ادارة الخليفة والمقطم التعليمية

منتدى توجيه الرياضيات

# الرياضيات

# الجبر

## الصف الأول الثانوى

## الفصل الدراسى الثانى

تقديم

م/عادل إدوار

# المصفوفات

**تعريف المصفوفة :**

هي طريقة تنظيم للبيانات أو المعلومات في شكل صفوف ( أفقية ) وأعمدة (رأسية) توضع بين قوسين من النوع [ ]

**نظم المصفوفة :**

إذا كان عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد الأعمدة = ن

تكون المصفوفة علي النظم م × ن

**فمثلاً :**

$$ﺃ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} ، \quad س = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix} ، \quad ص = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

المصفوفة ﺃ علي النظم ٢ × ٣ ، المصفوفة س علي النظم ٢ × ٢ ، ص علي النظم ١ × ٣

**تسمية المصفوفة :** نرمز للمصفوفة بأي حرف كبير ( ﺃ ، س ، ص ، ٠٠٠٠ )

**مثــ١ـــال** محلان لبيع الأدوات الكهربية في أحد الأيام باع المحل الأول ٥ خلاطات ، ٦ مراوح ، ٣ ثلاجات و باع المحل الثاني ٤ خلاطات ، ٩ مراوح ، ٣ ثلاجات أكتب مصفوفة المبيعات س علي النظم ٢×٣

**الحــــــل**

| | خلاطات | مراوح | ثلاجات |
|---|---|---|---|
| المحل الأول | ٥ | ٦ | ٣ |
| المحل الثانى | ٤ | ٩ | ٣ |

وتكون المصفوفة كالآتى :

$$س = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$$

*******************************************************************************

منتدى توجيه الرياضيات ا/ عادل إدوار

**مثـــ٢ـــال : إذا كان أحد المصانع له فرعان وينتج ثلاث أنواع من السلع ( تليفزيون – غسالة – ثلاجة) وكان الفرع س ينتج ٥٠ تليفزيون ، ٤٠ غسالة ، ٣٥ ثلاجة والفرع ص ينتج ٧٠ تليفزيون٣٠ غسالة ، ٢٥ ثلاجة أكتب أنتاج هذا المصنع على شكل مصفوفة بطريقتين**

## الحـــــــــل

**أولا نكون جدول لبيانات هذا المصنع ويمكن ذلك بطريقتين**

**الطريقة الاولى :-**

| | تليفزيون | غسالة | ثلاجة |
|---|---|---|---|
| الفرع س | ٥٠ | ٤٠ | ٣٥ |
| الفرع ص | ٧٠ | ٣٠ | ٢٥ |

$$\text{ا} = \begin{pmatrix} ٣٥ & ٤٠ & ٥٠ \\ ٢٥ & ٣٠ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

**الطريقة الثانية :-**

| | الفرع س | الفرع ص |
|---|---|---|
| تليفزيون | ٥٠ | ٧٠ |
| غسالة | ٤٠ | ٣٠ |
| ثلاجة | ٣٥ | ٢٥ |

$$\text{ا} = \begin{pmatrix} ٤٠ & ٣٠ \\ ٦٠ & ٥٠ \\ ٨٠ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

*************************************************************************

**موقع العناصر في المصفوفة :**

**. في المصفوفة ا يكون العنصر ( $\text{ا}_{\text{ص ع}}$ ) هو العنصر الذي يقع في الصف ص ، العمود ع**

**مثـــ٣ـــال : إذا كانت : ا =** $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٢- \end{pmatrix}$ **أكتب نظم ا ثم أوجد ا $_{٢١}$ ، ا $_{٢٣}$ ، ا $_{٢٢}$ ، ا $_{١٣}$ ..**

## الحـــــــــل

**نظم ا هو ٣ × ٣ ، ا $_{٢١}$ = ٣ ، ا $_{٢٣}$ = ٥ ، ا $_{٢٢}$ = ٩ ، ا $_{١٣}$ = – ٢**

*************************************************************************

**مثـــ٤ـــال : فى المصفوفة ا =** $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ١- \\ ١٠ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ٢- & ٣- \end{pmatrix}$ **أكمل كلا مما يأتى**

(١) أ $_{١١}$ = ................ (٢) أ $_{٢٣}$ = ............. (٣) أ $_{٣٢}$ = ............

(٤) أ $_{١٢}$ = ................ (٥) أ $_{١٣}$ = ............. (٦) أ $_{٣٣}$ = ............

**مثـ٥ـال : أكتب بطريقة السرد المصفوفة ( $أ_{ص ع}$ ) حيث $أ_{ص ع}$ = ع − ص ، أ على النظم ٢ × ٣**

**الحــــــــــــل**

$أ_{١١}$ = ١ − ١ = ٠ ،،،،، $أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١ ،،،،، $أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ١ − ٢ = −١ ،،،،، $أ_{٢٢}$ = ٢ − ٢ = ٠ ،،،،، $أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١- \end{pmatrix} = أ$$

************************************************************************************

**مثـ٧ـال : أكتب المصفوفة ( $أ_{ص ع}$ ) على النظم ٣ × ٣ حيث**

$أ_{ص ع}$ = { ص + ع عندما ص < ع ، ٢ عندما ص = ع ، ع − ص عندما ص > ع

**الحــــل**

$أ_{١١}$ = ٢　　$أ_{٢١}$ = ٢ − ١ = ١　　$أ_{٣١}$ = ٣ − ١ = ٢

$أ_{١٢}$ = ٢ + ١ = ٣　　$أ_{٢٢}$ = ٢　　$أ_{٣٢}$ = ٣ − ٢ = ١

$أ_{١٣}$ = ٣ + ١ = ٤　　$أ_{٢٣}$ = ٣ + ٢ = ٥　　$أ_{٣٣}$ = ٢

$$\therefore \; أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$$

************************************************************************************

*** بعض المصفوفات الخاصة :**

**١− مصفوفة الصف :**

هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد و أي عدد من الأعمدة : م = ١

**مثل** س = ( ١ ٧ ٥ ) على النظم ١ × ٣

**٢− مصفوفة العمود :**

هي المصفوفة التي تتكون من أي عدد من الصفوف و عمود واحد فقط : ن = ١

منتدى توجيه الرياضيات عادل إدوار

**مثل** س = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

**٣- المصفوفة المربعة :**

هى المصفوفة التي فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة : م = ن

**مثل** س = $\begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

، س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

**٤- المصفوفة الصفرية :** المصفوفة التي كل عناصرها أصفار : رمزها □ " مستطيل صغير "

**مثل** $□_{٢ \times ٣}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٣

**٥- مدوّر المصفوفة :**

لأي مصفوفة أ علي النظم م × ن إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل علي مدور المصفوفة [ أ ] و رمزها (أ$^{\text{مد}}$) و تكون علي النظم ن × م

**ملاحظة :** (أ$^{\text{مد}}$)$^{\text{مد}}$ = أ

**(٦) مصفوفة الوحدة:-** هى مصفوفة مربعة جميع عناصر أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى فهى تساوى واحد ويرمز لها بالرمز I

$I_{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$        $I_{٣ \times ٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

******************************************************************************************

**مثـــال ١ :** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \\ -١ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \end{pmatrix}$

أوجد : أ$^{\text{مد}}$ ، ب$^{\text{مد}}$ ، ج$^{\text{مد}}$

## الحـــــــــل

أ$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٠ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$ ، ج$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$

**تساوي مصفوفتين :** تتساوي المصفوفتان ﺃ، ب إذا كان :

[١] لهما نفس النظم

[٢] كل عنصر في ﺃﺃ يساوي نظيره في ب　أي أن : $\text{ﺃ}_{\text{ص ع}} = \text{ب}_{\text{ص ع}}$

**مثـــ ٢ ـــال:إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} \text{٠} & \text{٢} & \text{٧} \\ \text{ع} & \text{٣} & \text{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٠} & \text{س} & \text{٧} \\ \text{٤} & \text{٣} & \text{ص} \end{pmatrix}$$

**أوجد س ، ص ، ع**

**الحـــــــل**

من التساوي ∴ س = ٢　　، ص = ٥　　، ع = ٤

*****************************************************************************

**مثـــ٣ـــال إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} \text{جـ} - \text{ء} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{هـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{جـ} + \text{ء} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{٧} \end{pmatrix}$$

**أوجد جـ ، ء، هـ**

**الحـــــــل**

من التساوي : جـ − ء = ٥　　[١]

، جـ + ء = ١　　[٢]

بجمع ١ ، ٢ ينتج : ٢ جـ = ٦　　جـ = ٣

، بالتعويض فى [٢] ينتج : ٣ + ء = ١　　ء = − ٢

، من التساوي هـ = ٧

*****************************************************************************

**مثـــ٤ـــال : أوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{١٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ع} & \text{س} - \text{١} \\ \text{٠} & \text{٣ ص} \end{pmatrix}$$

**الحـــــــل**

المصفوفتان متساويتان

∴ س − ١ = ٣　　، ع = ٢　　، ٣ ص = ١٥

س = ٣ + ١ = ٤　　ص = $\frac{\text{١٥}}{\text{٣}}$ = ٥

*****************************************************************************



منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

**مثـ٥ـال : إوجد قيمة س ، ص ، ع إذا كانت**

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٠ & ١- \\ ٥ & ٦ & ٨ \\ ٩ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & س & ١- \\ ع & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ص \end{pmatrix}$$

## الحـــــل

$$\begin{pmatrix} ٦ & ٨ & ١- \\ ٢ & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & س & ١- \\ ع & ٦ & ٠ \\ ٩ & ٥ & ص \end{pmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة س = ٨ ،،،،،، ص = ٤ ،،،،،، ع = ٢

*******************************************************************************

**مثـ٦ـال : إذا كانت** س = $\begin{pmatrix} هـ^{٣} & ٣ - ب & ٢أ+١ \\ ٥ & -ء & \sqrt{جـ} \end{pmatrix}$ ،،، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ٢ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$

**أوجد أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ إذا علم أن س = ص$^{مد}$**

## الحـــــل

∵ س = ص$^{مد}$ ∴ $\begin{pmatrix} هـ^{٣} & ٣ - ب & ٢أ+١ \\ ٥ & -ء & \sqrt{جـ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ & ٧ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

٢أ + ١ = ٧ ، ٣ − ب = ٢ ، هـ$^{٣}$ = ٨ ، $\sqrt{جـ}$ = ٣ ، − ء = ٤

∴ أ = ٣ ب = ١ هـ = ٢ جـ = ٩ ء = − ٤

*******************************************************************************

**مثـ٧ـال أوجد قيمتى س ، ص ، ع حتى يتحقق أن أ = ب$^{مد}$**

حيث أ = ( ٥ ٤− ٢ ) ، ب = $\begin{pmatrix} س \\ -ص \\ ٥ع \end{pmatrix}$

## الحـــــل

∵ أ = ب$^{مد}$ ∴ ( ٥ ٤− ٢ ) = ( ٥ع − ص س )

س = ٢ ، − ص = − ٤ ⟸ ص = ٤ ، ٥ ع = ٥ ⟸ ع = ١

*******************************************************************************

# تمـــــــارين

١ – أكتب المصفوفات الآتية :

(١) المصفوفة ا = ( $ا_{ص ع}$ ) حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١ ، ٢

(٢) المصفوفة ب = ( $ب_{ص ع}$ ) حيث ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣

(٣) المصفوفة جـ = ( $جـ_{ص ع}$ ) حيث ص = ١ ، ٢ ، ٣ ، ع = ١

٢ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -٢ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٥ \\ ٩ & ٠ & ٢ \\ ٧ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ أكمل ما يأتى :

