الوحدة الثانية
الأعـــــداد المركبة

✸ مراجعة على ماسبق:

سبق أن درسنا الأعداد المركبة وعلمنا أن العدد المركب هو العدد الذى يكون على الصورة:

$$ع = س + ص ت \quad \text{حيث: } س، ص \in ح \ ،\ ت^2 = \sqrt{-1}$$

وأن مجموعة الأعداد المركبة ك تعرف كالآتى

$$ك = \{س + ص ت : س، ص \in ح \ ، \ ت^2 = -1\}$$

وأن القوى الصحيحة للعدد (ت) هى احدى القيم ت أو -1 أو $-$ ت أو 1

وهذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤ أى أنه إذا كان $ن \in ص^+$ فإن:

$$ت^{4ن} = 1 \quad ، \quad ت^{4ن+1} = ت \quad ، \quad ت^{4ن+2} = -1 \quad ، \quad ت^{4ن+3} = -ت$$

أى أنه لإيجاد قيم ت نحذف ٤ ومضاعفاتها من الأس الموجب أو نضيف ٤ ومضاعفاتها للأس السالب

وعلمنا أن العمليات الرياضية تتم على الأعداد المركبة كما يلى:

✸ تساوى عددين مركبين:

إذا كان $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

فإن $ع_1 = ع_2$ إذا كان $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$ أى أنه:

إذا تساوى عددين مركبين فإن: الحقيقى للأول = الحقيقى للثانى ، التخيلى للأول = التخيلى للثانى

نتيجة:

إذا كان $س + ص ت = 0$ فأن $س = 0$ ، $ص = 0$

أى انه اذا كان العدد المركب يساوى صفر فإن الحقيقى = صفر ، التخيلى = صفر

✸ جمع عددين مركبين:

إذا كان $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

فإن $ع_1 + ع_2 = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2) ت$ أى انه:

عند جمع عددين مركبين نـجمع: الحقيقى للأول مع الحقيقى للثانى ، التخيلى للأول مع التخيلى للثانى

✸ ضرب عددين مركبين:

إذا كان $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

فإن $ع_1 \times ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + (س_1 ص_2 + س_2 ص_1) ت$

أو يتم ضرب العددين كأقواس عادية باستخدام خاصية التوزيع مع ملاحظة أن $ت^2 = -1$

✸ بعض خصائص الجمع والضرب فى ك :

١) عملية الجمع أبدالية فى ك اى أن $ع_1 + ع_2 = ع_2 + ع_1 \quad \forall \quad ع_1 ، ع_2 \in ك$

٢) الصفر هو المحايد الجمعى فى ك اى أن $ع + ٠ = ٠ + ع \quad \forall \quad ع \in ك$

٣) المعكوس الجمعى للعدد $ع = س + ت ص$ هو العدد $- ع = - س - ت ص$

ويكون $ع + (- ع) = ٠ \quad \forall \quad ع \in ك$

٤) عملية الطرح ممكنة فى ك اى أن $ع_1 - ع_2 = ع_1 + (- ع_2) \quad \forall \quad ع_1 ، ع_2 \in ك$

٥) عملية الضرب أبدالية فى ك اى أن $ع_1 \times ع_2 = ع_2 \times ع_1 \quad \forall \quad ع_1 ، ع_2 \in ك$

٦) عملية الضرب دامجة فى ك

اى أن $(ع_1 \times ع_2) \times ع_3 = ع_1 \times (ع_2 \times ع_3) \quad \forall \quad ع_1 ، ع_2 ، ع_3 \in ك$

٧) الواحد الصحيح هو المحايد الضربى فى ك اى أن $ع \times ١ = ١ \times ع \quad \forall \quad ع \in ك$

٨) المعكوس الضربى للعدد $ع = س + ص ت$ هو العدد $\frac{١}{ع}$ أو $ع^{-١}$ حيث

$$\frac{١}{ع} = ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢} ت \quad \text{ويكون} \quad ع \times \frac{١}{ع} = ١ \quad \forall \quad ع \in ك$$

٩) الضرب توزيعى على الجمع فى ك

اى أن $ع_1 \times (ع_2 + ع_3) = ع_1 \times ع_2 + ع_1 \times ع_3 \quad \forall \quad ع_1 ، ع_2 ، ع_3 \in ك$

✸ مرافق العدد المركب:

إذا كان العدد $ع = س + ص ت$ فإن مرافق العدد ع ورمزه $\bar{ع}$ ويكون $\bar{ع} = س - ص ت$

أى أن: العددان المترافقان يختلفان فقط فى إشارة الجزء التخيلى ولإيجاد مرافق العدد نغير اشارة التخيلى فقط

✸ خواص العددان المترافقان:

١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقى = ضعف الجزء الحقيقى

لأن $ع + \bar{ع} = (س + ص ت) + (س - ص ت) = ٢ س$

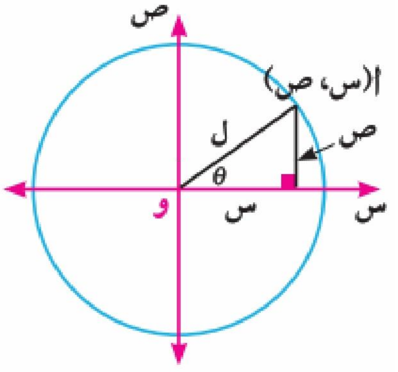
٢) حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد حقيقى = مربع الحقيقى + مربع التخيلى

لأن $ع \times \bar{ع} = (س + ص ت) \times (س - ص ت) = س^٢ + ص^٢$

٣) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما أى أن $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$

٤) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما أى أن $\overline{ع_1 \times ع_2} = \bar{ع}_1 \times \bar{ع}_2$

٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب



✱ الإحداثيات القطبية والديكارتية:

الشكل المقابل يمثل النظام الإحداثى (الديكارتى)
والنقطة ا احداثياتها الديكارتية (س ، ص)
ومن الشكل نلاحظ أن النقطة ا تبعد عن نقطة الأصل مسافة ل
وتصنع زاوية θ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات
لذلك يمكن التعبير عن النقطة ا بالصورة:

$$\boxed{\text{ا} = (\text{ل} ، \theta)}$$

وتعرف هذه الصورة بالإحداثيات القطبية للنقطة ا

✱ تحويل الإحداثيات القطبية الى ديكارتية والعكس:

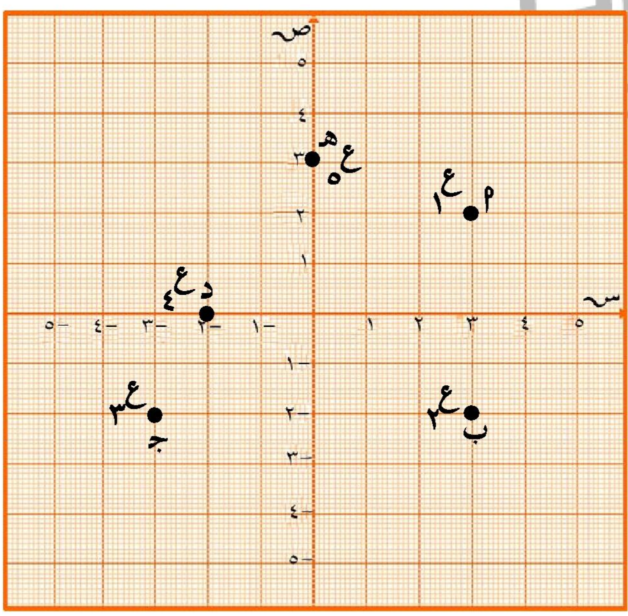
إذا كانت الأحداثيات القطبية للنقطة ا هى (ل ، θ)
فإن الأحداثيات الديكارتية للنقطة ا هى (س ، ص) حيث س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

$$\boxed{\therefore (\text{س}، \text{ص}) = (\text{ل جتا}\,\theta ، \text{ل جا}\,\theta)}$$

وإذا كانت الأحداثيات الديكارتية للنقطة ا هى (س ، ص)
فإن الأحداثيات القطبية للنقطة ا هى (ل ، θ) حيث ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$$\boxed{\therefore (\text{ل} ، \theta) = \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} ، \text{ظا}^{-1}\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)}$$

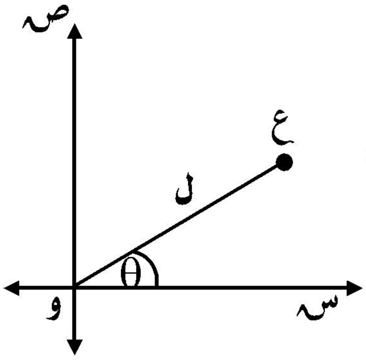
✱ مستوى ارجاند ـ التمثيل البيانى للعدد المركب:



يتم تمثيل العدد المركب ع = س + ت ص
على نظام مكون من محورى الشبكة التربيعية
حيث يمثل المحور الأفقى الجزء الحقيقى (س)
ويمثل المحور الرأسى الجزء التخيلى (ص)
العدد $ع_1$ = ٣ + ٢ت تمثلة النقطة ا
والعدد $ع_2$ = ٣ − ٢ت تمثلة النقطة ب
والعدد $ع_3$ = −٣ − ٢ت تمثلة النقطة جـ
والعدد $ع_4$ = −٢ تمثلة النقطة د
والعدد $ع_5$ = ٣ت تمثلة النقطة هـ

ونلاحظ أن:

- العدد ومرافقه يكونا متماثلان بالنسبة للمحور الأفقى مثل $ع_1$ ، $ع_2$
- العدد ومعكوسه الجمعى يكونا متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل مثل $ع_1$ ، $ع_3$
- العدد الحقيقى البحت يقع على المحور الأفقى مثل $ع_4$
- العدد التخيلى البحت يقع على المحور الرأسى مثل $ع_5$



