المتطابقات المثلثية

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية .

المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقة: هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية والذى يُعّرف به كل طرف من طرفى المتساوية.

فمثلا: جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = جتا θ متطابقة صحيحة لجميع قيم θ الحقيقية.

المعادلة: هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقية التى تحقق هذه المتساوية وغير صحيحة للبعض الآخر الذى لا يحققها.

فمثلًا: جا$\theta = \frac{١}{٢}$ ، $\theta \in [٠، ٢\pi]$

نجد أن: قيم θ التى تحقق هذه المعادلة والتى تنتمى إلى الفترة $[٠، ٢\pi]$ هى $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٥\pi}{٦}$ فقط.

المتطابقات المثلثية الأساسية

١ - الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها

جا $\theta = \frac{١}{\text{قتا}\,\theta}$ ، جتا $\theta = \frac{١}{\text{قا}\,\theta}$ ، ظا $\theta = \frac{١}{\text{ظتا}\,\theta}$

قتا $\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ ، قا $\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

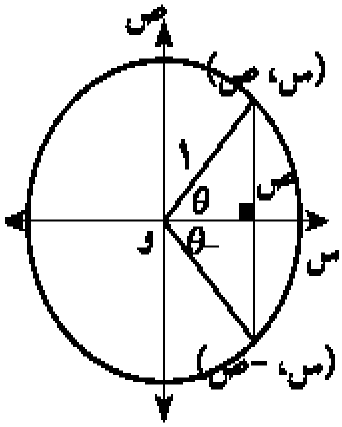
٢ - الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين:

جا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = جتاθ ، جتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = جاθ

ظا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = ظتاθ ، قتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قاθ

قا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = قتاθ ، ظتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ = ظاθ

٣- متطابقة الزاويتين θ ، $-\theta$:

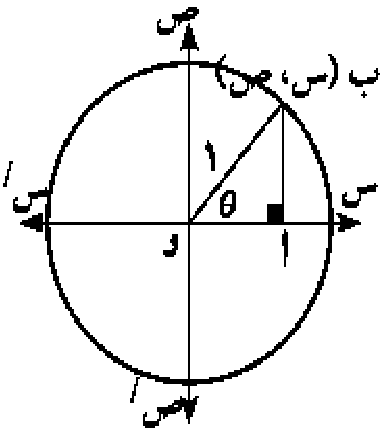


جا$(-\theta)$ = - جا θ ، جتا$(-\theta)$ = جتا θ

قتا$(-\theta)$ = - قتا θ ، قا$(-\theta)$ = قا θ

ظا$(-\theta)$ = - ظا θ ، ظتا$(-\theta)$ = - ظتا θ

تذكر أن : متطابقات الزاويتين θ، $-\theta$ تسمى بمتطابقات الدوال الزوجية والفردية.
وستدرس فى صف دراسى لاحق.



٤- متطابقات فيثاغورث:

نعلم من دائرة الوحدة أن:

س^2 + ص^2 = ١ ① وبالتعويض عن س = جتاθ ، ص = جاθ

فإن: $\boxed{\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = 1}$

وبقسمة طرفى العلاقة ① على س^2 فإن:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} = \frac{1}{\text{س}^2}$$

أى أن: $\boxed{1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta}$

وبقسمة طرفى العلاقة ① على ص^2 فإن:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} = \frac{1}{\text{ص}^2}$$

أى أن: $\boxed{1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta}$

٥- التعبير عن ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، بدلالة جا θ، جتا θ:

$\boxed{\therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}}$ ، $\boxed{\therefore \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}}$

تبسيط المقادير المثلثية: هو وضعها فى ابسط صورة، وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية.

تذكر أن :
حا θ × حا θ
= $($حا $\theta)^{٢}$
= حا^{٢} θ

مثال : اكتب فى أبسط صورة : $($ حا θ + حتا θ $)^{٢}$ ـ ٢ حا θ حتا θ

الحل : المقدار = حا^{٢} θ + حتا^{٢} θ + ٢ حا θ حتا θ ـ ٢ حا θ حتا θ

= (حا^{٢} θ + حتا^{٢} θ) + (~~٢ حا θ حتا θ~~ ـ ~~٢ حا θ حتا θ~~)

= ١ ـ ٠ = ١

مثال : اكتب فى أبسط صورة : $\dfrac{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}{١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta}$

الحل :