(١) نظم المصفوفة ا هو ٠٠٠٠٠ (٢) نظم المصفوفة ب هو ٠٠٠٠٠

(٣) العنصر $ا_{٢١}$ = ٠٠٠٠٠ (٤) العنصر $ب_{٢٣}$ = ٠٠٠٠٠

(٥) العنصر $ا_{٢٢}$ = ٠٠٠٠٠ (٦) العنصر $ب_{١١}$ = ٠٠٠٠٠

٣ – أنتجت ثلاث شركات س ، ص ، ع نوعين من الأقمشة فكان ما أنتجته الشركة س عبارة عن ١٠٠٠ متر من النوع الأول ، ١٢٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ص عبارة عن ٥٠٠ متر من النوع الأول ، ٩٠٠ متر من النوع الثاني ، و ما أنتجته الشركة ع عبارة عن ٧٠٠ متر من النوع الأول ، ٤٠٠ متر من النوع الثاني ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة ( ا ) علي النظم ٣×٢ ، و أكتب أيضاً هذه البيانات في صورة مصفوفة ( ب ) علي النظم ٢×٣

٤ – محلان لبيع الملابس في أحد الأيام باع المحل الأول ٢٠ قميص ، ٥ بدل ، ١٢ حذاء ، و باع المحل الثاني ١٣ قميص ، ٣ بدل ، ١٤ حذاء ، أكتب هذه البيانات في صورة مصفوفة س علي النظم ٢×٣

٥ – أوجد مدور المصفوفات الآتية :

س = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٢ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ع = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٤ \\ ٢ \end{pmatrix}$

٦ – إذا كانت $\begin{pmatrix} -٣ & س^{٢} \\ ص + ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمتي س ، ص

٧ – إذا كانت $\begin{pmatrix} ٥ & س & ٦ \\ ٧ & ٤ & س + ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٦ \\ ع & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد س ، ص ، ع

٨ – إثبت أنه لجميع قيم س ، ص لا يمكن أن تتحقق المساواة الأتية

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٣س - ص \\ ١ & ٢ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ص - س & -٤ \end{pmatrix}$$

٩ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & -٣ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٠ \end{pmatrix}$

أذكر نظم ا ، ب ثم أوجد ا$^{مد}$ ، ب$^{مد}$

١٠ – إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ص & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان ب$^{مد}$ = ا فأوجد س ، ص

١١ – أوجد قيم : س ، ص ، ع التى تجعل المصفوفتان متساويتان

$$\begin{pmatrix} ع & ٣ & ٢ \\ ٥ & ع - ١ & -١ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} ٤ & ٢ & س \\ ٥ & ص & -١ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

**********************************************************************************

# العمليات علي المصفوفات

## أولاً الجمع :

**إذا كانت س ، ص مصفوفتين لهما نفس النظم فإن : عملية الجمع تكون ممكنة ويكون ناتج الجمع عبارة عن مصفوفة لها نفس النظم وكل عنصر فيها يســـــاوى ناتج جمع العنصرين المتناظرين**

**مثـــال١:** إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧ & -١ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد س + ص

**الحـــــل**

س + ص = $\begin{pmatrix} ٣+٢ & ٥+٠ \\ ٢+٧ & ٠-١ \\ ١+١ & ٤+٦ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ ٩ & -١ \\ ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

**************************************************************************

**مثـــال٢:** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب$^{\text{مد}}$

**الحـــــل**

أ + ب$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ١٢ \\ -١ & ١٠ \end{pmatrix}$

**ملاحظة :** عملية جمع مصفوفتين ليس لهما نفس النظم غير ممكنة

**************************************************************************

**مثـــال٣ :** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد كلا مما يأتى (١) أ + ب    (٢) ٣أ + ٢ب    (٣) ٢ أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$

**الحـــــل**

(١) أ + ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٧ & ٦ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ١٢ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢) ٣ أ + ب = ٣ $\begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٩ \\ -٩ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & -٥ \\ -٣ & ٢٢ \end{pmatrix}$

(٣) ٢أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$ = ٢ $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٦ & ١٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & -٢ \\ ٠ & ١٣ \end{pmatrix}$

*******************************************************************************

## ضرب عدد حقيقى فى مصفوفة :

إذا كانت : سـ مصفوفة على النظم م × ن

فإن : ضرب أى عدد حقيقى ك حيث ك ≠ صفر فى المصفوفة سـ هو : المصفوفة

ع = ك سـ من النظم م × ن ونحصل على المصفوفة ع بضرب العدد الحقيقى ك فى كل عنصر من عناصر المصفوفة سـ

**مثـــ٣ـــال : : إذا كانت : سـ** = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، **ك = ٣**

### الحـــــل

∴ ك سـ = ٣ × $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣ \\ ١٢ & ٦ \end{pmatrix}$

## خواص عملية جمع المصفوفات :

بفرض أن : سـ ، صـ ، ع ثلاث مصفوفات من النظم م × ن فإن :

[١] **خاصية الإنغلاق :** سـ + صـ تكون مصفوفة من نفس النظم م × ن

[٢] **خاصية الإبدال :** سـ + صـ = صـ + سـ

[٣] **خاصية الدمج :** ( سـ + صـ ) + ع = سـ + ( صـ + ع ) = سـ + صـ + ع

[٤] **خاصية المحايد الجمعى :** سـ + $\square$ = $\square$ + سـ = سـ

حيث : $\square$ مصفوفة صفرية من نفس نظم سـ

[٥] **خاصية المعكوس " النظير " الجمعى :**

لأى مصفوفة سـ يوجد مصفوفة ( − سـ ) من نفس النظم بحيث :

س + ( − س ) = $\square$ حيث : $\square$ مصفوفة صفرية من نفس نظم س

و تسمى المصفوفة ( − س ) المعكوس الجمعى للمصفوفة س

## ثانياً الطرح :

إذا كانت : المصفوفتين س ، ص مصفوفتين على نفس النظم م × ن

فإن : س − ص = س + ( − ص ) على نفس النظم م × ن

****************************************************************************

**مثـــ٤ــال : : إذا كانت : س =** $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ **، ص =** $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ **أوجد س − ص**

س − ص = $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

****************************************************************************

**مثـــ٥ــال: إذا كانت س =** $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ **، ص =** $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ **أوجد ٣س − ٢ ص**

### الحـــــل

٣س − ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ − ٢ $\begin{pmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ ٧ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٠ \\ ٦ & ٠ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٨ & ٢ & -٤ \\ -١٤ & -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٥ & ٨ & -٤ \\ -٨ & -٢ & ١١ \end{pmatrix}$

****************************************************************************

**مثـــ٦ــال : إذا كانت أ =** $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ **، ب =** $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

**أوجد المصفوفة س بحيث : ٢ ب + س$^{مد}$ = ٣ أ**

### الحـــــل

٢ب + س$^{مد}$ = ٣ أ    س$^{مد}$ = ٣أ − ٢ ب = ٣× $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ − ٢× $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

$$س^{مد} = \begin{pmatrix} ١٥ & ٣ & ٦ \\ ١٢ & ٦ & -٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦ & ٠ & -٢ \\ -٨ & ٢ & -١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٨ & -١٦ \end{pmatrix}$$

، $(س^{مد})^{مد} = س$　　　　$س = ٠٠٠٠$

************************************************************

**مثـ٧ـال : إذا كانت** $٢\,أ^{مد} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٦ \\ ٤ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix} = \square$ **فأوجد أ**

## الحـــــــل

$$٢\,أ^{مد} = \square - \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٦ \\ ٤ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & -٢ & -٦ \\ -٤ & ١٠ & -٨ \end{pmatrix}$$

$$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & -٣ \\ -٢ & ٥ & -٤ \end{pmatrix} \quad \therefore أ = \begin{pmatrix} -٤ & -٣ \\ ٥ & -١ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$$

************************************************************

**مثـ٨ـال : إذا كانت** $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix}$

**أوجد**　(١) $أ + ب$　　(٢) $ب + ج^{مد}$　　(٣) $ج + ٢\,أ^{مد}$　　(٤) $أ + ج$

## الحـــــــل

(١) $$أ + ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٤ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$$

(٢) $$ب + ج^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & -٣ \\ ٧ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٦ \\ ٦ & ٩ \end{pmatrix}$$

(٣) $$ج + ٢\,أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٧ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -٨ & ٤ \\ -٤ & ١٠ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ١ \\ -٥ & ١٧ & ٠ \end{pmatrix}$$

منتدى توجيه الرياضيات ا/ عادل إدوار

(٤) أ + جـ [ لا يمكن جمع المصفوفتان أ ، جـ لاختلافهما فى النظم ]

**************************************************************************************

مثـــال ٩ : إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٨ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -١ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

إثبت أن (أ + ب)$^{\text{مد}}$ = أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$

## الحـــــــل

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٥ \\ -٤ & -٣ \\ ٩ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٣ \\ -١ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٨ \\ -٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

(أ + ب)$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٨ & -٣ & ٥ \\ ٩ & -٤ & ٨ \end{pmatrix}$ (١)

أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٨ & -٣ & ٥ \\ ٩ & -٤ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -٥ & -٣ \\ ٢ & -١ & ٧ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٢ & ٨ \\ ٧ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن : (أ + ب)$^{\text{مد}}$ = أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$

**************************************************************************************

مثـــال ١٠: أوجد س ، ص ، ع إذا كان $\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل}+١ & ٢\text{ع} \end{pmatrix}$

## الحـــــــل

$\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ ٢ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ص} - ٤ & \text{س} + ٣ \\ \text{ل} + ٤ & ٢\text{ع} + ١ \end{pmatrix}$

س+٣=٧ ، ص − ٤ = ١ ، ٢ع +١ = ١٥ ، ل + ٤ = ٢

∴ س = ٤ ، ص = ٥ ، ع = ٧ ، ل = −٢

**************************************************************************************

# تمـــــــارين

١ – أوجد ناتج ما يأتى :

(١) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

٢ – إختصر : $3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

٣ – إذا كان : $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ أوجد : أ ، ب ، حـ ، ء

٤ – إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث :

$3\,\text{أ}^{\text{مد}} - \text{س} = 2\,\text{ب} - 3\,\text{س}^{\text{مد}}$

٥ – إذا كانت : أ $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب ، ٢ أ – ٣ ب

٦– إذا كانت أ $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة ٢ أ + س = ٣ ب

٧– إذا كانت أ $= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من :

$\text{أ} + \text{ب}^{\text{مد}}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} - \text{ب}$ ، $\text{أ}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$ إن أمكن

٨– إذا كانت س $= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، ص $= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة أ التي تحقق العلاقة : ٢ أ + ص – س = $\square$

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

٩ – إذا كانت : $س + ٢\,س^{مد} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

١٠ – إذا كان : $س^{مد} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ا & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ أوجد : س

، إذا كانت : $س = \boxed{\phantom{0}}_{2\times 2}$ أوجد : ا ، ب ، حـ ، ء

١١ – إذا كانت : المصفوفة $\begin{pmatrix} ا-5 & حـ-1 \\ ب+3 & 4 \end{pmatrix}$ هى المعكوس الجمعى للمصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2ا-3 & -4 \end{pmatrix}$ أوجد : ا ، ب ، حـ

١٢ – أوجد قيم : س ، ص التى تحقق المعادلة : $س \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ص \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

١٣ – أوجد المصفوفة س التى تحقق :

$$س + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = ٣\,س + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ثم أوجد $٢\,س^{مد}$

١٤ – إذا كانت : $س = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ص = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

، $ع = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

أثبت أن : (س + ص) + ع = س + (ص + ع)