✱ المقياس والسعه للعدد المركب:

إذا كان العدد المركب $ع = س + ص ت$ تمثله النقطة ع فى مستوى أرجاند

فإن:

مقياس العدد $ع = |ع|$ = بعده عن نقطة الأصل ويرمز له بالرمز ل ويكون

$$ل = |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$$

والزاوية θ التى يصنعها العدد ع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات تسمى سعة العدد المركب ويكون:

$$ظا\theta = \frac{ص}{س} \quad \Leftarrow \quad \therefore \theta = ظا^{-1}\frac{ص}{س}$$

✱ الصورة المثلثية للعدد المركب:

إذا كان $ع = س + ص ت$ عددا مركبا مقياسه ل وسعته الأساسية θ حيث $\theta \in]-\pi ، \pi]$

فإن: $س = ل جتا\theta$ ، $ص = ل جا\theta$ وبالتالى فإن العدد ع يكتب بالصورة

$$ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$$

وتعرف هذه الصورة بالصورة المثلثية للعدد المركب

حيث $ل = |ع| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ، $ظا\theta = \frac{ص}{س}$ ويتحدد قياس θ تبعا لإشارة س، ص كمايلى:

أ) $س > ٠$ ، $ص > ٠$ فإن θ تقع فى الربع الأول $\theta = ظا^{-1}(\frac{ص}{س})$

ب) $س < ٠$ ، $ص > ٠$ فإن θ تقع فى الربع الثانى $\theta = \pi + ظا^{-1}(\frac{ص}{س})$

ج) $س < ٠$ ، $ص < ٠$ فإن θ تقع في الربع الثالث $\theta = -\pi + ظا^{-1}(\frac{ص}{س})$

د) $س > ٠$ ، $ص < ٠$ فإن θ تقع فى الربع الرابع $\theta = ظا^{-1}(\frac{ص}{س})$

مثـــال: أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_1 = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت (ب) $ع_2 = ١ - \sqrt{٣}$ ت (جـ) $ع_3 = -\sqrt{٣}$ ت (د) $ع_4 = ٥$

الحـــل:

(أ) $ع_1 = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت

∵ $س = \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٢}$ ∴ $ع_1$ يقع فى الربع الأول

$$∴ ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(\sqrt{٢})^٢ + (\sqrt{٢})^٢} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$، \theta = ظا^{-١} \frac{ص}{س} = ظا^{-١} \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ظا^{-١}(١) = \frac{\pi}{٤}$$

(ب) $ع_2 = ١ - \sqrt{٣}$ ت

∵ $س = ١$ ، $ص = -\sqrt{٣}$ ∴ $ع_2$ يقع فى الربع الرابع

$$∴ ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤} = ٢$$

$$، \theta = ظا^{-١} \frac{ص}{س} = ظا^{-١} \frac{-\sqrt{٣}}{١} = ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = -\frac{\pi}{٣}$$

(جـ) $ع_3 = -\sqrt{٣}$ ت

∵ $س = ٠$ ، $ص = -\sqrt{٣}$ ∴ $ع_3$ يقع على محور $ص^-$

$$∴ ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٠)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٣} \quad ، \quad \theta = \frac{-\pi}{٢}$$

(د) $ع_4 = ٥$

∵ $س = ٥$ ، $ص = ٠$ ∴ $ع_4$ يقع على محور $س^+$

$$∴ ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٥)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥ \quad ، \quad \theta = ٠$$

✸ ملاحظات:

١) إذا كان $س > ٠$ ، $ص = ٠$ فإن ع عدد حقيقى بحت ويقع على محور $س^+$ وتكون $\theta = ٠$
٢) إذا كان $س < ٠$ ، $ص = ٠$ فإن ع عدد حقيقى بحت ويقع على محور $س^-$ وتكون $\theta = \pi$
٣) إذا كان $س = ٠$ ، $ص > ٠$ فإن ع عدد تخيلى بحت ويقع على محور $ص^+$ وتكون $\theta = \frac{\pi}{٢}$
٤) إذا كان $س = ٠$ ، $ص < ٠$ فإن ع عدد تخيلى بحت ويقع على محور $ص^-$ وتكون $\theta = \frac{-\pi}{٢}$

✸ خواص المقياس والسعه للعدد المركب:

لكل عدد مركب ع = س + صت مقياسه |ع| = ل وسعته θ يكون:

١) $|ع| \geq ٠$

٢) سعة العدد المركب تأخذ عدد لانهائى من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة

اى أن سعة العدد المركب = $\theta + ٢\pi ن$ حيث ن ∍ ص

٣) $|ع| = |-ع| = |\bar{ع}| = |-\bar{ع}|$ حيث $\bar{ع}$ هو مرافق العدد ع

٤) $|ع\bar{ع}| = |ع|^٢ = |\bar{ع}|^٢$

مثـــال: اكتب كل من الأعداد الأتية فى الصورة المثلثية:

(أ) $ع_١ = ٨$ (ب) $ع_٢ = ٥ت$ (جـ) $ع_٣ = -٣ - ٣ت$

الحـــل:

(أ) $ع_١ = ٨$

∵ س = ٨ ، ص = ٠ ∴ $ع_١$ يقع على محور $\overset{\sim}{س}^+$

∴ ل = |س| = |٨| = ٨ ، $\theta = ٠$

∵ ع = ل (جتاθ + ت جاθ) ← ∴ $ع_١ = ٨$ (جتا ٠ + ت جا ٠)

(ب) $ع_٢ = ٥ت$

∵ س = ٠ ، ص = ٥ ∴ $ع_٢$ يقع على محور $\overset{\sim}{ص}^+$

∴ ل = |ص| = |٥| = ٥ ، $\theta = \frac{\pi}{٢}$

∵ ع = ل (جتاθ + ت جاθ) ← ∴ $ع_٢ = ٥$ (جتا$\frac{\pi}{٢}$ + ت جا$\frac{\pi}{٢}$)

(جـ) $ع_٣ = -٣ - ٣ت$

∵ س = -٣ ، ص = -٣ ∴ $ع_٣$ يقع فى الربع الثالث

∴ $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{١٨} = ٢\sqrt{٣}$

، $\theta = -\pi + ظا^{-١}\frac{ص}{س} = -\pi + ظا^{-١}(\frac{-٣}{-٣}) = -\pi + \frac{\pi}{٤} = -\frac{٣\pi}{٤}$

∵ ع = ل (جتاθ + ت جاθ) ← ∴ $ع_٣ = ٢\sqrt{٣}$ (جتا$(\frac{-٣\pi}{٤})$ + ت جا$(\frac{-٣\pi}{٤})$)

ملاحظة هامة:

عند تحديد السعة الأساسية للعدد المركب يجب أن يكون العدد على الصورة المثلثية القياسية

$$\boxed{ع = ل\left(جتا\theta + ت\ جا\theta\right)}$$

والتى تحقق أن: ١ـ جميع الإشارات موجبة ٢ـ جتا فى الحقيقى و جا فى التخيلى

وضع العدد المركب على الصورة المثلثية القياسية:

اولا: إذا وجدت إشارة سالبة

١ـ نأخذ اشارة الحقيقى (س) واشارة التخيلى (ص) الموجودتان (الظاهرتان) فى العدد

٢ـ ننسب الزوايا الى π ، $-\pi$ لضبط سعة العدد كما يلى:

- إذا كان س < ٠ ، ص > ٠ فإن: $\theta = \pi -$ الزاوية الموجودة فى العدد
- إذا كان س < ٠ ، ص < ٠ فإن: $\theta = -\pi +$ الزاوية الموجودة فى العدد
- إذا كان س > ٠ ، ص < ٠ فإن: $\theta = -$ الزاوية الموجودة فى العدد

ثانيا: إذا اختلف وضع جتا و جا

٣ـ نأخذ اشارة الحقيقى (س) واشارة التخيلى (ص) الموجودتان (الظاهرتان) فى العدد

١ـ ننسب الزوايا الى $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$ لضبط سعة العدد كما يلى:

- إذا كان س > ٠ ، ص > ٠ فإن: $\theta = \frac{\pi}{٢} -$ الزاوية الموجودة فى العدد
- إذا كان س < ٠ ، ص > ٠ فإن: $\theta = \frac{\pi}{٢} +$ الزاوية الموجودة فى العدد
- إذا كان س < ٠ ، ص < ٠ فإن: $\theta = \frac{-\pi}{٢} -$ الزاوية الموجودة فى العدد
- إذا كان س > ٠ ، ص < ٠ فإن: $\theta = \frac{-\pi}{٢} +$ الزاوية الموجودة فى العدد

مثـــال: أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_١ = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٣} - ت\ جا\frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) $ع_٢ = \frac{-١}{\sqrt{٢}}\left(جا ٤٥^\circ - ت\ جتا ٤٥^\circ\right)$

الحـــل:

(أ) $ع_١ = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٣} - ت\ جا\frac{\pi}{٣}\right)$

∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_١$ يقع فى الربع الرابع

$\because$ جتا $\frac{\pi}{3}$ − ت جا $\frac{\pi}{3}$ = جتا $(\frac{-\pi}{3})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{3})$

$\therefore$ ع$_1$ = ٢ (جتا $(\frac{-\pi}{3})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{3})$)

$\therefore$ مقياس العدد ع$_1$ = ٢ والسعة الأساسية $\theta = \frac{-\pi}{3}$

(ب) ع$_2$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (جا ٤٥° − ت جتا ٤٥°)

$\therefore$ ع$_2$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (− جا ٤٥° + ت جتا ٤٥°)

$\because$ س < ٠ ، ص > ٠ $\therefore$ ننسب الزوايا باستخدام $\frac{\pi}{2}$ = ٩٠° لتعديل وضع جتا ، جا

