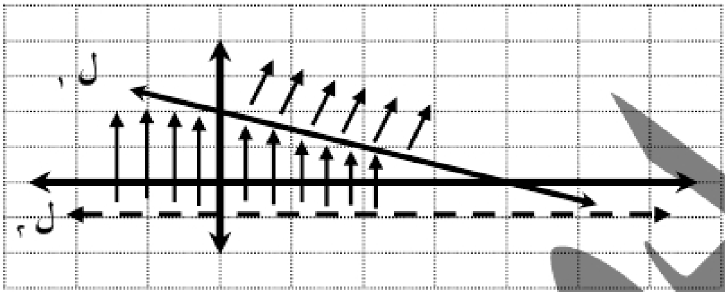
أمثـــــــــلة

$\boxed{١}$ **حل المتباينتين :** س + ٢ ص $\geqslant$ ٤ ، ص > −١

الحـــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : س + ٢ ص = ٤

س	٠	٤
ص	٢	٠



نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة

نجد أن : ٠ + ٠ < ٤ **لا تحقق المتباينة**

$\therefore$ **مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى لا تنتمى إليه النقطة (٠ ، ٠)**

ترسم المستقيم الحدى : ص = −١ **يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، −١)**

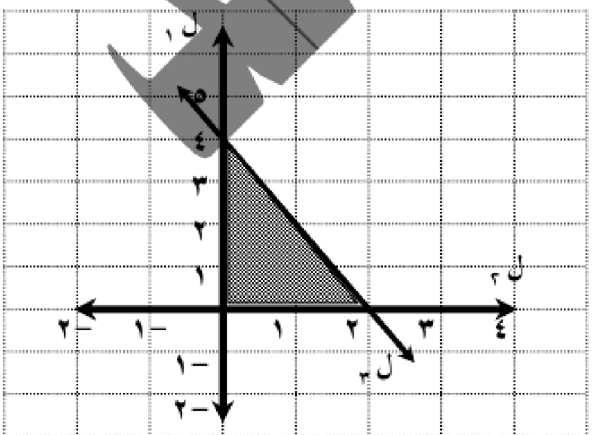
نختار نقطة (٠،٠) نعوض بها فى المتباينة نجد أن : ٠ > −١ **تحقق المتباينة**

$\therefore$ **مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل الذى تنتمى إليه النقطة (٠،٠)**

و تكون مجموعة حل المتباينتين معا هى المنطقة أعلى المستقيم ل$_{١}$

$\boxed{٢}$ **أوجد مجموعة حل المتباينات التالية معا :** س $\geqslant$ ٠ ، ص $\geqslant$ ٠ ، ٢س + ص $\leqslant$ ٤

الحـــــــــل



ترسم المستقيم الحدى : ل$_{١}$: س = ٠ **وهو محور الصادات**

ترسم المستقيم الحدى : ل$_{٢}$: ص = ٠ **وهو محور السينات**

ترسم المستقيم الحدى : ل$_{٣}$: ٢س + ص = ٤

س	٠	٢
ص	٤	٠

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظللة و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم وهى المثلث القائم و الذى رؤوسه النقاط (٢ ، ٠)،(٠ ، ٠)،(٠ ، ٤)

٣ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية معا : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٥

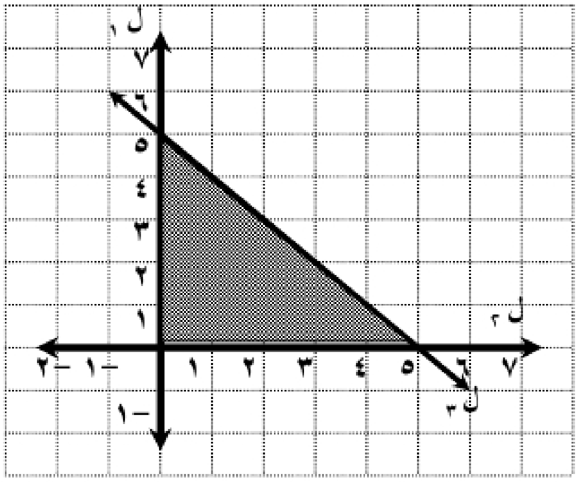
الحـــــــل

ترسم المستقيم الحدى : $ل_١$: س = ٠ وهو محور الصادات

ترسم المستقيم الحدى : $ل_٢$: ص = ٠ وهو محور السينات

ترسم المستقيم الحدى : $ل_٣$: س + ص = ٥

س	٠	٥
ص	٥	٠



بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم وهى المثلث القائم و الذى رؤوسه النقاط (٥ ، ٠)، (٠ ، ٠)، (٠ ، ٥)

٤ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية معا : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ص ≤ ٨ − س ، ٢س + ص ≤ ٧

الحـــــــل

ترسم المستقيم الحدى : $ل_١$: س = ٠ وهو محور الصادات

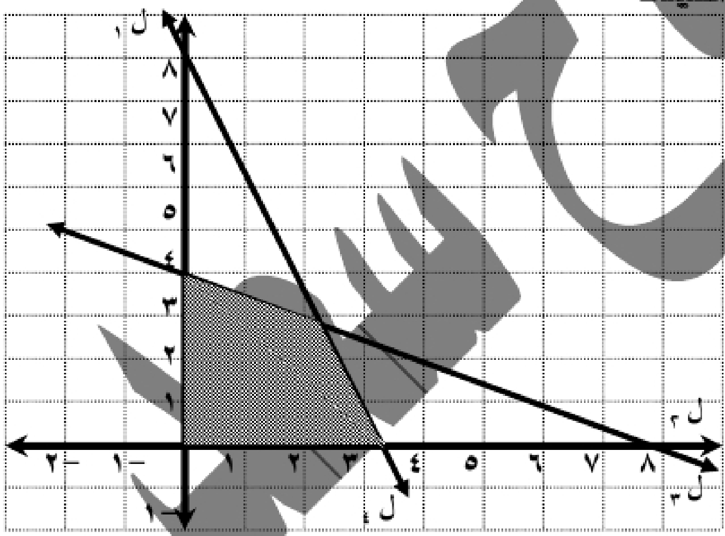
ترسم المستقيم الحدى : $ل_٢$: ص = ٠ وهو محور السينات

ترسم المستقيم الحدى : $ل_٣$: ٢ص = ٨ − س

س	٠	٨
ص	٤	٠

ترسم المستقيم الحدى : $ل_٤$: ٢س + ص = ٧

س	٠	$\frac{٧}{٢}$
ص	٧	٠



بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظللة و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط ($\frac{٧}{٢}$ ، ٠)، (٠ ، ٠)، (٠ ، ٤)، (٢,٢ ، ٢,٨)

تدريـــــــب

① أوجد مجموعة حل المتباينات التالية بيانيا :-

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٢س + ص ≤ ٦

② أوجد مجموعة حل المتباينات التالية بيانيا :-

س + ٢ص ≤ ٢ ، ٢س + ص ≥ ٤

البرمجة الخطية

تعتمد البرمجة الخطية على حل المتباينات وهى وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار فى حل مشكلة ما أو هى الوسيلة الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه على صورة دالة خطية (ر = ل س + م ص) تسمى دالة الهدف و ذلك فى ضوء القيود و الإمكانيات المتاحة و التى توضع على صورة متباينات خطية تحدد بما يسمى نظام العمل و ذلك لإيجاد مجموعة من قيم حل هذه المتباينات بحيث تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف

و لإيجاد الهدف المطلوب (أكبر قيمة أو أصغر قيمة) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها مضلع ما ..... و بالتعويض بهذه الرؤوس فى دالة الهدف نحصل على النقطة التى تحقق الهدف المطلوب

أمثـــــــلة

$\boxed{1}$ عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٤ ، ٣س + ص ⩽ ٦

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ل أكبر ما يمكن حيث : ل = ٥س + ٣ص

الحـــــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : ل١ : س = ٠ وهو محور الصادات

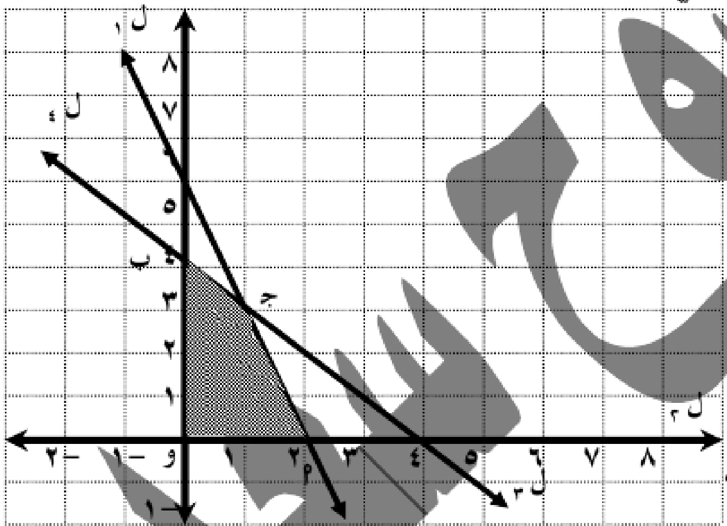
ترسم المستقيم الحدى : ل٢ : ص = ٠ وهو محور السينات

ترسم المستقيم الحدى : ل٣ : س + ص = ٤

س	٠	٤
ص	٤	٠

ترسم المستقيم الحدى : ل٤ : ٣س + ص = ٦

س	٠	٢
ص	٦	٠



بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظلله و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط أ (٠ ، ٤)، و (٠ ، ٠)، ب (٢ ، ٠)، ج (١ ، ٣)

بالتعويض بالنقاط أ ، و ، ب ، ج فى دالة الهدف

ل أ = ٠ × ٥ + ٣ × ٤ = ١٢

ل و = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

ل ب = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ = ١٠

ل ج = ٥ × ١ + ٣ × ٣ = ١٤

∴ ل أكبر ما يمكن عند النقطة (١ ، ٣)

[٢] عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ل أكبر ما يمكن حيث : ل = ٥٠س + ٧٥ص

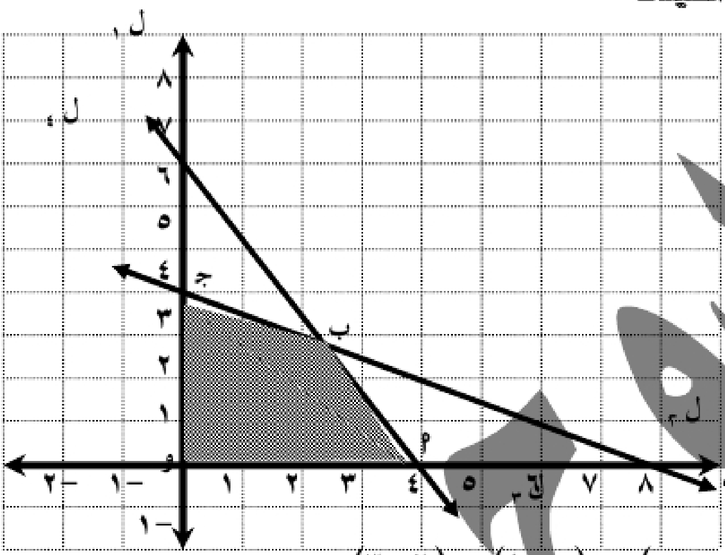
الحـــــــــــــل

ترسم المستقيم الحدى : $ل_1$: س = ٠ وهو محور الصادات

ترسم المستقيم الحدى : $ل_2$: ص = ٠ وهو محور السينات

ترسم المستقيم الحدى : $ل_3$: س + ٢ص = ٨

س	٠	٨
ص	٤	٠



ترسم المستقيم الحدى : $ل_4$: ٣س + ٢ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٦	٠

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) نجد أنها تحقق جميع المتباينات فيكون مجموعة الحل هى المنطقة المظللة و المحصورة بين المستقيمات الثلاثة كما بالرسم هى المضلع و الذى رؤوسه النقاط أ (٤ ، ٠)، و (٠ ، ٠)، ب (٠ ، ٤)، جـ (٢ ، ٣)

بالتعويض بالنقاط أ ، و ، ب ، جـ فى دالة الهدف

$ل_أ$ = ٤ × ٥٠ + ٠ × ٧٥ = ٢٠٠ $ل_و$ = ٠ × ٥٠ + ٠ × ٧٥ = صفر

$ل_ب$ = ٠ × ٥٠ + ٤ × ٧٥ = ٣٠٠ $ل_{جـ}$ = ٢ × ٥٠ + ٣ × ٧٥ = ٣٢٥

∴ ل أكبر ما يمكن عند النقطة (٢ ، ٣)

تدريـــــــــب

عين مجموعة حل المتباينات التالية معا بيانيا :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص − س ≤ ٣ ، ٢ص + ٥س ≤ ٢٠

ثم أوجد مجموعة الحل التى تجعل ل أكبر ما يمكن حيث : ل = ٥س + ٣ص

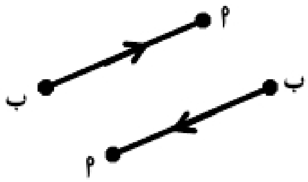
هندســـــة

١ الكميات القياسية و الكميات المتجهة و القطعة المستقيمة الموجهة

الكمية القياسية : هى كمية تتعين تماما بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية

و من أمثلتها : الطول - الكتلة - الزمن - درجة الحرارة - الحجم - المسافة

الكمية الموجهة : هى كمية تتعين تماما بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة الى الإتجاه و من أمثلتها : القوة - الإزاحة - السرعة



القطعة المستقيمة الموجهة ($\overleftarrow{\text{أب}}$) : هى قطعة مستقيمة بدايتها النقطة أ و نهايتها النقطة ب وهى تتحدد بثلاثة عناصر هى :

① نقطة البداية ② نقطة النهاية ③ الإتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

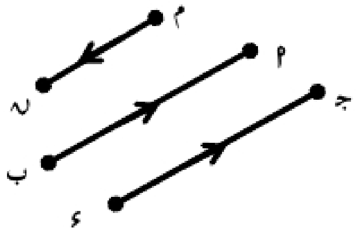
مُــــلاحظة : أ ب = ب أ بينما $\overleftarrow{\text{أب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ لإختلافهما فى نقطتى البداية و النهاية و الإتجاه

تكافوء قطعتين مستقيمتين موجهتين

يقال لقطعتين مستقيمتين انهما متكافئتان إذا كانتا : ① لهما نفس الطول (المعيار) ② لهما نفس الإتجاه

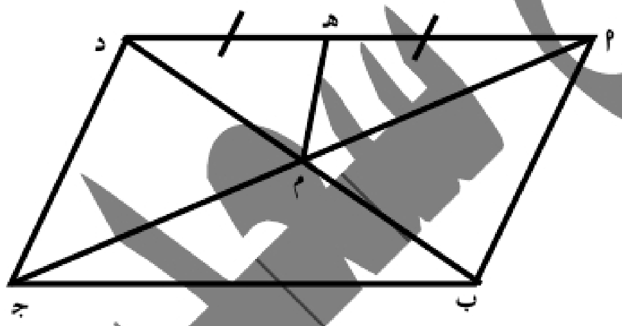
فمثـــلا : $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ (لهما نفس الطول و الإتجاه)

$\overleftarrow{\text{أب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ (مختلفتان فى الطول و الإتجاه)



١ فى الشكل المقابل : أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

أكمـــــــل



- $\overleftarrow{\text{أب}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{أد}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{م ب}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{أم}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{أهـ}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ تكافئ ....
- $\overleftarrow{\text{دم}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{د ب}}$ و السبب ....
- $\overleftarrow{\text{أد}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ و السبب ....

تدريب

أكمـــــــل العبارات التالية

① الكمية القياسية يلزم لتعريفها تعريفا تاما معرفة ....
② الكمية المتجهة يلزم لتعريفها تعريفا تاما معرفة .... ، ....
③ القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها .... ، .... ، ....
④ تتكافئ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كان لهما .... ، ....

المتجهات

متجه الموضع : ① القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{وأ}}$ و التى بدايتها نقطة الأصل و نهايتها النقطة المعلومة أ و تكتب إختصارا $\overrightarrow{\text{أ}}$ تسمى متجه الموضع للنقطة أ(س ، ص)

② متجه الموضع $\overrightarrow{\text{وأ}}$ يقال أنه التمثيل الهندسي للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص)

معيار المتجه : هو طول القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه

فمثلا : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

متجه الوحدة : هو متجه معياره الواحد الصحيح و من أمثلته :- $\overrightarrow{\text{س}} = (1, 0)$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} = (0, 1)$

المتجه الصفرى : هو متجه معياره يساوى الصفر و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{و}}$ أ، $\overrightarrow{0}$ حيث : $\overrightarrow{\text{و}} = (0, 0)$
و هو متجه غير معين الإتجاه

الصورة القطبية لمتجه الموضع : $\overrightarrow{\text{وأ}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|, \theta)$ حيث : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ معيار المتجه

الصورة الإحداثية لمتجه الموضع : $\overrightarrow{\text{وأ}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta, \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جا } \theta)$

[٢] أكتب فى الصورة الإحداثية كلا من المتجهات التالية

① $\overrightarrow{\text{وأ}} = (10\sqrt{3}, 60^\circ)$　　② $\overrightarrow{\text{وأ}} = (6\sqrt{2}, 135^\circ)$

الحــــــل

① $\overrightarrow{\text{وأ}} = (10\sqrt{3} \text{ جتا } 60, 10\sqrt{3} \text{ جا } 60) = (5\sqrt{3}, 15)$

② $\overrightarrow{\text{وأ}} = (6\sqrt{2} \text{ جتا } 135, 6\sqrt{2} \text{ جا } 135) = (-6, 6)$

[٣] أكتب فى الصورة القطبية كلا من المتجهات التالية

① $\overrightarrow{\text{وأ}} = (4, 4\sqrt{3})$　　② $\overrightarrow{\text{وأ}} = (5\sqrt{3}, -5)$

الحــــــل

① $\|\overrightarrow{\text{وأ}}\| = \sqrt{(4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

ظا $\theta = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$　　∴ ق $\angle \theta = 60^\circ$

$\overrightarrow{\text{وأ}} = (8, 60^\circ)$

○ $\|\overrightarrow{\text{وأ}}\| = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + (-5)^2} = \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$

ظا $\theta = -\frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$　　∴ ق $\angle \theta = 30^\circ$

$\overrightarrow{\text{وأ}} = (10, 30^\circ)$

المتجهات المتكافئة

كل متجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) يمكن تمثيله هندسيا بالعديد من القطع المستقيمة الموجهة المتكافئة و التى كل منها تكافئ متجه الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

جمع متجهين جبريا

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ∋ ح^٢ ، $\overrightarrow{ب}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$) ∋ ح^٢

فإن : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (س$_١$ + س$_٢$ ، ص$_١$ + ص$_٢$)

خواص جمع المتجهات :

١ خاصية الإبدال : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{أ}$

٢ خاصية الدمج (التجميع) : $\overrightarrow{أ}$ + ($\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{جـ}$) = ($\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) + $\overrightarrow{جـ}$

٣ المتجه الصفرى : $\overrightarrow{و}$ = (٠ ، ٠) ويكون : $\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{و}$ = $\overrightarrow{أ}$ (عنصر محايد)

٤ المعكوس الجمعى : إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) فإن : ($-\overrightarrow{أ}$) = (− س ، − ص)

فإن : $\overrightarrow{أ}$ + ($-\overrightarrow{أ}$) = $\overrightarrow{و}$

٥ خاصية الحذف : إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{جـ}$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{جـ}$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) ، ك ∋ ح فإن : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك(س ، ص) = (ك س ، ك ص)

فمثلا : إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٥) فإن : ٢$\overrightarrow{أ}$ = ٢ (−٣ ، ٥) = (٢ × −٣ ، ٢ × ٥) = (−٦ ، ١٠)

مـــلاحظات هامة

إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = ك $\overrightarrow{أ}$

١ ك > ٠ ⟸ $\overrightarrow{ب}$ // $\overrightarrow{أ}$ و لهما نفس الإتجاه

٢ ك < ٠ ⟸ $\overrightarrow{ب}$ // $\overrightarrow{أ}$ و لهما إتجاهين مختلفين

أمثـــــــلة

① إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٠) فأوجد : $\overrightarrow{جـ}$ = ٢$\overrightarrow{أ}$ + ٤$\overrightarrow{ب}$

الحـــــــــــــل

$\overrightarrow{جـ}$ = ٢$\overrightarrow{أ}$ + ٤$\overrightarrow{ب}$ = ٢(−٣ ، ٢) + ٤(٤ ، ٠) = (−٦ ، ٤) + (١٦ ، ٠) = (١٠ ، ٤)

② إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، ١) فأوجد : $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ − ٢$\overrightarrow{جـ}$

الحـــــــــــــل

$\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ − ٢$\overrightarrow{جـ}$ = (٣ ، −١) + ٣ (٠ ، ٢) − ٢(١ ، ١) = (٣ + ٠ − ٢ ، −٣ + ٦ − ٢) = (١ ، ١)

③ أوجد العددين ك ، م إذا كان : (ك ، ٢) + (٤ ، م) = (١ ، ١)

الحـــــــــــــل

∵ (ك ، ٢) + (٤ ، م) = (١ ، ١)

∴ ك + ٤ = ١ ⟸ ك = ١ − ٤ = −٣ ، ٢ + م = ١ ⟸ م = ١ − ٢ = −١

④ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٠) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (س ، ص) فأوجد العددين س ، ص

بحيث : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ − ٢ $\overrightarrow{جـ}$

الحـــــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ∴ (−٣ ، ٤) = (١ ، ٠) − ٢(س ، ص)

∴ −٣ = ١ − ٢س ⇐ ٢س = ٤ ⇐ س = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ٤ = ٠ − ٢ص ⇐ −٢ص = ٤ ⇐ ص = −$\frac{٤}{٢}$ = ٢

⑤ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، −٢) فعبر عن $\overrightarrow{\text{ب}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل

نفرض أن: $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⇐ (٦ ، ٤) = ك(١ ، ٢) + م(٣ ، −٢)

∴ ٦ = ك + ٣م ← ①

∴ ٤ = ٢ك − ٢م ← ②

∴ −١٢ = −٢ك − ٦م

بالجمع

−٨ = −٨م ⇐ م = ١

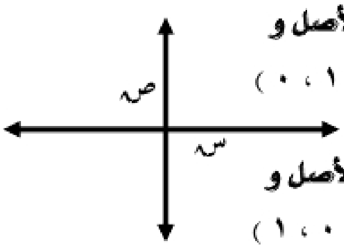
بالتعويض ى المعادلة ①

∴ ٦ = ك + ٣

∴ ك = ٦ − ٣ = ٣

متجهى الوحدة الأساسيين :-

١ متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{\text{س}}$ هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل و معيارها الوحدة و إتجاهها هو الإتجاه الموجب لمحور السينات : أى أن : $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١ ، ٠)



٢ متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{\text{ص}}$ هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل و معيارها الوحدة و إتجاهها هو الإتجاه الموجب لمحور الصادات : أى أن : $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠ ، ١)

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين :-

المتجه: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = س $\overrightarrow{\text{س}}$ + ص $\overrightarrow{\text{ص}}$

فمثلا:- $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أو $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٠ ، ٥) = ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

توازى متجهين و تعامدهما

إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س$_١$ ، ص$_١$) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$) فإن:-

① يكون: $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كان: س$_١$ ص$_٢$ − س$_٢$ ص$_١$ = صفر و العكس صحيح

② يكون: $\overrightarrow{\text{أ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب}}$ إذا كان: س$_١$ س$_٢$ + ص$_١$ ص$_٢$ = صفر و العكس صحيح

٨ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٦ ، −٩) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، ٢)

فأثبت أن: $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل

∵ −٤×−٩ − ٦ ×٦ = ٣٦ − ٣٦ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$

∵ ٦ × ٣ + (−٩ × ٢) = ١٨ − ١٨ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$

∵ −٤ × ٣ + ٦ × ٢ = −١٢ + ١٢ = صفر ⇐ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$

أمثـــــلة

$\boxed{١}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٢ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٣ ، ك) **متوازيين** **فإن :** ك = ...