*************************************************************************

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوارد

# ضرب المصفوفات

إذا كانت : س ، ص مصفوفتان فإن : س ، ص تكونان قابلتين للضرب

إذا كان عدد أعمدة المصفوفة س يساوى عدد صفوف المصفوفة ص

أى أن :

إذا كانت : س مصفوفة من النظم م × ن ، ص مصفوفة من النظم ن × ل

فإن : حاصل الضرب س × ص = ع حيث ع مصفوفة من النظم م × ل

ملاحظة :

عملية ضرب المصفوفات تكون ممكنة فى حالة واحدة فقط وهى :

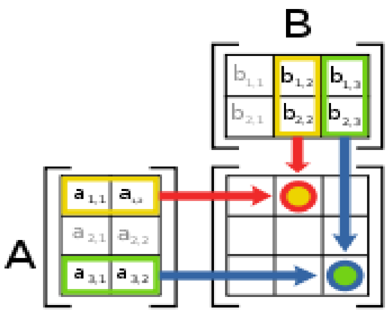
عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

*******************************************************************************

مثـــال: أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد : أ ب ، ب أ

## الحـــل

أ ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$




$= \begin{pmatrix} ١ \times ١ + ٤ \times ٣ + ١ \times ٢ & ٣ \times ١ + ٢ \times ٣ + ٢ \times ٢ \\ ١ \times ٢ + ٤ \times ١ + ١ \times ١ & ٣ \times ٢ + ٢ \times ١ + ٢ \times ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١+١٢+٢ & ٣+٦+٤ \\ ٢+٤+١ & ٦+٢+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & ١٣ \\ ٧ & ١٠ \end{pmatrix}$

. لاحظ أن : أ علي النظم ٢ × ٣ ، ب علي النظم ٣ × ٢ ، أ ب علي النظم ٢ × ٢

ب أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢+٢ & ١+٦ & ١+٤ \\ ٨+٢ & ٤+٦ & ٤+٤ \\ ٢+٣ & ١+٩ & ١+٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ & ٥ \\ ١٠ & ١٠ & ٨ \\ ٥ & ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

**مثـــ٢ـــال:** إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$

إثبت أن : أ ( ب + ج ) = أ ب + أ ج

## الحــــــــل

$$\therefore \text{أ (ب + ج)} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ١٢ & ٩ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$\therefore \text{أ ب + أ ج} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ١١ \\ ٣ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ١٢ & ٩ \end{pmatrix} \quad (٢) \quad \therefore \text{أ (ب+ج) = أ ب + أ ج}$$

*******************************************************************************

**ملاحظات هامة جداً :**

١ – $(\text{أ ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}} \; \text{أ}^{\text{مد}}$

٢ – $\text{أ}^{٢} = \text{أ} \times \text{أ}$ ، $\text{أ}^{٤} = \text{أ}^{٢} \times \text{أ}^{٢}$ [ حيث أ مصفوفة مربعة ]

**مثـــ٣ـــال :** إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة : $\text{أ}^{٢} - ٣\,\text{ب}$

## الحــــــــل

$$\text{أ}^{٢} = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{٢} - ٣\,\text{ب} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} - ٣ \times \begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

*******************************************************************************

**مثـــ٤ـــال :** إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ فأوجد $\text{أ}^{٤}$

## الحــــــل

$$\therefore \text{أ}^{٢} = \text{أ} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{٤} = \text{أ}^{٢} \times \text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٦ & ٢٠٣ \\ ٠ & ٦٢٥ \end{pmatrix}$$

***************************************************************************************

## مصفوفة الوحدة ( I )

هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها = ١ ، و باقي العناصر أصفار

مثل $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $I = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

## خواص عملية ضرب المصفوفات:

١ – خاصية الدمج " التنسيق " :

إذا كانت : س ، ص ، ع ثلاث مصفوفات فإن : (س ص ) ع = س (ص ع )

٢ – خاصية المحايد الضربى :

لأى مصفوفة س فإن : س × I = I × س = س

حيث I مصفوفة الوحدة من نفس نظم س

٣– خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها :

س ( ص + ع ) = س ص + س ع

، ( س + ص ) ع = س ع + ص ع

***************************************************************************************

**مثـــال : إذا كانت :** أ $= \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ فإثبت أن : أ$^{٢}$ – ٥ أ + ٢ I = $\square$

### الحـــــل

$$\because \text{أ}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{٢} - ٥\,\text{أ} + ٢ I = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - ٥ \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} + ٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8 & -5\\ -20 & 13\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10 & -5\\ -20 & 15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \square$$

*************************************************************************************

**مثـ٦ـــال :** إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ إثبت أن (أ ب)$^2$ ≠ أ$^2$ ب$^2$

**الحـــــل**

أ ب = $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\times3 + 3\times0 & -1\times-2 + 3\times1\\ 4\times3 + -2\times0 & 4\times-2 + -2\times1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 5\\ 12 & -10\end{pmatrix}$

(أ ب)$^2$ = (أ ب) (أ ب) = $\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 12 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 12 & -10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}69 & -65\\ -156 & 160\end{pmatrix}$ (١)

أ$^2$ = أ × أ = $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & -9\\ -12 & 16\end{pmatrix}$

ب$^2$ = ب × ب = $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

أ$^2$ ب$^2$ = $\begin{pmatrix}13 & -9\\ -12 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -8\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}117 & -113\\ -108 & 112\end{pmatrix}$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن (أ ب)$^2$ ≠ أ$^2$ ب$^2$

*************************************************************************************

**مثـ٧ـــال :** أوجد المصفوفة س التى تحقق أن: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ × س = $\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 21\end{pmatrix}$

**الحـــــل**

المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ من النظم ٣ × ٢ والناتج $\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 21\end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ١

∴ س يجب أن تكون على النظم ٢ × ١ نفرض أن س = $\begin{pmatrix}أ\\ ب\end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}أ\\ ب\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 21\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix}أ - ب\\ 2أ\\ 3أ + 5ب\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 21\end{pmatrix}$

٢ أ = ٤    أ = ٢

أ – ب = –١    ب = ٢+١ = ٣    ∴ س = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

***********************************************************************

**مثـــال ٨ : إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٥ & -٧ \\ ١٠ & -٥ & ٦ \\ -٨ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$ إثبت أن : أ ب = $١٠\,I$

## الحـــــل

أ ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ٥ & -٧ \\ ١٠ & -٥ & ٦ \\ -٨ & ٥ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{pmatrix} = ١٠ \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= ١٠\,I$

***********************************************************************

**مثـــال ٩ : إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix}$ أوجد $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{أ}^{٣}$ واستنتج $\text{أ}^{\text{ن}}$

## الحـــــل

$\text{أ أ}^{٢} = \begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك}^{٢} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك}^{٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}^{٢} \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{٣} = \text{أ}^{٢} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ك}^{٢} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك}^{٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}^{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك}^{٣} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك}^{٣} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}^{٣} \end{pmatrix}$

$\text{أ}^{\text{ن}} = \begin{pmatrix} \text{ك} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك} \end{pmatrix}^{\text{ن}} = \begin{pmatrix} \text{ك}^{\text{ن}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ك}^{\text{ن}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ك}^{\text{ن}} \end{pmatrix}$

***********************************************************************

**مثـــال ١٠ : إذا كانت** أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ إثبت أن $\text{أ}^{٢}$ – أ – ٥ $I$ = $\boxed{\phantom{00}}$

منتدى توجيه الرياضيات أ/عادل إدوار

الطرف الايمن = $\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}7&1\\3&-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \square$

*************************************************************************

## تمـــــــارين

١ ــ أكمل ما يأتى :

(١) $(\text{س} + \text{ص})^{\text{مد}}$ = .... + ....  (٢) $(\text{س}\,\text{ص})^{\text{مد}}$ = .... × ....

(٣) إذا كانت ج = $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$ فإن ج$^2$ = ....  ، ٥ ج = ....

(٤) $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&0\end{pmatrix}$ = ....

٢ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-2&1\\4&3\end{pmatrix}$ فأوجد أ ب ،، ب أ

٣ ــ إذا كانت س = $\begin{pmatrix}0&-2&3\\1&4&5\end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix}1&5\\1&4\\4&0\end{pmatrix}$

أوجد : $(\text{ص}\,\text{س})^{\text{مد}}$ ، س – ٢ ص

٤ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}-2&1\\4&2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}3&0\\4&1\end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة : س بحيث ٢س + $\text{س}^{\text{مد}}$ = أ ب

٥ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}$ إثبت أن أ$^2$ – ٤ أ أ + ٤ I = أ – ٢ I )$^2$

٦ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$ إثبت أن أ$^2$ – أ – ٥ I = $\square$

٧ ــ إذا كانت س = $\begin{pmatrix}1&-2\\0&-2\end{pmatrix}$ فأوجد س$^4$

٨ ــ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}0&-2&3\\1&4&1\\4&1&-1\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\2&5&1\end{pmatrix}$ أوجد أ$^2$ + ٢ أ ب + ب$^2$

*************************************************************************

# المحـــــــددات

**تعريف**

**المحدد من الدرجة ن، ( مكون من ن صفاً ، ن عموداً ) ينشأ من حذف ( ن – ١) متغير من ن من المعادلات الخطية .**

**مثــ١ــال**

**اكتب المحدد الذى ينشأ من حذف المتغيرات في كل من المعادلات الاتية**

أ ) ٢س = – ٦

س – ٣

$$\therefore م = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$$

ب) س + ص = ٣

س - ص = ١

٢س + ٣ص = ٧

$$\therefore م = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٧ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

*** العوامل المرافقة لعناصر محدد :**

**إذا اخذنا أى عنصر في المحدد $م_ن$ وليكن $أ_{ص ع}$ (يقع في الصف رقم ص ، العمود رقم ع ) و حذفنا الصف رقم ص والعمود رقم ع ، فإنه ينشأ محدد $م_{ص ع}$ من الدرجة الثانية و عند** ضرب **هذا المحدد الناتج في**

**$(-١)^{ص+ع}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$**

**قاعدة الأشارات :**
$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

**مثــ٢ــال : اوجد قيمة كل من المحددات الاتية**

أ ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$　　　ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix}$

**نفرض قيمة المحدد** أ) $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٢×١ – ٥×٣ = –١٣

ب) $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix}$ = ١×٤ – ( –٣ × ٢ ) = ١٠

مثـــ٣ـــال : اوجد قيمة كل من المحددات الاتية

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times -٢ - ٣ \times ٣ = -٤ - ٩ = -١٣$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ -٢ & ١١ \end{vmatrix} = ٣ \times -٢ - (٣ \times ١١) = -٦ - ٣٣ = -٣٩$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١١ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ١١ - (٣ \times ٣) = ١١ - ٩ = ١٣$$

*******************************************************************************

مثـــ٤ـــال : اوجد قيمة كل من المحددا $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــــل

Δ يمكن فك المحدد عن طريق أى صف أو أى عمود مع مراعاة قاعدة الاشارات

نفرض قيمة المحددΔ= $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٤ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر الصف الأول

$$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٧ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (٢٨ - ٦) - ٢ (١٦ - ١٠) + ٣ (١٢ - ٣٥) = ٢٢ - ١٢ + (-٦٩) = (-٥٩)$$

*******************************************************************

مثـــ٥ـــال : اوجد قيمة كل من المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

الحـــــــــــــــل

نفرض قيمة المحددΔ= $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

$$\therefore \Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} - \text{صفر} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} + ١ \times \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ١ (٢ - ٢٠) - \text{صفر} (١٥ - ٤) + ١ (٨ - ٣) = - ١٨ - \text{صفر} + ٥ = (-١٣)$$

**مثـــ٦ـــــال : حل المعادلة**

$$\begin{vmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣\ \text{س}$$

## الحـــــــــــــــل

**باستخدام عناصر الصف الاول**

$$\therefore \Delta = \text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & ٢ \end{vmatrix} - \text{صفر} + \text{صفر} = ٣\ \text{س}$$

= س ( س$^{٢}$ – ٢ س ) = ٣ س

= س ( س$^{٢}$ – ٢ س – ٣ ) = س ( س – ٣ ) ( س + ١ ) = صفر

∴ س = صفر ، أ، س = ٣ ، أ، س = –١

*****************************************************

**مثــ٧ـــال : اوجد قيمة ك التى تجعل : س أحد عوامل المحدد الاتى**

$$\begin{vmatrix} ١- & ١ & \text{س} - ٢ \\ ٥ & ١ & ٢ \\ \text{س}+٢+\text{ك} & \text{س} + ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

## الحـــــــــــــــل

∵ س أحد عوامل المحدد ∴ س = صفر هو جذر للمعادلة الناتجة

$$\therefore \begin{vmatrix} ١- & ١ & -٢ \\ ٥ & ١ & ٢ \\ ٢+\text{ك} & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

**باستخدام عناصر الصف الاول**

–٢ ( ك + ٢ - ١٠ ) – ( ٢ ك + ٤ - ١٠ ) - ( ٤ - ٢ ) = صفر

–٢ ( ك - ٨ ) - ( ٢ ك - ٦ ) - ٢ = –٢ ك +١٦ - ٢ ك + ٦ - ٢ = صفر

–٤ ك + ٢٠ = صفر ∴ ك = ٥

***************************************************************

## * خواص المحددات

١- في أى محدد اذا تبدلت الصفوف بالاعمدة و الاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير .

٢-قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه ( أعمدته ) .

٣-في اى محدد اذا بدلنا موضعى صفين ( عمودين ) فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الاصلى مضروباَ فى(-١).

٤-اذا تساوت العناصر المتناظرة في اى صفين ( عمودين ) فإن قيمة المحدد تساوى صفراً

مثــ٨ـــال : $\begin{vmatrix} ٢ & -٧ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix}$ = صفر لأن $ص_١ = ص_٢$

٥-اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف ( عمود ) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد .

مثــ٩ـــال : $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢٥ & ٥ \end{vmatrix}$ = صفر لأن ٥ × $ص_١ = ص_٢$ أ،

أخذ (٥) عامل مشترك من العمود الأول فيكون المحدد = ٥ × $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٥ × ٠ = ٠

٦-اذا كانت جميع عناصر أى صف ( عمود ) في محدد تساوى صفراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً .

مثــ١٠ـــال : $\begin{vmatrix} ٢ & ٨ \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{vmatrix}$ = صفر لأن جميع عناصر الصف الثانى أصفار

٧- في أى محدد اذا كتبت جميع عناصر صف ( عمود ) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتاباتها كمجموع قيمتى محددين.

مثال١١ : $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٣ & -١ \end{vmatrix}$

ثابت = صـــفر + (-١) × (-١٣) = ١٣

٨- اذا أضفنا على عناصر أى صف ( عمود ) في محدد مضاعفات أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير .

**مثـــال ١٢ : بدون فك المحدد**

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$$

اثبت أن قيمته = ( س + ٢ أ ) (س − أ )$^{٢}$

## الحـــــــــل

$\therefore$ المحدد = $\begin{vmatrix} \text{س}+٢\text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{س}+٢\text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س}+٢\text{أ} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

$\boxed{\text{ع}_٢ + \text{ع}_٣ + \text{ع}_١}$ أى بجمع العمود الثالث والثاني على العمود الأول

= (س+٢أ) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ١ & \text{س} & \text{أ} \\ ١ & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

وأخذ الناتج مشترك

= (س+٢أ) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ٠ & \text{س} - \text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix}$

أى بطرح الصف الأول من كل من الصف الثاني والثالث فإن المحدد

نفك المحدد باستخدام عناصر العمود الأول

$\therefore$ قيمة المحدد = ( س + ٢ أ ) (س − أ)$^{٢}$

*******************************************************************************

٩- في أى محدد اذا ضربنا عناصر صف ( عمود ) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في صف (عمود ) أخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة = صفر

١٠- قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & ٠ & ٠ \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

تساوى أ$_{١١}$ أ$_{٢٢}$ أ$_{٣٣}$ و المحدد بهذه الصورة يسمى بالصورة المثلثة.

**مثـــال ١٣ : بدون فك المحدد**

$\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٣×٢×٥ = ٣٠ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٠ & -٣ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٣×-٣×٢ = − ١٨

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

**مثــ١٤ــال: اثبت أن المحدد Δ =**

| ٠ أ ب |
| −أ ٠ ح |
| −ب −ح ٠ |

**= صفر مهما كانت قيم أ، ب، ح**

## الحـــــــــل

∴ Δ = (−١) ×

| ٠ −أ −ب |
| أ ٠ −ح |
| ب ح ٠ |

بضرب كل صف من الصفوف الثلاثة × −١

∴ Δ = (−١) مدور Δ   خاصية (١)   ∴ Δ = − Δ

∴ ٢ Δ = صفر   ∴ Δ = صفر

************************************************************************************

**مثــ١٥ــال: اثبت أن**

| أل أم أن |
| أم بم بن |
| أن بن حن |

**= أن (ب ل − أ م) (ح م − ب ن)**

## الحـــــــــل

Δ = أن

| ل أم أ |
| م بم ب |
| ن بن ح |

أ عامل مشترك من ع١ ، ن عامل مشترك من ع٢

Δ = أن

| ل ٠ أ |
| م ٠ ب |
| ن بن−مح ح |

اضافة − م × ع٣ + ع٢

فك المحدد بالصف الثالث

Δ = أن ( بن − مح ) × | ل أ / م ب | = أن ×− ( بن − مح ) ( ب ل − أ م )

= أن × ( حم − بن ) ( ب ل − أ م )

************************************************************************************

- **المعكوس الضربى للمصفوفة :**

**الشرط اللازم والكافى لايجاد المعكوس الضربى أن تكون المصفوقة غير منفردة**

مصفوفة صفرية $|\text{م}| \neq$ صفر ، مصفوفة وحدة $|\text{م}| \neq I$

**الطريقة : (١) نوجد المحددات الصغرى للعناصر**

**(٢) نطبق قاعدة الاشارات**

**(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ( $\text{م}^{\text{مل}}$ )**

**(٤) نوجـــد $|\text{م}|$ (٥) فيكون $\text{م}^{-١} = \frac{\text{م}^{\text{مل}}}{|\text{م}|}$**

**مثـــ١٦ـــال : عين نوع المصفوفات من حيث كونها منفردة أو غير منفردة**

(م) $\begin{pmatrix} ١٥ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ \\ -٩ & -٦ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$

**الحــــــــل**

(م) $|\text{م}| = ٢٤ - ٣٠ \neq$ صفر $\therefore$ المصفوفة غير منفردة

(ب) $|\text{ب}| = -٣٦ - (-٣٦) =$ صفر $\therefore$ المصفوفة منفردة

(ج) $|\text{ج}| = ١ \times ٢ - ٢ \times ١٢ + ٥ \times ٥ \neq$ $\therefore$ المصفوفة غير منفردة

*************************************************************************

**مثـــ١٧ـــال : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة م =** $\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$

**الحــــــــل**

$|\text{م}| = -١٥ - (-١٤) \neq$ صفر $\therefore$ المصفوفة غير منفردة

الطريقة (١) المحددات الصغرى للعناصر $\begin{vmatrix} -٢ & -٣ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix}$

(٢) نطبق قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} +٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix}$

(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ( $\text{م}^{\text{مل}}$ ) $\begin{pmatrix} -٧ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) نوجـــد $|\text{م}| = -١٥ - (-١٤) = -١$

(٥) فيكون $\text{م}^{-١} = \frac{\text{م}^{\text{مل}}}{|\text{م}|} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -٧ & -٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ -٥ & -٢ \end{pmatrix}$

**مثـــ ١٨ ـــال : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة** $ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

**الحـــــــــل**

$|ب| = ٤ - (٦) \neq$ صفر　　∴ المصفوفة غير منفردة

الطريقة (١) المحددات الصغرى للعناصر $\begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

(٢) نطبق قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix}$

(٣) مدور المصفوفة فنحصل على المصفوفة الملحقة ( $ب^{مل}$ ) $\begin{pmatrix} -٣ & -٤ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$

(٤) نوجـــد $|ب| = ٤ - (٦) = -٢$

(٥) فيكون $ب^{-١} = \frac{ب^{مل}}{|ب|} = \frac{١}{-٢}\begin{pmatrix} -٣ & -٤ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ٢ \\ \frac{١}{٢} & ١ \end{pmatrix}$

******************************************************************************************

**مثـــ ١٩ ـــال : أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة** $س = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & -٣ & ٢ \\ ٢١ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

**الحـــــــــل**

المحددات الصغرى $\begin{vmatrix} (١٠ + ٣) & (٤٢ - ١) & (-٣٦ - ٥) \\ (٥ + ١) & (٢١ - ٢) & (-٢١ - ١٠) \\ (-٣ + ٢) & (١ - ٤) & (-١ + ٦) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١٣ & ٤١ & -٦٨ \\ ٦ & ١٩ & -٣١ \\ -١ & -٣ & ٥ \end{vmatrix}$

قاعدة الاشارات $\begin{vmatrix} ١٣ & -٤١ & -٦٨ \\ -٦ & ١٩ & ٣١ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} \Longleftarrow (س^{مل}) = \begin{vmatrix} ٥ & ٣١ & -٦٨ \\ ٣ & ١٩ & -٤١ \\ -١ & -٦ & ١٣ \end{vmatrix}$

$|س| = -٦٨(-١٩ + ١٨) - ٣١(٤١ - ٣٩) + ٥(٢٤٦ - ٢٤٧) = ١$

∴ $س^{-١} = \frac{س^{مل}}{|س|} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} ٥ & ٣١ & -٦٨ \\ ٣ & ١٩ & -٤١ \\ -١ & -٦ & ١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣١ & -٦٨ \\ ٣ & ١٩ & -٤١ \\ -١ & -٦ & ١٣ \end{pmatrix}$

# تمــــــارين

١ – عين نوع كل من المصفوفات الآتية من حيث كونها منفردة أو غير منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$		(ب) $\begin{pmatrix} ١٣ & -٨ \\ ٧ & -٥ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٨ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{pmatrix}$		(ء) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ -٥ & -١ & ٤ \\ ٨ & ١١ & ٣ \end{pmatrix}$

٢ – أوجد قيمة س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٣س \\ ٢ - س & ٣ \end{pmatrix}$		(ب) $\begin{pmatrix} س - ٤ & -٢س \\ س + ١ & -٣ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٣ & ٩ \end{pmatrix}$		(ء) $\begin{pmatrix} ٣س & ٢ & ٣س - ٢ \\ ٢س - ١ & س + ١ & ٤ \\ ٢س - ١ & ١ & ٢س \end{pmatrix}$

٣ – أوجد المعكوس الضربى لكل من للمصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$		(ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$		(جـ) $\begin{pmatrix} -٧ & ٤ \\ -١١ & ٧ \end{pmatrix}$

٤ – أوجد المعكوس الضربى لكل من للمصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٥ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$		(ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٩ & ٢ \\ ٥ & ٨ & ٢ \end{pmatrix}$

٥ – إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٩ & ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٧ & -٧ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد حاصل الضرب أ ب . لماذا لا تكون المصفوفة أ هى المعكوس الضربى للمصفوفة ب

٦ – إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٩ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