$\therefore$ ع$_2$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جتا (٩٠° + ٤٥°) + ت جا (٩٠° + ٤٥°))

$\therefore$ ع$_2$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°)

$\therefore$ مقياس العدد ع$_2$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ والسعة الأساسية θ = ١٣٥°

تذكر أن

جتا θ − ت جا θ =
جتا $(-\theta)$ + ت جا $(-\theta)$

تذكر أن

جا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = جتا θ
جتا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = − جا θ
جا $(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ = − جتا θ
جتا $(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ = جا θ

★ ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية:

إذا كان ع$_1$ = ل$_1$ (جتا θ_1 + ت جا θ_1) ، ع$_2$ = ل$_2$ (جتا θ_2 + ت جا θ_2) فإن:

$$\boxed{\text{١) } ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 \left(\text{جتا}(\theta_1+\theta_2) + \text{ت جا}(\theta_1+\theta_2)\right)}$$

أى أن $|ع_1 ع_2| = ل_1 ل_2 = |ع_1| |ع_2|$

أى أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مقياسيهما = ل$_1$ ل$_2$

وسعة حاصل ضرب عددين مركبين = مجموع سعتيهما = $\theta_1 + \theta_2$

$$\boxed{\text{٢) } \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} \left(\text{جتا}(\theta_1-\theta_2) + \text{ت جا}(\theta_1-\theta_2)\right)}$$

أى أن $\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{ل_1}{ل_2} = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$

أى أن مقياس خارج قسمة عددين مركبين = مقياس البسط ÷ مقياس المقام = $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$

وسعة خارج قسمة عددين مركبين = سعة البسط − سعة المقام = $\theta_{١} - \theta_{٢}$

مثال:

عبر عن $٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{١٥} + \text{ت جا}\frac{\pi}{١٥}\right) \times ٣\left(\text{جتا}\frac{-٢\pi}{٥} + \text{ت جا}\frac{-٢\pi}{٥}\right)$ بالصورة س + ت ص

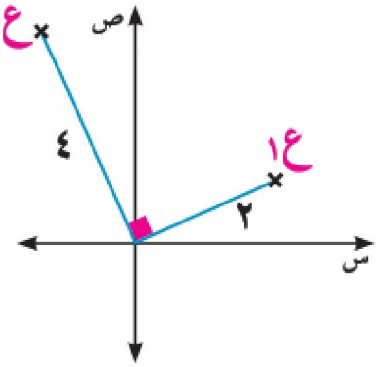
الحل:

$$٢\left(\text{جتا}\frac{\pi}{١٥} + \text{ت جا}\frac{\pi}{١٥}\right) \times ٣\left(\text{جتا}\frac{-٢\pi}{٥} + \text{ت جا}\frac{-٢\pi}{٥}\right)$$

$$= ٢ \times ٣\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{١٥} + \frac{-٢\pi}{٥}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{١٥} + \frac{-٢\pi}{٥}\right)\right)$$

$$= ٦\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right) = ٦\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}\right) = ٣ - ٣\sqrt{٣}\,\text{ت}$$

مثال:



باستخدام مستوى ارجاند المقابل أوجد $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}}$ بالصورة س + ت ص

الحل:

من الرسم نجد أن $|ع_{١}| = ٢$ وسعة $ع_{١}$ نفرض أنها θ

، $|ع_{٢}| = ٤$ وسعة $ع_{٢} = ٩٠^\circ + \theta$

$$\therefore ع_{١} = ٢(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta) \quad ، \quad ع_{٢} = ٤(\text{جتا}(٩٠^\circ + \theta) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + \theta))$$

$$\therefore \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{٤(\text{جتا}(٩٠^\circ + \theta) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + \theta))}{٢(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta)}$$

$$= ٢(\text{جتا}(٩٠^\circ + \theta - \theta) + \text{ت جا}(٩٠^\circ + \theta - \theta))$$

$$= ٢(\text{جتا}\,٩٠^\circ + \text{ت جا}\,٩٠^\circ) = ٢(٠ + \text{ت} \times ١) = ٢\text{ت}$$

✸ نتائج :

١) إذا كان $ع = ل(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)$ فإن:

أ) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل}(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta))$

ب) $ع^{2} = ل^{2}(\text{جتا}2\theta + \text{ت جا}2\theta)$

٢) يمكن تعميم حاصل ضرب عدد محدود من الأعداد المركبة فإذا كان:

$ع_1 = ل_1(\text{جتا}\theta_1 + \text{ت جا}\theta_1)$ ، $ع_2 = ل_2(\text{جتا}\theta_2 + \text{ت جا}\theta_2)$ ، ...... ، $ع_ن = ل_ن(\text{جتا}\theta_ن + \text{ت جا}\theta_ن)$

فإن:

$$ع_1 ع_2 \cdots ع_ن = ل_1 ل_2 \cdots ل_ن\left(\text{جتا}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_ن) + \text{ت جا}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_ن)\right)$$

حالة خاصة

إذا كان $ع = ل(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)$ فإن: $ع^{ن} = ع \times ع \times ع \times \cdots$ الى ن من المرات

$$\therefore ع^{ن} = ل^{ن}(\text{جتا ن}\theta + \text{ت جا ن}\theta)$$

مثـــال:

إذا كان $ع_1 = 2(\text{جتا }10^\circ + \text{ت جا }10^\circ)$ ، $ع_2 = 3(\text{جتا }40^\circ + \text{ت جا }40^\circ)$

أوجد العدد $ع_1^{4} ع_2^{2}$ على الصورة $س + ت ص$

الحـــل:

$\because ع_1 = 2(\text{جتا }10^\circ + \text{ت جا }10^\circ)$

$\therefore ع_1^{4} = 2^{4}(\text{جتا }4\times10^\circ + \text{ت جا }4\times10^\circ) = 16(\text{جتا }40^\circ + \text{ت جا }40^\circ)$

$\because ع_2 = 3(\text{جتا }40^\circ + \text{ت جا }40^\circ)$

$\therefore ع_2^{2} = 3^{2}(\text{جتا }2\times40^\circ + \text{ت جا }2\times40^\circ) = 9(\text{جتا }80^\circ + \text{ت جا }80^\circ)$

$\therefore ع_1^{4} ع_2^{2} = 16(\text{جتا }40^\circ + \text{ت جا }40^\circ) \times 9(\text{جتا }80^\circ + \text{ت جا }80^\circ)$

$= 16 \times 9(\text{جتا}(40^\circ + 80^\circ) + \text{ت جا}(40^\circ + 80^\circ))$

$= 144(\text{جتا }120^\circ + \text{ت جا }120^\circ) = 144(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}) = -72 + 72\sqrt{3}\text{ ت}$

✸ الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر):

كل دالة فى المتغير س يمكن التعبير عنها كمتسلسلة من قوى س تسمى متسلسلة تايلور وفيمايلى مفكوك تايلور لبعض الدوال:

١) دالة الجيب $\text{ص} = \text{جاس}$

$$\text{جاس} = \frac{\text{س}}{١!} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} - \cdots\cdots + (-١)^{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{٢\text{ن}+١}}{(٢\text{ن}+١)!} + \cdots$$

دالة الجيب دالة فردية لأن $\text{جا}(-\text{س}) = -\text{جاس}$ لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الفردية

٢) دالة جيب التمام $\text{ص} = \text{جتاس}$

$$\text{جتاس} = ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} - \cdots\cdots + (-١)^{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{٢\text{ن}}}{(٢\text{ن})!} + \cdots$$

دالة جيب التمام دالة زوجية لأن $\text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتاس}$ لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الزوجية

٣) الدالة الأسية $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$$\text{هـ}^{\text{س}} = ١ + \frac{\text{س}}{١!} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \cdots\cdots + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} + \cdots$$

و بوضع $\text{ت}\text{س}$ بدلا من س نجد أن:

$$\text{هـ}^{\text{ت}\text{س}} = ١ + \frac{\text{ت}\text{س}}{١!} + \frac{\text{ت}^{٢}\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{ت}^{٣}\text{س}^{٣}}{٣!} + \cdots\cdots + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} + \cdots$$

$$= ١ + \frac{\text{ت}\text{س}}{١!} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} - \frac{\text{ت}\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} + \frac{\text{ت}\text{س}^{٥}}{٥!} \cdots\cdots$$

$$= \left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{٢!} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤!} \cdots\cdots\right) + \text{ت}\left(\frac{\text{س}}{١!} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣!} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥!} \cdots\cdots\right)$$

$$\boxed{\therefore \text{هـ}^{\text{ت}\text{س}} = \text{جتاس} + \text{ت جاس}}$$

$\therefore$ العدد المركب $\text{ع} = \text{س} + \text{ص}\text{ت} = \text{ل}\,(\text{جتا}\theta + \text{ت}\text{جا}\theta)$

يمكن أن يكتب بالصورة $\boxed{\text{ع} = \text{ل}\,\text{هـ}^{\text{ت}\theta}}$ حيث θ بالقياس الدائرى

وتسمى هذه الصورة بالصورة الأسية أو صورة أويلر

بوضع $\text{س} = \pi$

$\therefore \text{هـ}^{\text{ت}\pi} = \text{جتا}\pi + \text{ت}\text{جا}\pi$

$\therefore \text{هـ}^{\text{ت}\pi} = -١ + ٠$

$\boxed{\therefore \text{هـ}^{\text{ت}\pi} + ١ = ٠}$

وهذه هى معادلة اويلر وهى تربط بين اشهر ٥ ثوابت

$\therefore$ الصور المختلفة للعدد المركب هى:

الصورة الجبرية او الكارتيزية	الصورة المثلثية أو القطبية	الصورة الآسية أو صورة اويلر
$ع = س + ت ص$	$ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$	$ع = ل\ هـ^{\theta ت}$