باستخدام متطابقة فيثاغورث : المقدار = $\dfrac{\text{قا}^{٢}\,\theta}{\text{قتا}^{٢}\,\theta} = \dfrac{١}{\text{حتا}^{٢}\,\theta} \div \dfrac{١}{\text{حا}^{٢}\,\theta}$

$= \dfrac{\text{حا}^{٢}\,\theta}{\text{حتا}^{٢}\,\theta} = \text{ظا}^{٢}\,\theta$

مثال : ضع كلا من المقادير الآتية فى أبسط صورة :

(أ) $\dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\theta} - \dfrac{١}{\text{ظتا}^{٢}\,\theta}$ (ب) جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ قا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$ (جـ) $\dfrac{\text{جا}\,(\frac{\pi}{٢} - \theta)}{\text{جتا}\,(٢\pi - \theta)}$

الحل :

(أ) المقدار = قا^{٢} θ ـ ظا^{٢} θ = ١ + ظا^{٢} θ ــ ظا^{٢} θ = ١

(ب) المقدار = حا θ قتا θ = حا θ × $\dfrac{١}{\text{حا}\,\theta}$ = ١

(جـ) المقدار = $\dfrac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ = ١

المتطابقات المثلثية

لإثبات صحة متطابقة مثلثية نثبت أن الدالتين المحددتين لطرفيها متساويتان.

هام جدا فى الحل :

١) حتا$^{2}\theta$ + حا$^{2}\theta$ = ١ ، حتا$^{2}\theta$ = ١ ـ حا$^{2}\theta$ ، حا$^{2}\theta$ = ١ ـ حتا$^{2}\theta$

٢) قا$^{2}\theta$ = ١ + ظا$^{2}\theta$ ، قتا$^{2}\theta$ = ١ + ظتا$^{2}\theta$

٣) ظاθ = $\frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$

مثال : أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{حتا}^{2} \theta}{\text{١ ـ حا } \theta}$ = ١ + حا θ

الحل :

الطرف الايمن = $\frac{\text{حتا}^{2} \theta}{\text{١ ـ حا } \theta}$ = $\frac{\text{١ ـ حا}^{2} \theta}{\text{١ ـ حا } \theta}$ = $\frac{(\text{١ ـ حا } \theta)(\text{١ + حا } \theta)}{(\text{١ ـ حا } \theta)}$

= ١ + حا θ = الطرف الايسر

مثال : أثبت صحة المتطابقة : ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

الحل :

الطرف الأيمن = ظا θ + ظتا θ = $\frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta}$ + $\frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$ = $\frac{\text{حا}^{2} \theta + \text{حتا}^{2} \theta}{\text{حتا } \theta \text{ حا } \theta}$

= $\frac{1}{\text{حتا } \theta \text{ حا } \theta}$ = قا θ قتا θ = الطرف الايسر

مثال : أثبت صحة المتطابقة : $\frac{(\text{١ ـ حا}^{2} \theta)(\text{١ ـ حتا}^{2} \theta)}{\text{ظا}^{2} \theta}$ = حتا^{4} θ

الحل :

$$\text{الطرف الايمن} = \frac{(1 - \text{حا}^2\theta)(1 - \text{حتا}^2\theta)}{\text{ظا}^2\theta} = \frac{\text{حتا}^2\theta\ \text{حا}^2\theta}{\text{ظا}^2\theta}$$

$$= \text{حتا}^2\theta\ \text{حا}^2\theta\ \text{ظتا}^2\theta = \text{حتا}^2\theta\ \text{حا}^2\theta \times \frac{\text{حتا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta}$$

$$= \text{حتا}^4\theta = \text{الطرف الايسر}$$

مثال : أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1 - \text{ظتا}^2\theta}{1 + \text{ظتا}^2\theta} = 2\,\text{حا}^2\theta - 1$

الحل :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1 - \text{ظتا}^2\theta}{1 + \text{ظتا}^2\theta} = \frac{1 - \text{ظتا}^2\theta}{\text{قتا}^2\theta} = \frac{1 - \frac{\text{حتا}^2\theta}{\text{حا}^2\theta}}{\frac{1}{\text{حا}^2\theta}} \ \text{بالضرب فى حا}^2\theta$$

$$= \text{حا}^2\theta - \text{حتا}^2\theta = \text{حا}^2\theta - (1 - \text{حا}^2\theta)$$

$$= 2\,\text{حا}^2\theta - 1 = \text{الطرف الايسر}$$

مثال : أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta}{\text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta} = 1$