حقق أن $(أ + ب)^{-١} \neq أ^{-١} + ب^{-١}$

*********************************************************************

# البرمجة الخطية

## حل متباينات الدرجة الأولي في متغير واحد

نعلم أن : الجمل الرياضية : س > ٣ ؛ ٣ س – ١ ⩽ ٤

تسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد

خواص التباين : إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية وكان س > ص فإن :

(١) س + ع > ص + ع سواء كانت ع موجبة أو سالبة " خاصية الإضافة "

فمثلا : إذا كان س > ٣ فإن س + ٤ > ٧ ( بإضافة ٤ للطرفين )

(٢) إذا كان ع > صفر فإن : س ع > ص ع خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب

فمثلا : إذا كان س >٥ فإن ٣ س> ١٥ ( بضرب الطرفين فى ٣ )

(٣) إذا كان ع < صفر فإن : س ع < ص ع خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب

فمثلا : إذا كان س > ٥ فإن – ٣ س < – ١٥ ( بضرب الطرفين فى – ٣ )

*******************************************************************************

مثــ١ــال : أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد : ٣ س – ٤ < ٥

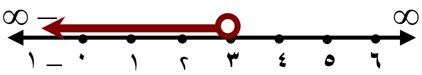
الحــــــــــل

∵ ٣ س – ٤ < ٥ بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (– ٤ ) وهو ( ٤ ) للطرفين

∴ ٣ س – ٤ + ٤ < ٥ + ٤

∴ ٣ س < ٩ بالضرب فى المعكوس الضربى للعدد ( ٣ ) وهو ( $\frac{١}{٣}$ )

∴ س < ٣ ∴ مجموعة الحل = ]– ∞ ، ٣[



*******************************************************************************

مثــ٢ــال : أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية ومثلها على خط الأعداد : ٤ – ٢س ⩽ ٦

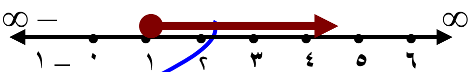
الحــــــــــل

∵ ٤ – ٢س ⩽ ٦ بإضافة المعكوس الجمعى للعدد (٤ ) وهو (–٤ ) للطرفين

∴ ٤ – ٢س – ٤ ⩽ ٦ – ٤

∴ – ٢ س ⩽ ٢ بقسمة الطرفين على (–٢)

∴ س ⩾ ١ ∴ مجموعة الحل = [ ١ ، ∞[

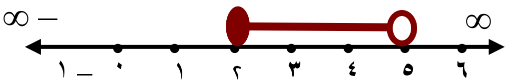


مثـــال : مثل بيانياً مجموعة حل المتباينة : س + ٨ < ٣س − ٢≤س + ٢ واكتبها على صورة فترة

الحـــــــــــل

∵ س + ٨ < ٣س − ٢ ≤ س + ٢ بطرح س من أطراف المتباينة

∴ س + ٨ − س < ٣س − ٢ − س ≤ س + ٢ − س




∴ ٨ < ٢س − ٢ ≤ ٢ بقسمة الطرفين على (−٢)

∴ ١٠ < ٢س ≤ ٤ بإضافة (٢) الى أطراف المتباينة

∴ ٥ < س ≤ ٢ ∴ مجموعة الحل = [ ٢ ، ٥ [

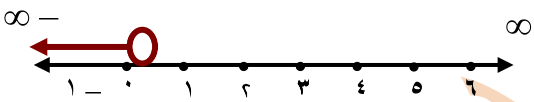
***********************************************************************************

مثـــال : مثل بيانياً مجموعة حل المتباينة : $\frac{\text{٣ + س}}{\text{٥}}$ < ٢س واكتبها على صورة فترة

الحـــــــــــل

∵ $\frac{\text{٣ + س}}{\text{٥}}$ < ٢ س بضرب الطرفين فى ٥

∴ ٣ + س < ١٠ س




∴ س − ١٠ س < ٣

∴ − ٩ س < ٣ بقسمة الطرفين على (−٩)

∴ س > $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ∴ مجموعة الحل = ]−∞ ، $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ [

***********************************************************************************

## تمارين

أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية

[١] ٢س- ٥ ≤ ٣ [٢] ٣س+ ١ > ٧

[٣] -٤ ≤ س+ ١ ≤ ٥ [٤] ٧- ٢س ≥ ٥

[٥] س+ ٢ ≤٢س + ٥ ≤س + ١١

***********************************************************************************

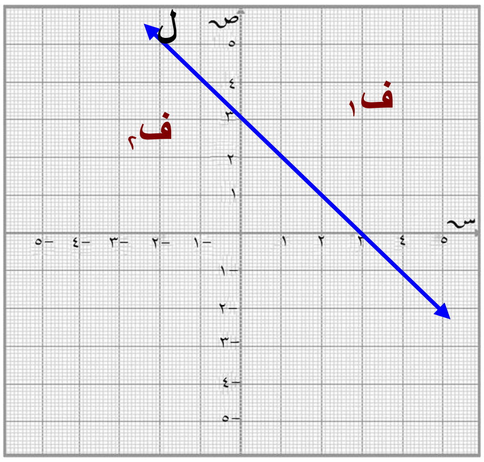
# حل متباينة الدرجة الأولي في متغيرين

**نعلم أن :**

**المعادلة : أ س + ب ص = حـ هى معادلة خطية " من الدرجة الأولي " يمثلها بيانياً خط مستقيم ، و مجموعة الحل لها عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحققها**

**مثــ١ـــال: أوجد مجموعة المعادلة : س + ص = ٣ بيانياً**

**الحــــــل**




| س | ٠ | ٣ | ١ |
|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ٠ | ٢ |

**يكفى نقطتى تقاطع المستقيم مع المحورين**

**و ذلك بوضع " س = ٠ ثم إيجاد قيمة ص "**

**، بوضع " ص = ٠ ثم إيجاد قيمة س "**

**والثالثة للتأكيد**

**المستقيم ل هو التمثيل البيانى للمعادلة : س + ص = ٣**

**ملاحظات :**

*** المستقيم ل يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط**

**(١) مجموعة نقط المستقيم ل وهى مجموعة النقاط التى تحقق معادلته ويسمى المستقيم الحدى**

**(٢) ف١ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على أحد جانبى المستقيم ل وهى نصف المستوى**

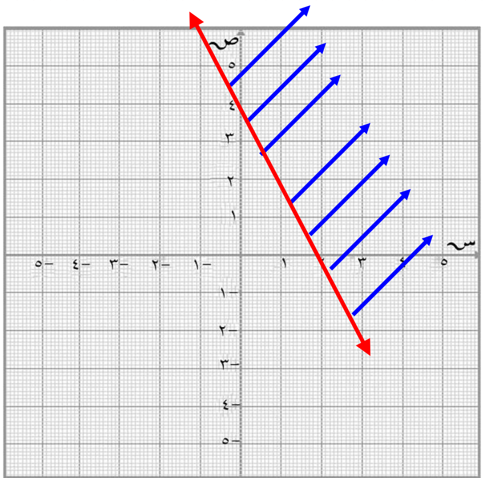
**(٣) ف٢ وهى مجموعة نقط المستوى والتى تقع على الجانب الآخر للمستقيم ل وهى النصف الآخر للمستوى**

**************************************************************************

## حل متباينات الدرجة الأولى فى متغيرين بيانياً

**يتضح ذلك من المثال الآتى :**

**مثــ٢ــال : حل المتباينة : ٢س + ص ≥ ٤**




**الحــــــل**

**نرسم المستقيم الحدي : ٢س + ص = ٤ بخط متصل**

**" كما فى المثال السابق "**

∴ ل : ٢س+ ص = ٤ يمر بالنقطتين ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٢ ، ٠ )

نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠) ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ > ٤

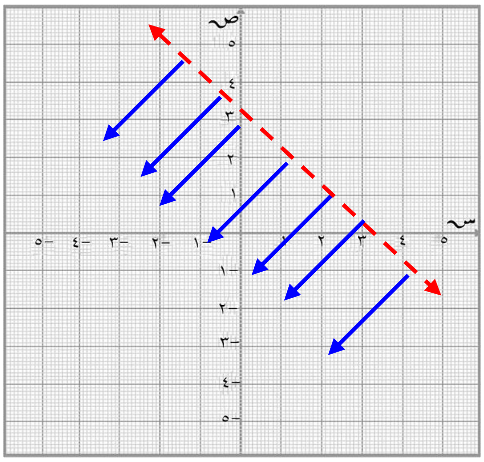
∴ ( ٠ ، ٠ ) لا يحقق المتباينة

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة ( ٠ ، ٠ )

*******************************************************************************

مثــ٢ــال : حل المتباينة : س + ص > ٣



الحـــــل

نرسم المستقيم الحدي : س+ ص = ٣ بخط متقطع

∴ ل : س+ ص = ٣ يمر بالنقطتين ( ٠ ، ٣ ) ، ( ٣ ، ٠ )

نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠)

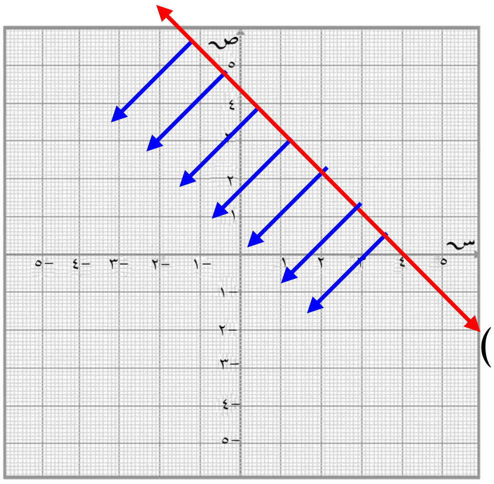
ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ > ٣

∴ ( ٠ ، ٠ ) تحقق المتباينة ∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة ( ٠ ، ٠ )

*******************************************************************************

مثــ٣ــال : حل المتباينة : $\frac{٣س}{٤} + \frac{٢ص}{٣} \leqslant ٣$



الحـــــل

بالضرب × ١٢ 　 ٩س + ٨ص ⩽ ٣٦

نرسم المستقيم الحدي : ٩ س + ٨ ص = ٣٦ بخط متصل

∴ ل : ٩ س+٨ ص = ٣٦ يمر بالنقطتين ( ٠ ، ٤٫٥ ) ، ( ٤ ، ٠ )

نختار أى نقطة ولتكن (٠،٠)

ونعوض بها فى المتباينة ينتج : ٠ + ٠ ⩽ ٣٦

∴ ( ٠ ، ٠ ) لا يحقق المتباينة ∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة بالشكل المقابل

وهى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة ( ٠ ، ٠ )

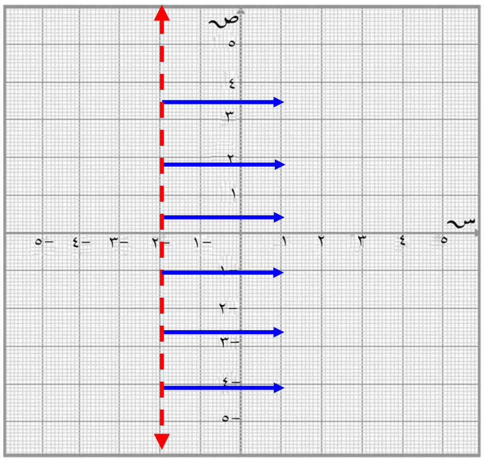
**ملاحظات :**

** إذا كانت النقطة المختار للتعويض فى المتباينة تحققها فإن مجموعة الحل هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه هذه النقطة