ملاحظة هامة:

سعة العدد (θ) يمكن استخدامها بالقياس الستينى او القياس الدائرى فى الصورة المثلثية
اما فى الصورة الأسية فيجب أن تكون سعة العدد (θ) بالقياس الدائرى فقط اى بدلالة π

تذكر أن:

القانون $\boxed{\dfrac{\theta^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\theta^{د}}{\pi}}$ يستخدم للتحويل من القياس الستينى الى الدائرى و العكس

ولأيجاد الزاوية بدلالة π نستخدم الصورة : $\theta^{د} = \dfrac{\theta^\circ \times \pi}{180^\circ}$ ونترك π كما هى ولانضع قيمتها

مثـــال: إذا كان $ع = \dfrac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}$ فاكتب العدد $ع$ بالصورة الأسية

الحـــل:

$\because ع = \dfrac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}$ وبضرب البسط والمقام فى مرافق المقام

$$\therefore ع = \frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{\sqrt{2}\,ت - \sqrt{2}\,ت^2}{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,ت$$

$\because س = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ، $ص = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore ع$ يقع فى الربع الأول

$$\therefore ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$، \theta = ظا^{-1}\frac{ص}{س} = ظا^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\because ع = ل\ هـ^{\theta ت}$ $\leftarrow$ $\therefore ع = 1 \times هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$ $\leftarrow$ $\therefore ع = هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية:

إذا كان $ع_1 = ل_1 هـ^{\theta_1 ت}$ ، $ع_2 = ل_2 هـ^{\theta_2 ت}$ فإن:

❶ $ع_1 \times ع_2 = ل_1 هـ^{\theta_1 ت} \times ل_2 هـ^{\theta_2 ت} = ل_1 ل_2 هـ^{(\theta_1 + \theta_2)ت}$

❷ $ع_1 \div ع_2 = ل_1 هـ^{\theta_1 ت} \div ل_2 هـ^{\theta_2 ت} = \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{(\theta_1 - \theta_2)ت}$

مثـــال: إذا كان $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = 1 + ت$ فاوجد كل ممايأتى بالصورة الأسية

(أ) $ع_1 ع_2$ (ب) $\frac{ع_2}{ع_1}$ (جـ) $(ع_2)^6$

الحـــل:

$\because ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ $\therefore س = 1$ ، $ص = -\sqrt{3}$ $\therefore ع_1$ يقع فى الربع الرابع

$\therefore ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

، $\theta = ظا^{-1} \frac{ص}{س} = ظا^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = \frac{-\pi}{3}$ ← $\boxed{\therefore ع_1 = 2 هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}}$

$\because ع_2 = 1 + ت$ $\therefore س = 1$ ، $ص = 1$ $\therefore ع_2$ يقع فى الربع الأول

$\therefore ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

، $\theta = ظا^{-1} \frac{ص}{س} = ظا^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$ ← $\boxed{\therefore ع_2 = \sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت}}$

(أ) $ع_1 ع_2 = 2 هـ^{\frac{-\pi}{3}ت} \times \sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت} = 2\sqrt{2} هـ^{(\frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{4})ت} = 2\sqrt{2} هـ^{\frac{-\pi}{12}ت}$

(ب) $\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{\sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت}}{2 هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}} = \frac{\sqrt{2}}{2} هـ^{(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})ت} = \frac{\sqrt{2}}{2} هـ^{\frac{7\pi}{12}ت}$

(جـ) $(ع_2)^6 = (\sqrt{2} هـ^{\frac{\pi}{4}ت})^6 = 2^3 هـ^{6 \times \frac{\pi}{4}ت} = 8 هـ^{\frac{3\pi}{2}ت}$

مثـــال: عبر عن $\text{ع} = ٨\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{٦}\text{ت}}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س، ص $\in$ ح

الحـــل:

$\because \text{ع} = ٨\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{٦}\text{ت}}$ $\quad \therefore \text{ل} = ٨ \quad ، \quad \theta = \frac{\pi}{٦}$

$\because \text{ع} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)$

$\therefore \text{ع} = ٨\,(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}) = ٨\,(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{ت}) = ٤\sqrt{٣} + ٤\text{ت}$

مثـــال: إذا كان $\text{ع}_١ = \text{جتا}\,٧٥^\circ + \text{ت}\,\text{جا}\,٧٥^\circ$ ، $\text{ع}_٢ = \text{جتا}\,١٥^\circ + \text{ت}\,\text{جا}\,١٥^\circ$
فاوجد الصورة المثلثية للعدد $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢$

الحـــل:

$\because \text{ع}_١ = \text{جتا}\,٧٥^\circ + \text{ت}\,\text{جا}\,٧٥^\circ \qquad \therefore \text{ع}_١ = (\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}) + (\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤})\text{ت}$

$\because \text{ع}_٢ = \text{جتا}\,١٥^\circ + \text{ت}\,\text{جا}\,١٥^\circ \qquad \therefore \text{ع}_٢ = (\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}) + (\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤})\text{ت}$

$\therefore \text{ع}_١ + \text{ع}_٢ = (\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}) + (\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤})\text{ت} + (\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}) + (\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤})\text{ت}$

$= \frac{٢\sqrt{٦}}{٤} + \frac{٢\sqrt{٦}}{٤}\,\text{ت} = \frac{\sqrt{٦}}{٢} + \frac{\sqrt{٦}}{٢}\,\text{ت}$

$\therefore \text{س} = \frac{\sqrt{٦}}{٢} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\sqrt{٦}}{٢} \qquad \therefore \text{ع}_١ + \text{ع}_٢$ يقع فى الربع الأول

$\therefore \text{ل} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{(\frac{\sqrt{٦}}{٢})^٢ + (\frac{\sqrt{٦}}{٢})^٢} = \sqrt{٣}$

$، \quad \theta = \text{ظا}^{-١}\,\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ظا}^{-١}\,(١) = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \text{ع}_١ + \text{ع}_٢ = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta) = \sqrt{٣}\,(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤} + \text{ت}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٤})$

مثـــال: إذا كان ع $\in$ ك وكان $\text{ع} + \frac{١}{\text{ع}} = ٢\,\text{جتا}\,\theta$ اثبت أن: $\text{ع}^٤ + \frac{١}{\text{ع}^٤} = ٢\,\text{جتا}\,٤\theta$

✍ الحـــل:

$\because \text{ع} + \frac{1}{\text{ع}} = 2\,\text{جتا}\,\theta$ بضرب الطرفين $\times$ ع $\therefore \text{ع}^2 + 1 = 2\text{ع}\,\text{جتا}\,\theta$

$\therefore \text{ع}^2 - 2\text{ع}\,\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 0$ $\therefore (\text{ع} - \text{جتا}\,\theta)^2 + \text{جا}^2\theta = 0$

$\therefore (\text{ع} - \text{جتا}\,\theta)^2 = -\,\text{جا}^2\theta$ $\therefore \text{ع} - \text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{-\,\text{جا}^2\theta}$

$\therefore \text{ع} - \text{جتا}\,\theta = \pm\,\text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ $\therefore \text{ع} = \text{جتا}\,\theta \pm \text{ت}\,\text{جا}\,\theta$

$$\therefore \text{ع}^4 + \frac{1}{\text{ع}^4} = (\text{جتا}\,\theta \pm \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)^4 + (\text{جتا}\,\theta \pm \text{ت}\,\text{جا}\,\theta)^{-4}$$

$$= (\text{جتا}\,4\theta \pm \text{ت}\,\text{جا}\,4\theta) + (\text{جتا}(-4\theta) \pm \text{ت}\,\text{جا}(-4\theta))$$

$$= \text{جتا}\,4\theta \cancel{\pm\,\text{ت}\,\text{جا}\,4\theta} + \text{جتا}\,4\theta \cancel{\mp\,\text{ت}\,\text{جا}\,4\theta} = 2\,\text{جتا}\,4\theta$$ وهو المطلوب

ملاحظة:

يمكن إثبات العلاقة السابقة بتربيع الطرفين وإستخدام قوانين ضعف الزاوية (حاول بنفسك)

📖 مثـــال:

اثبت أن: $\text{جتا}\,\theta = \frac{1}{2}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{-\text{ت}}{2}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})$

✍ الحـــل:

$\because \text{هـ}^{\theta\text{ت}} = \text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ (1)

، $\text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = (\text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta))$ $\therefore \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = \text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ (2)

بجمع (1) ، (2)

$\therefore \text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = 2\,\text{جتا}\,\theta$ $\leftarrow$ $\boxed{\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{1}{2}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})}$

بطرح (1) ، (2)

$\therefore \text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = 2\text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ $\leftarrow$ $\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{1}{2\text{ت}}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})$

$\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{1}{2\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{\text{ت}}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})$ $\leftarrow$ $\boxed{\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{-\text{ت}}{2}(\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}})}$

٢ - ٢ نظرية ديموافر

✸ نظرية ديموافر بأس صحيح:

إذا كان ن عدداً صحيحا موجبا فإن:

$$\left(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta\right)^{\text{ن}} = \text{جتا ن}\,\theta + \text{ت جا ن}\,\theta$$

✸ نظرية ديموافر بأس نسبى موجب:

إذا كان ك عدد موجب فإن:

$$\left(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta\right)^{\frac{1}{\text{ك}}} = \text{جتا}\left(\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ك}}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ك}}\right)$$

أى أن المقدار $\left(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta\right)^{\frac{1}{\text{ك}}}$ متعدد القيم نتيجة لتغير قيمة (ر) وفى الحقيقة فإن هذا المقدار له (ك) من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض عن (ر) بالقيم ٠٠٠، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٠٠٠ والتى تجعل السعة $\frac{\theta + 2\text{ر}\pi}{\text{ك}}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

مثـــال: إستخدم نظرية ديموافر للتعبير عن: $\text{جتا}\,3\theta$ ، $\text{جا}\,3\theta$ بدلالة $\text{جتا}\,\theta$ ، $\text{جا}\,\theta$.