الحـــــــــــــــــــــل

∵ **المستقيمان متوازيين** **فإن :** $س_١ ص_٢ − س_٢ ص_١$ = صفر

∴ −٢ك − ١ × −٣ = ٠ ⇐ −٢ك + ٣ = ٠ ⇐ ك = $\frac{٣}{٢}$

$\boxed{٢}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$ **فأوجد :** ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحـــــــــــــــــــــل

٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٢$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ص}}$) − (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − $\overrightarrow{\text{ص}}$) = (٤ − ٣) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (٦ + ١) $\overrightarrow{\text{ص}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٧$\overrightarrow{\text{ص}}$

$\boxed{٣}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، −٢) **فإن :** || $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = ...

الحـــــــــــــــــــــل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤ ، ٢) − (١ ، −٢) = (٤ − ١ ، ٢ + ٢) = (٣ ، ٤)

∴ || $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ **وحدات طول**

$\boxed{٤}$ **إذا كان :** || ٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = || −١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ || **فأوجد قيمة ك**

الحـــــــــــــــــــــل

∵ || ٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = || −١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ || ⇐ ٣ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ± ١٥ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ⇐ ٣ك = ± ١٥

∴ ك = ± ٥

$\boxed{٥}$ **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$ **فأوجد :**

$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، || $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ || ، ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ ، −٣$\overrightarrow{\text{أ}}$

الحـــــــــــــــــــــل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) + (−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٢$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) − (−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٤$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$

|| $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ || = $\sqrt{(٢)^٢ + (−٦)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{٤٠}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ **وحدات طول**

٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) + ٣(−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أ}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) − ٣(−$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤$\overrightarrow{\text{ص}}$) = ٦$\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٠$\overrightarrow{\text{ص}}$

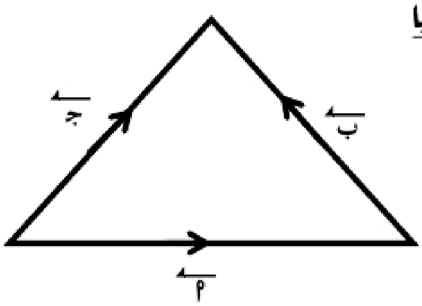
−٣$\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٣(٣$\overrightarrow{\text{س}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{ص}}$) = −٩$\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦$\overrightarrow{\text{ص}}$

تدريـــــــــــب

إذا كان : || −٨ $\overrightarrow{\text{أ}}$ || = ٥ || ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ || **فأوجد قيمة ك**

العمليات على المتجهات

أولاً : جمع المتجهات هندسياً



[١] قاعدة المثلث (علاقة شال)

$$\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$$

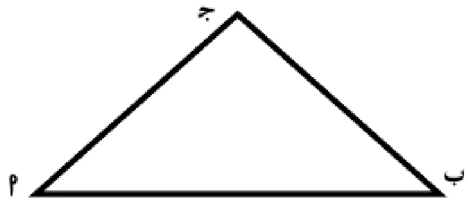
لاحظ أن : نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى نفس نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ هى نفس نقطة نهاية المتجه $\overrightarrow{\text{ج}}$

ملاحظـــــــات هامة :

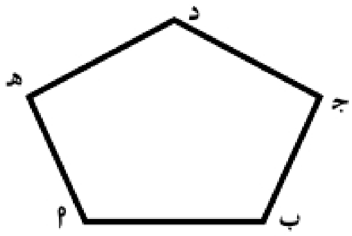
① لأى ثلاث نقاط على إستقامة واحدة يكون :

$$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$$



② فى أى مثلث أ ب ج يكون :

$$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$$ (المتجه الصفرى)

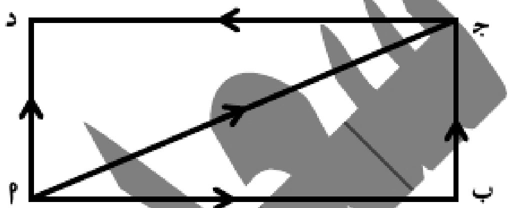


و بالتعميم :

فى الشكل الخماسى المقابل :

يكون : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ (المتجه الصفرى)

③ $\because \overrightarrow{\text{أ ب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}} \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ (المتجه الصفرى)



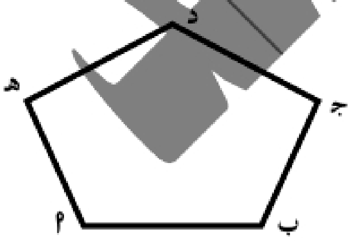
④ فى أى شكل رباعى يكون :

$$\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$$

التفسير :-

$\because \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} = \overrightarrow{\text{أ د}}$



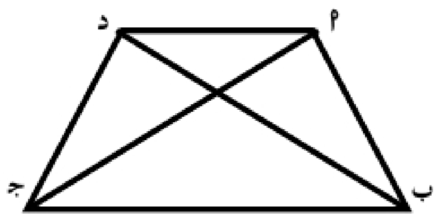
و بالتعميم :

فى الشكل الخماسى المقابل :

يكون : $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ج د}} + \overrightarrow{\text{د هـ}} = \overrightarrow{\text{أ هـ}}$

أمثـــــــــــلة

[١] فى أى شكل رباعى أ ب ج د أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ج}} - \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ د}} - \overrightarrow{\text{ب د}}$

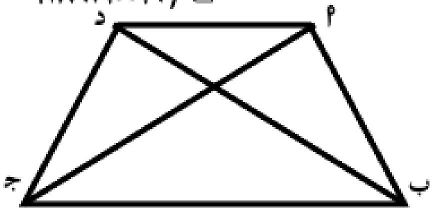


الحـــــــــــــل

$\because \overrightarrow{\text{أ ج}} - \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ج ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

$\because \overrightarrow{\text{أ د}} - \overrightarrow{\text{ب د}} = \overrightarrow{\text{أ د}} + \overrightarrow{\text{د ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

$\therefore$ الطرفان متساويان



[٢] أ ب ج د شكل رباعي فيه : ٢ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

أثبت أن :-

(١) أ ب ج د شبه منحرف (٢) $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

الحـــــــــــــــــــــل

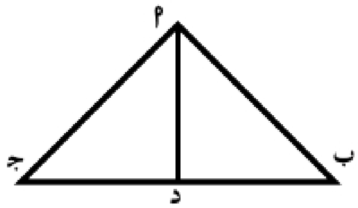
(١) ∵ ٢ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ⟸ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ⟸ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ // $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ، ∵ ب ج ≠ أ د

∴ أ ب ج د شبه منحرف

(٢) فى △ أ د ج : $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + $\overleftarrow{\text{د ج}}$ ، فى △ د ب ج : $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ج د}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + $\overleftarrow{\text{د ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ج د}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ + $\overleftarrow{\text{د ج}}$ − $\overleftarrow{\text{د ج}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + ب ج

∵ $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ⟸ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ = $\frac{٢}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ = $\frac{٥}{٢}$ $\overleftarrow{\text{أ د}}$



[٣] أ ب ج مثلث ، د ∈ $\overline{\text{ب ج}}$ بحيث : ٣ $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{د ج}}$

أثبت أن : ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

الحـــــــــــــــــــــل

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ × ٣ ⟸ ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب د}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

∵ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + $\overleftarrow{\text{ج د}}$ = $\overleftarrow{\text{أ د}}$ × ٤ ⟸ ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ج د}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

بالجمع

∴ ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب د}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ج د}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

∴ ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ب د}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ج د}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ − ٤ $\overleftarrow{\text{د ج}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{د ج}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

∴ ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أ د}}$

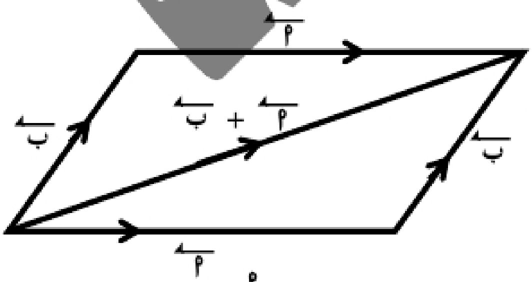
[٤] إذا كان : ٤ $\overleftarrow{\text{م}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ فأثبت أن : $\overleftarrow{\text{م}}$ = $\overleftarrow{\text{ج أ}}$

الحـــــــــــــــــــــل

٤ $\overleftarrow{\text{م}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + ٧ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ − ٣ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

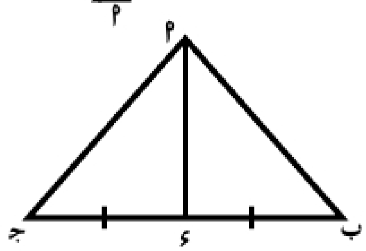
= ٤ ($\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب أ}}$) ⟸ $\overleftarrow{\text{م}}$ = $\overleftarrow{\text{ج ب}}$ + $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ = $\overleftarrow{\text{ج أ}}$

[٢] قاعدة متوازى الأضلاع



لاحظ أن : نقطة بداية المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هى نفس نقطة بداية المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$

هى نفس نقطة نهاية المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$)

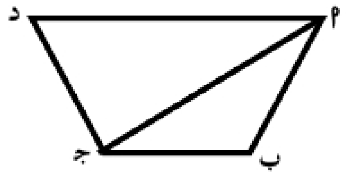


مُـــــــــلاحظة هامة :

(١) إذا كان : أ ء متوسط فى △ أ ب ج فإن : $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

٥ في الشكل الرباعي أ ب جـ د

أثبت أن: $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$

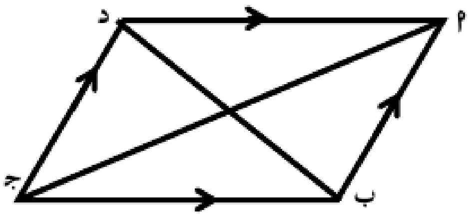


الحـــــــل

في △ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = ($\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$) + $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$

٦ في متوازي الأضلاع أ ب جـ د أثبت أن: $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$



الحـــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، ∵ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$

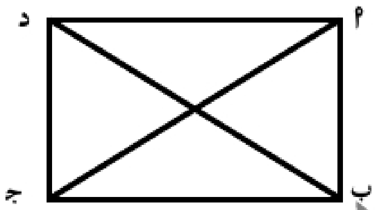
∴ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$

= ($\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$) + ($\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب أ}}$) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = − $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

= $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ∵ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

= $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

٧ في أي شكل رباعي أ ب جـ د أثبت أن: $\overrightarrow{\text{د ب}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{د أ}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$



الحـــــــل

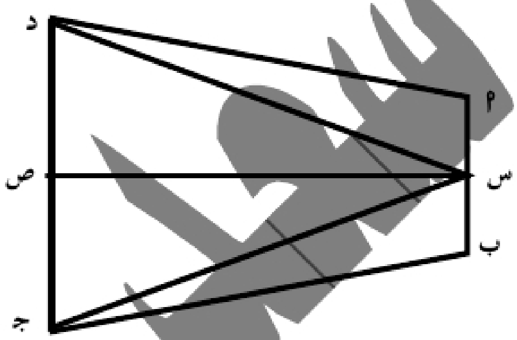
الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{د ب}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{د ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{د جـ}}$

الطرف الأيسر = $\overrightarrow{\text{د أ}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ = $\overrightarrow{\text{د أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{د جـ}}$

∴ الطرفان متساويان

٨ أ ب جـ د شكل رباعي فيه: س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$

أثبت أن: $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س ص}}$



الحـــــــل

∵ س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{أ س}}$ = $\overrightarrow{\text{س ب}}$

في △ س أ د : $\overrightarrow{\text{س أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = $\overrightarrow{\text{س د}}$ ←(١)

في △ س ب جـ : $\overrightarrow{\text{س ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س جـ}}$ ←(٢)

بجمع (١) ، (٢)

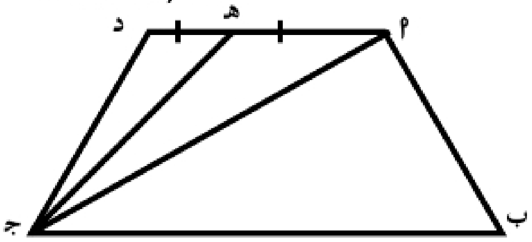
∴ $\overrightarrow{\text{س أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{س ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س أ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ − $\overrightarrow{\text{س أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س د}}$ + $\overrightarrow{\text{س جـ}}$

∵ ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ⟸ $\overline{\text{س ص}}$ متوسط في △ جـ س د

∴ $\overrightarrow{\text{س د}}$ + $\overrightarrow{\text{س جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س ص}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س ص}}$



$\boxed{٩}$ أ ب جـ د شبه منحرف فيه : $\overrightarrow{\text{بجـ}} \parallel \overrightarrow{\text{أد}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

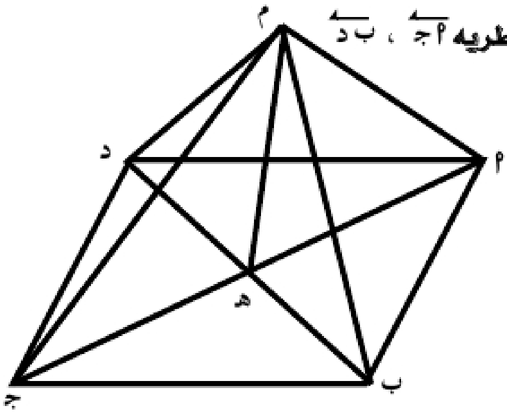
الحـــــــــــــــل

في Δ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

في Δ أ جـ د : ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أد}}$ ⇐ $\overline{\text{جـهـ}}$ متوسط في Δ أ جـ د

∴ $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}}) + \overrightarrow{\text{دجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{دجـ}} = ٢\,\overrightarrow{\text{هـجـ}}$



(١٠) أ ب جـ د متوازي أضلاع : م نقطة في مستويه ، هـ نقطة تقاطع قطريه $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{بد}}$

اثبت أن : $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مجـ}} + \overrightarrow{\text{مد}} = ٤\,\overrightarrow{\text{مهـ}}$

الحـــــــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مجـ}} + \overrightarrow{\text{مد}}$

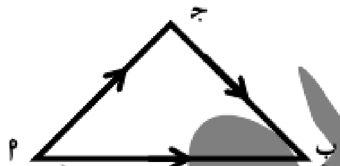
$= (\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مجـ}}) + (\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مد}})$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{مهـ}} + ٢\,\overrightarrow{\text{مهـ}} = ٤\,\overrightarrow{\text{مهـ}}$

لاحظ أن :

$\overline{\text{مهـ}}$ متوسط في Δ م أ جـ ، $\overline{\text{مهـ}}$ متوسط في Δ م ب د

ثانيا : طرح متجهين هندسيا



$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

لأن :

$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{\text{جـب}}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$ بدلالة متجهي الموضع فيها

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

$\boxed{١}$ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : أ(٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، جـ (٢ ، ٣) فأوجد إحداثيي نقطة د

الحـــــــــــــــل

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ $\overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}} - \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{د}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) + (٢ ، −٢) = (٢ − ٤ + ٢ ، ٣ + ٢ − ٢) = (٠ ، ٣)

$\boxed{٢}$ أ ب جـ د شبه منحرف فيه : أ(−١ ، ١) ، ب (٣ ، ٣) ، جـ (٥ ، −١) ، د (−٥ ، م)

① إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{دجـ}}$ فأوجد قيمة م

② اثبت أن : $\overrightarrow{\text{جـب}} \perp \overrightarrow{\text{أب}}$

③ أوجد مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د

الحـــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٣) − (−١ ، ١) = (٤ ، ٢)

$\overrightarrow{\text{دجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٥ ، −١) − (−٥ ، م) = (١٠ ، −١ − م)

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{دجـ}}$　　∴ س١ ص٢ − س٢ ص١ = صفر

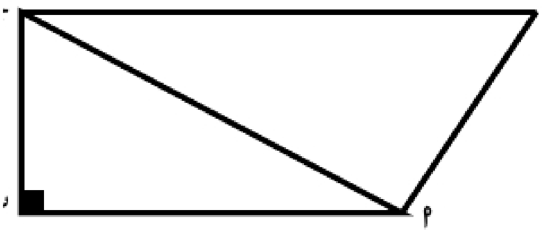
∴ ٤(−١ − م) − ٢ × ١٠ = صفر　⇐　−٤ − ٤م − ٢٠ = صفر　⇐　− ٤م − ٢٤ = صفر

∴ م = − ٦

② $\overrightarrow{\text{جـب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، ٣) − (٥ ، −١) = (−٢ ، ٤)

∵ س١ س٢ + ص١ ص٢ = −٢ × ٤ + ٤ × ٢ = −٨ + ٨ = صفر

∴ $\overrightarrow{\text{جـب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أب}}$



③ || $\overrightarrow{\text{أب}}$ || = √(١٦+٤) = √٢٠ = ٢√٥ وحدة طول

|| $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ || = √(١٠٠ + ٢٥) = √١٢٥ = ٥√٥ وحدة طول

|| $\overrightarrow{\text{جـب}}$ || = √(٤ + ١٦) = √٢٠ = ٢√٥ وحدة طول

∵ مساحة شبه المنحرف = ½ حاصل جمع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

= ½ (|| $\overrightarrow{\text{أب}}$ || + || $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ ||) × || $\overrightarrow{\text{جـب}}$ ||

= ½ (٢√٥ + ٥√٥) × ٢√٥ = ٣٥ وحدة مربعة

تدريـــــــب

إذا كان : ٢ $\overrightarrow{\text{أم}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـب}}$ − $\overrightarrow{\text{بأ}}$　أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أم}}$ = $\overrightarrow{\text{جـأ}}$

تطبيقات على المتجهات

أولا : تطبيقات هندسية

تعلم أنه إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ، $\text{ك} \neq ٠$ فإن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$

يحملهما مستقيم واحد أى أن : أ ، ب ، جـ ، ء على استقامة واحدة

أو

يحملهما مستقيمان متوازيان أى أن : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

ملاحظات هامة

إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ، $\text{ك} \neq ٠$

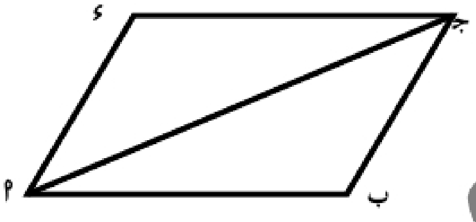
فإن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءجـ}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = |\text{ك}|\ \|\overrightarrow{\text{ءجـ}}\|$ و العكس صحيح

فمثلا: إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\ \overrightarrow{\text{جـء}}$

فإن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{جـء}}$ ، أب = ٣ جـء

أمثلة

١ اثبت أن : إذا تساوى و توازى ضلعين متقابلين فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين و متوازيين أيضا أى أن : الشكل يكون متوازى أضلاع



الحل

$\because$ أب = ءجـ ، $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءجـ}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

فى $\triangle$ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

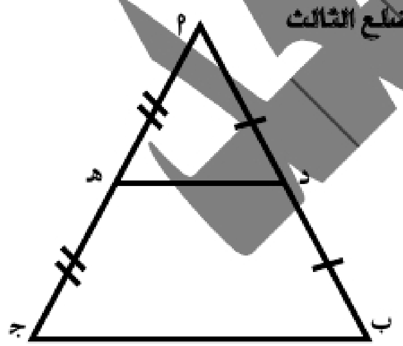
فى $\triangle$ أ ء جـ : $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ، $\because \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ $\Leftarrow \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أء}}$

$\therefore \overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{أء}}$ ، بجـ = أء

$\therefore$ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

٢ اثبت أن: القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث و طولها يساوى نصف طوله



الحل

$\because$ د ، هـ منتصفى $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أد}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أهـ}}$

فى $\triangle$ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$ ← (١)

فى $\triangle$ أ د هـ : $\overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \overrightarrow{\text{دهـ}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) $\Leftarrow \overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{دأ}} + ٢\ \overrightarrow{\text{أهـ}} = ٢ (\overrightarrow{\text{دأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}}) = ٢\ \overrightarrow{\text{دهـ}}$

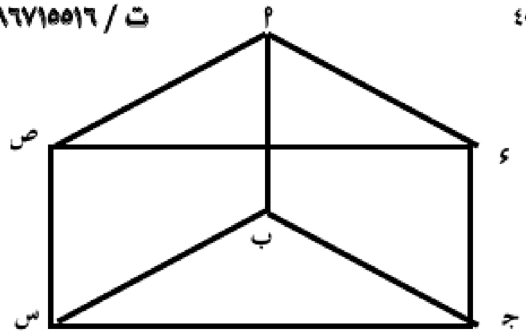
$\therefore \overrightarrow{\text{بجـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{دهـ}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{دهـ}}$ $\Leftarrow \overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{دهـ}}$