** إذا كانت علاقة التباين [ > أ، < ] يكون المستقيم متقطع

** إذا كانت علاقة التباين [ ≤ أ، ≥ ] يكون الخط متصل

**مثـــال : حل المتباينة س > – ٢**



**الحـــــــل**

المستقيم الحدي ل : س = – ٢ يمثله خط مستقيم متقطع

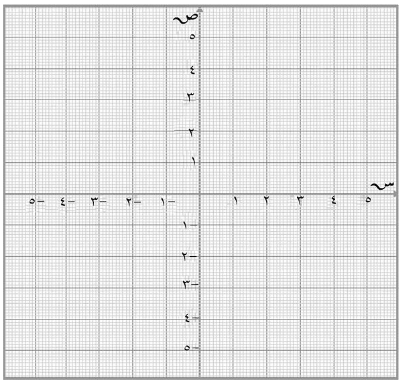
يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (– ٢ ، ٠ )

∵ نقطة الأصل تحقق المتباينة س > – ٢

حيث ٠ > – ٢ ∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل

**************************************************************************

**تدريب : حل المتباينة ٢س + ٣ص ≥ ٦**



**الحـــــــل**

المستقيم الحدي ل : ٠٠٠٠

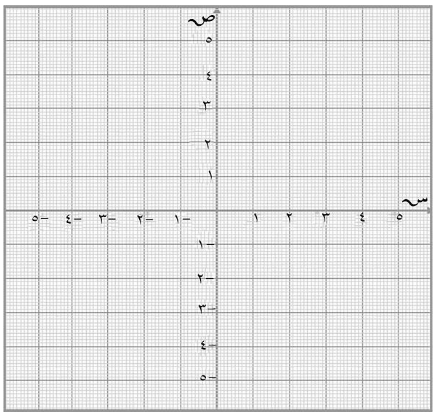
يمثله خط مستقيم ٠٠٠٠

و يمر بالنقط ٠٠٠٠ النقطة (٠،٠) ٠٠٠٠

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل

**************************************************************************

**تدريب : حل المتباينة س ≤ ٢ ص – ٤**



**الحـــــــل**

المستقيم الحدي ل : ٠٠٠٠

يمر بالنقط ٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠

∴ النقطة ٠٠٠٠ لأن ٠٠٠٠

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل المقابل

## تمارين

مثل بيانياً مجموعة حل كلاً من المتباينات الآتية حيث س ، ص ∈ ح

[١] س + ص ≥ ٤ [٢] ٢س + ص ≤ ٦ [٣] ٣س + ص > ٣

[٤] ٤س + ٣ص < ١٢ [٥] ص ≥ ٢س + ٤ [٦] ٢ص > س + ٨

[٧] س ≥ ٠ [٨] ص < ٠ [٩] س < ٣

[١٠] ٣ − ٢ س < ٢ − ص [١١] $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ ص < ١

[١٢] $\frac{١}{٢}$ س + ص ≥ ٣ [١٣] ٣ س + ٥ ص ≤ ١٥

***********************************************************************************

## الحل البياني لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولي في متغيرين

الحل البيانى للمتباينتين : أ$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص = حـ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص = حـ$_{٢}$

حيث : أ$_{١}$ ، ب$_{١}$ ، حـ$_{١}$ : أ$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ ، حـ$_{٢}$ ∈ ح

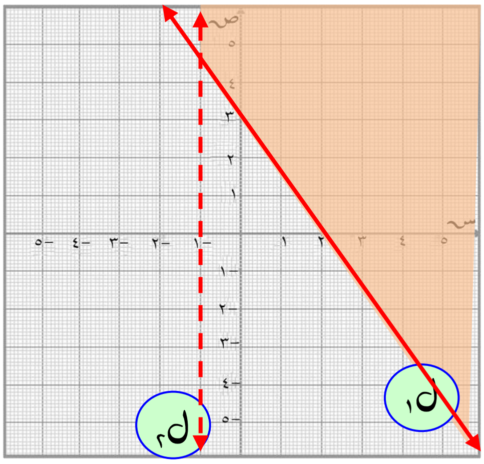
هو مجموعة الأزواج المرتبة التى تحقق كلاً من المتباينتين معاً

أى إذا كان : ع$_{١}$ = مجموعة حل المتباينة الأولى ، ع$_{٢}$ = مجموعة حل المتباينة الثانية

فإن مجموعة الحل للمتباينتين معاً = ع$_{١}$ ∩ ع$_{٢}$

**مثـــال١ : حل المتباينتين س + ٢ ص ≥ ٤ ، ص > −١**

### الحـــــــل



نرسم المستقيم الحدى ل$_{١}$ : س + ٢ ص = ٤ بخط متصل

و يمر بـ ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٢ ، ٠ )

النقطة ( ٠ ، ٠ ) لا تحقق المتباينة

∴ مجموعة حل المتباينة ٢ س + ص ≥ ٤ هى نصف المستوى الذى لا تنتمى إليه النقطة ( ٠ ، ٠ )

نرسم المستقيم الحدى ل$_{٢}$ : ص = −١ بخط متقطع

يوازي محور السينات و يمر بـ ( ٠ ، −١ )

النقطة ( ٠ ، ٠ ) تحقق المتباينة

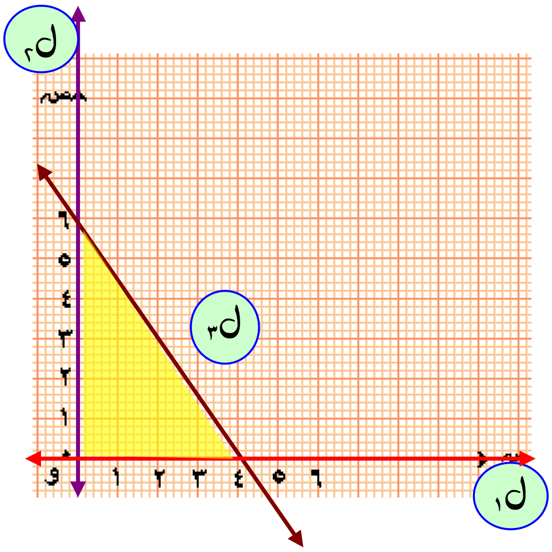
∴ مجموعة حل المتباينة ص > −١ هى نصف المستوى الذى تنتمى إليه النقطة ( ٠ ، ٠ )

و تكون مجموعة حل المتباينتين هى المنطقة المحصورة بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ كما بالشكل المقابل مع ملاحظة أن نقط المستقيم $ل_٢$ لا تنتمى لمجموعة الحل

*****************************************************************************

مثــ٢ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢



الحــــــــــل

نرسم المستقيمات الحدية :

$ل_١$ : س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

$ل_٢$ : ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول "

$ل_٣$ : ٣س + ٢ص = ١٢ خط متصل يمر بالنقطتين ( ٠ ، ٦) ، ( ٤ ، ٠ )

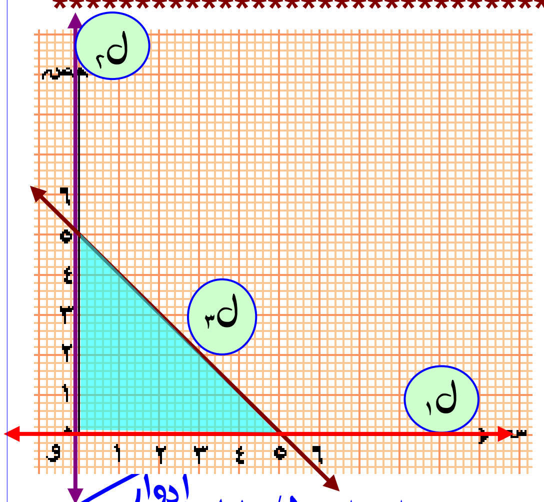
النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٢ ، ٠ ) ، ( ٠ ، ٣ )

*****************************************************************************

مثــ٣ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٥



الحــــــــــل

نرسم المستقيمات الحدية :

$ل_١$ : س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

ل٢ : ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠

يحددان دائماً معاً الربع الأول "

ل٣ : س + ص = ٥ خط متصل بالنقطتين ( ٠ ، ٥ ) ، ( ٥ ، ٠ )

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات

الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط

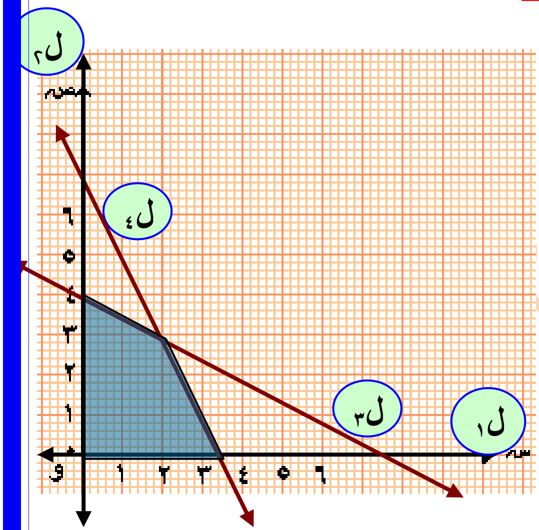
( ٠ ، ٠ ) ، ( ٥ ، ٠ ) ، ( ٠ ، ٥ )

*****************************************************************************

**مثــ٤ــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً**

**س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٢ص ≤ ٨ − س ، ٢س + ص ≤ ٧**

**الحـــــــــل**




نرسم المستقيمات الحدية :

ل١ : س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

ل٢ : ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

" و المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يحددان دائماً معاً الربع الأول "

ل٣ : ٢ص + س = ٨ خط متصل ( ٠ ، ٤ ) ، (٨ ، ٠ )

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

ل٤ : ٢ س + ص = ٧ خط متصل ( ٠ ، ٧ ) ، (٣٫٥ ، ٠ )

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات

الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط

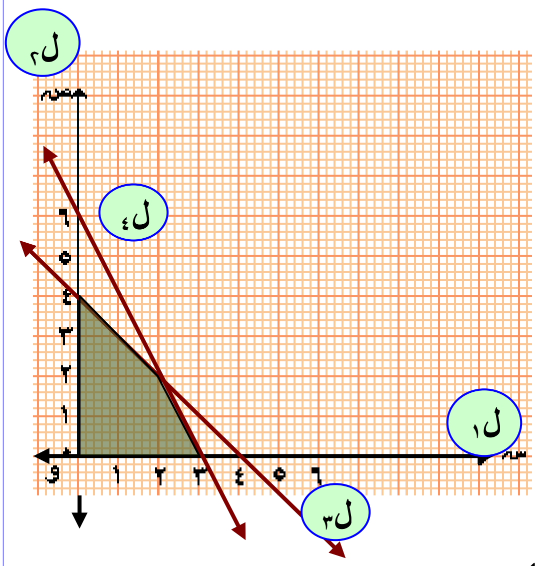
( ٠ ، ٠ ) ، ( ٢ ، ٣ ) ، ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٣٫٥ ، ٠ )

*****************************************************************************

## مثـــال : أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٤ ، ٢س + ص ⩽ ٦

### الحــــــــل




نرسم المستقيمات الحدية :

ل١ : س = ٠ هو محور الصادات خط متصل ،

ل٢ : ص = ٠ هو محور السينات خط متصل

ل٣ : ٢ص + ٢س = ٨ خط متصل ( ٠ ، ٤ ) ، (٤ ، ٠ )

النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

ل٤ : ٢ س + ص = ٧ خط متصل ( ٠ ، ٦ ) ، ( ٣ ، ٠ )