الحـــل:

من نظرية ديموافر ∵ $\left(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta\right)^3 = \text{جتا}\,3\theta + \text{ت جا}\,3\theta$ (١)

وبفك الطرف الأيمن باستخدام ذات الحدين

$$\therefore \left(\text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta\right)^3 = \text{جتا}^3\theta + {}^{3}\text{ق}_1\,\text{جتا}^2\theta \times \text{ت جا}\,\theta + {}^{3}\text{ق}_2\,\text{جتا}\,\theta \times (\text{ت جا}\,\theta)^2 + {}^{3}\text{ق}_3(\text{ت جا}\,\theta)^3$$

$$= \text{جتا}^3\theta + 3\,\text{جتا}^2\theta\,\text{جا}\,\theta\,\text{ت} - 3\,\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}^2\theta - \text{جا}^3\theta\,\text{ت}$$

$$= \text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta(1 - \text{جتا}^2\theta) + 3(1 - \text{جا}^2\theta)\,\text{جا}\,\theta\,\text{ت} - \text{جا}^3\theta\,\text{ت}$$

$$= \text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta + 3\,\text{جتا}^3\theta + 3\,\text{جا}\,\theta\,\text{ت} - 3\,\text{جا}^3\theta\,\text{ت} - \text{جا}^3\theta\,\text{ت}$$

$$= (4\,\text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta) + (3\,\text{جا}\,\theta - 4\,\text{جا}^3\theta)\,\text{ت} \quad (2)$$

من (١) ، (٢) وبمساواة الحقيقى بالحقيقى ، والتخيلى بالتخيلى

$$\therefore \boxed{\text{جتا}\,3\theta = 4\,\text{جتا}^3\theta - 3\,\text{جتا}\,\theta} \quad ، \quad \boxed{\text{جا}\,3\theta = 3\,\text{جا}\,\theta - 4\,\text{جا}^3\theta}$$

مثـــال: أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة: $ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$

الحــل:

$\because ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ $\therefore$ س = ٢ ، ص = $٢\sqrt{٣}$ $\therefore ع^{٤}$ يقع فى الربع الأول

$\therefore ل = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(٢)^{٢} + (٢\sqrt{٣})^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$

، $\theta = ظا^{-١}\frac{ص}{س} = ظا^{-١}\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع^{٤} = ٤\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣}\right)$

$\therefore ع = \left[٤\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣}\right)\right]^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{٤}\left(جتا\left(\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤}\right) + ت\,جا\left(\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤}\right)\right)$

عندما ر = ٠ $\therefore ع_{١} = \sqrt[٤]{٤}\left(جتا\left(\frac{\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{\pi}{١٢}\right)\right)$

عندما ر = ١ $\therefore ع_{٢} = \sqrt[٤]{٤}\left(جتا\left(\frac{٧\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{٧\pi}{١٢}\right)\right)$

عندما ر = −١ $\therefore ع_{٣} = \sqrt[٤]{٤}\left(جتا\left(\frac{-٥\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-٥\pi}{١٢}\right)\right)$

عندما ر = −٢ $\therefore ع_{٤} = \sqrt[٤]{٤}\left(جتا\left(\frac{-١١\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-١١\pi}{١٢}\right)\right)$

مثـــال: أوجد جذور المعادلة: $ع^{٤} = ١$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند

الحــل:

$\because ع^{٤} = ١$ ، $\because ١ = جتا ٠ + ت\,جا ٠$

$\therefore ع^{٤} = جتا ٠ + ت\,جا ٠ \leftarrow \therefore ع = (جتا ٠ + ت\,جا ٠)^{\frac{١}{٤}}$

$\therefore ع = \left(جتا\frac{٠ + ٢ر\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٠ + ٢ر\pi}{٤}\right)$

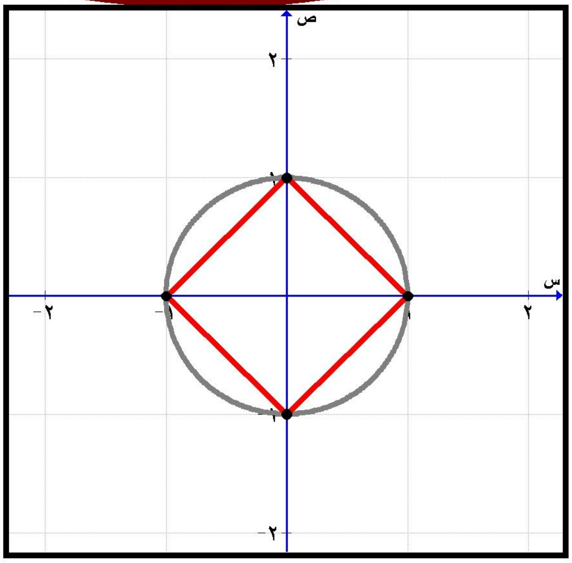
عندما ر = ٠ $\therefore ع_{١} = جتا ٠ + ت\,جا ٠ = ١$

عندما ر = ١ $\therefore ع_{٢} = جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ت$

عندما ر = −١ $\therefore ع_{٣} = جتا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-\pi}{٢}\right) = -ت$

تذكر أن

- ١ = جتا ٠ + ت جا ٠
- −١ = جتا π + ت جا π
- ت = جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$
- −ت = جتا $\frac{-\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{-\pi}{٢}$



عندما $ر = ٢$ $\therefore$ $ع_٤ = \text{جتا}\,\pi + \text{ت جا}\,\pi = -١$

$\therefore$ جذور المعادلة هى: $١ ، ت ، -١ ، -ت$

وبتمثيل الجذور الأربعة على مستوى أرجاند كما بالشكل
نلاحظ أن الجذور الأربعة تقع على دائرة نصف قطرها
يساوى واحد والجذور الأربعة تقسم الدائرة الى أربعة اقسام
متساوية وقياس كل منها $= ٩٠^\circ$
ونلاحظ أن
احداثيات النقط تكون رؤوس مربع

✸ الجذور النونية:

المعادلة $س^ن = أ$ حيث $أ$ عدد مركب يكون لها عدد $(ن)$ من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{١}{ن}}$
ونحصل على هذه الجذور بايجاد الصورة المثلثية للعدد $أ$ ثم تطبيق نظرية ديموافر

خواص الجذور النونية:

١) الجذور تقع جميعها على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$

٢) الجذور تقسم الدائرة الى $(ن)$ من الأقسام المتساوية

٣) الجذور تكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه $(ن)$

٤) قياس الزاوية بين كل جذر والذى يليه $= \dfrac{٣٦٠^\circ}{ن}$

مثـــال: أوجد الجذور السداسية للعدد ١ ومثلها على مستوى أرجاند

الحــل:

الجذور السداسية للعدد ١ هى حل المعادلة $ع^٦ = ١$ ، $\because ١ = \text{جتا}\,٠^\circ + \text{ت جا}\,٠^\circ$

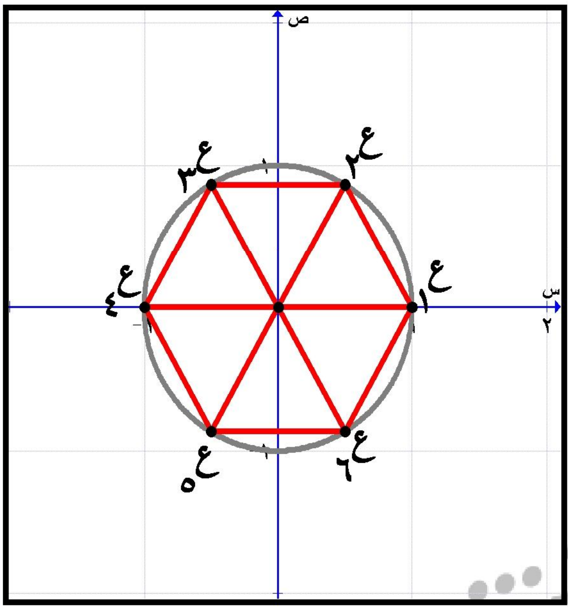
$\therefore ع^٦ = \text{جتا}\,٠^\circ + \text{ت جا}\,٠^\circ \quad \leftarrow \quad \therefore ع = (\text{جتا}\,٠^\circ + \text{ت جا}\,٠^\circ)^{\frac{١}{٦}}$

$\therefore ع = \left(\text{جتا}\,\dfrac{٠^\circ + ٢ر\pi}{٦} + \text{ت جا}\,\dfrac{٠^\circ + ٢ر\pi}{٦}\right)$

نوجد الجذر الأول بوضع $ر = ٠$

$\therefore ع_١ = \text{جتا}\,٠ + \text{ت جا}\,٠ = ١$

$\because$ قياس الزاوية بين كل جذر والتالى له $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



$\therefore$ $ع_2 =$ جتا $60^\circ +$ ت جا $60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

، $ع_3 =$ جتا $120^\circ +$ ت جا $120^\circ = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

، $ع_4 =$ جتا $180^\circ +$ ت جا $180^\circ = -1$

، $ع_5 =$ جتا $240^\circ +$ ت جا 240°

$=$ جتا $-120^\circ +$ ت جا $-120^\circ = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

، $ع_6 =$ جتا $300^\circ +$ ت جا 300°

$=$ جتا $-60^\circ +$ ت جا $-60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

وتمثل الجذور الستة على مستوى أرجاند كما بالشكل ونلاحظ الآتى:

١) الجذور الستة تقع على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها واحد

٢) الجذور الستة تقسم الدائرة الى ٦ أقسام متساوية

٣) الجذور الستة تكون رؤوس سداسى منتظم

✱ الجذور التربيعية للعدد المركب :

الطريقة الأولى: (باستخدام نظرية ديموافر):

① نضع العدد المركب على الصورة المثلثية ع = ل(جتاθ + ت جاθ)

② نطبق نظرية ديموافر ويكون الجذرين التربيعين للعدد ع هما :

$$ع^{\frac{1}{2}} = (ل(جتا\theta + ت جا\theta))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ل}\,(جتا\frac{\theta + 2\pi ر}{2} + ت جا\frac{\theta + 2\pi ر}{2})$$

الطريقة الثانية: (الطريقة الجبرية):

① نفرض أن أحد الجذرين هو س + ت ص $\therefore$ العدد المركب = $(س + ت ص)^2$ ونفك التربيع

② نساوى الحقيقى بالحقيقى نحصل على المعادلة (١) ونساوى التخيلى بالتخيلى نحصل على المعادلة (٢)

③ نربع طرفى المعادلة (١) وطرفى المعادلة (٢) ثم نجمع ناتج التربيع ونحلل فنحصل على المعادلة (٣)

④ بجمع المعادلتين (١) ، (٣) تنتج قيمتى س ثم بالتعويض فى (٢) تنتج قيمتى ص

ملاحظة:

الطريقة الجبرية هى الطريقة التى تصلح لجميع الأعداد المركبة وهى المستخدمة بكتاب الوزارة

مثال: اوجد الجذرين التربيعيين للعدد ٧ − ٢٤ت

الحل:

① نفرض أن أحد الجذرين هو س + ت ص ∴ ٧ − ٢٤ت = (س + ت ص)^{٢}

∴ (س^{٢} − ص^{٢}) + ٢س ص ت = ٧ − ٢٤ت

② نساوى الحقيقى بالحقيقى و التخيلى بالتخيلى

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٧ (١) ، ٢س ص = −٢٤ (٢)

③ نربع طرفى المعادلة (١) وطرفى المعادلة (٢) ونـجمع ناتج التربيع ونحلل

∴ س^{٤} − ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٤٩ ، ٤س^{٢}ص^{٢} = ٥٧٦

∴ س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٦٢٥

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥^{٢} ← ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ (٣)

④ بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ∴ ٢س^{٢} = ٣٢ ⇐ س^{٢} = ١٦ ⇐ ∴ س = ±٤

بالتعويض فى (٢) عندما س = ٤ ٨ص = −٢٤ ∴ ص = −٣

وعندما س = −٤ −٨ص = −٢٤ ∴ ص = ٣

∴ الجذرين التربيعين للعدد ٧ − ٢٤ت هما ٤ − ٣ت ، −٤ + ٣ت

مثال: اوجد فى ك مجموعة حل المعادلة س^{٢} + (١ + ت)س − ٦ + ٣ت = ٠

الحل:

س^{٢} + (١ − ت)س − ٦ + ٣ت = ٠ ∴ أ = ١ ، ب = (١ − ت) ، جـ = −٦ + ٣ت

باستخدام القانون العام

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{-(١+\text{ت}) \pm \sqrt{(١+\text{ت})^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٦ + ٣\text{ت})}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-(١+\text{ت}) \pm \sqrt{٢٤ - ١٠\text{ت}}}{٢}$$

نفرض أن س + ص ت = $\sqrt{٢٤ - ١٠\text{ت}}$

∴ (س + ص ت)^{٢} = ٢٤ − ١٠ت ∴ س^{٢} − ص^{٢} + ٢س ص ت = ٢٤ − ١٠ت

بمساواة الحقيقى بالحقيقى والتخيلى بالتخيلى

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٢٤ (١) ، ٢س ص = −١٠ (٢)

بتربيع طرفى (١) ، (٢) والجمع ثم التحليل

$\therefore$ $\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٥٧٦$ ، $٤\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} = ١٠٠$

$\therefore$ $\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤} = ٦٧٦$

$\therefore (\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{٢} = ٢٦^{٢} \leftarrow \boxed{\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٦ \quad (٣)}$

بجمع (١) ، (٣) $\therefore ٢\text{س}^{٢} = ٥٠$ $\therefore \text{س}^{٢} = ٢٥$ $\therefore \text{س} = \pm ٥$

بالتعويض فى (٢) عندما $\text{س} = ٥$ $\therefore ١٠\text{ص} = -١٠$ $\therefore \text{ص} = -١$

وعندما $\text{س} = -٥$ $\therefore -١٠\text{ص} = -١٠$ $\therefore \text{ص} = ١$ $\therefore$ الجذران هما $\pm(٥ - \text{ت})$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(١+\text{ت}) \pm (٥-\text{ت})}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-(١+\text{ت}) + (٥-\text{ت})}{٢} = \frac{-١-\text{ت}+٥-\text{ت}}{٢} = \frac{٤-٢\text{ت}}{٢} = ٢ - \text{ت}$$

او $$\text{س} = \frac{-(١+\text{ت}) - (٥-\text{ت})}{٢} = \frac{-١-\text{ت}-٥+\text{ت}}{٢} = \frac{-٦}{٢} = -٣$$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٢ - \text{ت}\}$

مثـــال: إذا كان $\frac{٧ - ١١\text{ت}}{٤ + \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$ أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-\text{ب}} + \text{أت})^{\frac{٣}{٢}}$

الحـــل:

$\because \frac{٧ - ١١\text{ت}}{٤ + \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$ $\therefore \frac{٧ - ١١\text{ت}}{٤ + \text{ت}} \times \frac{٤ - \text{ت}}{٤ - \text{ت}} = \text{أ} + \text{ب ت}$

$\therefore \frac{٢٨ - ٧\text{ت} - ٤٤\text{ت} + ١١\text{ت}^{٢}}{٤^{٢} + ١^{٢}} = \text{أ} + \text{ب ت}$ $\therefore \frac{١٧ - ٥١\text{ت}}{١٧} = \text{أ} + \text{ب ت}$

$\therefore ١ - ٣\text{ت} = \text{أ} + \text{ب ت}$ $\therefore \text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٣$

$\therefore (\sqrt{-\text{ب}} + \text{أت})^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٣}{٢}}$

$\because \text{س} = \sqrt{٣}$ ، $\text{ص} = ١$ $\therefore \text{ل} = \sqrt{(\sqrt{٣})^{٢} + ١^{٢}} = ٢$ ، $\theta = \text{ظا}^{-١}\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{٦}$

$$\therefore (\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٣}{٢}} = \left((٢)(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٦})\right)^{٣ \cdot \frac{١}{٢}} = \left((٨)(\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٢})\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \sqrt{٨}\left(\text{جتا}\left(\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\text{ر}\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\text{ر}\pi}{٢}\right)\right)$$

عندما $ر = ٠$ $\therefore$ القيمة الأولى $= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right) = ٢ + ٢\text{ت}$

عندما $ر = -١$ $\therefore$ القيمة الثانية $= ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{-٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{-٣\pi}{٤}\right) = -٢ - ٢\text{ت}$

مثـــال: باستخدم نظرية ديموافر اثبت أن: $\text{جتا}^٤\theta = \frac{١}{٨}(\text{جتا}٤\theta + ٤\,\text{جتا}٢\theta + ٣)$

الحـــل:

من نظرية ديموافر $\because (\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)^٤ = \text{جتا}٤\theta + \text{ت جا}٤\theta$ (١)

وبفك الطرف الأيمن باستخدام ذات الحدين

$\therefore (\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta)^٤ = \text{جتا}^٤\theta + {}^٤\text{ق}_١\,\text{جتا}^٣\theta \times \text{ت جا}\theta + {}^٤\text{ق}_٢\,\text{جتا}^٢\theta \times (\text{ت جا}\theta)^٢$

$+ {}^٤\text{ق}_٣\,\text{جتا}\theta \times (\text{ت جا}\theta)^٣ + {}^٤\text{ق}_٤(\text{ت جا}\theta)^٤$

$= \text{جتا}^٤\theta + ٤\text{ت جتا}^٣\theta\,\text{جا}\theta - ٦\,\text{جتا}^٢\theta\,\text{جا}^٢\theta - ٦\text{ت جتا}\theta\,\text{جا}^٣\theta + \text{جا}^٤\theta$

$= (\text{جتا}^٤\theta - ٦\,\text{جتا}^٢\theta\,\text{جا}^٢\theta + \text{جا}^٤\theta) + (٤\,\text{جتا}^٣\theta\,\text{جا}\theta - ٦\,\text{جتا}\theta\,\text{جا}^٣\theta)\text{ت}$ (٢)

من (١) ، (٢) وبمساواة الحقيقى بالحقيقى

$\therefore \text{جتا}٤\theta = \text{جتا}^٤\theta - ٦\,\text{جتا}^٢\theta\,\text{جا}^٢\theta + \text{جا}^٤\theta$

$= \text{جتا}^٤\theta - ٦\,\text{جتا}^٢\theta(١ - \text{جتا}^٢\theta) + (١ - \text{جتا}^٢\theta)^٢$

$= \text{جتا}^٤\theta - ٦\,\text{جتا}^٢\theta + ٦\,\text{جتا}^٤\theta + ١ - ٢\,\text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}^٤\theta$

$\therefore \text{جتا}٤\theta = ٨\,\text{جتا}^٤\theta - ٨\,\text{جتا}^٢\theta + ١$