$\therefore$ بجـ = ٢ دهـ $\Leftarrow$ دهـ = $\frac{١}{٢}$ بجـ

[٣] في الشكل المقابل : أ ب ج ء ، أ ب س ص متوازيا أضلاع

أثبت باستخدام المتجهات أن :

الشكل ج س ص ء متوازي أضلاع



الحـــــــــل

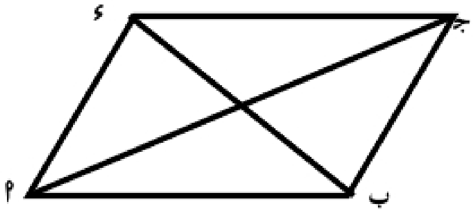
∵ أ ب ج ء متوازي أضلاع ∴ $\overline{\text{ء ج}} = \overline{\text{أ ب}}$

∵ أ ب س ص متوازي أضلاع ∴ $\overline{\text{ص س}} = \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{ء ج}} = \overline{\text{ص س}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ء ج}} = \overrightarrow{\text{ص س}}$

∴ الشكل ج س ص ء متوازي أضلاع

[٤] أ ب ج ء شكل رباعي ، إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{ء ج}}$ فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء متوازي أضلاع



الحـــــــــل

في △ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}}$

في △ ء ب ج : $\overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{ء ج}} + \overrightarrow{\text{ج ب}}$

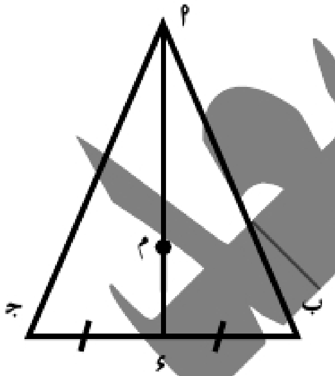
∴ $\overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ء ج}} + \overrightarrow{\text{ج ب}}$

$= \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب ج}} + \overrightarrow{\text{ء ج}} - \overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ء ج}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أ ج}} + \overrightarrow{\text{ء ب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{ء ج}}$ ∴ $٢\ \overrightarrow{\text{ء ج}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ء ج}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ء ج}} = \overrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ الشكل أ ب ج ء متوازي أضلاع

[٥] إذا كان : أ (٦ ، ٥) ، ب (٨ ، −٣) ، ج (−٢ ، −٥) هي رؤوس المثلث أ ب ج فأوجد باستخدام المتجهات نقطة تقاطع متوسطاته



الحـــــــــل

∵ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

∴ $\overrightarrow{\text{أ م}} = \frac{٢}{٣}\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ ء}} = \frac{٣}{٢}\ \overrightarrow{\text{أ م}}$

في △ أ ب ج : ∵ أ ء متوسط ∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ج}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{أ ج}} = ٢ \times \frac{٣}{٢}\ \overrightarrow{\text{أ م}} = ٣\ \overrightarrow{\text{أ م}}$

∴ $(\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}) + (\overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = ٣\ (\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{أ}})$

∴ $\overrightarrow{\text{م}} = \frac{١}{٣}\ (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}} + \overrightarrow{\text{أ}}) = \frac{١}{٣}\ (٦ + ٨ - ٢ ، ٥ - ٣ - ٥) = (٤ ، -١)$

∴ نقطة تقاطع متوسطات المثلث هي (٤ ، −١)

[٦] إذا كان : أ (٥ ، ١) ، ب (٢ ، ٥) ، ج (−٢ ، ٣) ، ء (−٥ ، −٤) فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء شبه منحرف

الحـــــــــل

$\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٣) - (٢ ، ٥) = (-٤ ، -٢)$

$\overrightarrow{\text{أ ء}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-٥ ، -٤) - (٥ ، ١) = (-١٠ ، -٥)$

∴ $\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$ ∴ $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{أ ء}}$

∵ س١ ص٢ − س٢ ص١ = −٤ × −٥ + ٢ × −١٠ = ٢٠ − ٢٠ = صفر

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

∵ $\| \overrightarrow{\text{ب ج}} \|$ = $\sqrt{١٦ + ٤}$ = $\sqrt{٢٠}$ = ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول

∵ $\| \overrightarrow{\text{أ ء}} \|$ = $\sqrt{١٠٠ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥$\sqrt{٥}$ وحدة طول

∵ $\| \overrightarrow{\text{ب ج}} \| \neq \| \overrightarrow{\text{أ ء}} \|$

∴ **الشكل أ ب ج ء شبه منحرف**

[٧] إذا كان : أ (٣ ، ٤) ، ب (١ ، −١) ، ج (−٤ ، −٣) ، ء (−٢ ، ٢) فأثبت أن : الشكل أ ب ج ء معين

الحـــــــــــل

$\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −١) − (٣ ، ٤) = (−٢ ، −٥)

$\overrightarrow{\text{ء ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{ء}}$ = (−٤ ، −٣) − (−٢ ، ٢) = (−٢ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ء ج}}$ ∴ $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{ء ج}}$ ∴ أ ب = ء ج

∴ **الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع**

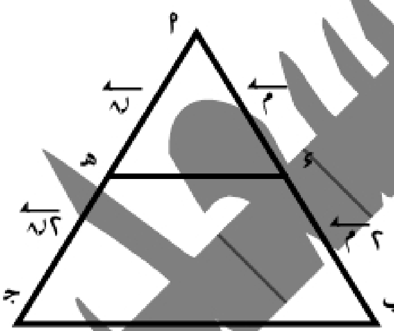
∵ $\overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{ج}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٤ ، −٣) − (٣ ، ٤) = (−٧ ، −٧)

∵ $\overrightarrow{\text{ب ء}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ٢) − (١ ، −١) = (−٣ ، ٣)

∵ س١ س٢ + ص١ ص٢ = −٧ × −٣ + (−٧ × ٣) = ٢١ − ٢١ = صفر

∴ $\overline{\text{أ ج}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ **(القطران متعامدان)**

∴ **الشكل أ ب ج ء معين**



[٨] فى الشكل المقابل : أ ب ج مثلث فيه :

ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء أ}} = \overrightarrow{\text{م}}$

$\overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج هـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$

اوجد $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ **بدلالة** $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$

ثم برهن أن : $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$

الحـــــــــــل

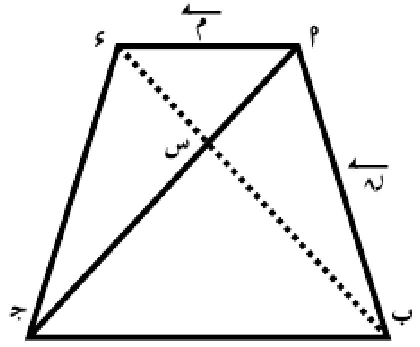
∵ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{ب ء}} + \overrightarrow{\text{ء أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ + $\overrightarrow{\text{م}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{م}}$

∵ هـ ∈ $\overline{\text{أ ج}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ج أ}} = \overrightarrow{\text{ج هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ن}}$ + $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$

فى △ أ ب ج : $\overrightarrow{\text{ب ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} + \overrightarrow{\text{أ ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} - \overrightarrow{\text{ج أ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{م}}$ − ٣ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = ٣ ($\overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$)

فى △ أ ء هـ : $\overrightarrow{\text{ء هـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} = \overrightarrow{\text{ء أ}} - \overrightarrow{\text{هـ أ}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{ن}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب ج}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$



$\boxed{٩}$ **في الشكل المقابل : أ ب جـ د شبه منحرف ، $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$**

أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، $\overrightarrow{\text{أد}}$ = $\overrightarrow{\text{م}}$

① عبر بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ عن كل من : $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{دب}}$

② إذا كانت : س ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ حيث : أس = $\frac{١}{٣}$ أ جـ

أثبت أن النقط : د ، س ، ب على استقامة واحدة

الحـــــــــــل

∵ $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$ ، أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ⟸ ب جـ = ٢ أ د ∴ $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أد}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$

∴ $\overrightarrow{\text{دجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{دأ}}$ + $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = − $\overrightarrow{\text{م}}$ + $\overrightarrow{\text{ن}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ + $\overrightarrow{\text{م}}$

∴ $\overrightarrow{\text{دب}}$ = $\overrightarrow{\text{دأ}}$ + $\overrightarrow{\text{أب}}$ = − $\overrightarrow{\text{م}}$ + $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\overrightarrow{\text{ن}}$ − $\overrightarrow{\text{م}}$

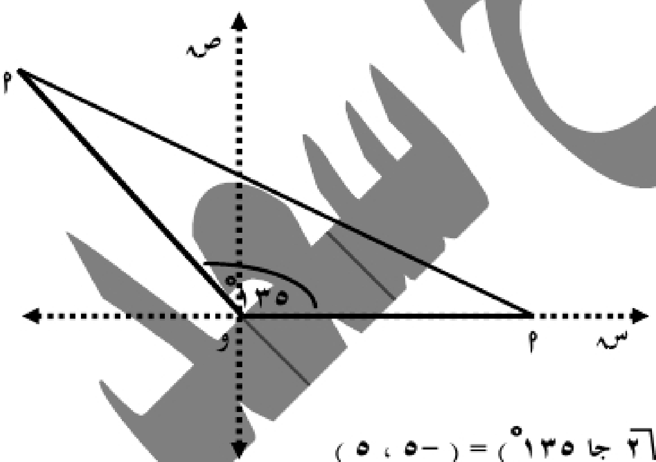
∵ أس = $\frac{١}{٣}$ أ جـ ∴ أ جـ = ٣ أس ∴ جـ س = ٢ جـ أ

∵ س ∈ $\overline{\text{أجـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{جـس}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{جـأ}}$

في △ ب س جـ : $\overrightarrow{\text{بس}}$ = $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ + $\overrightarrow{\text{جـس}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أد}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ = ٢ ($\overrightarrow{\text{أد}}$ + $\overrightarrow{\text{جـأ}}$) = ٢ $\overrightarrow{\text{سد}}$

∵ $\overrightarrow{\text{بس}}$ ، $\overrightarrow{\text{سد}}$ **لهما نفس الإتجاه و مشتركان في نقطة س**

∴ د ، س ، ب **على استقامة واحدة**



(١٠) في الشكل المقابل : و أ ب مثلث فيه : و أ = ٧سم

و ب = ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ق ∠ أ و ب = ١٣٥°

أوجد باستخدام المتجهات : طول $\overline{\text{أب}}$

الحـــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٧ ، صفر°)

= (٧ جتا ٠° ، ٧ جا ٠°) = (٧ ، ٠)

∵ $\overrightarrow{\text{وب}}$ = (٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) = (٥ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° ، ٥ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) = (−٥ ، ٥)

في △ أ و ب : $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{أو}}$ + $\overrightarrow{\text{وب}}$ = − $\overrightarrow{\text{وأ}}$ + $\overrightarrow{\text{وب}}$ = − (٧ ، ٠) + (−٥ ، ٥) = (−١٢ ، ٥)

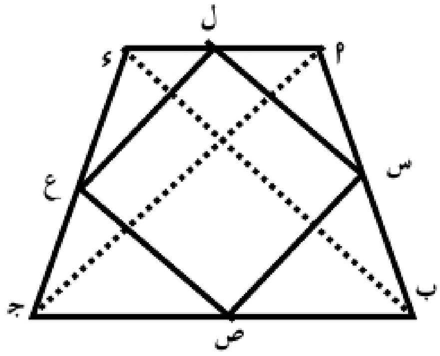
∴ **طول** $\overline{\text{أب}}$ = || $\overrightarrow{\text{أب}}$ || = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ **وحدة طول**

(١١) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ على الترتيب
باستخدام المتجهات أثبت أن :

① الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

② محيط الشكل س ص ع ل يساوي مجموع طولي ضلعي قطري الشكل الرباعي

الحـــــــــــــــــــــــــــــل



∵ س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ $\boxed{١}$

∵ ل ، ع منتصفا $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{ل ع}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$ ، ل ع = $\frac{1}{2}$ أ جـ $\boxed{٢}$

من $\boxed{١}$ ، $\boxed{٢}$ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{س ص}} = \overrightarrow{\text{ل ع}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ $\boxed{٣}$

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

بالمثل : $\overrightarrow{\text{س ل}} = \overrightarrow{\text{ص ع}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{ب ء}}$ $\boxed{٤}$

من $\boxed{٣}$ ، $\boxed{٤}$

محيط متوازي الأضلاع س ص ع ل = ٢(س ص + ص ع) = ٢($\frac{1}{2}$ أ جـ + $\frac{1}{2}$ ب ء) = أ جـ + ب ء

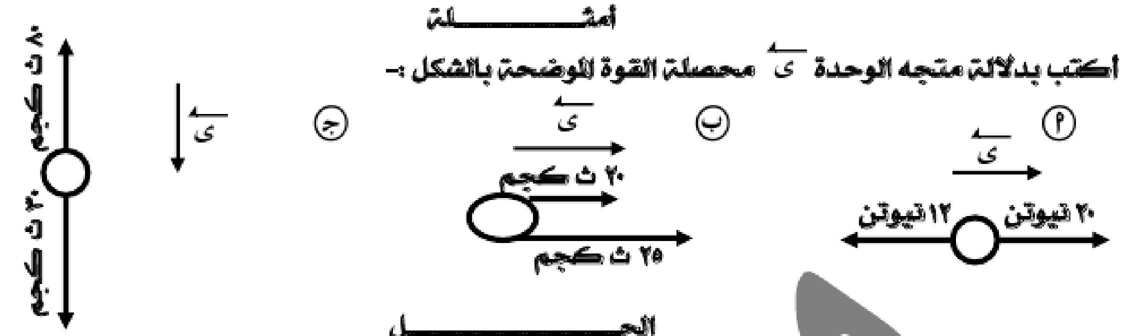
ثانيا : تطبيقات فيزيائية

[١] القوة المحصلة

$\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} + \dots\dots\dots\dots$

أمثـــــــــــــلة

① أكتب بدلالة متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ محصلة القوة الموضحة بالشكل :-



الحـــــــــــــــــل

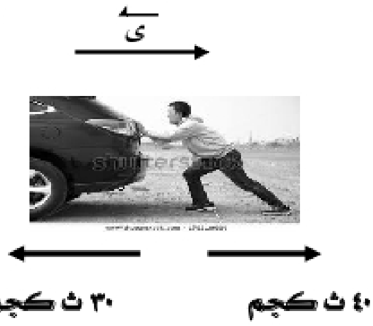
(أ) $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٢٠\,\overleftarrow{ى} - ١٢\,\overleftarrow{ى} = ٨\,\overleftarrow{ى}$

(ب) $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٢٠\,\overleftarrow{ى} + ٢٥\,\overleftarrow{ى} = ٤٥\,\overleftarrow{ى}$

(جـ) $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = -٨٠\,\overleftarrow{ى} + ٣٠\,\overleftarrow{ى} = -٥٠\,\overleftarrow{ى}$

② أوجد محصلة القوة المؤثرة فى كل مما يأتى :-

[١]



[٢]

الحـــــــــــــــــل

[١] $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ٤٠\,\overleftarrow{ى} - ٣٠\,\overleftarrow{ى} = ١٠\,\overleftarrow{ى}$

[٢] $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ١٠٠\,\overleftarrow{ى} - ٥٠\,\overleftarrow{ى} = ٥٠\,\overleftarrow{ى}$

مـــُــــلاحظة هامة :-

إذا كانت محصلة مجموعة من القوى = $\overleftarrow{٠}$ هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة و العكس صحيح

③ فى كل مما يلى : القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثران فى نقطة مادية ، وضح مقدار و إتجاه محصلة كل قوتين منها

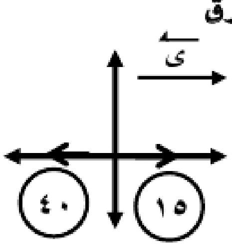
[١] $\overleftarrow{ق_١}$ = ١٥ نيوتن فى إتجاه الشرق ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٤٠ نيوتن فى إتجاه الغرب

[٢] $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣٤ نيوتن فى إتجاه الشمال الشرقى ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٣٤ نيوتن فى إتجاه الجنوب الغربى

[٣] $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥٠ داين فى إتجاه ٦٠° غرب الشمال ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٥٠ نيوتن فى إتجاه ٣٠° جنوب الشرق

[٤] $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣٠ نيوتن فى إتجاه ٢٠° شرق الشمال ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٣٠ نيوتن فى إتجاه ٧٠° شمال الشرق

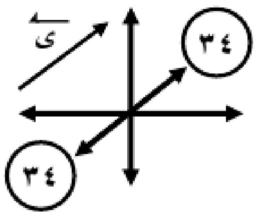
الحـــــــــــــــــل



[١] $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} = ١٥\,\overleftarrow{ى} - ٤٠\,\overleftarrow{ى} = -٢٥\,\overleftarrow{ى}$

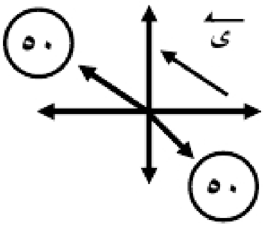
[٢] $\vec{ق} = \vec{ق}_{1} + \vec{ق}_{2} = ٣٤\,\vec{ى} - ٣٤\,\vec{ى} = ٠\,\vec{ى}$

أو أن محصلة القوى = $\vec{٠}$ بمعنى ان القوى متزنة أو الجسم متزن (ثابت لا يتحرك)



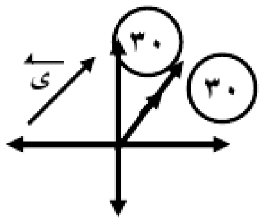
[٣] $\vec{ق} = \vec{ق}_{1} + \vec{ق}_{2} = ٥٠\,\vec{ى} - ٥٠\,\vec{ى} = ٠\,\vec{ى}$

أو أن محصلة القوى = $\vec{٠}$ بمعنى ان القوى متزنة أو الجسم متزن (ثابت لا يتحرك)



[٤] $\vec{ق} = \vec{ق}_{1} + \vec{ق}_{2} = ٣٠\,\vec{ى} + ٣٠\,\vec{ى} = ٦٠\,\vec{ى}$

و تعمل فى إتجاه ٢٠° شرق الشمال (٧٠° شمال الشرق)



④ إذا كانت القوى : $\vec{ق}_{1} = ٢\,\vec{س} + ٣\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_{2} = أ\,\vec{س} + \vec{ص}$ ، $\vec{ق}_{3} = ٥\,\vec{س} + ب\,\vec{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية فأوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى $\vec{ق}$:

(أ) $\vec{ق} = ٥\,\vec{س} - ٢\,\vec{ص}$ (ب) $\vec{ق} = \vec{٠}$

الحـــــــــــــــــــــــل

(أ) $٥\,\vec{س} - ٢\,\vec{ص} = (٢\,\vec{س} + ٣\,\vec{ص}) + (أ\,\vec{س} + \vec{ص}) + (٥\,\vec{س} + ب\,\vec{ص})$

∴ ٥ = ٢ + أ + ٥ ⇐ أ = ٥ − ٢ − ٥ = −٢

∴ −٢ = ٣ + ١ + ب ⇐ ب = −٢ − ٣ − ١ = −٦

(ب) $\vec{٠} = (٢\,\vec{س} + ٣\,\vec{ص}) + (أ\,\vec{س} + \vec{ص}) + (٥\,\vec{س} + ب\,\vec{ص})$

∴ ٠ = ٢ + أ + ٥ ⇐ أ = −٢ − ٥ = −٧

∴ ٠ = ٣ + ١ + ب ⇐ ب = −٣ − ١ = −٤

تدريـــــــــــب

إذا كانت القوى : $\vec{ق}_{1} = ٧\,\vec{س} - ٥\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_{2} = أ\,\vec{س} + ٣\,\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_{3} = -٤\,\vec{س} + (ب - ٣)\,\vec{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية فأوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت محصلة هذه القوى $\vec{ق}$:

(أ) $\vec{ق} = ٥\,\vec{س} - ٢\,\vec{ص}$ (ب) مجموعة هذه القوى متزنة

٢ السرعة النسبية

إذا كان $\overrightarrow{ع_{أ}}$ هو متجه سرعة الجسم (أ) الفعلية ، $\overrightarrow{ع_{ب}}$ هو متجه سرعة الجسم (ب) الفعلية فإن :-

(أ) $\overrightarrow{ع_{بأ}}$ (متجه السرعة النسبية للجسم (ب) بالنسبة الى الجسم (أ)) = $\overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{أ}}$

(ب) $\overrightarrow{ع_{أب}}$ (متجه السرعة النسبية للجسم (أ) بالنسبة الى الجسم (ب)) = $\overrightarrow{ع_{أ}} - \overrightarrow{ع_{ب}}$

أمثلة

① تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠كم / س فإذا تحركت دراجة بخارية بسرعة ٤٠ كم / س على نفس الطريق فأوجد سرعة الدراجة بالنسبة الى السيارة عندما يتحركان فى نفس الإتجاه

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه حركة السيارة

∴ $\overrightarrow{ع_{أ}}$ هو متجه سرعة السيارة = ٩٠ $\overrightarrow{ى}$ ، ∴ $\overrightarrow{ع_{ب}}$ هو متجه سرعة الدراجة = ٤٠ $\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع_{بأ}}$ (متجه السرعة النسبية للدراجة بالنسبة الى السيارة) = $\overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{أ}}$ = ٤٠ $\overrightarrow{ى}$ − ٩٠ $\overrightarrow{ى}$ = − ٥٠ $\overrightarrow{ى}$

∴ سرعة الدراجة بالنسبة الى السيارة تساوى ٥٠ كم / س فى إتجاه مضاد لحركة السيارة

② تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على أحد الطرق الصحراوية بسرعة ٤٠ كم / س راقبت هذه السيارة حركة سيارة قادمة فى الإتجاه المضاد فبدت و كأنها تتحرك بسرعة ١٣٥ كم / س فإذا كانت أقصى سرعة مسموح بها على هذا الطريق ١٠٠ كم / س فهل السيارة القادمة مخالفة للسرعة المقررة أم لا ؟

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه حركة سيارة المراقبة

∴ $\overrightarrow{ع_{أ}}$ هو متجه سرعة سيارة المراقبة = ٤٠ $\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع_{بأ}}$ متجه سرعة السيارة القدمة من الإتجاه المضاد بالنسبة لسيارة المراقبة = − ١٣٥ $\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع_{بأ}} = \overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{أ}}$ ∴ − ١٣٥ $\overrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{ع_{ب}}$ − ٤٠ $\overrightarrow{ى}$

∴ $\overrightarrow{ع_{ب}}$ (متجه السرعة الفعلية للسيارة القادمة من اتجاه المضاد) = − ١٣٥ $\overrightarrow{ى}$ + ٤٠ $\overrightarrow{ى}$ = − ٩٥ $\overrightarrow{ى}$

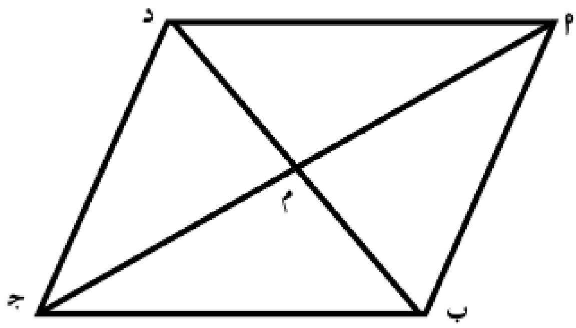
∴ السرعة الفعلية للسيارة القادمة من الإتجاهة المضاد لحركة سيارة المراقبة تساوى ٩٥ كم / س

∴ السيارة القادمة غير مخالفة للسرعة

مراجعة عامة على الوحدة الأولى من الكتاب المدرسي

١ في الشكل المقابل : أكمل ما يأتي

أ ب جـ د متوازي أضلاع تتقاطع قطريه في نقطة م



① $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ...