∴ الحل هو المنطقة المظللة بالشكل التى تمثل المتباينات الثلاثة ومن الشكل هى المنطقة التى تحدد بالمثلث الذى رؤوسه النقط ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٢ ، ٢ ) ، ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٣ ، ٠ )

*******************************************************************************

## تمارين

أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

[١] س ⩾ -١ ، ص < ٢

[٢] س ⩽ ٣ ، ص ⩾ ١

[٣] س ⩽ ٢ ، س + ص < ٣

[٤] س + ٢ص ⩽ ٢ ، ٢ س + ص ⩾ ٤

[٥] س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ٤ س + ص ⩾ ٤

[٦] س ⩾ -٢ ، ص ⩾ -١ ، ٢ س + ٣ ص > ٠

[٧] س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ص ⩾ س + ٣ ، س + ٢ ص ⩾ ٤

[٨] س > ١ ، ص > ١ ، س + ص ⩾ ٤ ، ٢ س + ص ⩾ ٦

[٩] س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ ص ⩾ ١ ، ٣ س + ٥ ص ⩽ ١

# البرمجة الخطية

- تعتمد البرمجة الخطية على حل المتباينات و هي وسيلة قوية لإعطاء أفضل قرار في حل مشكلة أو هي الحل الأمثل لتحقيق هدف معين يمكن وضعه علي صورة دالة خطية [ ر = ل س + م ص ] تسمى دالة الهدف وذلك فى ضوء القيود و الإمكانيات المتاحة والتى توضع على صورة متبانات خطية تحدد بما يسمى بنظام العمل وذلك لإيجاد قيمة من مجموعة قيم حل هذه المتباينات بحيث تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف

و لإيجاد الحل المطلوب ( أكبر قيمة أو أصغر قيمة ) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها رؤوس مضلع .. و بالتعويض بهذه الرؤوس في دالة الهدف نحصل علي النقطة التي تحقق المطلوب ( دالة الهدف )

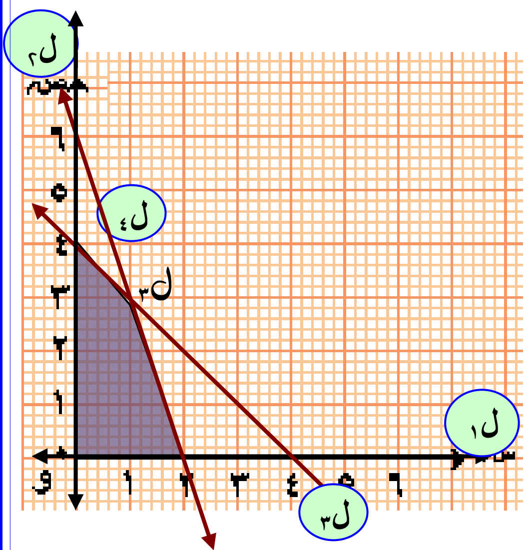
***************************************************************************

مثــ١ــال : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ص ⩽ ٤ ، ٣ س + ص ⩽ ٦ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل (ل) أكبر ما يمكن حيث ل = ٥ س + ٣ ص

## الحـــــل

كما سبق المتباينتين س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول




$ل_1$ : س + ص = ٤ يمر بـ ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٤ ، ٠ )

$ل_2$ : ٣ س + ص = ٦ يمر بـ ( ٠ ، ٦ ) ، ( ٢ ، ٠ )

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل المقابل وهى المضلع ء و حـ ب

حيث ء(٢، ٠) ، و ( ٠ ، ٠) ، حـ ( ٠ ، ٣) ، ب ( ١ ، ٣)

، دالة الهدف ل = ٥ س + ٣ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ $ل_1$ = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ = ١٠

، ر$_{ب}$ = ٥ × ١ + ٣ × ٣ = ١٧

، ر$_{جـ}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٣ = ٩

، ر$_{و}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

∴ ر  أكبر ما يمكن عند ب ( ١ ، ٣ )

*******************************************************************************

**مثـ٢ـال : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً**

**س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٨ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل ر أكبر ما يمكن حيث ر = ٥٠ س + ٧٥ ص**

**الحـــــل**

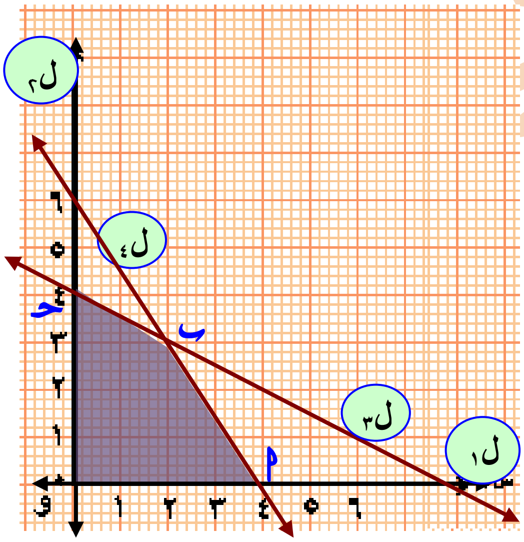
كما سبق المتباينتين س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ل$_{١}$ : س + ص = ٥ يمر بـ ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٨ ، ٠ )

ل$_{٢}$ : ٣ س + ٢ص = ١٢ يمر بـ ( ٠ ، ٦ ) ، ( ٤ ، ٠ )

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المللة بالشكل

المقابل وهى المضلع ٢ و جـ ب




حيث ٢ (٤ ، ٠) ، و (٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٣)

، دالة الهدف ر = ٥ س + ٣ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

∴ ر$_{٢}$ = ٥٠ × ٤ + ٧٥ × ٠ = ٢٠٠

، ر$_{ب}$ = ٥٠ × ٢ + ٧٥ × ٣ = ٣٢٥

، ر$_{جـ}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٤ = ٣٠٠

، ر$_{و}$ = ٥٠ × ٠ + ٧٥ × ٠ = صفر

∴ ر  أكبر ما يمكن عند ب ( ٢ ، ٣ )

*******************************************************************************

**ملاحظة :**

إذا كانت علامتى التباين " ⩾ " فالمنطقة التى تحقق المتباينات هى التى بها نقطة الأصل

وتأخذ شكلاً رباعياً أو مثلثاً إحدى رؤوسه تحقق دالة الهدف ( الحد الأقصى )

، إذا كانت علامتى التباين " ⩽ " فالمنطقة التى تحقق المتباينات هى التى ليست بها نقطة الأصل

وتمثل قاعدة هذه المنطقة خط منكسر إحدى تقطه تحقق دالة الهدف ( الحدالأدنى )

********************************************************************************

**مثـــال ٣ : أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الأتية**

**س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، س + ٢ ص ⩾ ٤ ، س + ص ⩾ ٣ ثم أوجد من مجموعة الحل**

**قيم ( س، ص) التي تجعل ( ر ) أقل ما يمكن حيث ر = ٥ س + ٤ ص**

**الحـــــــل**

كما سبق المتباينتين س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

$ل_١$ : س + ٢ص = ٤ يمر بـ ( ٠ ، ٢ ) ، (٤ ، ٠ )

$ل_٢$ : س + ص = ٣ يمر بـ ( ٠ ، ٣ ) ، ( ٣ ، ٠ )

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المللة بالشكل

المقابل وهى المضلع ا و جـ ب

حيث ا(٤ ، ٠) ،و (٠ ، ٠) ،حـ (٠ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)

، دالة الهدف ر = ٥ س + ٤ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

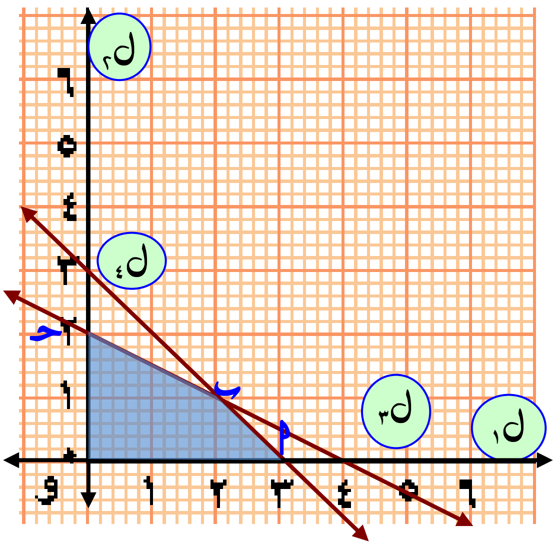
∴ $ر_ا$ = ٥ × ٤ + ٤ × ٠ = ٢٠

، $ر_ب$ = ٥ × ٢ + ٤ × ٥ = ٢٥

، $ر_جـ$ = ٥ × ٠ + ٤ × ٣ = ٩

، $ر_و$ = ٥ × ٠ + ٤ × ٠ = صفر

∴ ر أكبر ما يمكن عند ب ( ٢ ، ٥ )




********************************************************************************

**مثــ٤ــال : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً**

**س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ص − س ⩽ ٣ ، ٢ص + ٥س ⩽ ٢٠ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل ر أكبر ما يمكن حيث ر = ٥ س + ٣ ص**

## الحـــــل

كما سبق المتباينتين س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ل$_1$ : ص − س = ٣ يمر بـ ( ٠ ، ٣ ) ، ( −٣ ، ٠ )

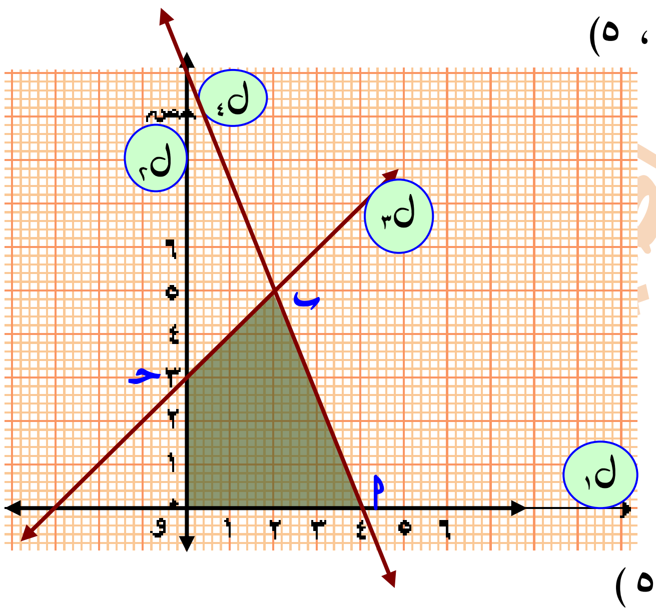
ل$_2$ : ٢ ص + ٥س = ٢٠ يمر بـ ( ٠ ، ١٠ ) ، ( ٤ ، ٠ )

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المللة بالشكل المقابل وهى المضلع أ و حـ ب

حيث أ( ٤ ، ٠ ) ،و( ٠ ، ٠ ) ،حـ ( ٠ ، ٣ ) ، ب ( ٢ ، ٥ )

، دالة الهدف ر = ٥ س + ٣ ص

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب




∴ ر$_{أ}$ = ٥ × ٤ + ٣ × ٠ = ٢٠

، ر$_{ب}$ = ٥ × ٢ + ٣ × ٥ = ٢٥

، ر$_{جـ}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٣ = ٩

، ر$_{و}$ = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

∴ ر أكبر ما يمكن عند ب ( ٢ ، ٥ )