تذكر أن

$\text{جتا}٢\theta = ٢\,\text{جتا}^٢\theta - ١$

$\therefore \text{جتا}^٢\theta = \frac{١}{٢}(\text{جتا}٢\theta + ١)$

$\therefore ٨\,\text{جتا}^٤\theta = \text{جتا}٤\theta + ٨\,\text{جتا}^٢\theta - ١ = \text{جتا}٤\theta + ٨ \times \frac{١}{٢}(\text{جتا}٢\theta + ١) - ١$

$= \text{جتا}٤\theta + ٤(\text{جتا}٢\theta + ١) - ١ = \text{جتا}٤\theta + ٤\,\text{جتا}٢\theta + ٣$

$$\boxed{\therefore \text{جتا}^٤\theta = \frac{١}{٨}(\text{جتا}٤\theta + ٤\,\text{جتا}٢\theta + ٣)}$$

ملاحظة:

يمكن إثبات العلاقة السابقة باستخدام قوانين ضعف الزاوية (حاول بنفسك)

٢ - ٣ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

الصورة المثلثية للواحد الصحيح هى $١ = \text{جتا}٠° + \text{ت جا}٠°$ وبالتالى فإن :

$$\sqrt[٣]{١} = (١)^{\frac{١}{٣}} = (\text{جتا}٠° + \text{ت جا}٠°)^{\frac{١}{٣}} = (\text{جتا}\frac{٠ + ٢ر\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{٠ + ٢ر\pi}{٣})$$

بوضع $ر = ٠$ $\therefore$ احد الجذور $= (\text{جتا}٠° + \text{ت جا}٠°) = ١$

بوضع $ر = ١$ $\therefore$ الجذر الثانى $= (\text{جتا}\frac{٠° + ٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{٠° + ٢\pi}{٣}) = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

بوضع $ر = -١$ $\therefore$ الجذر الثالث $= (\text{جتا}\frac{٠° - ٢\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{٠° - ٢\pi}{٣}) = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى: ١ ، $\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$ ، $\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

ونلاحظ أن الجذور التكعيبية للواحد إحداها حقيقى وهو ١ والآخران مركبان ومترافقان
ومربع أى من الجذرين المركبين يساوى الجذر المركب الآخر
وبالتالى إذا رمزنا لأحد الجذرين المركبين برمز ما فإن الجذر المركب الآخر سيكون حتما مربع نفس الرمز
أى أنه إذا رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω (يقرا أوميجا) فإن الجذر الآخر سيكون $\omega^٢$

$\therefore$ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى: ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = \frac{-١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$ ، $\omega^٢ = \frac{-١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ت}$

خواص الجذور التكعيبية للواحد:

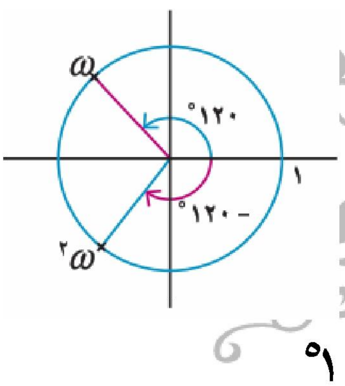
❶ مجموع الجذور الكعيبية الثلاثة للواحد الصحيح = صفر اى ان $\boxed{١ + \omega + \omega^٢ = ٠}$

ومن ذلك نجد ان: $\boxed{\omega + \omega^٢ = -١}$ ، $\boxed{١ + \omega^٢ = -\omega}$ ، $\boxed{١ + \omega = -\omega^٢}$

❷ حاصل ضرب الجذرين المركبين يساوى واحد

أى أن $\boxed{\omega \times \omega^٢ = ١ \quad \Leftarrow \quad \omega^٣ = ١}$ ومن ذلك نجد ان:

$$\boxed{\frac{١}{\omega} = \omega^٢ \quad ، \quad \frac{١}{\omega^٢} = \omega}$$



❸ الفرق بين الجذرين المركبين $\pm \sqrt{٣}\text{ت}$

أى أن $\boxed{\omega - \omega^٢ = \pm\sqrt{٣}\text{ت} \quad ، \quad \omega^٢ - \omega = \mp\sqrt{٣}\text{ت}}$

❹ الجذور الثلاثة مقياس كل منها = ١ وسعاتها هى ٠° ، ١٢٠° ، -١٢٠°
و تقع على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها = ١ وتكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع

القوى الصحيحة للعدد ω :

❶ القوى الموجبة: $\because \omega^{3} = 1 \Leftarrow \therefore \omega^{4} = \omega^{3} \times \omega = \omega$

، $\omega^{5} = \omega^{3} \times \omega^{2} = \omega^{2}$ ، $\omega^{6} = \omega^{3} \times \omega^{3} = 1$

أى أن قوى ω هى ω ، ω^{2} ، ١ وهى تتكرر كل ما زاد الأس بمقدار ٣

وبالتالى فإنه إذا كان ن عدد صحيح موجب فإن:

$\omega^{3ن} = 1$ ، $\omega^{3ن+1} = \omega$ ، $\omega^{3ن+2} = \omega^{2}$

اى انه لإيجاد قيم ω نحذف ٣ ومضاعفاتها من الأس الموجب

❷ القوى السالبة: $\because \frac{1}{\omega} = \omega^{2}$ ، $\frac{1}{\omega^{2}} = \omega \Leftarrow \therefore \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \omega^{2}$ ، $\omega^{-2} = \frac{1}{\omega^{2}} = \omega$

، $\omega^{-3} = \frac{1}{\omega^{3}} = 1$ ، $\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^{4}} = \frac{1}{\omega} = \omega^{2}$ ... **وهكذا**

الجذور النونية للواحد الصحيح:

إذا كان $ع^{ن} = 1$ **فإن** $ع = (\text{جتا}\,0 + \text{ت جا}\,0)^{\frac{1}{ن}} = \text{جتا}\frac{2ر\pi}{ن} + \text{ت جا}\frac{2ر\pi}{ن}$

حيث قيم ر هى ٠ ، ±١ ، ±٢ ، ... والتى تجعل السعة $\frac{2ر\pi}{ن}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

وتمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن وتقع رؤوسه على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١

مثـــال: إذا كان ١ ، ω ، ω^{2} هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أوجد قيمة:

(أ) $(2 + 5\omega + 2\omega^{2})^{5}$ (ب) $(\omega + \frac{1}{\omega})^{2}(\omega^{2} + \frac{1}{\omega^{2}})^{3}$

الحـــل:

(أ) $(2 + 5\omega + 2\omega^{2})^{5} = (2(1 + \omega^{2}) + 5\omega)^{5}$

$= (-2\omega + 5\omega)^{5} = (3\omega)^{5} = 243\,\omega^{5} = 243\,\omega^{2}$

(ب) $(\omega + \frac{1}{\omega})^{2}(\omega^{2} + \frac{1}{\omega^{2}})^{3} = (\omega + \omega^{2})^{2}(\omega^{2} + \omega)^{3} = (-1)^{2}(-1)^{3} = -1$

مثـــال: اثبت أن $\left(\frac{أ + ب\omega + جـ\omega^{2}}{أ\omega^{2} + ب + جـ\omega} - \frac{جـ + أ\omega^{2} + ب\omega}{أ + ب\omega^{2} + جـ\omega}\right)^{8} = 81$

الحــــل:

المقدار $= \left(\frac{\text{أ} + \text{ب}\omega + \text{جـ}\omega^2}{\omega^2\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\omega^2 + \text{ب}\omega}{\text{أ} + \text{ب}\omega^2 + \text{جـ}\omega}\right)^8)^8$

$= \left(\frac{\text{أ}\omega^3 + \text{ب}\omega + \text{جـ}\omega^2}{\omega^2\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{أ}\omega^2 + \text{ب}\omega}{\text{جـ}\omega + \text{ب}\omega^2 + \text{أ}\omega^3}\right)^8$

$= \left(\frac{\omega\,\cancel{(\text{أ}\omega^2 + \text{ب} + \text{جـ}\omega)}}{\cancel{\omega^2\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\omega}} - \frac{\cancel{\text{جـ} + \text{أ}\omega^2 + \text{ب}\omega}}{\omega\,\cancel{(\text{جـ} + \text{ب}\omega + \text{أ}\omega^2)}}\right)^8$

$= \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^8 = \left(\omega - \omega^2\right)^8 = \left(\pm\sqrt{3}\,\text{ت}\right)^8 = 3^4\text{ت}^8 = 81 \times 1 = 81$

مثـــــال: إثبت أن $\left(\frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{1+2\omega^2}\right)^2 = \frac{-4}{3}$

الحــــل:

المقدار $= \left(\frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{1+2\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{1+2\omega^2-1-2\omega}{(1+2\omega)(1+2\omega^2)}\right)^2$

$= \left(\frac{1+2\omega^2-1-2\omega}{(1+2\omega)(1+2\omega^2)}\right)^2 = \left(\frac{2\omega^2-2\omega}{1+2\omega^2+2\omega+4\omega^3}\right)^2$

$= \left(\frac{2(\omega^2-\omega)}{5+2(\omega^2+\omega)}\right)^2 = \frac{4(\omega^2-\omega)^2}{(5-2)^2} = \frac{4(\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^2}{3^2} = \frac{4\times 3\text{ت}^2}{9} = \frac{4\times -1}{3} = \frac{-4}{3}$

مثـــــال: كون المعادلة التى جذراها $(1+\omega-\omega^2)^3$ ، $(1-\omega+\omega^2)^3$

الحــــل:

الجذر الأول $= (1+\omega-\omega^2)^3 = (-\omega^2-\omega^2)^3 = (-2\omega^2)^3 = -8\omega^6 = -8\times 1 = -8$

الجذر الثانى $= (1-\omega+\omega^2)^3 = (-\omega-\omega)^3 = (-2\omega)^3 = -8\omega^3 = -8\times 1 = -8$