② $\overrightarrow{\text{د أ}}$ + $\overrightarrow{\text{د جـ}}$ = ...

③ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ + $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ = ...

④ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ب م}}$ = ...

⑤ $\overrightarrow{\text{أب}}$ + ... = ٢ $\overrightarrow{\text{أ م}}$

⑥ $\overrightarrow{\text{أب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ م}}$ = ...

الحـــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ② $\overrightarrow{\text{د ب}}$ ③ $\overrightarrow{\text{و}}$ ④ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ⑤ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ أ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⑥ $\overrightarrow{\text{م ب}}$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فيما يلي :-

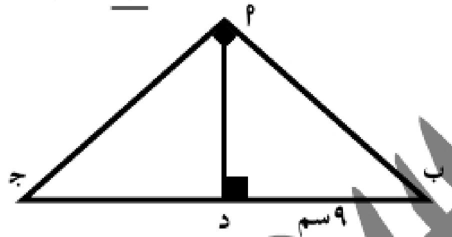
① ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٤) ، ب (−١ ، ٢) يساوي .... (−٢ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)

② في △ أ ب جـ : ق(∠أ) = ٩٠° ، جتاجـ = ٠,٦ فإن: ظا ب = ... (٠,٤ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، −$\frac{٤}{٣}$)

③ في الشكل المقابل : $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب جـ = ١٢سم ، ب د = ٩سم

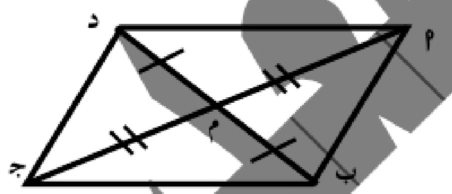
فإن : أب = ...

(٨$\sqrt{٣}$ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ١٠)



④ جميع العبارات التالية تعبر عن $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ماعدا ....

(٢ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ د}}$ + $\overrightarrow{\text{د جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ + $\overrightarrow{\text{د جـ}}$)



⑤ المتجه : $\overrightarrow{\text{م}}$ = (١٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) يعبر عنه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين على الصورة ....

(٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ١٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، −٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، ١٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

٣ في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه و (٠ ، ٠) عين النقط : أ (−٤ ، ٠) ، ب (٠ ، −٣) ، جـ (٣ ، ١) ، د (٢ ، ٨) ثم أوجد :

① متجه الموضع بالنسبة لنقطة الأصل (و) لكل من النقط : أ ، ب ، جـ

② متجه الموضع للنقطة (د) بالنسبة لنقطة الأصل (و) بالصورة القطبية

③ معيار القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$

④ قيمة ك التي تجعل : $\overrightarrow{\text{أ د}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

الحـــــــل

① $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = −٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$

② $\overrightarrow{\text{د}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

|| $\overrightarrow{\text{د}}$ || = $\sqrt{٤ + ٦٤}$ = $\sqrt{٦٨}$ = ٢$\sqrt{١٧}$ وحدة طول

ظا θ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ ∴ θ = ٧٥° ٥٨َ

∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ = (٢$\sqrt{١٧}$ ، ٧٥° ٥٨َ)

③ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، −٣) − (−٤ ، ٠) = (−٤ ، −٣)

|| $\overrightarrow{\text{أب}}$ || = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

④ $\overrightarrow{\text{أد}}$ = $\overrightarrow{\text{د}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٨) − (−٤ ، ٠) = (٦ ، ٨)

$\overrightarrow{\text{بج}}$ = $\overrightarrow{\text{ج}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ١) − (٠ ، −٣) = (٣ ، ٤)

∵ $\overrightarrow{\text{أد}}$ = ك $\overrightarrow{\text{بج}}$ ⇐ (٦ ، ٨) = ك (٣ ، ٤) ⇐ ك = ٢

٤ في نظام إحداثي متعامد نقطة الأصل فيه و (٠ ، ٠) عين النقط: أ (١ ، −٤) ، ب (٤ ، ٠) ، ج (−٢ ، ١) ، د (١ ، ٥) ثم أوجد:

① أوجد: || $\overrightarrow{\text{أب}}$ || ، || $\overrightarrow{\text{جد}}$ ||

② اثبت أن: $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جد}}$

③ إذا كان: $\overrightarrow{\text{بج}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{هد}}$ فأوجد إحداثيي هـ

الحـــــــل

① $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ٠) − (١ ، −٤) = (٤ − ١ ، ٠ + ٤) = (٣ ، ٤)

|| $\overrightarrow{\text{أب}}$ || = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

$\overrightarrow{\text{جد}}$ = $\overrightarrow{\text{د}}$ − $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (١ ، ٥) − (−٢ ، ١) = (١ + ٢ ، ٥ − ١) = (٣ ، ٤)

|| $\overrightarrow{\text{جد}}$ || = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

② ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{جد}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جد}}$

③ ∵ $\overrightarrow{\text{بج}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{هد}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{بج}}$ = $\overrightarrow{\text{هد}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ج}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{د}}$ − $\overrightarrow{\text{هـ}}$

∴ (−٢ ، ١) − (٤ ، ٠) = (١ ، ٥) − (س ، ص)

∴ −٢ − ٤ = ١ − س ⇐ س = ١ + ٦ = ٧

∴ ١ = ٥ − ص ⇐ ص = ٥ − ١ = ٤

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٧ ، ٤)

٥ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−١ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ = (١ ، ١٢)

① أوجد بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين كلا من: $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{ج}}$ ، $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{ج}}$)

② عبر عن $\overrightarrow{\text{ج}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحـــــــل

① $\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ج}}$ = (−١ ، ٦) − (١ ، ١٢) = (−٢ ، −٦) = −٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}}$) = $\frac{١}{٢}$ [(−١ ، ٦) + (١ ، ١٢)] = (٠ ، ٩) = ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$

② **نفرض أن :** $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ (١ ، ١٢) = ك (٤ ، ١) + م (−١ ، ٦)

∴ ٤ك − م = ١ ، ك + ٦م = ١٢

∴ ك = $\frac{١٨}{٢٥}$ ، ∴ م = $\frac{٤٧}{٢٥}$

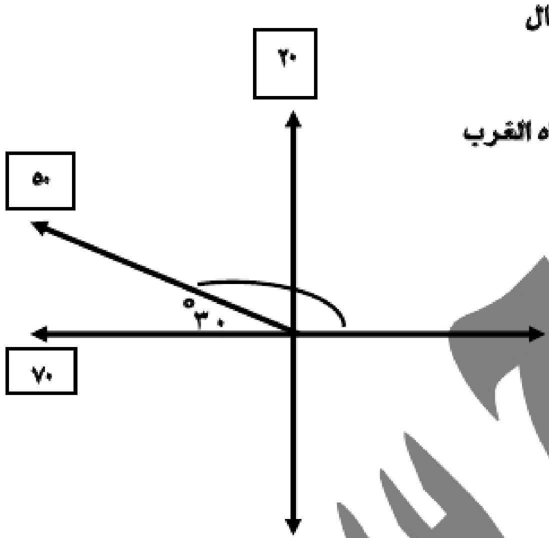
∴ $\overrightarrow{\text{ج}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\frac{١٨}{٢٥}$ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\frac{٤٧}{٢٥}$ $\overrightarrow{\text{ب}}$

[٦] أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين للمتجه الذى يعبر عن :-

① قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر على جسم و تعمل فى إتجاه الشمال

② إزاحة جسم مسافة ٥٠ سم فى إتجاه ٣٠° شمال الغرب

③ السرعة المنتظمة لسيارة تقطع مسافة ٧٠ كم / س فى إتجاه الغرب



الحـــــــــــــــــل

① $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢٠ ، ٩٠°) = (٢٠ جتا ٩٠ ، ٢٠ جا ٩٠)

= (٠ ، ٢٠) = ٢٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

② $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٥٠ ، ١٥٠°) = (٥٠ جتا ١٥٠ ، ٥٠ جا ١٥٠)

= (−٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥) = −٢٥ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

③ $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٧٠ ، ١٨٠°) = (٧٠ جتا ١٨٠ ، ٧٠ جا ١٨٠)

= (−٧٠ ، ٠) = −٧٠ $\overrightarrow{\text{س}}$

[٧] إذا كان : $\overrightarrow{\text{م}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = −٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ب $\overrightarrow{\text{ص}}$

① أثبت أن : $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$ **② أوجد :** أ ∈ ح **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$

③ أوجد : ب ∈ ح **إذا كان :** $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ **④ هل :** $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{م}}$ **فسر إجابتك**

الحـــــــــــــــــل

$\overrightarrow{\text{م}}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−٥ ، −١٠) ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ = (أ ، ١٠) ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢ ، ب)

① ∵ $س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١$ = ١ × −١٠ − (٢ × −٥) = −١٠ + ١٠ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$

② ∵ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ل}}$ ⇐ $س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١$ = صفر

∴ ١ × ١٠ − ٢ × أ = ٠ ⇐ أ = ٥

③ ∵ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ⇐ $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢$ = ٠

∴ ٢ × ٥ + ١٠ ب = صفر ⇐ ب = −١

④ ∵ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ن}}$ ، ∵ $\overrightarrow{\text{م}}$ // $\overrightarrow{\text{ن}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ق}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{م}}$

٨ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٤ ، −٦) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٣ ، −٢)

① اثبت أن: $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$

② أوجد: ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{جـ}}$ ، ½ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{جـ}}$

الحـــــــــــل

① س١ ص٢ − س٢ ص١ = ٤ × ٩ − (−٦ × −٦) = ٣٦ − ٣٦ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$

س٢ س٣ + ص٢ ص٣ = −٦ × −٣ + (٩ × −٢) = ١٨ − ١٨ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$

س١ س٣ + ص١ ص٣ = −٣ × ٤ + (−٢ × −٦) = −١٢ + ١٢ = ٠ ⇐ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{أ}}$

② ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(٤ ، −٦) + (−٦ ، ٩) = (٨ − ٦ ، −١٢ + ٩) = (٢ ، −٣)

$\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٢$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٦ ، ٩) − ٢(−٣ ، −٢) = (−٦ + ٦ ، ٩ + ٤) = (٠ ، ١٣)

½ $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ − ٣$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ½ (٤ ، −٦) + (−٦ ، ٩) − ٣(−٣ ، −٢) = (٢ − ٦ + ٩ ، −٣ + ٩ + ٦)
= (٥ ، ١٢)

٩ إذا كان: $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (١ ، −٤) ، أ (٢ ، ٣) ، جـ (−١ ، ١٥)

أوجد قيمتى ل ، م إذا كان: ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$

الحـــــــــــل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −٤) + (٢ ، ٣) = (٣ ، −١)

∵ ل $\overrightarrow{\text{أ}}$ − م $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ∴ ل (٢ ، ٣) − م (٣ ، −١) = (−١ ، ١٥)

∴ ٢ل − ٣م = −١ ، ∴ ٣ل + م = ١٥

∴ ل = ٤ ، م = ٣

(١٠) إذا كان: أ ب جـ د متوازى أضلاع حيث أ(٢ ، −٢) ، ب (٤ ، −٢) ، جـ (٢ ، ٣) أوجد إحداثيا نقطة د

الحـــــــــــل

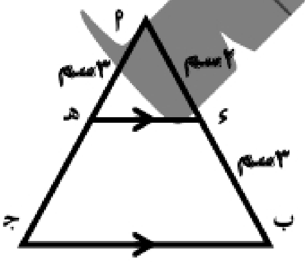
∵ أ ب جـ د متوازى أضلاع ∴ $\overrightarrow{\text{أد}}$ = $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ − $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{د}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٣) − (٤ ، −٢) + (٢ ، −٢) = (٢ − ٤ + ٢ ، ٣ + ٢ − ٢) = (٠ ، ٣)

(١١) فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أوجد قيم: ك ، م ، ن العددية إذا كان

① $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ك $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ ② $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = ل $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$

③ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = م $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ ④ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$



الحـــــــــــل

① ∵ ٢ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = ٣/٢ $\overrightarrow{\text{ء أ}}$ ⇐ ك = ٣/٢

② ∵ ٥ $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ = ٣/٥ $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ⇐ ل = ٣/٥

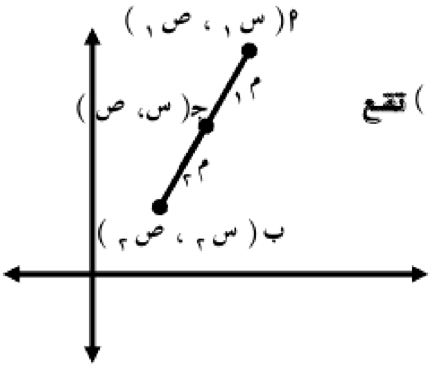
③ ∵ ٣ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = −٥ $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = −٥/٣ $\overrightarrow{\text{هـ ء}}$ ⇐ م = −٥/٣

④ ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ + $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ = ن $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$

∵ ٥ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ = ٢/٥ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⇐ ن = ٢/٥

تقسيم قطعة مستقيمة

أولا : التقسيم من الداخل



في الشكل المقابل : إذا كانت النقطة جـ (س ، ص) **تقع بين النقطتين** أ(س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

بحيث : $\dfrac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \dfrac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$

فإن النقطة جـ التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ **من الداخل بنسبة** م١ : م٢

وتوجد إحداثي نقطة جـ (س ، ص) **من العلاقتين :**

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \text{س}_2 + \text{م}_2 \text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{م}_1 \text{ص}_2 + \text{م}_2 \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

أمثلة

[١] **أوجد إحداثي النقطة** جـ (س ، ص) **التي تقسم** $\overline{\text{أب}}$ **من الداخل بنسبة** ١ : ٢ **حيث :** أ(١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥)

الحل

م١ = ١ ، م٢ = ٢ ، س١ = ١ ، ص١ = ٢ ، س٢ = ٤ ، ص٢ = ٥

$$\text{س} = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٤ + ٢}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٥ + ٤}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

جـ (٢ ، ٣)

[٢] **أوجد إحداثي النقطة** جـ (س ، ص) **التي تقسم** $\overline{\text{أب}}$ **من الداخل بنسبة** ٢ : ٣ **حيث :** أ(−١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٨)

الحل

م١ = ٢ ، م٢ = ٣ ، س١ = −١ ، ص١ = ٣ ، س٢ = ٤ ، ص٢ = ٨

$$\text{س} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{١٦ + ٩}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

جـ (١ ، ٥)

[٣] **أوجد إحداثي النقطة** جـ (س ، ص) **التي تقسم** $\overline{\text{أب}}$ **من الداخل بنسبة** ٤ : ٣ **حيث** أ(−٥ ، −٤) ، ب (٢ ، −٤)

الحل

م١ = ٤ ، م٢ = ٣ ، س١ = −٥ ، ص١ = −٤ ، س٢ = ٢ ، ص٢ = −٤

$$\text{س} = \frac{٤ \times ٢ + ٣ \times -٥}{٤ + ٣} = \frac{٨ - ١٥}{٧} = \frac{-٧}{٧} = -١ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{٤ \times -٤ + ٣ \times -٤}{٤ + ٣} = \frac{-١٦ - ١٢}{٧} = \frac{-٢٨}{٧} = -٤$$

جـ (−١ ، −٤)

ملاحظة هامة: إذا كانت جـ (س ، ص) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$)

فإن: جـ (س ، ص) = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

$\boxed{4}$ **أوجد إحداثي نقطة م منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث:** أ(٣ ، ٥) ، ب (١ ، −١)

الحـــــــــل

م = $\left(\frac{3 + 1}{2} ، \frac{5 - 1}{2} \right) = \left(\frac{4}{2} ، \frac{4}{2} \right) = (2 ، 2)$

$\boxed{5}$ **إذا كانت م (١ ، ٢) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث:** أ(س ، ١) ، ب (٣ ، ص)

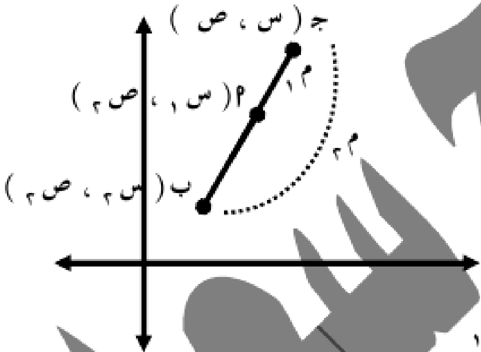
الحـــــــــل

$(1 ، 2) = \left(\frac{س + 3}{2} ، \frac{1 + ص}{2} \right)$

$\therefore \frac{س + 3}{2} = 1 \Leftarrow س + 3 = 2 \Leftarrow س = 2 - 3 = -1$

$\therefore \frac{1 + ص}{2} = 2 \Leftarrow 1 + ص = 4 \Leftarrow ص = 4 - 1 = 3$

ثانيا: التقسيم من الخارج



في الشكل المقابل: إذا كانت جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{أب}}$

بحيث: $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{م_1}{م_2}$

فإن النقطة جـ **تقسم** $\overline{\text{أب}}$ **من الخارج بنسبة** $م_1 : م_2$

وتوجد إحداثي نقطة جـ (س ، ص) **من العلاقتين**

$س = \frac{م_1 س_2 - م_2 س_1}{م_1 + م_2}$ ، $ص = \frac{م_1 ص_2 - م_2 ص_1}{م_1 + م_2}$

أمثـــــــــلة

$\boxed{1}$ **أوجد إحداثي النقطة** جـ (س ، ص) **التي تقسم** $\overline{\text{أب}}$ **من الخارج بنسبة** ٢ : ٥ **حيث:** أ(١ ، −٣) ، ب (٤ ، ٣)

الحـــــــــل

$م_1 = 2$ ، $م_2 = 5$ ، $س_1 = 1$ ، $ص_1 = -3$ ، $س_2 = 4$ ، $ص_2 = 3$

$س = \frac{2 \times 4 - 5 \times 1}{2 - 5} = \frac{8 - 5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$ ، $ص = \frac{2 \times 3 - 5 \times -3}{2 - 5} = \frac{6 + 15}{-3} = \frac{21}{-3} = -7$

جـ (−١ ، −٧)

[٢] أوجد إحداثى النقطة جـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٧ : ٢ حيث : أ(−١ ، ٣) ، ب (٤ ، ٨)

الحـــــــــــــــــــــــل

$\text{م}_١ = ٧$ ، $\text{م}_٢ = ٢$ ، $\text{س}_١ = -١$ ، $\text{ص}_١ = ٣$ ، $\text{س}_٢ = ٤$ ، $\text{ص}_٢ = ٨$

$\text{س} = \frac{٧ \times ٤ - ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٢٨ + ٢}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ ، $\text{ص} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٦ - ٦}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$

جـ (٦ ، ١٠)

[٣] أوجد إحداثى النقطة جـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢ حيث : أ(٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١)

الحـــــــــــــــــــــــل

$\text{م}_١ = ٣$ ، $\text{م}_٢ = ٢$ ، $\text{س}_١ = ٢$ ، $\text{ص}_١ = ٥$ ، $\text{س}_٢ = ٧$ ، $\text{ص}_٢ = -١$

$\text{س} = \frac{٣ \times ٧ - ٢ \times ٢}{٣ - ٢} = \frac{٢١ - ٤}{١} = ١٧$ ، $\text{ص} = \frac{٣ \times -١ - ٢ \times ٥}{٣ - ٢} = \frac{-٣ - ١٠}{١} = -١٣$

جـ (١٧ ، −١٣)

مـــــــلاحظه هامة جدا

لإيجاد نسبة التقسيم و معرفة نوعه (من الداخل ، من الخارج) نستخدم إحدى العلاقتين :

$\text{س} = \frac{\text{م}_١ \text{س}_٢ + \text{م}_٢ \text{س}_١}{\text{م}_١ + \text{م}_٢}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{م}_١ \text{ص}_٢ + \text{م}_٢ \text{ص}_١}{\text{م}_١ + \text{م}_٢}$

ثم توجد النسبة بين م١ ، م٢ ($\text{م}_١ : \text{م}_٢$)

فإذا كانت النسبة موجبة كان التقسيم من الداخل و إذا كانت النسبة سالبة كان التقسيم من الخارج

[٤] إذا كانت : أ (−١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٧) ، جـ (س ، ٤) حيث النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أب}}$ بالنقطة جـ مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحـــــــــــــــــــــــل

$\text{س} = ؟$ ، $\text{ص} = ٤$ ، $\text{س}_١ = -١$ ، $\text{ص}_١ = ٢$ ، $\text{س}_٢ = ٤$ ، $\text{ص}_٢ = ٧$