*********************************************************************************

**مثــ٥ــال : قررت إحدي الشركات أن تقدم وجبة خفيفة لموظفيها تتكون من صنفين ، بحيث تتوفر في الوجبة الواحدة لكل شخص ٤ وحدات علي الأقل من فيتامين أ ، ٩ وحدات من فيتامين ب ، فإذا كانت الوحدة من الصنف الأول تعطي في المتوسط وحدة فيتامين أ، ٣ وحدات فيتامين ب ، و ان الوحدة من الصنف الثاني تعطي في المتوسط وحدتين من فيتامين أ، ٣ وحدات من فيتامين ب ، وكان سعر الوحدة من الصنف الأول ٧٥ قرش ، وسعر الوحدة من الصنف الثاني ٥٠ قرش ، فكم عدد الوحدات من الصنفين يعطي أرخص وجبة و تتضمن الحد الأدني من الفيتامينات**

## الحـــــــــل

بفرض أن : عدد الوحدات من الصنف الأول = س

، و عدد الوحدات من الصنف الثاني = ص

| | الصنف الأول س | الصنف الثانى ص | الحد الأدنى |
|---|---|---|---|
| فيتامين ا | ١ | ٢ | ٤ |
| فيتامين ب | ٣ | ٣ | ٩ |
| الثمن | ٧٥ | ٥٠ | |

∵ س ⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠

، س + ٢ ص ⩾ ٤ ، ٣ س + ٣ ص ⩾ ٩

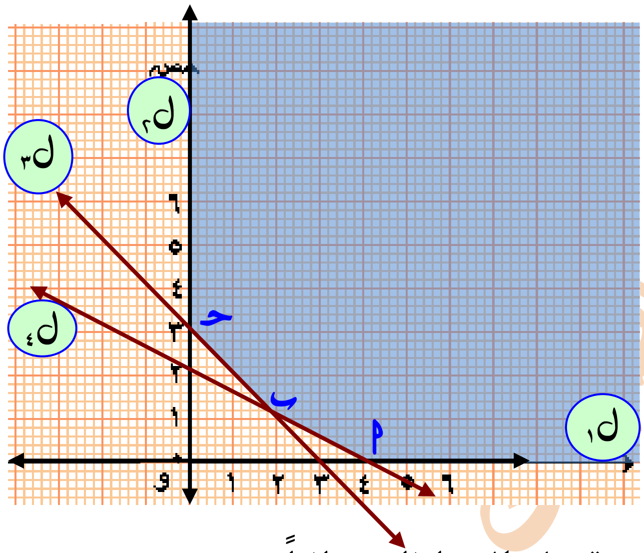
، دالة الهدف : ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

∴ ل١ : س + ٢ ص = ٤

يمر بالنقط ( ٠ ، ٢ ) ، ( ٤ ، ٠ )

، ل٢ : ٣ س + ٣ ص = ٩

يمر بالنقط ( ٠ ، ٣ ) ، ( ٣ ، ٠ )




و الجزء المظلل بالشكل المقابل يمثل مجموعة حل المتباينات بيانياً

و هو منطقة محدودة بخط منكسر به النقط ا، ب ، جـ

حيث : ا( ٤ ، ٠) ، ب ( ٢ ، ١) ، جـ( ٠ ، ٣ )

∵ ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

∴ را = ٧٥ × ٤ + ٥٠ × ٠ = ٣٠٠

، رب = ٧٥ × ٢ + ٥٠ + ١ = ٢٠٠

، رجـ = ٧٥ × ٠ + ٥٠ × ٣ = ١٥٠

∴ أرخص وجبة عند جـ( ٠ ، ٣ ) بحيث تتكون من ٣ وحدات من الصنف الثاني فقط

*******************************************************************************

**تدريب : مطحن لديه ٨٠ كجم من الذرة ، ١٢٠ كجم من القمح ، ينتج نوعين من الدقيق و يضعه في أكياس ، بحيث يلزم للكيس من النوع الأول كيلو واحد من الذرة ، ٣ كجم من القمح . يلزم للكيس من النوع الثاني ٢ كجم من الذرة ، ٢ كجم من القمح . أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحن ليكون دخله أكبر ما يمكن ،**
**علماً بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٤ جنيه ، النوع الثاني ٢ جنيه**

## الحـــــــل

| | النوع الأول س | النوع الثانى ص | الكمية المتاحة |
|---|---|---|---|
| ذرة | ١ | ٢ | ٨٠ |
| قمح | ٣ | ٢ | ١٢٠ |
| الثمن | | | |

∵ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ ص ≤ ٨٠ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢٠

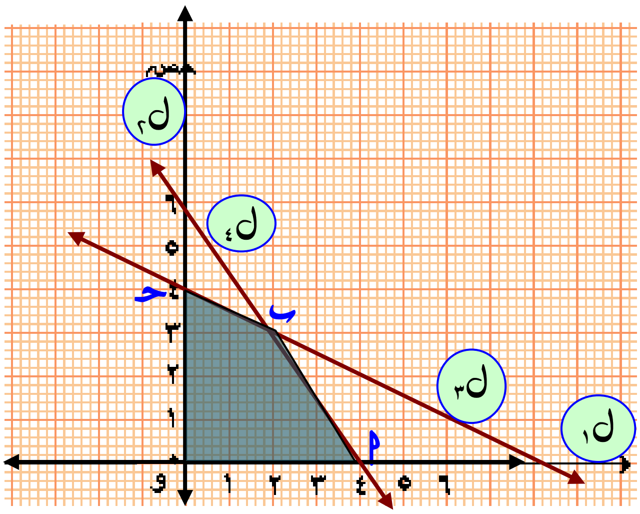
، دالة الهدف : ر = ٤ س + ٢ ص

$ل_1$ : س + ٢ص = ٨٠

يمر بـ ( ٠ ، ٤٠ ) ، ( ٨٠ ، ٠ )

$ل_2$ : ٣س + ٢ص = ١٢٠

يمر بـ ( ٠ ، ٦٠ ) ، ( ٤٠ ، ٠ )




منطقة الحل هى .................. حيث

حيث : أ( ٤٠ ، ٠ ) ، ب ( ٢٠ ، ٣٠ ) ، جـ ( ٠ ، ٤٠ )

∵ ر = ٤ س + ٢ص

∴ $ر_أ$ = ٤ × ٤٠ + ٠ = ١٦٠

، $ر_ب$ = ٤× ٢٠ + ٣٠ ×٢ = ١٤٠

، $ر_{جـ}$ = ٠ + ٤٠ × ٢= ٨٠

∴ أكبر ربح عند أ( ٤ ، ٠ ) بحيث ينتج ٤ أكياس من النوع الأول

منتدى توجيه الرياضيات　إعداد أ/ عادل إدوار

# تمارين

١- عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً ..

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ١٠٠ ، ٢ س + ص ≤ ١٤٠

- ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل ( ل ) أكبر ما يمكن

حيث : ل = ٦ س + ٤ ص

٢- عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً .

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س+ ٢ ص ≤ ٦ ، ٣س + ٢ ص ≤ ١٢

- ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل ( ل ) أكبر ما يمكن

حيث : ل = ٦ س + ٤ ص

٣- عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً .

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س+ ٢ ص ≤ ١١ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢

- ثم أوجد من مجموعة الحل قيم ( س، ص) التي تجعل ( ر ) أقل ما يمكن

حيث : ر = ٣٠س + ٥ ص

٤- ترزي لديه ٨٠ متر من القطن ، ١٢٠ متر من الصوف - ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر من القطن ، ٣متر من الصوف ، و للنوع الثاني يلزم متران من كل من القطن ، الصوف - و كان ثمن الثوب من النوع الأول ٤٠ جنيه ، و ثمن الثوب من النوع الثاني ٢٠جنيه - أوجد عدد الثياب من كل نوع التي يجب أن ينتجها الترزي ليكون دخله اكبر ما يمكن

٥- ينتج مصنع نوعين من النجف١، ب - وكل نجفة يقوم بتجميعها كهربائي ثم يقوم عامل بدهانها بالبرونز - و يأخذ الكهربائي ساعة لتجميع النموذج ١ ، و ساعتين لتجميع النموذج ب - أما عامل الدهان فيأخذ ٣ساعات لدهان النموذج ١ ، ساعة لدهان النموذج ب - و يعمل الكهربائي و عامل الدهان ٦ ساعات يومياً - فإذا كان المصنع يكسب ٢٠ جنيه من بيع الوحدة من النموذج ١ ، ٣٠ جنيه من بيع الوحدة من النموذج ب

- فكم عدد النجف الذي يمكن إنتاجه في اليوم ليعطيه أكبر ربح ممكن

٦- سلعتان غذائيتان الأولي بها ٤ وحدات فيتامين و تعطي ٣ سعرات حرارية - و الثانية بها وحدتان فيتامين و تعطي ٥ سعرات حرارية - فإذا كان المطلوب ٢٤ وحدة فيتامين علي الأقل ، ٣٦ سعر حراري علي الأقل .. و كان سعر الوحدة من السلعة الأولي ١٠ قروش ، سعر الوحدة من السلعة الثانية ١٥ قرش

- فما الكمية الواجب شراؤها من كلا السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة

٧- مصنع لأنتاج الحلوي لديه ٧٢ كجم من الدقيق ، ١٢٠ كجم من السكر ، و ينتج نوعين من الحلوي - تحتاج الوحدة من النوع الأول ٤كجم دقيق ، ١٢ كجم سكر ، يحتاج إنتاج وحدة من النوع الثاني ٨كجم دقيق ، ٨ كجم سكر - كما يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول ٢٥جنيه، ومن النوع الثاني٤٥ جنيه - فما هي الكمية الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أقصي ربح

٨- يراد وضع نوعين من الكتب علي ا، ب علي رف مكتبه طوله ١٠٢ سم ، و حمولته القصوي ٢٥ كجم . - فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١ كجم ، و سمك الكتاب من النوع ا هو ٨سم ، و من النوع ب هو ٦ سم

- أوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع علي الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن

٩- ينتج مصنع نوعين من قطع الغيار ا ، ب ، فإذا كان إنتاج قطعة من النوع الأول يلزم تشغيل ماكينتين الأولي لمدة ٣ساعات و الثانية لمدة ٣ساعات - و لأنتاج قطعة من النوع ب يلزم تشغيل الماكينة الأولي لمدة ٤ساعات و الثانية لمدة ساعتين - فإذا كانت الماكينة الأولي لا تعمل أكثر من ٨ساعات يومياً ، و الثانية لاتعمل أكثر من ١٢ ساعة يومياً - و كان المصنع يكسب ٢٤جنيه من كل قطعة من النوع ا، ساعة يومياً - و كان المصنع يكسب ٢٤جنيه من كل قطعة من النوع ا، ٤٠ جنيه من كل قطعة من النوع ب - فأوجد أكبر ربح يمكن أن يحصل عليه المصنع في اليوم الواحد

١٠- مصنع صغير به ١٢ آلة و ٢٠ عامل و كان المصنع ينتج نوعين من السلع فإذا كان إنتاج الوحدة من السلعة (ا) تحتاج إلي آلة واحدة ، و عاملين - و إنتاج وحدة من السلعة (ب) تحتاج ٣ آلات و عاملين - وأن سعر الوحدة من السلعة أ هو ١٠ جنيه ، سعر الوحدة من السلعة ب هو ٢٠ جنيه - المطلوب : تحديد الانتاج الأمثل لهذا المصنع لتحقيق أعلي إيراد ممكن .

١١- طائرة بها ٤ مقاعد للركاب ، فإذا كان راكب الدرجة الأولي يسمح له بحمل ٦٠ كجم و يدفع ٥٠٠٠جنيه ، و راكب الدرجة الثانية يحمل ٢٠كجم و يدفع ٢٥٠٠جنيه إذا كان أكبر وزن للأمتعة هو ١٢٠ كجم .. - فأوجد عدد الركاب من كل درجة الذي يحقق أكبر دخل من الأجور