∴ مجموع الجذرين $= -8 - 8 = -16$ ، حاصل ضرب الجذرين $= -8 \times -8 = 64$

∵ المعادلة بمعلومية جذراها هى: $\text{س}^2 -$ (مجموع الجذرين)س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة المطلوبة هى:

$\text{س}^2 - (-16)\text{س} + 64 = 0 \Leftarrow \text{س}^2 + 16\text{س} + 64 = 0$

مثـــال: اثبت أن $\dfrac{\omega}{3+5\omega+2\omega^{2}}+\dfrac{\omega^{2}}{3+2\omega+5\omega^{2}}=\dfrac{5}{7}$

الحـــل:

المقدار $=\dfrac{\omega}{3+5\omega+2\omega^{2}}+\dfrac{\omega^{2}}{3+2\omega+5\omega^{2}}=\dfrac{\omega}{3+3\omega+2\omega+2\omega^{2}}+\dfrac{\omega^{2}}{3+2\omega+2\omega^{2}+3\omega^{2}}$

$=\dfrac{\omega}{3+3\omega-2}+\dfrac{\omega^{2}}{3-2+3\omega^{2}}=\dfrac{\omega}{1+3\omega}+\dfrac{\omega^{2}}{1+3\omega^{2}}=\dfrac{\omega(1+3\omega^{2})+\omega^{2}(1+3\omega)}{(1+3\omega)(1+3\omega^{2})}$

$=\dfrac{\omega+3\omega^{3}+\omega^{2}+3\omega^{3}}{1+3\omega^{2}+3\omega+9\omega^{3}}=\dfrac{6+\omega+\omega^{2}}{10+3(\omega^{2}+\omega)}=\dfrac{6-1}{10-3}=\dfrac{5}{7}$

مثـــال: اثبت أن $\left(1-\dfrac{2}{\omega^{2}}+\omega^{2}\right)\left(1+\omega-\dfrac{5}{\omega}\right)=18$

الحـــل:

المقدار $=\left(1-\dfrac{2}{\omega^{2}}+\omega^{2}\right)\left(1+\omega-\dfrac{5}{\omega}\right)=(1-2\omega+\omega^{2})(1+\omega-5\omega^{2})$

$=(1+\omega^{2}-2\omega)(1+\omega-5\omega^{2})=(-\omega-2\omega)(-\omega^{2}-5\omega^{2})$

$=(-3\omega)(-6\omega^{2})=18\omega^{3}=18\times1=18$

مثـــال: إذا كان $\text{س}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ أثبت أن :

$\text{س}^{6}+6\text{س}^{5}+15\text{س}^{4}+20\text{س}^{3}+15\text{س}^{2}+6\text{س}=0$

الحـــل:

$\text{س}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$

∴ س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح ∴ $\text{س}=\omega$ أو $\text{س}=\omega^{2}$

عندما $\text{س}=\omega$

∴ المقدار $=\text{س}^{6}+6\text{س}^{5}+15\text{س}^{4}+20\text{س}^{3}+15\text{س}^{2}+6\text{س}$

$=\omega^{6}+6\omega^{5}+15\omega^{4}+20\omega^{3}+15\omega^{2}+6\omega$ بالتعويض عن قوى ω

$=1+6\omega^{2}+15\omega+20+15\omega^{2}+6\omega$

$= \text{٢١} + \text{٦}(\omega^{2} + \omega) + \text{١٥}(\omega + \omega^{2}) = \text{٢١} - \text{٦} - \text{١٥} = \text{٠}$

عندما $\text{س} = \omega^{2}$

∴ المقدار $= \text{س}^{6} + \text{٦س}^{5} + \text{١٥س}^{4} + \text{٢٠س}^{3} + \text{١٥س}^{2} + \text{٦س}$

$= \omega^{12} + \text{٦}\omega^{10} + \text{١٥}\omega^{8} + \text{٢٠}\omega^{6} + \text{١٥}\omega^{4} + \text{٦}\omega^{2}$ بالتعويض عن قوى ω

$= \text{١} + \text{٦}\omega + \text{١٥}\omega^{2} + \text{٢٠} + \text{١٥}\omega + \text{٦}\omega^{2}$

$= \text{٢١} + \text{٦}(\omega + \omega^{2}) + \text{١٥}(\omega^{2} + \omega) = \text{٢١} - \text{٦} - \text{١٥} = \text{٠}$

مثـــال: إذا كان $\text{ع} = \text{٢}(\omega + \text{ت})(\omega^{2} + \text{ت})$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية

الحـــل:

$\text{ع} = \text{٢}(\omega + \text{ت})(\omega^{2} + \text{ت}) = \text{٢}(\omega^{3} + \omega\text{ت} + \omega^{2}\text{ت} + \text{ت}^{2})$

$= \text{٢}(\cancel{\text{١}} + \omega\text{ت} + \omega^{2}\text{ت} \cancel{-\text{١}}) = \text{٢ت}(\omega + \omega^{2}) = -\text{٢ت}$

∴ الصورة الجبرية هى $\text{ع} = -\text{٢ت}$

∵ $\text{ع} = -\text{٢ت} = \text{٢} \times (-\text{ت})$ ، ∵ $-\text{ت} = \text{جتا}\frac{-\pi}{\text{٢}} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{\text{٢}}$

∴ الصورة المثلثية هى $\text{ع} = \text{٢}(\text{جتا}\frac{-\pi}{\text{٢}} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{\text{٢}})$

، الصورة الأسية هى $\text{ع} = \text{٢هـ}^{\frac{-\pi}{\text{٢}}\text{ت}}$

الجذرين التربيعيين للعدد ع هما $\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{-\pi}{\text{٢}} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{\text{٢}})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

$= \sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{\frac{-\pi}{\text{٢}} + \text{٢ر}\pi}{\text{٢}} + \text{ت جا}\frac{\frac{-\pi}{\text{٢}} + \text{٢ر}\pi}{\text{٢}})$

عند $\text{ر} = \text{٠}$ ∴ الجذر الأول $= \sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{-\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{-\pi}{\text{٤}})$

، عند $\text{ر} = \text{١}$ ∴ الجذر الثانى $= \sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{٣}\pi}{\text{٤}})$

مثـــال: إذا كانت $\text{س} = \text{أ} + \text{ب}$ ، $\text{ص} = \text{أ}\omega + \text{ب}\omega^{2}$ ، $\text{ع} = \text{أ}\omega^{2} + \text{ب}\omega$

فإثبت أن: اولا: $\text{س ص ع} = \text{أ}^{3} + \text{ب}^{3}$ ثانيا: $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2} = \text{٦أب}$

الحـــل:

$\because$ س $=$ أ $+$ ب ، ص $=$ أ$\omega +$ بω^2 ، ع $=$ أ$\omega^2 +$ بω

$\therefore$ ص ع $= ($أ$\omega +$ ب$\omega^2)($أ$\omega^2 +$ ب$\omega) =$ أ$^2\omega^3 +$ أب$\omega^2 +$ أب$\omega^4 +$ ب$^2\omega^3$

$=$ أ$^2 +$ أب$(\omega^2 + \omega) +$ ب$^2 =$ أ$^2 -$ أب $+$ ب^2

اولا: الطرف الأيسر $=$ أ$^3 +$ ب^3 بالتحليل كمجموع مكعبين

$= ($أ $+$ ب$)($أ$^2 -$ أب $+$ ب$^2) =$ س ص ع $=$ الطرف الأيمن

ثانيا: س$^2 = ($أ $+$ ب$)^2 =$ أ$^2 + 2$أب $+$ ب^2

، ص$^2 = ($أ$\omega +$ ب$\omega^2)^2 =$ أ$^2\omega^2 + 2$أب$\omega^3 +$ ب$^2\omega^4 =$ أ$^2\omega^2 + 2$أب $+$ ب$^2\omega$

، ع$^2 = ($أ$\omega^2 +$ ب$\omega)^2 =$ أ$^2\omega^4 + 2$أب$\omega^3 +$ ب$^2\omega^2 =$ أ$^2\omega + 2$أب $+$ ب$^2\omega^2$

$\therefore$ س$^2 +$ ص$^2 +$ ع$^2 =$ أ$^2 + 2$أب $+$ ب$^2 +$ أ$^2\omega^2 + 2$أب $+$ ب$^2\omega +$ أ$^2\omega + 2$أب $+$ ب$^2\omega^2$

$= ($أ$^2 +$ أ$^2\omega +$ أ$^2\omega^2) + ($ب$^2 +$ ب$^2\omega +$ ب$^2\omega^2) + 2$أب $+ 2$أب $+ 2$أب

$= 0 + 0 + 6$أب $= 6$أب $=$ الطرف الأيسر

مثـــال:

أوجد (أ) $\sum_{ر=0}^{10} \omega^{ر}$ (ب) $\sum_{ر=0}^{10} (1 + \omega^{ر} + \omega^{2ر})$

الحـــل:

(أ) $\sum_{ر=0}^{10} \omega^{ر} = \omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10}$

$= 1 + \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 + 1 + \omega$

$= 0 + 0 + 0 + 1 + \omega = 1 + \omega = -\omega^2$

(ب) $\sum_{ر=0}^{10} (1 + \omega^{ر} + \omega^{2ر}) = (1 + \omega^0 + \omega^0) + (1 + \omega^1 + \omega^2) + (1 + \omega^2 + \omega^4)$

$+ (1 + \omega^3 + \omega^6) + (1 + \omega^4 + \omega^8) + (1 + \omega^5 + \omega^{10})$

$+ (1 + \omega^6 + \omega^{12}) + (1 + \omega^7 + \omega^{14}) + (1 + \omega^8 + \omega^{16})$

$+ (1 + \omega^9 + \omega^{18}) + (1 + \omega^{10} + \omega^{20})$

$= 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 3 + 0 = 12$