$٤ = \frac{\text{م}_١ \times ٧ + \text{م}_٢ \times ٢}{\text{م}_١ + \text{م}_٢} \Leftarrow ٤\text{م}_١ + ٤\text{م}_٢ = ٧\text{م}_١ + ٢\text{م}_٢$

$٤\text{م}_١ - ٧\text{م}_١ = ٢\text{م}_٢ - ٤\text{م}_٢ \Leftarrow -٣\text{م}_١ = -٢\text{م}_٢$

$\therefore \text{م}_١ : \text{م}_٢ = ٢ : ٣$ **و التقسيم من الداخل**

$\text{س} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

٥ إذا كانت : ؟ (٦ ، −٢) ، ب (٢ ، ١) ، جـ (−٣ ، ٤) حيث النقاط ؟ ، ب ، جـ على استقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{؟جـ}}$ بالنقطة ب مبينا نوع التقسيم

الحـــــــــــــــل

$\text{س} = 2$ ، $\text{ص} = 1$ ، $\text{س}_1 = 6$ ، $\text{ص}_1 = -2$ ، $\text{س}_2 = -3$ ، $\text{ص}_2 = 4$

$$2 = \frac{\text{م}_1 \times -3 + \text{م}_2 \times 6}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \Leftarrow 2\text{م}_1 + 2\text{م}_2 = -3\text{م}_1 + 6\text{م}_2$$

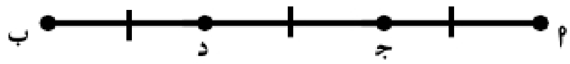
$$2\text{م}_1 + 3\text{م}_1 = 6\text{م}_2 - 2\text{م}_2 \Leftarrow 5\text{م}_1 = 4\text{م}_2$$

$\therefore \text{م}_1 : \text{م}_2 = 4 : 5$ و التقسيم من الداخل

٦ إذا كانت : ؟ (−١ ، ١) ، ب (٢ ، ٧) أوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{؟ب}}$ من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحـــــــــــــــل

النقطة جـ تقسم $\overline{\text{؟ب}}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل



$\text{م}_1 = 1$ ، $\text{م}_2 = 2$ ، $\text{س}_1 = -1$ ، $\text{ص}_1 = 1$ ، $\text{س}_2 = 2$ ، $\text{ص}_2 = 7$

$$\text{س} = \frac{1 \times 2 + 2 \times -1}{1 + 2} = \frac{2 - 2}{3} = 0 \quad , \quad \text{ص} = \frac{1 \times 7 + 2 \times 1}{1 + 2} = \frac{7 + 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$\therefore$ جـ (٠ ، ٣)

النقطة د تنصف $\overline{\text{جـ ب}}$

$$\therefore \text{د} = \left(\frac{0 + 2}{2} , \frac{3 + 7}{2} \right) = (1 , 5)$$

مـــــــــــــلاحظات هامة

١ لإيجاد نسبة تقسيم محورى الإحداثيات لقطعة مستقيمة :

(١) نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور السينات [نقطة التقاطع (س ، ٠)] نستخدم العلاقة :

$$\text{م}_1 \text{ص}_2 + \text{م}_2 \text{ص}_1 = \text{صفر}$$

(٢) نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور الصادات [نقطة التقاطع (٠ ، ص)] نستخدم العلاقة :

$$\text{م}_1 \text{س}_2 + \text{م}_2 \text{س}_1 = \text{صفر}$$

٢ إحداثى نقطة تقاطع متوسطات أى مثلث ؟ ب جـ حيث :

؟(س_1 ، ص_1) ، ب (س_2 ، ص_2) ، جـ (س_3 ، ص_3)

هي : $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} , \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} \right)$

٧ إذا كانت : ٩(٢ ، −٤) ، ب(٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{٩ب}$ بواسطة محورى الإحداثيات

الحـــــــــــــــــــــل

نفرض نقطة جـ هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور السينات (س ، ٠)

∴ صفر = م$_1$ × −٤ + م$_2$ × ٥ = ٥ م$_2$ − ٤ م$_1$ ⇐ ٥ م$_2$ = ٤ م$_1$ ⇐ م$_1$: م$_2$ = ٥ : ٤ **من الداخل**

نفرض نقطة د هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور الصادات (٠ ، ص)

∴ صفر = م$_1$ × ٣ + م$_2$ × ٢ = ٣م$_2$ + ٢م$_1$ ⇐ ٣م$_2$ = −٢م$_1$ ⇐ م$_1$: م$_2$ = −٢ : ٣ **من الخارج**

٨ إذا كانت : ٩(٢ ، ٣) ، ب(−٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{٩ب}$ بنقطة تقاطعها مع محور الصادات مبينا نوع التقسيم

الحـــــــــــــــــــــل

نفرض نقطة د هى نقطة تقاطع القطعة المستقيمة مع محور الصادات (٠ ، ص)

∴ صفر = م$_1$ × −٣ + م$_2$ × ٢ = −٣م$_2$ + ٢م$_1$ ⇐ ٣م$_2$ = ٢م$_1$ ⇐ م$_1$: م$_2$ = ٣ : ٢ **من الداخل**

٩ Δ ٩ب جـ فيه : ٩(٦ ، ٨) ، ب(١ ، ٣) ، جـ(٥ ، ١) أوجد إحداثى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

الحـــــــــــــــــــــل

نقطة تقاطع متوسطات المثلث = $\left(\frac{٦ + ١ + ٥}{٣} ، \frac{٨ + ٣ + ١}{٣} \right) = \left(\frac{١٢}{٣} ، \frac{١٢}{٣} \right)$ = (٤ ، ٤)

(١٠) إذا كانت د (٢ ، −١) هى نقطة تقاطع متوسطات Δ ٩ب جـ حيث : ٩(٥ ، −٤) ، ب(−٣ ، ٢) فأوجد إحداثى نقطة جـ

الحـــــــــــــــــــــل

نفرض نقطة جـ (س ، ص)

(٢ ، −١) = $\left(\frac{٥ - ٣ + س}{٣} ، \frac{-٤ + ٢ + ص}{٣} \right)$

∴ $\frac{٥ - ٣ + س}{٣}$ = ٢ ⇐ ٥ − ٣ + س = ٦ ⇐ س = ٦ − ٢ = ٤

∴ $\frac{-٤ + ٢ + ص}{٣}$ = −١ ⇐ −٤ + ٢ + ص = −٣ ⇐ ص = −٣ + ٢ = −١

∴ جـ (٤ ، −١)

تدريـــــــــب

① أوجد إحداثى نقطة ٩ التى تقع عند ربع المسافة من النقطة ب (٧ ، −٤) الى النقطة جـ (−١ ، ٠)

② إذا كانت : جـ ∋ $\overline{٩ب}$ ، بعد جـ عن ٩ ضعف بعدها عن ب حيث : ٩(٦ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧) فأوجد إحداثى جـ

مُعادلة الخط المستقيم

طرق إيجاد ميل الخط المستقيم :-

① ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين : أ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$)

$$الميل = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

② إذا كان متجه الخط المستقيم (أ ، ب) فإن : الميل = $\frac{ب}{أ}$

فمثـــلا : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ٥) + ك (٢ ، ٣) فإن : الميل = $\frac{٣}{٢}$

③ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : ص = م س + جـ فإن : الميل = م

④ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + جـ = صفر فإن : الميل = $-\frac{أ}{ب}$

⑤ ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ فإن : الميل = ظا هـ

⑥ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر متجه الموضع = (أ ، ب) = (١ ، ٠)

⑦ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات = غير معرف متجه الموضع = (أ ، ب) = (٠ ، ١)

مُـــــــلاحظات هامة

1. إذا كان المستقيمان متوازيان فإن : $م_1 = م_2$
2. إذا كان المستقيمان متعامدان فإن : $م_1 \times م_2 = -١$
3. إذا كان ثلاث نقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة فإن : الميل بين أ ، ب = الميل بين ب ، جـ و العكس صحيح

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

1. المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك \overrightarrow{ى}$ حيث : $\overrightarrow{ى}$ متجه الموضع

∴ (س ، ص) = ($س_1$ ، $ص_1$) + ك (أ ، ب)

2. المعادلتين الوسيطتين :

$س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$

3. المعادلة المتماثلة (الإحداثية) :- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$) وميله = م

هى : $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$ أو $(ص - ص_1) = م (س - س_1)$

أو $\frac{ص - ص_1}{س - س_2} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_2}$

4. الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم : أ س + ب ص + جـ = صفر
5. معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

تكون على الصورة : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ (يقطع أ من محور السينات ، يقطع ب من محور السينات)

[٦] المستقيم الموازى لمحور السينات و يمر بالنقطة (س١ ، ص١)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (س١ ، ص١) + ك (١ ، ٠)

و تكون المعادلة العامة : ص = ص١

[٧] المستقيم الموازى لمحور الصادات و يمر بالنقطة (س١ ، ص١)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (س١ ، ص١) + ك (٠ ، ١)

و تكون المعادلة العامة : س = س١

[٨] معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

تكون معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٠ ، ١)　　　و تكون المعادلة العامة : ص = م س

[٩] فى المعادلة : أ س + ب ص + جـ = صفر

لإيجاد طول الجزء المقطوع من محور السينات نضع : ص = ٠

لإيجاد طول الجزء المقطوع من محور الصادات نضع : س = ٠

أمثـــــــــــلة

(١) أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ومتجه إتجاهه (١ ، ٢)

الحـــــــــــــــل

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

المعادلتين الوسيطتين : س = ٣ + ك　　،　　ص = ٥ + ٢ك

المعادلة المتماثلة : المستقيم مار بالنقطة (٣ ، ٥)　،　الميل = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ص − ٥ = ٢(س − ٣)　⇐　ص − ٥ = ٢س − ٦　⇐　٢س − ص − ١ = صفر

(٢) أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{٤ - ١}{٦ - ٣}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٣ ، ١) + ك (١ ، ١)

المعادلتين الوسيطتين : س = ٣ + ك　　،　　ص = ١ + ك

المعادلة المتماثلة : ∴ ص − ١ = س − ٣　　∴ س − ص − ٢ = صفر

(٣) معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٤ و يقطع من محور الصادات الموجب جزءا طوله يساوى ٣

الحـــــــــــــــل

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٣)　　∴ ص − ٣ = ٤(س − ٠)

∴ ص − ٣ = ٤س　　∴ ٤س − ص + ٣ = صفر

∴ المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٠ ، ٣) + ك (١ ، ٤)

(٤) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٣) وميله = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــــــــــــل

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)   لا تنسى أن الميل = $\frac{ب}{أ}$

∴ (س ، ص) = (−١ ، ٣) + ك (٥ ، ٣)

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

الحـــــــــــــــل

المستقيم يمر بالنقطة : (−٧ ، ٥)   والميل = $\frac{٣}{-٢}$

المعادلة المتماثلة للمستقيم : ص − ٥ = $\frac{٣}{-٢}$ (س + ٧)

∴ −٢ص + ١٠ = ٣س + ٢١   ∴ ٣س + ٢ص + ١١ = صفر

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٣) ويوازى المستقيم الذى معادلته : ٤س − ٧ص + ٣ = صفر

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $-\frac{أ}{ب}$ = $\frac{-٤}{-٧}$ = $\frac{٤}{٧}$

المعادلة المتماثلة : ص − ٣ = $\frac{٤}{٧}$ (س + ٢)

٧ص − ٢١ = ٤س + ٨

٤س − ٧ص + ٢٩ = صفر

و تكون المعادلة المتجهة على الصورة : (س ، ص) = (−٢ ، ٣) + ك (٧ ، ٤)

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) و عمودى على المستقيم الذى معادلته : ٥س + ٧ص = ١

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{٧}$

∴ الميل المطلوب = $\frac{٧}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة : ص − ٤ = $\frac{٧}{٥}$ (س − ٣)

∴ ٥ص − ٢٠ = ٧س − ٢١

∴ ٧س − ٥ص − ١ = صفر

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (٣ ، ٤) + ك (٥ ، ٧)

(٨) أوجد المعادلتين الوسيطتين للمستقيم المار بالنقطة (١ ، −٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

الحـــــــــــــــل

الميل = $\frac{٥ - ٣}{٤ - ١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ متجه الوضع = (٣ ، ٢)

المعادلة المتجهة : (س ، ص) = (١ ، −٤) + ك (٣ ، ٢)

المعادلتين الوسيطتين : س = ١ + ٣ك   ،   ص = −٤ + ٢ك

(٩) أوجد المعادلتين الوسيطتين للمستقيم المار بالنقطة (−٢ ، −٤) و عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــــــــــــــــل

الميل = $\frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ ∴ الميل المطلوب = $-\frac{٤}{٣}$

المعادلة : ص − ٢ = $-\frac{٤}{٣}$ (س + ١) ∴ −٣ص + ٦ = ٤س + ٤

∴ ٤س + ٣ص − ٢ = صفر

(١٠) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الإتجاه الموجب لمحور السينات و ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

الحـــــــــــــــــــل

∵ أ = ٣ ، ب = −٤ ∴ $\frac{س}{٣} - \frac{ص}{٤}$ = صفر

(١١) أوجد المقطوعتين السينية و الصادية للمستقيم الذى معادلته : ٢س − ٥ص = ١٠

الحـــــــــــــــــــل

لإيجاد المقطوعة السينية : نضع ص = صفر ∴ ٢س = ١٠ ∴ س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

∴ المقطوعة السينية = ٥ نقطة التقاطع مع محور السينات (٥ ، ٠)

لإيجاد المقطوعة الصادية : نضع س = صفر ∴ −٥ص = ١٠ ∴ ص = $\frac{١٠}{-٥}$ = −٢

∴ المقطوعة الصادية = −٢ نقطة التقاطع مع محور الادات سينات (٠ ، −٢)

(١٢) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تنتمى للمستقيم : ٢س + ٥ص − ١٧ = صفر فأوجد قيمة أ

الحـــــــــــــــــــل

٢أ + ٥ × ٣ − ١٧ = صفر ⇐ ٢أ + ١٥ − ١٧ = صفر ⇐ ٢أ = ٢ ⇐ أ = ١

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) و يوازى محور السينات

الحـــــــــــــــــــل

∵ المستقيم يوازى محور السينات ∴ الميل = صفر ∴ المعادلة : ص = ٣

(١٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) و يوازى محور الصادات

الحـــــــــــــــــــل

∵ المستقيم يوازى محور الصادات ∴ الميل = غير معرف ∴ المعادلة : س = ٢

(١٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم : ٣س – ٢ص + ١١ = صفر على التعامد عند س = ١

الحــــــل

بالتعويض عند : س = ١ ∴ ٣ – ٢ص + ١١ = ٠ ∴ –٢ص = – ١٤ ∴ ص = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧

∴ نقطة التقاطع على التعامد هى : (١ ، ٧) (وهى كذلك النقطة التى يمر بها المستقيم المطلوب)

الميل = – $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ الميل المطلوب = – $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص – ٧ = – $\frac{٢}{٣}$ (س – ١) ∴ –٣ص + ٢١ = ٢س – ٢

∴ ٢س + ٣ص – ٢٣ = صفر

(١٦) إذا كان : أ = (–٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد معادلة محور تماثل $\overline{أب}$

الحــــــل

تعلم أن : محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

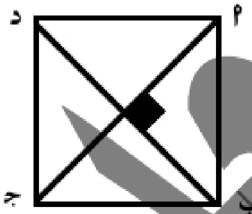
نقطة منتصف القطعة المستقيمة = ($\frac{-٣ + ٥}{٢}$ ، $\frac{١ + ٧}{٢}$) = (١ ، ٤)

الميل = $\frac{٧ - ١}{٥ + ٣}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ الميل المطلوب = – $\frac{٤}{٣}$

المعادلة : ص – ٤ = – $\frac{٤}{٣}$ (س – ١) ∴ –٣ص + ١٢ = ٤س – ٤

∴ ٤س + ٣ص – ١٦ = صفر

(١٧) إذا كان $\overline{أجـ}$ قطر فى المربع أ ب جـ د حيث أ = (٣ ، ٥) ، جـ = (–١ ، –١) أوجد معادلة القطر $\overline{ب د}$



الحــــــل

تعلم أن فى المربع : القطران ينصف كلا منهما الآخر ، القطران متعامدان

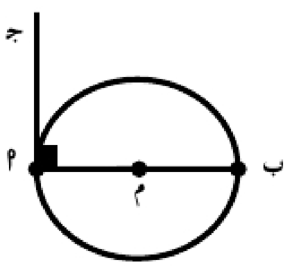
منتصف $\overline{أجـ}$ = منتصف $\overline{ب د}$ = ($\frac{٣ - ١}{٢}$ ، $\frac{٥ - ١}{٢}$) = (١ ، ٢)

الميل = $\frac{-١ - ٥}{-١ - ٣}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ الميل المطلوب = – $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص – ٢ = – $\frac{٢}{٣}$ (س – ١) ∴ –٣ص + ٦ = ٢س – ٢

∴ ٢س + ٣ص – ٨ = صفر

(١٨) إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م حيث أ(–٤ ، ١) ، ب (–٢ ، ٤) أوجد معادلة المماس للدائرة م عند أ



الحــــــل

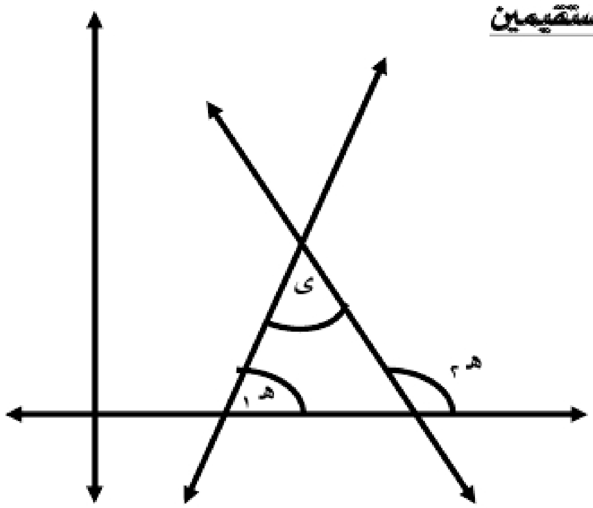
تعلم أن فى الدائرة : المماس يكون عموديا على نصف القطر

الميل = $\frac{٤ - ١}{-٢ + ٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ الميل المطلوب = – $\frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة : ص – ١ = – $\frac{٢}{٣}$ (س + ٤) ∴ –٣ص + ٣ = ٢س + ٨

∴ ٢س + ٣ص + ٥ = صفر

الزاوية الحادة بين مستقيمين



المستقيمان اللذان ميلاهما : $م_1$ ، $م_2$ ويحصران بينهما زاوية قياسها ى فإن : ى تتعين من العلاقة

$$ظا\ ى = \left| \frac{م_1 - م_2}{١ + م_1\, م_2} \right|$$

حيث : $م_1 = ظا\ هـ_1$ ، $م_2 = ظا\ هـ_2$

ملاحظات :-

① إذا كان : $م_1 = م_2$ أى أن : المستقيمان متوازيان

فإن : ق(∠ى) = صفر° أ ق(∠ى) = ١٨٠°

② إذا كان : $م_1\, م_2 = -١$ أى أن : المستقيمان متعامدان فإن : ق(∠ى) = ٩٠°

أمثلة

[١] أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين : ٣س − ص = ٥ ، ٢س + ص − ٧ = صفر

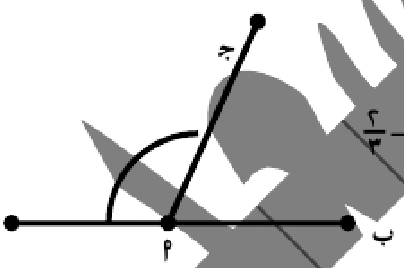
الحل

$م_1 = \frac{٣}{١} = ٣$ ، $م_2 = -\frac{٢}{١} = -٢$

$$\therefore ظا\ ى = \left| \frac{٣ + ٢}{١ + ٣ \times -٢} \right| = \left| \frac{٥}{-٥} \right| = |-١| = ١ \qquad \therefore ق(\angle ى) = ٤٥^\circ$$

[٢] إذا كان : أ(١ ، ٤) ، ب(٢ ، ١) ، جـ(٤ ، ٢) أوجد ق(∠ب أ جـ) المنفرجة

الحل



$م_1 = ميل\ \overline{أب} = \frac{١ - ٤}{٢ - ١} = -٣$ ، $م_2 = ميل\ \overline{أجـ} = \frac{٢ - ٤}{٤ - ١} = -\frac{٢}{٣}$

$$\therefore ظا\ ى = \left| \frac{-٣ + \frac{٢}{٣}}{١ - ٣ \times -\frac{٢}{٣}} \right| = \left| \frac{-٩ + ٢}{٩} \right| = \left| \frac{-٧}{٩} \right| = \frac{٧}{٩}$$

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٣٧° ٥٢َ

∴ ق(∠ب أ جـ) المنفرجة = ١٨٠ − (٣٧° ٥٢َ) = ١٤٣° ٨َ

[٣] أوجد قياس الزاوية بين المستقيم : ٣س − ٢ص + ١ = ٠ و المستقيم الذى متجه إتجاهه (٥ ، ١)

الحل

$م_1 = \frac{٣}{٢}$ ، $م_2 = \frac{١}{٥}$

$$\therefore ظا\ ى = \left| \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥}} \right| = \left| \frac{١٥ - ٢}{١٠ + ٣} \right| = \left| \frac{١٣}{١٣} \right| = ١ \qquad \therefore ق(\angle ى) = ٤٥^\circ$$

٤ إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل المستقيم الأول = ٢ أوجد ميل الثانى

الحـــــل

ظا ى = ظا ٤٥° = ١ ، م١ = ٢ ، م٢ = ؟

∴ $١ = \left|\frac{٢ - \text{م}_٢}{١ + ٢\text{م}_٢}\right|$ ∴ ١ + ٢م٢ = ٢ − م٢ ∴ ٢م٢ + م٢ = ٢ − ١

∴ ٣م٢ = ١ ⇐ $\text{م}_٢ = \frac{١}{٣}$

٥ إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ك ص + ٢ = ٠ ، س − ٣ص + ٤ = ٠ تساوى ٤٥° فأوجد ك

الحـــــل

ظا ى = ظا ٤٥° = ١ ، $\text{م}_١ = \frac{١}{\text{ك}}$ ، $\text{م}_٢ = \frac{١}{٣}$

∴ $١ = \left|\frac{\frac{١}{\text{ك}} - \frac{١}{٣}}{١ + \frac{١}{\text{ك}} \times \frac{١}{٣}}\right| = \frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١}$ ∴ ٣ك + ١ = ٣ − ك ∴ ٤ك = ٢

∴ $\text{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ويصنع مع الخط المستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، −٣) زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$

الحـــــل

نفرض ميل المستقيم المطلوب : م ، $\text{م}_٢ = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = -\frac{٣}{٢}$

$\frac{٣}{٢} = \left|\frac{\text{م} + \frac{٣}{٢}}{١ - \frac{٣}{٢}\text{م}}\right|$ ∴ ٣ ($١ - \frac{٣}{٢}$ م) = ٢ (م + $\frac{٣}{٢}$)

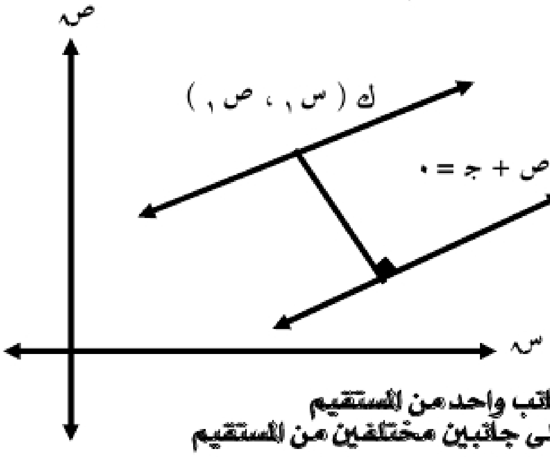
∴ ٣ − $\frac{٩}{٢}$ م = ٢م + ٣ ∴ م = صفر

∴ معادلة المستقيم : ص − ٥ = ٠ (س − ٣) ⇐ ص = ٥

تدريـــــب :

أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته : س + ٣ص + ٢ = صفر ،
والمستقيم : (س ، ص) = (٣ ، ٢) + ك (١ ، ٢)

طول العمود من نقطة الى خط مستقيم



طول العمود النازل من النقطة ك (س_1 ، ص_1)

على المستقيم : أس + ب ص + جـ = ٠

يعطى من العلاقة :

$$\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

مـــــلاحظات :-

① إذا كان المقدار : $\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}$ لنقطتين مختلفتين بنفس الإشارة تكون هاتان النقطتان على جانب واحد من المستقيم بينما إذا كان لهما إشارتين مختلفتين كانتا النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم

② إذا كان المقدار : $\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}$ يساوى صفر فإن النقطة تقع على المستقيم

أمثـــــــــلة

١ أوجد طول العمود الساقط من النقطة (−٢ ، ٥) على المستقيم : ٣س + ٤ص + ٦ = صفر

الحـــــــــــــل

$$\text{ل} = \frac{|-٢ \times ٣ + ٥ \times ٤ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-٦ + ٢٠ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤ \text{ وحدة طول}$$

٢ أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، −٣) على المستقيم : ٨س −٦ص + ١٣ = صفر

الحـــــــــــــل

$$\text{ل} = \frac{|٢ \times ٨ - ٣ \times -٦ + ١٣|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}} = \frac{|١٦ + ١٨ + ١٣|}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤٧}{١٠} = ٤,٧ \text{ وحدة طول}$$

٣ أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٤ ، ٢) + ك (−٣ ، ٤)

الحـــــــــــــل

ميل المستقيم = $-\frac{٤}{٣}$ و يمر المستقيم بالنقطة (٤ ، ٢)

معادلة المستقيم : ص − ٢ = $-\frac{٤}{٣}$ (س − ٤) ∴ ٤س + ٣ص − ٢٢ = صفر

$$\text{ل} = \frac{|٢ \times ٤ + ١ \times ٣ - ٢٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|٨ + ٣ - ٢٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢ \text{ وحدة طول}$$

٤ أثبت أن المستقيمان : ٣س + ٤ص − ٨ = ٠ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، −٣) + ك (٨ ، −٦) متوازيان و أوجد البعد بينهما

الحـــــــــــــل

$\text{م}_1 = -\frac{٣}{٤}$ $\text{م}_2 = -\frac{٦}{٨} = -\frac{٣}{٤}$ ∵ $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

نوجد البعد بين النقطة (٥ ، −٣) و المستقيم : ٣س + ٤ص − ٨ = ٠

$$\text{ل} = \frac{|٥ \times ٣ - ٣ \times ٤ - ٨|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|١٥ - ١٢ - ٨|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٥}{٥} = ١ \text{ وحدة طول}$$

٥ إذا كان طول العمود النازل من نقطة الأصل على المستقيم : ٤س − ٣ص + ك = ٠
يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحـــــــــــــــــــــل

$$٣ = \frac{|٤ \times ٠ + ٠ \times -٣ + ك|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|ك|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{ك}{٥}$$

∴ ك = ٣ × ٥ = ١٥

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، −٣) و المستقيم : ١٢س − ٥ص −١ = ٠ مماس لها و اوجد محيطها و مساحتها

الحـــــــــــــــــــــل

نصف قطر الدائرة = البعد العمودى بين مركز الدائرة و المستقيم المماس لها

$$نق = \frac{|١ \times ١٢ - ٣ \times -٥ - ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}} = \frac{|١٢ + ١٥ - ١|}{\sqrt{١٦٩}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$$ وحدة طول

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٢ × π = ٤ π وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^٢ = π (٢)^٢ = ٤ π وحدة مساحة

٧ اثبت أن المستقيم : ٤س + ٣ص + ٢ = صفر يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) و طول نصف قطرها ٤سم

الحـــــــــــــــــــــل

$$ل = \frac{|٣ \times ٤ + ٢ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|١٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$ وحدة طول

∵ ل = نق ∴ المستقيم : ٤س + ٣ص + ٢ = صفر يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢)

٨ اثبت أن النقط : أ(٣ ، ١) ، ب (−٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم : ٣س − ٤ص + ٦ = صفر و على بعدين متساويين منه

الحـــــــــــــــــــــل

بعد النقطة الأولى = ل$_١$ = $\frac{|٣ \times ٣ + ١ \times -٤ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول

بعد النقطة الثانية = ل$_٢$ = $\frac{|-٣ \times ٣ + ٢ \times -٤ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$
وحدة طول

∵ | أ س$_١$ + ب ص$_١$ + جـ | عن المستقيم بإشارتين مختلفتين
∴ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم و على بعدين متساويين منه

تدريب : أوجد معادلة المستقيم الذى ميله − $\frac{٥}{١٢}$ و طول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة

المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومتين

إذا كان : ل$_{١}$: أ$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص + جـ$_{١}$ = ٠ ، ل$_{٢}$: أ$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص + جـ$_{٢}$ = ٠

فإن : المعادلة التى تمثل المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطعهما هى :

أ$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص + جـ$_{١}$ + ك (أ$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص + جـ$_{٢}$) = ٠

حيث : ك عدد ثابت يمكن إيجاده إذا علم نقطة واقعة على المستقيم المعلوم أو ميله أو ميل المستقيم الموازى له أو المستقيم العمودى عليه .... إلخ

أمثـــــــــــــلة

١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣س + ٢ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ص − ٧ = ٠
ومارا بالنقطة (٣ ، ١)

الحـــــــــــــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

٣س + ٢ص = ٧

س + ٣ص = ٧ ×٣

٣س + ٢ص = ٧

٣س + ٩ص = ٢١

بالطرح

−٧ص = −١٤

∴ ص = ٢

∴ س + ٦ = ٧

∴ س = ٧ − ٦ = ١

∴ **نقطة تقاطع المستقيمين** (١ ، ٢)

∴ **معادلة المستقيم المار بالنقطتين** (١ ، ٢) ، (٣ ، ١)

∴ **الميل** = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = −$\frac{١}{٢}$

∴ **معادلة المستقيم :** ص − ٢ = −$\frac{١}{٢}$ (س − ١)

س + ٢ص − ٥ = صفر

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ص = ١١ ، $\vec{ر}$ = (٧ ، ١) + ك (١ ، −١)
ويوازى المستقيم : ٤س − ٧ص + ١ = صفر

الحـــــــــــــــــــــل

معادلة المستقيم الثانى :

الميل = −١

ص − ١ = − (س − ٧)

س + ص − ٨ = ٠

نحل معادلتى المستقيمين

٢س + ص = ١١

س + ص = ٨

بالطرح

س = ٣

بالتعويض : ٣ + ص = ٨ ⇐ ص = ٨−٣ = ٥

∴ **المستقيم يمر بالنقطة** (٣ ، ٥)

الميل = $\frac{٤}{٧}$

معادلة المستقيم :

ص − ٥ = $\frac{٤}{٧}$ (س − ٣)

∴ ٧ص − ٣٥ = ٤س − ١٢

∴ ٤س − ٧ص + ٢٣ = صفر

٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢س + ص = ١١ ، س − ص = ١
وعمودى على المستقيم : ٣س − ٥ص + ١ = صفر

الحــــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

٢س + ص = ١١

س − ص = ١

بالجمع

٣س = ١٢

س = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

٤ − ص = ١ ⇐ ص = ٤ − ١ = ٣

∴ المستقيم يمر بالنقطة (٤ ، ٣)

الميل = $\frac{٣}{٥}$ ∴ الميل المطلوب = $-\frac{٥}{٣}$

∴ معادلة المستقيم :

ص − ٣ = $-\frac{٥}{٣}$ (س − ٤)

−٣ص + ٩ = ٥س − ٢٠

٥س + ٣ص − ٢٩ = صفر

٤ أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٥ ، س − ص = ١
على المستقيم : ٨س + ٦ص + ٥ = صفر

الحــــــــــــل

نحل معادلتى المستقيمين معا

س + ص = ٥

س − ص = ١

بالجمع

٢س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∴ ٣ + ص = ٥

∴ ص = ٥ − ٣ = ٢

∴ نقطة التقاطع (٣ ، ٢)

طول العمود = $\frac{|٣ \times ٨ + ٢ \times ٦ + ٥|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$ = $\frac{|٢٤ + ١٢ + ٥|}{\sqrt{١٠٠}}$ = $\frac{٤١}{١٠}$ = ٤,١ وحدة طول

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٤ ويمر بنقطة الأصل

الحــــــــــــل

نقطة تقاطع المستقيمين هى : (٣ ، ٤)

∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل

∴ معادلة المستقيم : ص = م س

الميل = $\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة المستقيم : ص = $\frac{٤}{٣}$ س

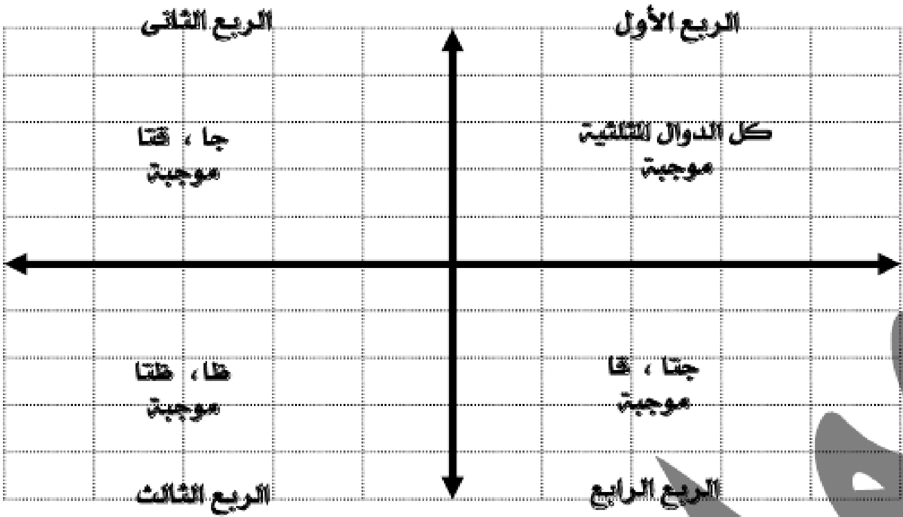
تدريــــــب

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣س − ٤ص + ١ = ٠ ، ٥س + ص − ١ = ٠
ويقطع جزأين متساويين من المحورين الموجبين .

حســــاب المثلثــات

مـــــراجعة على ما سبق دراسته

① إشارة الدالة



لا تنسى أن :

كل جبار ظالم جتا داهية

② الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

	٣٠	٤٥	٦٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٠ أ، ٣٦٠
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	−١	صفر
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	−١	صفر	١
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

③ بعض خواص الدوال المثلثية

١ جا (٩٠ − ه) = جتا ه ، جتا (٩٠ − ه) = جا ه ، ظا (٩٠ − ه) = ظتا ه

٢ **إذا كان :** جاس = جتا ص **فإن :** س + ص = ٩٠°

٣ جا (١٨٠ − ه) = جا ه ، جتا (١٨٠ − ه) = − جتا ه ، ظا (١٨٠ − ه) = − ظا ه

٤ جا (١٨٠ + ه) = − جا ه ، جتا (١٨٠ + ه) = − جتا ه ، ظا (١٨٠ + ه) = ظا ه

٥ جا (٢٧٠ − ه) = −جتا ه ، جتا (٢٧٠ − ه) = − جا ه ، ظا (٢٧٠ − ه) = ظتا ه

٦ جا (٢٧٠ + ه) = −جتا ه ، جتا (٢٧٠ + ه) = جا ه ، ظا (٢٧٠ + ه) = − ظتا ه

٧ جا (٣٦٠ − ه) = − جا ه ، جتا (٣٦٠ − ه) = جتا ه ، ظا (٣٦٠ − ه) = − ظا ه

٨ جا (− ه) = − جا ه ، جتا (− ه) = جتا ه ، ظا (− ه) = − ظا ه

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

لأى زاوية هـ يكون :-

[١] جا هـ قتا هـ = ١ أ، جا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{قتا هـ}}$ أ، قتا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{جا هـ}}$

[٢] جتا هـ قا هـ = ١ أ، جتا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{قا هـ}}$ أ، قا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{جتا هـ}}$

[٣] ظا هـ ظتا هـ = ١ أ، ظا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{ظتا هـ}}$ أ، ظتا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{ظا هـ}}$

[٤] ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ أ، ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

[٥] جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١ أ، ١ + ظا^{٢}هـ = قا^{٢}هـ أ، ١ + ظتا^{٢}هـ = قتا^{٢}هـ

تدريب

أكمل مايلي :

(١) ١ − جا^{٢}س = ... (٢) قا^{٢}س − ظا^{٢}س = ... (٣) جاس قاس = ...

(٤) ظاس قتاس = ... (٥) جا^{٢}٣س + ... = ١ (٦) جا^{٢} ٤٣ + جتا^{٢}....... = ١

(٧) ١ + ظا^{٢}س = قتا^{٢} .... (٨) جا^{٢}س + جتا^{٢}س + ظا^{٢}س = ...

(٩) (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^{٢} = ...

أمثلة

① أثبت صحة المتطابقة التالية : (جاس + جتاس)^{٢} − ٢جاس جتاس = ١

الحل

(جاس + جتاس)^{٢} − ٢جاس جتاس = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س − ٢جاس جتاس = جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

② أثبت صحة المتطابقة التالية : (جاس + جتاس)^{٢} − ١ = ٢ جاس جتاس

الحل

(جاس + جتاس)^{٢} −١ = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س −١ = (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) + ٢جاس جتاس −١

= ١ + ٢جاس جتاس −١ = ٢جاس جتاس

③ أثبت صحة المتطابقة التالية : ظاس + ظتاس = قاس قتاس

الحل

ظاس + ظتاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ + $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{جاس جتاس}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{جا س}}$ × $\frac{\text{١}}{\text{جتا س}}$ = قاس قتاس

④ أثبت صحة المتطابقة التالية : قا^{٢}س + قتا^{٢}س = قا^{٢}س قتا^{٢}س

الحل

قا^{٢}س + قتا^{٢}س = $\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}$ = قا^{٢}س قتا^{٢}س

⑤ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\dfrac{\text{٢ ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}} = \text{٢ جاس جتاس}$

الحـــــــــــــل

$$\dfrac{\text{٢ ظاس}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{٢ ظاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{٢ جاس}}{\text{جتاس}} \div \dfrac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{٢ جاس}}{\text{جتاس}} \times \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{٢ جاس جتاس}$$

⑥ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\dfrac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$

الحـــــــــــــل

$$\dfrac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \div \dfrac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \dfrac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \text{جا}^{٢}\text{س} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$$

⑦ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\text{جا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س = ظا}^{٢}\text{س}$

الحـــــــــــــل

$$\text{جا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} = \text{جا}^{٢}\text{س (١ + ظا}^{٢}\text{س)} = \text{جا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$$

⑧ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\text{١ +} \dfrac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

الحـــــــــــــل

$$\text{١ +} \dfrac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}} = \text{١ +} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{١ + ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

⑨ أثبت صحة المتطابقة التالية : $\text{جتا}^{٤}\text{س − جا}^{٤}\text{س = ١ − ٢ جا}^{٢}\text{س}$

الحـــــــــــــل

الطرف الأيمن $= \text{جتا}^{٤}\text{س − جا}^{٤}\text{س} = \text{(جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س)(جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س)}$

$= \text{(جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س)(١)} = \text{جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س}$

الطرف الأيمن $= \text{١ − ٢ جا}^{٢}\text{س} = \text{(جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س) − ٢ جا}^{٢}\text{س} = \text{جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س}$

الطرفان متساويان

(١٠) أثبت صحة المتطابقة التالية : $\text{جتا}^{٤}\text{س − جا}^{٤}\text{س = ٢ جتا}^{٢}\text{س − ١}$

الحـــــــــــــل

الطرف الأيمن $= \text{جتا}^{٤}\text{س − جا}^{٤}\text{س} = \text{(جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س)(جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س)}$

$= \text{(جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س)(١)} = \text{جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س}$

الطرف الأيمن $= \text{٢ جتا}^{٢}\text{س − ١} = \text{٢ جتا}^{٢}\text{س − (جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س)} = \text{جتا}^{٢}\text{س − جا}^{٢}\text{س}$

الطرفان متساويان

حل المعادلة المثلثية

المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قيم قياسات الزوايا التى تحقق هذه المعادلة

مـــــــلاحظات هامة

① جا هـ ∈ [−١ ، ١] ② جتا هـ ∈ [−١ ، ١] لجميع قيم هـ الحقيقية

خطوات حل المعادلة المثلثية

1. نحدد إشارة الدالة لمعرفة الربع الذى تنتمى إليه
2. توجد قياس الزاوية و ليكن (ق ∠ هـ)
3. نحدد قياسات الزوايا كالتالى :

① الربع الأول : قياس الزاوية = ق ∠ هـ

② الربع الثانى : قياس الزاوية = ١٨٠ − ق ∠ هـ

③ الربع الثالث : قياس الزاوية = ١٨٠ + ق ∠ هـ

④ الربع الرابع : قياس الزاوية = ٣٦٠ − ق ∠ هـ

أمثـــــــلة

(١) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جاس − ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ ٢جاس − ١ = ٠ ⇐ جاس = $\frac{١}{٢}$

ق ∠ س = ٣٠°

∴ (جاس > ٠) تقع فى الربع الأول أو الثانى

الربع الأول : قياس الزاوية = ٣٠°

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جاس + √٣ = ٠

الحـــــــــل

∵ ٢جاس + √٣ = ٠ ⇐ جاس = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ق ∠ س = ٦٠°

∴ (جاس < ٠) تقع فى الربع الثالث أو الرابع

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∴ م . ح = { ٢٤٠ ، ٣٠٠° }

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة : √٢ جاس − ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ √٢ جاس − ١ = ٠ ⇐ جاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ق ∠ س = ٤٥°

∴ (جاس > ٠) تقع فى الربع الأول أو الثانى

الربع الأول : قياس الزاوية = ٤٥°

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° }

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جتاس + ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ ٢جتاس + ١ = ٠ ⇐ جتاس = $-\frac{١}{٢}$

∴ ق ∠ س = ٦٠°

∴ (جتاس < ٠) تقع فى الربع الثانى أو الثالث

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

∴ م . ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠° }

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جتاس − √٣ = ٠

الحـــــــــل

∵ ٢ جتاس − √٣ = ٠ ⇐ جتاس = √٣ / ٢

∴ ق ∠س = ٣٠°

∴ (جتاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الرابع**

الربع الأول : قياس الزاوية = ٣٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ٣٣٠° }

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة : √٢ جتاس − ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ √٢ جتاس − ١ = ٠ ⇐ جتاس = ١ / √٢

∴ ق ∠س = ٤٥°

∴ (جتاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الرابع**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٤٥°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ + ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ٣١٥° }

---

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلة : √٣ ظاس + ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ √٣ ظاس + ١ = ٠ ⇐ ظاس = − ١ / √٣

∴ ق ∠س = ٣٠°

∴ (ظاس < ٠) **تقع فى الربع الثانى أو الرابع**

الربع الثانى : قياس الزاوية = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∴ م . ح = { ١٥٠° ، ٣٣٠° }

(٨) أوجد مجموعة حل المعادلة : ظاس − √٣ = ٠

الحـــــــــل

∵ ظاس − √٣ = ٠ ⇐ ظاس = √٣

∴ ق ∠س = ٦٠°

∴ (ظاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثالث**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٦٠°

الربع الثالث : قياس الزاوية

= ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

∴ م . ح = { ٦٠° ، ٢٤٠° }

---

(٩) أوجد مجموعة حل المعادلة : ظاس + ١ = ٠

الحـــــــــل

∵ ظاس + ١ = ٠ ⇐ ظاس = −١

∴ ق ∠س = ٤٥°

∴ (ظاس < ٠) **تقع فى الربع الثانى أو الرابع**

الربع الثانى : قياس الزاوية = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

الربع الرابع : قياس الزاوية

= ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ١٣٥° ، ٣١٥° }

(١٠) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس = ٠,٦٤٤٨

الحـــــــــل

∵ جاس = ٠,٦٤٤٨ ⇐

∴ ق ∠س = ٤٠° ٩′ ٢″

∴ (جاس > ٠) **تقع فى الربع الأول أو الثانى**

الربع الأول: قياس الزاوية = ٤٠° ٩′ ٢″

الربع الثانى : قياس الزاوية

= ١٨٠ − ٤٠° ٩′ ٢″ = ١٣٨° ٥١′ ٥٢″

∴ م . ح = { ٤٠° ٩′ ٢″ ، ١٣٨° ٥١′ ٥٢″ }

((١١) أوجد مجموعة حل المعادلة : جا^{٢}س + جاس = ٠

الحـــــــــل

∵ جا^{٢}س + جاس = ٠ ⇐ جاس (جاس + ١) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جاس = −١

∵ جاس = ٠ ⇐ ق ∠س = صفر° أ ق ∠س = ١٨٠°

∵ جاس = −١ ⇐ ق ∠س = ٢٧٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° }

(١٢) أوجد مجموعة حل المعادلة : جتا^{٢}س + جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جتا^{٢}س + جتاس = ٠ ⇐ جتاس (جتاس + ١) = ٠ ⇐ جتاس = ٠ أ، جتاس = −١

∵ جتاس = ٠ ⇐ ق∠س = ٩٠° أ ق∠س = ٢٧٠°

∵ جتاس = −١ ⇐ ق∠س = ١٨٠°

∴ م . ح = { ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° }

---

(١٣) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جا^{٢}س + ٣جاس = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جا^{٢}س + ٣جاس = ٠ ⇐ جاس (٢جاس + ٣) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جتاس = $-\frac{٣}{٢}$ **مرفوض**

∵ جاس = ٠ ⇐ ق∠س = صفر° أ ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° }

---

(١٤) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جاس جتاس = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جتاس = ٠

∵ جاس = ٠ ⇐ ق∠س = صفر° أ ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∵ جتاس = ٠ ⇐ ق∠س = ٩٠° أ ق∠س = ٢٧٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٩٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° }

---

(١٥) أوجد مجموعة حل المعادلة : جا^{٢}س + ٢جاس = ٠

الحـــــــل

∵ جا^{٢}س + ٢جاس = ٠ ⇐ جاس (جاس + ٢) = ٠ ⇐ جاس = ٠ أ، جاس = −٢ **مرفوض**

∵ جاس = ٠ ⇐ ق∠س = صفر° أ ق∠س = ١٨٠° ، ق∠س = ٣٦٠°

∴ م . ح = { صفر° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° }

---

(١٦) أوجد مجموعة حل المعادلة : جاس − جتاس = ٠

الحـــــــل

∵ جاس − جتاس = ٠ ⇐ جاس = جتاس ÷ جتاس ⇐ ظاس = ١

∵ ظاس = ١ ⇐ ق∠س = ٤٥°

تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٤٥° ، **قياس الزاوية فى الربع الثالث** = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ٢٢٥° }

---

(١٧) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢جا^{٢}س + ٥جاس + ٢ = ٠

الحـــــــل

∵ ٢جا^{٢}س + ٥جاس + ٢ = ٠ ⇐ (٢جاس + ١)(جاس + ٢) = ٠ ⇐ جاس = $-\frac{١}{٢}$ أ، جاس = −٢**مرفوض**

∵ جاس = $-\frac{١}{٢}$ ⇐ ق∠س = ٣٠°

تقع فى الربع الثالث أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الثالث = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

قياس الزاوية فى الربع الرابع = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠° ∴ م . ح = { ٢١٠° ، ٣٣٠° }

((١٨)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جتا^{٢}س − ٣ جتاس + ١ = ٠

الحــــــــــل

∵ ٢ جتا^{٢}س − ٣ جتاس + ١ = ٠　⇐　(٢ جتاس − ١)(جتاس − ١) = ٠

∴ جتاس = $\frac{١}{٢}$　　أ،　جتاس = ١

∵ جتاس = $\frac{١}{٢}$　⇐　ق ∠ س = ٦٠°

تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٦٠°

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∵ جتاس = ١　⇐　ق ∠ س = صفر°

أ　ق ∠ س = ١٨٠°

∴ م . ح = { ٦٠° ، ٣٠٠° ، صفر° ، ١٨٠° }

((١٩)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٢ جا^{٢}س − ١ = ٠

الحــــــــــل

∵ ٢ جا^{٢}س − ١ = ٠　⇐　جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$　⇐　جاس = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∵ جاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$　⇐　ق ∠ س = ٤٥°

تقع فى الربع الأول أو الربع الثانى

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٤٥

قياس الزاوية فى الربع الثانى

= ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥°

∵ جاس = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$　⇐　ق ∠ س = ٤٥°

تقع فى الربع الثالث أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الثالث = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥°

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥°

∴ م . ح = { ٤٥° ، ١٣٥° ، ٢٢٥° ، ٣١٥° }

((٢٠)) أوجد مجموعة حل المعادلة : ٤ جتا^{٢}س − ٣ = ٠

الحــــــــــل

∵ ٤ جتا^{٢}س − ٣ = ٠　⇐　جتا^{٢}س = $\frac{٣}{٤}$　⇐　جتاس = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　⇐　ق ∠ س = ٣٠°

تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع

قياس الزاوية فى الربع الأول = ٣٠

قياس الزاوية فى الربع الرابع

= ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠°

∵ جتاس = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　⇐　ق ∠ س = ٣٠°

تقع فى الربع الثانى أو الربع الثالث

قياس الزاوية فى الربع الثانى = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

قياس الزاوية فى الربع الثالث

= ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°

∴ م . ح = { ٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° }

تدريـــــــــب

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية :−

[١] ٢ جاس + جاس = ٠

[٢] جتا^{٢}س − جتاس = ٠

[٣] جتاس + ٢ جاس جتاس = ٠

[٤] جا^{٢}س − ٣ جتا^{٢}س = ٠

[٥] ٢ ظا^{٢}س + ظاس − ١ = ٠

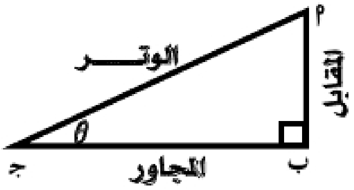
[٦] ٣ قا^{٢}س − ٤ قاس − ٤ = ٠

[٧] ٣ جتا^{٢}س − جتاس − ٢ = ٠

حل المثلث القائم

- أى مثلث يحتوى على ست عناصر (٣ أضلاع + ٣ زوايا) و المقصود بحل المثلث هو إيجاد أطوال أضلاعه و قياسات زواياه الغير معلومة
- لحل المثلث القائم يلزم أن تعرف طولا ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين
- تستخدم النسب المثلثية للزاوية الحادة و نظرية فيثاغورث فى حل المثلث القائم بحيث :

فى △ أ ب جـ القائم الزاوية فى ب



(١) جا θ = المقابل / الوتر = أ ب / أ جـ

(٢) جتا θ = المجاور / الوتر = ب جـ / أ جـ

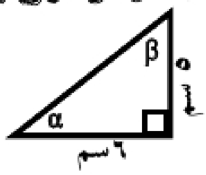
(٣) ظا θ = المقابل / المجاور = أ ب / ب جـ

(٤) (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢

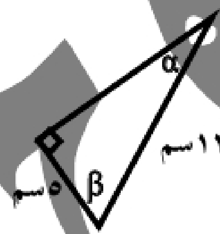
أولاً : حل المثلث القائم إذا علم طولا ضلعين فيه

[١] أوجد قيمة كل من الزاويتين α ، β بالقياس الستينى فى كل من الأشكال التالية :-

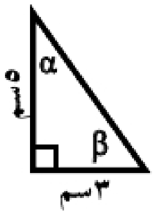
(أ)



(ب)



(جـ)



الحـــــل

شكل (أ)

∵ ظا α = ٥/٦

∴ ق∠α = ٢٠ً ٤٨َ ٣٩°

∴ ق∠β = ٩٠ − (٢٠ً ٤٨َ ٣٩°)

= ٤٠ً ١١َ ٥٠°

شكل (ب)

∵ جا α = ٥/١٣

∴ ق∠α = ١٣ً ٢٧َ ٢٢°

∴ ق∠β = ٩٠ − (١٣ً ٢٧َ ٢٢°)

= ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°

شكل (جـ)

∵ ظا α = ٣/٥

∴ ق∠α = ٥٠ً ٥٧َ ٣٠°

∴ ق∠β = ٩٠ − (٥٠ً ٥٧َ ٣٠°)

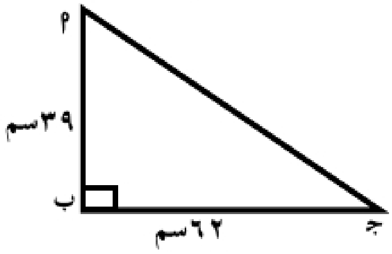
= ١٠ً ٢َ ٥٩°

[٢] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب و الذى فيه :

(أ) أ ب = ٣٩سم ، ب جـ = ٦٢سم (ب) أ ب = ١٢,٥سم ، ب جـ = ١٧,٦سم

(جـ) أ ب = ٥,٣سم ، أ جـ = ١٢,٢سم (د) ب جـ = ٣١سم ، أ جـ = ٤٢سم

الحـــــل



(أ) (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ = ١٥٢١ + ٣٨٤٤ = ٥٣٦٥

∴ أ جـ = √٥٣٦٥ = ٧٣,٢٥سم

∴ ظا جـ = ٣٩/٦٢ ⇐ ق∠جـ = ١٦ً ١٠َ ٣٢°

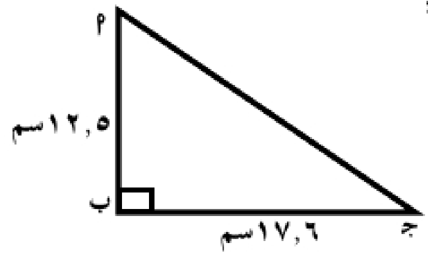
∴ ق∠أ = ٩٠ − (١٦ً ١٠َ ٣٢°) = ٤٤ً ٤٩َ ٥٨°

(ب) (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٣٠٩,٧٦ + ١٥٦,٢٥ = ٤٦٦,٠١

∴ أ جـ = √٤٦٦,٠١ = ٢١,٥٩ سم

∴ ظا جـ = ١٢,٥ / ١٧,٦ ⇐ ق∠جـ = ٢٧ً ٢٣َ ٣٥°

∴ ق∠أ = ٩٠ − (٢٧ً ٢٣َ ٣٥°) = ٣٣ً ٣٦َ ٥٤°

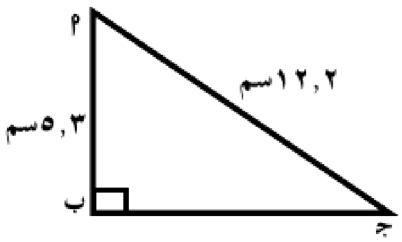


(ج) (ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ − (أ ب)^٢ = ١٤٨,٨٤ − ٢٨,٠٩ = ١٢٠.٧٥

∴ ب جـ = √١٢٠,٧٥ = ١٠,٩٩ = ١١سم

∴ جاجـ = ٥,٣ / ١٢,٢ ⇐ ق∠جـ = ٥٥ً ٤٤َ ٢٥°

∴ ق∠أ = ٩٠ − (٥٥ً ٤٤َ ٢٥°) = ٥ً ١٥َ ٥٤°

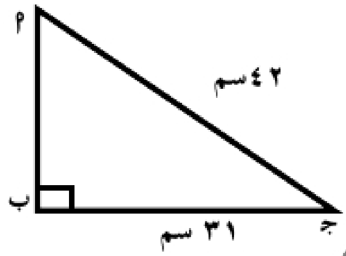


(د) (أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ − (ب جـ)^٢ = ١٧٦٤ − ٩٦١ = ٨٠٣

∴ أ ب = √٨٠٣ = ٢٨,٣٤سم

∴ جا أ = ٣١ / ٤٢ ⇐ ق∠أ = ٩ً ٣٤َ ٤٧°

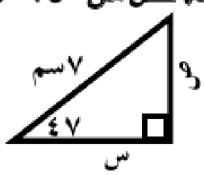
∴ ق∠جـ = ٩٠ − (٩ً ٣٤َ ٤٧°) = ٥١ً ١٥َ ١٢°



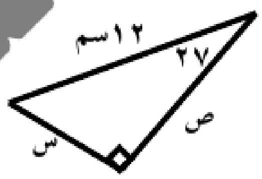
ثانياً : حل المثلث القائم إذا علم طول ضلع و قياس إحدى زاويتيه الحادتين

[٣] أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل من الأشكال التالية :-

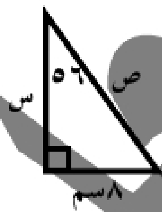
(أ)



(ب)



(ج)



الحـــــــــــــــل

(أ) جا ٤٧ = ص / ٧ ⇐ ص = ٧ جا ٤٧ = ٥,١٢سم

جتا ٤٧ = س / ٧ ⇐ س = ٧ جتا ٤٧ = ٤,٧٧سم

(ب) جا ٢٧ = س / ١٢ ⇐ س = ١٢ جا ٢٧ = ٥,٤٥سم

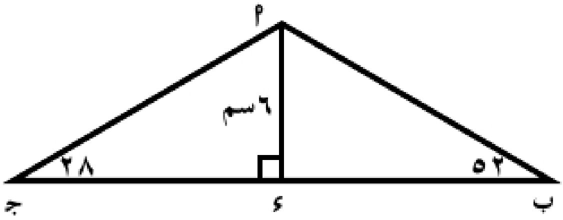
جتا ٢٧ = ص / ١٢ ⇐ ص = ١٢ جتا ٢٧ = ١٠,٦٩سم

(ج) ظا ٥٦ = ٨ / س ⇐ س = ٨ / ظا ٥٦ = ٥,٤سم

جا ٥٦ = ٨ / ص ⇐ س = ٨ / جا ٥٦ = ٩,٦٥سم

[٤] أ ب جـ مثلث رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان: أ ء = ٦ سم ، ق∠ب = ٥٢° ، ق∠جـ = ٢٨°

فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب سنتيميتر



الحــــــــل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ ظا ب = $\frac{٦}{\text{ب ء}}$ ⇐ ب ء = $\frac{٦}{\text{ظا } ٥٢}$ = ٤,٧ سم

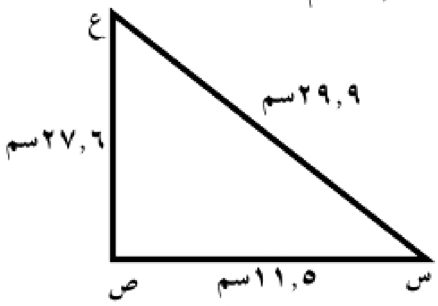
∴ ظا جـ = $\frac{٦}{\text{ء جـ}}$ ⇐ ء جـ = $\frac{٦}{\text{ظا } ٢٨}$ = ١١,٣ سم

∴ ب جـ = ٤,٧ + ١١,٣ = ١٦ سم

==

[٥] س ص ع مثلث فيه: س ص = ١١,٥ سم ، ص ع = ٢٧,٦ سم ، س ع = ٢٩,٩ سم

أثبت أن المثلث قائم الزاوية في ص ثم أوجد قياس زاوية س



الحــــــــل

∵ $(\text{س ع})^2$ = ٨٩٤,٠١

∵ $(\text{س ص})^2 + (\text{ص ع})^2$ = ١٣٢,٢٥ + ٧٦١,٧٦ = ٨٩٤,٠١

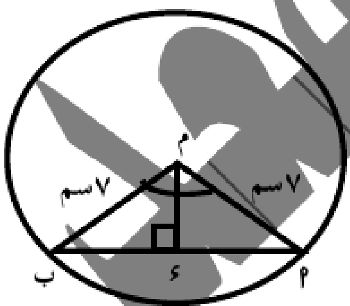
∵ $(\text{س ص})^2 + (\text{ص ع})^2 = (\text{س ع})^2$

∴ المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص

∵ جاس = $\frac{\text{ص ع}}{\text{س ع}} = \frac{٢٧,٦}{٢٩,٩}$ ⇐ ق∠س = ٦٧° ٣٣َ

==

[٦] دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر $\overline{\text{أ ب}}$ يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° ، احسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية



الحــــــــل

العمل: نرسم $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∵ م أ = م ب = ٧ سم ، ∵ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، م ء ينصف ∠ أ م ب

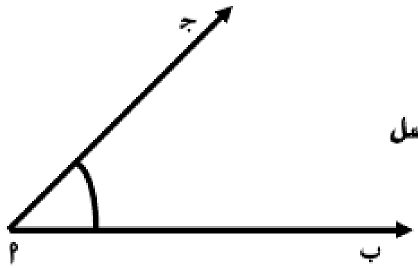
∴ ق∠أ م ء = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

∵ جا∠أ م ء = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ م}}$ ⇐ أ ء = جا∠أ م ء × أ م = ٧ × جا ٥٥ = ٥,٧٣٤ سم

∴ أ ب = ٢ × ٥,٧٣٤ = ١١,٤٦٨ سم

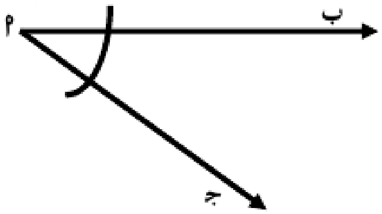
زوايا الإرتفاع و زوايا الإنخفاض

١ زاوية الإرتفاع



إذا فرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر الى جسم عند نقطة ج أعلى مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أب}}$ الأفقى ، $\overleftarrow{\text{أج}}$ الواصل بين الراصد و الجسم المرصود تسمى (زاوية الإرتفاع)

٢ زاوية الإنخفاض



إذا فرض أن هناك راصد عند نقطة أ ونظر الى جسم عند نقطة ج أسفل مستوى النظر فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أب}}$ الأفقى ، $\overleftarrow{\text{أج}}$ الواصل بين الراصد و الجسم المرصود تسمى (زاوية الإنخفاض)

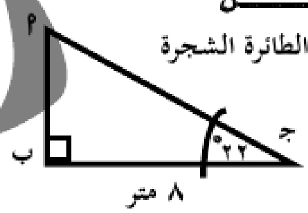
ملحوظة هامة

قياس زاوية الإنخفاض تساوى قياس زاوية الارتفاع

أمثـــــلة

① من نقطة على بعد ٨ أمتار من قاعدة شجرة وجد أن قياس ارتفاع قمة الشجرة ٢٢° أوجد ارتفاع الشجرة لأقرب رقمين عشريين

الحـــــــل



نفرض أب ارتفاع الطائرة الشجرة

ظا ٢٢ = $\frac{\text{أب}}{٨}$

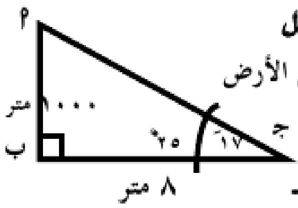
∴ أب = ٨ ظا ٢٢

= ٣,٢٣متر

ارتفاع الشجرة = ٣,٢٣متر

② رصد شخص طائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° أوجد بعد الراصد عن الطائرة

الحـــــــل



نفرض أب ارتفاع الطائرة عن الأرض

أج بعد الراصد عن الطائرة

جا ١٧َ ٢٥° = $\frac{١٠٠٠}{\text{أج}}$

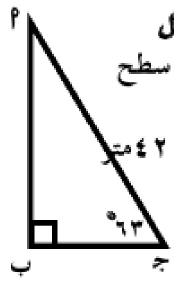
∴ أج = $\frac{١٠٠٠}{\text{جا } ١٧َ \ ٢٥°}$ = ٢٣٤١,٤ متر

بعد الراصد عن الطائرة = ٢٣٤١,٤ متر

==

③ طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ متر فإذا كان قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية يساوى ٦٣° أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض

الحـــــــل



نفرض أب يمثل ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض ، أج طول الخيط

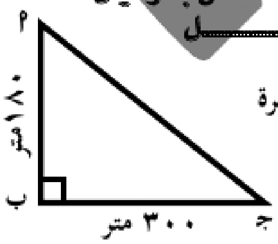
∵ جا ٦٣ = $\frac{\text{أب}}{٤٢}$

أب = ٤٢ × جا٦٣ = ٣٧متر

∴ ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض = ٣٧متراً

④ من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قابر يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان ؟

الحـــــــل



نفرض أب يمثل ارتفاع الصخرة

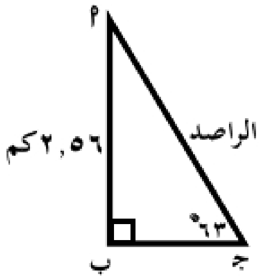
ظا ج = $\frac{١٨٠}{٣٠٠} = \frac{٣}{٥}$

ق ∠ ج = ٥٠ً ٥٧َ ٣٠°

قياس زاوية الإنخفاض بالراديان

= ٥٠ً ٥٧َ ٣٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٠,٥٤ ء

⑤ رصد شخص من قمة جبل ارتفاعه ٢,٥٦ كم نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضها هو ٦٣° أوجد المسافة لأقرب متر بين النقطة و الراصد



الحـــــل

نفرض أن أ ب يمثل إرتفاع الجبل

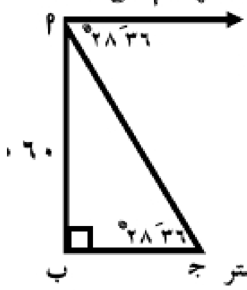
أ جـ يمثل البعد بين النقطة (جـ) و الراصد

جا ٦٣ = $\frac{\text{٢,٥٦}}{\text{أ جـ}}$

أ جـ = $\frac{\text{٢,٥٦}}{\text{جا ٦٣}}$ = ٢,٨٧٣ كم

البعد بين النقطة و الراصد = ٢٨٧٣ متر

⑥ من قمة برج ارتفاعه ٦٠ متر وجد ان قياس زاوية انخفاض جسم واقع في المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج يساوي ٣٦َ ٢٨° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر



الحـــــل

نفرض أن أ ب يمثل ارتفاع البرج

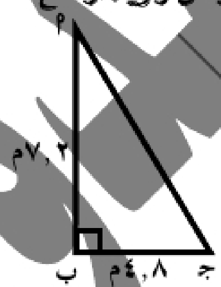
جـ يمثل الجسم

ظا ٣٦َ ٢٨° = $\frac{\text{٦٠}}{\text{ب جـ}}$

ب جـ = $\frac{\text{٦٠}}{\text{ظا ٣٦َ ٢٨°}}$ = ١١٠ متر

بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١١٠ متر

⑦ عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلا على الأرض طوله ٤,٨ متر أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ



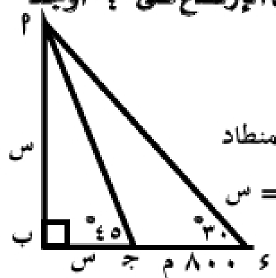
الحـــــل

نفرض أن أ ب يمثل عمود الإنارة

ظا جـ = $\frac{\text{٧,٢}}{\text{٤,٨}}$

∴ ق(∠ جـ) = ٠,٩٨٣ ^د

⑧ شاهد راصد أن زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى $\frac{\pi}{6}$ و لما سار الراصد فى مستوى افقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الإرتفاع هى $\frac{\pi}{4}$ أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر



الحـــــل

نفرض أن أ ب يمثل ارتفاع المنطاد

فى Δ أ ب جـ : أ ب = ب جـ = س

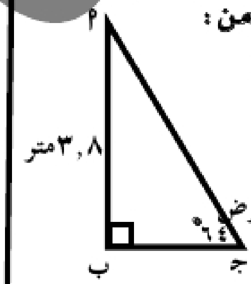
ظا ٣٠ = $\frac{\text{س}}{\text{٨٠٠ + س}}$

$\sqrt{3}$ س = ٨٠٠ + س ⟸ س = ١,٩٣ متر

⑨ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط راسى ، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر و الطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم عن الأرض ٦٤° أوجد لأقرب رقمين عشريين كلا من :

[١] بعد الطرف السفلى عن الأرض

[٢] طول السلم



الحـــــل

نفرض أن أ ب يمثل ارتفاع السلم عن الأرض

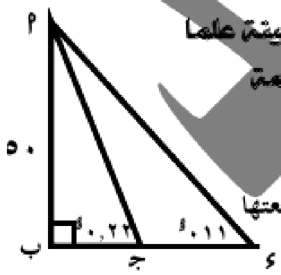
ظا ٦٤ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{ب جـ}}$

∴ ب جـ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{ظا ٦٤}}$ = ١,٨٥ متر

جا ٦٤ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{أ جـ}}$

أ جـ = $\frac{\text{٣,٨}}{\text{جا ٦٤}}$ = ٤,٢٣ متر

(١٠) تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ متر ، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,١١ ^د وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٠,٢٢ ^د احسب سرعة السفينة علما بأنها تسير بسرعة منتظمة



الحـــــل

نفرض أن جـ ء يمثل المسافة التي قطعتها السفينة خلال ١٥ دقيقة

ظا ٠,١١ ^د = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ب ء}}$

ب ء = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٠,١١ ^د}}$ = ٤٥٢,٧ متر

ظا ٠,٢٢ ^د = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ب جـ = $\frac{\text{٥٠}}{\text{ظا ٠,٢٢ ^د}}$ = ٢٢٣,٦ متر

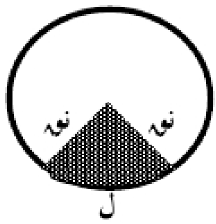
جـ ء = ب ء − ب جـ = ٤٥٢,٧ − ٢٢٣,٦ = ٢٢٩,١ متر تقريبا

∴ سرعة السفينة = $\frac{\text{٢٢٩,١}}{\text{١٥}}$ = ١٥,٣ متر / دقيقة

القطاع الدائرى

هو جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها و بنصفى القطرين المارين بطرفى هذا القوس

لاحظ التالى :-



(١) $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس الدائرة (٣٦٠)}}$

(٢) مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}\,\theta^{ء}$ نق²

(٣) مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{1}{2}$ ل نق

(٤) محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

حيث : ل طول القوس

أمثلـــة

[١] **أكمـــل العبارات التالية :-**

1. مساحة القطاع الدائرى الذى فيه : ل = ٦سم ، نق = ٤سم يساوى ....
2. مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤سم ، و محيطه ٢٠ سم تساوى .... سم
3. محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم² ، طول قوسه ٨سم يساوى ....
4. مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢ ^{ء} و طول نصف قطر دائرته ٤سم يساوى ....
5. محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤سم و طول قطر دائرته ١٠سم يساوى ....
6. مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° و طول نصف قطر دائرته ٣سم يساوى ....
7. إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠ سم² وقياس زاويته ٢,٢ ^{ء} فإن طول نصف قطره يساوى ....

الحـــل

1. مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ = ١٢سم²
2. محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل ∴ ٢٠ = ٢ × ٤ + ل ∴ ل = ١٢
   مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٤ = ٢٤سم²
3. مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق ∴ ٢٤ = $\frac{1}{2}$ × ٨ × نق ∴ نق = ٦سم
   محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠سم
4. مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}\,\theta^{ء}$ نق² = $\frac{1}{2}$ × ١,٢ ^{ء} × ٤ × ٤ = ٩,٦سم²
5. محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل = ٢ × ٥ + ٤ = ١٤سم
6. مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times \pi$ × ٣ × ٣ = ٣π سم²
7. مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}\,\theta^{ء}$ نق² ⇐ ١١٠ = $\frac{1}{2}$ × ٢,٢ ^{ء} × نق² ⇐ نق² = ١٠٠ ⇐ نق = ١٠سم

==

[٢] **قطاع دائرى طول قوسه ١٦سم و طول نصف قطر قاعدته ٩سم أوجد مساحته**

الحـــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ١٦ × ٩ = ٧٢سم²

==

[٣] **قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° و طول نصف قطر قاعدته ٣,٥سم أحسب لأقرب سم² مساحة القطاع**

الحـــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س^\circ}{٣٦٠} \times \pi$ نق² = $\frac{٣٠}{٣٦٠} \times \frac{٢٢}{٧}$ × ٣.٥ × ٣.٥ = ٣,٢ سم²

[٤] أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠°

الحــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × π نق² = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ × ١٠ = ١٠٤,٧ سم²

==

[٥] قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٤٨° و طول نصف قطر دائرته ٦ سم أوجد مساحة القطاع لأقرب سم²

الحــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × π نق² = $\frac{٤٨}{٣٦٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٦ × ٦ = ١٥ سم²

==

[٦] اوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ١,٢ ء

الحــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ θ ء نق² = $\frac{١}{٢}$ × ١,٢ ء × ١٠ × ١٠ = ٦٠ سم²

==

[٧] قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، و محيطه ٢٥ سم أوجد مساحته

الحــــــــل

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل ∴ ٢٥ = ٢ × نق + ٧ ∴ نق = $\frac{٢٥ - ٧}{٢}$ = $\frac{١٨}{٢}$ = ٩ سم

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ = ٣١,٥ سم²

==

[٨] قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم و طول قوسه ١٠ سم أوجد مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع

الحــــــــل

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل ∴ ٢٤ = ٢ × نق + ١٠ ∴ نق = $\frac{٢٤ - ١٠}{٢}$ = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم

مساحة الدائرة = π نق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ = ١٥٤ سم²

==

[٩] قطاع دائرى مساحته تساوى ٢٧٠ سم² و طول نصف قطر دائرته يساوى ١٥ سم أوجد طول قوس القطاع و قياس زاويته المركزية بالراديان

الحــــــــل

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق ∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$ ل × ١٥ ∴ ل = ٣٦ سم

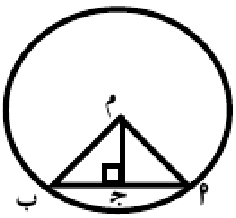
مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ θ ء نق² ∴ ٢٧٠ = $\frac{١}{٢}$ θ ء × ١٥ × ١٥

∴ θ ء = $\frac{٥٤٠}{٢٢٥}$ = ٢,٤ ء

==

(١٠) دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم ، رسم فيها نصفا القطرين م أ ، م ب بحيث : أ ب = ١٢ سم أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب سم²

الحــــــــل



∵ ظا أ م جـ = $\frac{٦}{٧,٥}$ = ٠,٨ ⇐ ق ∠ أ م جـ = ٥٣° ٨َ

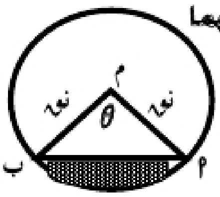
∴ ق ∠ أ م ب = ٢ ق ∠ أ م جـ = ١٠٦° ١٦َ

∵ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س°}{٣٦٠}$ × π نق² = $\frac{١٠٦° ١٦َ}{٣٦٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧,٥ × ٧,٥ = ٥٢ سم

القطعة الدائرية

هى جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتى ذلك القوس

لاحظ التالى :-



① مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

② مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ − جا θ)

③ مساحة القطعة الكبرى = مساحة القطاع م أ ء ب + مساحة المثلث م أ ب

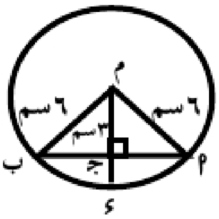
= $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ (المنعكسة) − جا θ (المنعكسة))

④ محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها

أمثـــــــــــلة

① فى الشكل المرسوم : م دائرة طول نصف قطرها ٦سم

$\overline{م ج} \perp \overline{أ ب}$ ، م ج = ٣سم　**أكمـــــل ما يأتى :**



[١] ارتفاع القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ... سم

[٢] ارتفاع القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... سم

[٣] قياس زاوية القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ...°

[٤] قياس زاوية القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ...°

[٥] مساحة المثلث م أ ب = ... سم^٢

[٦] مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب بدلالة π = ... سم^٢

[٧] مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = ... سم^٢

الحـــــــــــل

[١] ٣　[٢] ٩

[٣] جا ∠ أ م ء = $\frac{م ج}{م أ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ⇐ ق ∠ أ م ء = ٦٠° ⇐ ق ∠ أ م ب = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

[٤] ق ∠ أ م ب (المنعكسة) = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠°

[٥] مساحة المثلث م أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × جا ١٢٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩$\sqrt{٣}$ سم^٢

[٦] مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب بدلالة π = $\frac{\theta°}{٣٦٠}$ × π نق^٢ = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × π × ٦ × ٦ = ١٢π سم^٢

[٧] مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب − مساحة المثلث م أ ب

= (١٢π − ٩$\sqrt{٣}$) سم^٢

==

② أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :-

[١] طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها يساوى ١,٤^{ء}

[٢] طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها يساوى ١٣٥°

الحـــــــــــل

[١] مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤ [١,٤^{ء} − جا (١,٤^{ء} × ١٨٠ × $\frac{٧}{٢٢}$)]

= ٣٠سم^٢

[٢] مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ ($\theta^{ء}$ − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ [(١٣٥ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$) − جا ١٣٥]

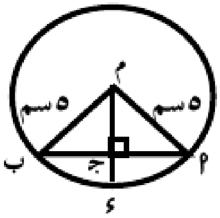
= ٥٢,٨سم^٢

③ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى :-

١ طول وترها ٦سم ، و طول نصف قطر دائرتها ٥سم

٢ ارتفاعها ٥ سم ، و طول نصف قطر دائرتها ١٠سم

الحـــــــــــل



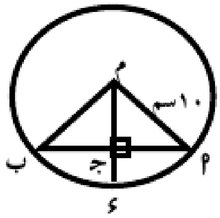
١ م جـ = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = ٤سم

∵ جا أ م جـ = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦ ⇐ ق ∠ أ م جـ = ٣٦,٨٧°

∴ ق ∠ أ م ب = ٢ × ٣٦,٨٧ = ٧٣,٧٤°

∴ θ ء = ٧٣,٧٤° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٢٩ ء

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق٢ (θ ء − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ [١,٢٩ ء − جا ٧٣,٧٤°] = ٤,١٢٤سم٢



٢ م جـ = ١٠ − ٥ = ٥سم

∵ جتا أ م جـ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ق ∠ أ م جـ = ٦٠°

∴ ق ∠ أ م ب = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

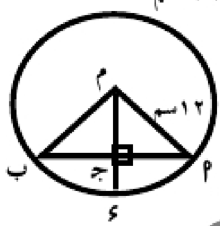
∴ θ ء = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,٠٩٥ ء

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق٢ (θ ء − جا θ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [٢,٠٩٥ ء − جا ١٢٠°] = ٦١,٤٥سم٢

==

④ أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى نصف قطر دائرتها يساوى ١٢سم

الحـــــــــــل



∵ م أ = م ب = أ ب = ١٢سم ⇐ ق ∠ أ م ب = ٦٠°

∴ ق ∠ أ م ب (المنعكسة) = ٣٦٠ − ٦٠ = ٣٠٠°

∴ θ ء = ٣٠٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٥,٢٣٨ ء

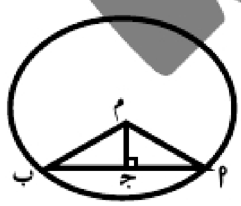
مساحة القطعة الدائرية الكبرى = $\frac{١}{٢}$ نق٢ (θ ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٤٤ [٥,٢٣٨ ء − جا ٣٠٠°] = ٤٣٩,٤٩سم٢

==

⑤ وتر فى دائرة طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة

الحـــــــــــل



م أ = نق = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم

ظا أ م ء = $\frac{٤}{٣}$ ⇐ ق ∠ أ م ء = ٨َ ٥٣°

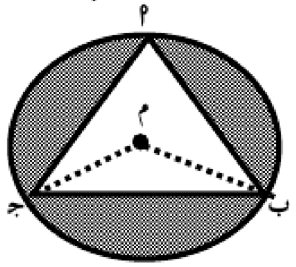
∴ ق ∠ أ م ب = ٢ × (٨َ ٥٣°) = ١٦َ ١٠٦°

∴ θ ء = ١٦َ ١٠٦° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٨٦ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق٢ (θ ء − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ [١,٨٦ ء − جا ١٦َ ١٠٦°] = ١١سم٢

⑥ فى الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨سم ، أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظلله



الحـــــــــــــــــل

∵ Δ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ⇐ ق∠أ = ٦٠°

∴ ق∠ب م جـ = ٢ ق∠أ = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

∴ $\theta^{د}$ = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,١^{د}

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جا θ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦٤ [٢,١^{د} − جا ١٢٠°] = ٣٩سم^{٢}

∴ مساحة المنطقة المظللة = ٣ × ٣٩ = ١١٧سم^{٢} تقريبا

---

⑦ قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠° ، ومساحة سطحها ٥٦سم^{٢} أوجد طول نصف قطرها

الحـــــــــــــــــل

$\theta^{د}$ = ٩٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ١,٥٧^{د}

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جا θ)

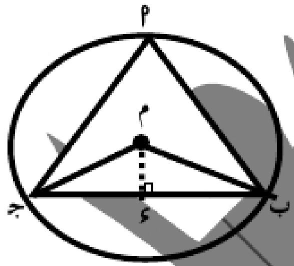
٥٦ = $\frac{١}{٢}$ × نق^{٢} × [١,٥٧^{د} − جا ٩٠°]

∴ نق^{٢} = (٥٦ × ٢) ÷ (١,٥٧^{د} − ١) = ١٩٦

∴ نق = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

---

⑧ أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤سم ، رسمت دائرة برؤوسه ، أوجد طول نصف قطر الدائرة ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{ب جـ}$



الحـــــــــــــــــل

∵ جا (∠ب م ء) = $\frac{١٢}{نق}$

∴ نق = $\frac{١٢}{جا ٦٠}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

∴ $\theta^{د}$ = ١٢٠° × $\frac{٢٢}{٧}$ × $\frac{١}{١٨٠}$ = ٢,١^{د}

∴ مساحة القطعة الدائرية التى وترها $\overline{ب جـ}$ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جا θ)

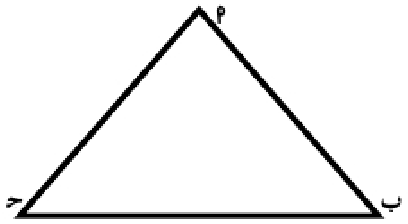
= $\frac{١}{٢}$ × ١٩٢ [٢,١^{د} − جا ١٢٠°] = ٣٥سم^{٢}

المساحـــــــات

لاحظ التالى :-

١ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

أى أن :-



م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ أ جـ × جـ ب × جا جـ

٢ مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

و من ذلك نستنتج أن :-

(١) مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

(٢) مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

٣ مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن و طول ضلعه س = $\frac{١}{٤}$ ن س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

٤ مساحة المثلث أ ب جـ = $\sqrt{ح\ (ح - أ ب)\ (ح - ب جـ)\ (ح - أ جـ)}$

حيث : ح = $\frac{١}{٢}$ محيط المثلث أ ب جـ

أمثـــــــــلة

١ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فى كل من الحالات التالية :

(١) أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، ق ($\angle$ ب) = ٩٠°

(٢) أ جـ = ١٢ سم ، طول العمود المرسوم من ب على $\overline{أ جـ}$ يساوى ٧سم

(٣) أ ب = ١٦سم ، ب جـ = ٢٠سم ، ق ($\angle$ ب) = ٤٦°

الحـــــــــــــل

(١) م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ × جا ٩٠° = ٢٤ سم^{٢}

(٢) م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٧ = ٤٢ سم^{٢}

(٣) م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب جـ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٠ × جا ٤٦° = ١١٥سم^{٢}

===

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : ب جـ = ١٦سم ، ب أ = ٢٢سم ، ق ($\angle$ ب) = ٦٣° مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحـــــــــــــل

م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٢ × جا ٦٣° = ١٥٦,٨١٧سم^{٢}

===

٣ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ١٢سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤°

الحـــــــــــــل

م $\triangle$ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ × جا ٦٤° = ٦٤,٧سم^{٢}

[٤] أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢سم ، ١٦سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨° مقربا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع

الحـــــــــــــــل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١٦ × جا ٦٨° = ٨٩سم^2

==

[٥] أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٢٢سم ، ٤٦سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٢° مقربا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد

الحـــــــــــــــل

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ٢٢ × ٤٦ × جا ١٢٢° = ٦٢٤,٢سم^2

==

[٦] أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية : (مقربا الناتج لأقرب جزء من عشرة)

(١) خماسى منتظم طول ضلعه = ١٦سم

(٢) سداسى منتظم طول ضلعه = ١٢سم

الحـــــــــــــــل

(١) مساحة المضلع الخماسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٥ × (١٦)^2 × ظتا ٣٦° = ٤٤٠,٤سم^2

(٢) مساحة المضلع السداسى المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ٦ × (١٢)^2 × ظتا ٣٠° = ٣٧٤,١سم^2

==

[٧] أوجد لأقرب رقم عشرى واحد مساحة شكل منتظم ذو ١٢ضلعا و و طول ضلعه ١٠سم

الحـــــــــــــــل

مساحة المضلع = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{1}{4}$ × ١٢ × (١٠)^2 × ظتا ١٥° = ١١١٩,٦سم^2

==

[٨] احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٧سم ، أ جـ = ١١سم

الحـــــــــــــــل

محيط المثلث = ٢ح = ٨ + ٧ + ١١ = ٢٦سم ⇐ ح = ١٣سم

مساحة المثلث أ ب جـ = $\sqrt{ح (ح - أب) (ح - ب جـ) (ح - أ جـ)}$

= $\sqrt{١٣ × ٥ × ٦ × ٢}$ = ٢٨سم^2 تقريبا

تدريب :-

إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩ $\sqrt{٣}$ سم^2

فإن : س = ...

إعداد الأستاذ / ممدوح سعد
ت / ٠١٢٨٦٧١٥٥١٦
مديرية التربية و التعليم بأسيوط
إدارة القوصية التعليمية

مدرسة المنشأة الكبرى الثانوية بنات

المادة : الهندسة التحليلية
الزمن : ساعتان

إمتحان الصف الأول الثانوى (الفصل الدراسى الثانى ٢٠١٤/٢٠١٥م)

أجيبى عن الأسئلة الآتية : **يسمح بأستخدام الآلة الحاسبة**

السؤال الأول :- أكملى مايلى :

(أ) فى △ ءهـو يكون : $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ + $\overrightarrow{\text{هـو}}$ + $\overrightarrow{\text{وء}}$ = ...

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (ك ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ // $\overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ...

(جـ) المعادلة العامة للمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٥) هى ....

(د) قياس الزاوية بين المستقيمين : س − ٢ص = ٥ ، ٢س + ص = ٧ تساوى .... درجة

السؤال الثانى : تخيرى الإجابة الصحيحة ممابين القوسين

(أ) اذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ٤) فإن : ٢$\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

{ (١١ ، ١١) ، (١١ ، ٨) ، (١ ، ٦) ، (٦ ، ٨) }

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أ}}$ = ١٠٠ $\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{ب}}$ = ٥٠ $\overrightarrow{\text{ى}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{ع}}_{\text{أب}}$ = ... $\overrightarrow{\text{ى}}$ { ٥٠ ، ١٥٠ ، −٥٠ ، −١٥٠ }

(جـ) إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٥ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، −١) فإن محور السينات يقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ....

{ ٢ : ١ ، ١ : ٢ ، ٢ : ٣ ، ٣ : ٢ }

(د) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) إلى المستقيم : س + ص = ٠ هو .... وحدة طول

{ ١ ، ٢ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٢}$ }

السؤال الثالث : -

(أ) إذا كان : $\overrightarrow{\text{وأ}}$ = (٦$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل فأوجدى إحداثى النقطة أ و إذا كان $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٢) فاثبتي ان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ⊥ $\overrightarrow{\text{ب}}$

(ب) أوجدى معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ ، ٣س − ص = ٦ وموازيا المستقيم ص= س

السؤال الرابع :-

(أ) فى △ أب جـ : ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب ء : ء جـ = ٣ : ٢ فاثبتي ان : ٢$\overrightarrow{\text{أب}}$ + ٣$\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = ٥$\overrightarrow{\text{أء}}$

(ب) أوجدى الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة ٧ = (٤ ، ٣) و المتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٢ ، ١) متجه إتجاه له

السؤال الخامس :-

(أ) اذا كان : أ = (٦ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٥) فأوجدى إحداثى النقطة جـ التى تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١

(ب) أثبتى أن △ س ص ع : س = (٣ ، ٥) ، ص = (٤ ، ٢) ، ع = (−٥ ، −١٠) قائم الزاوية فى ص ثم أوجدى طول قطر الدائرة المارة برؤوسه و إحداثى مركز الدائرة

إنتهت الأسئلة ، و الله الموفق