الحل :

$$\text{الطرف الايمن} = \frac{\frac{\text{حا}\theta}{\text{حتا}\theta} + \frac{\text{حتا}\theta}{\text{حا}\theta}}{\frac{1}{\text{حتا}\theta} \times \frac{1}{\text{حا}\theta}} \times \frac{\text{حا}\theta\ \text{حتا}\theta}{\text{حا}\theta\ \text{حتا}\theta}$$

$$= \frac{\text{حا}^2\theta + \text{حتا}^2\theta}{1} = 1 = \text{الطرف الايسر}$$

مثال : أثبت صحة المتطابقة : $(\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta)^2 = \frac{1 - \text{حا}\theta}{1 + \text{حا}\theta}$

الحل :

الطرف الأيمن = (قا θ ـ ظا θ)^{٢} = ($\frac{١}{\text{حتا } θ}$ ـ $\frac{\text{حا } θ}{\text{حتا } θ}$)^{٢}

= ($\frac{١ \text{ ـ حا } θ}{\text{حتا } θ}$)^{٢} = $\frac{(١ \text{ ـ حا } θ)^{٢}}{\text{حتا}^{٢} θ}$

= $\frac{(١ \text{ ـ حا } θ)^{٢}}{١ \text{ ـ حا}^{٢} θ}$ = $\frac{(١ \text{ ـ حا } θ)(١ \text{ ـ حا } θ)}{(١ \text{ ـ حا } θ)(١ + \text{حا } θ)}$

= $\frac{١ \text{ ـ حا } θ}{١ + \text{حا } θ}$ = الطرف الأيسر

مثال : أثبت صحة المتطابقة : ٢ حتا^{٢} β ـ ٣ حا β قتا β + ٢ حا^{٢} β = ـ ١

الحل :

الطرف الأيمن = ٢ (حتا^{٢} β + حا^{٢} β) ـ ٣ حا β × $\frac{١}{\text{حا } β}$

= ٢ × ١ ـ ٣ = ٢ ـ ٣ = ـ ١ = الطرف الأيسر

مثال : إذا كان : حا α + حتا α = $\frac{٥}{٤}$ أوجد قيمة : حا α حتا α حيث α ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحل :

∵ حا α + حتا α = $\frac{٥}{٤}$ بتربيع الطرفين نجد :

حا^{٢} α + حتا^{٢} α + ٢ حا α حتا α = $\frac{٢٥}{١٦}$ ∴ ١ + ٢ حا α حتا α = $\frac{٢٥}{١٦}$

∴ ٢ حا α حتا α = $\frac{٢٥}{١٦}$ ـ ١ = $\frac{-٩}{١٦}$ ∴ حا α حتا α = $\frac{-٩}{٣٢}$

مثال : إذا كان : حا β + حا($\frac{٣\pi}{٢}$ ـ β) = $\frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة : حا β حتا β ، β ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

الحل :

∵ حا β + حا($\frac{٣\pi}{٢}$ ـ β) = $\frac{٣}{٥}$ ∴ حا β ـ حتا β = $\frac{٣}{٥}$ بتربيع الطرفين

∴ حا^{٢} β + حتا^{٢} β ـ ٢ حا β حتا β = $\frac{٩}{٢٥}$ أكمــل ....

تمارين على المتطابقات المثلثية

أولًا: الاختيار من متعدد

① المقدار $\frac{\text{ظا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta}$: فى أبسط صورة يساوى: ....

(أ) جا θ		(ب) جتا θ		(ج) قا θ		(د) قتا θ

② المقدار: جا θ جتا θ ظا θ فى أبسط صورة يساوى:

(أ) جا^{٢} θ		(ب) جتا^{٢} θ		(ج) ظا^{٢} θ		(د) ١ - جا^{٢} θ

③ المقدار: جا($٩٠^\circ - \theta$)قتا($٩٠^\circ - \theta$) فى أبسط صورة يساوى: ....

(أ) ١		(ب) جا^{٢} θ		(ج) جتا^{٢} θ		(د) جا θ جتا θ

④ المقدار: $\frac{\text{١ - جتا}^{٢}\beta}{\text{جا}^{٢}\beta\text{ - ١}}$ فى أبسط صورة يساوى: ....

(أ) - ظا^{٢} β		(ب) - ظتا^{٢} β		(ج) ظا^{٢} β		(د) ظتا^{٢} β

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

⑤ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(أ) ظا μ + ظتا μ = قا μ قتا μ

(ب) قتا α - جا α = جتا α ظتا α

(ج) ظتا^{٢} μ - جتا^{٢} μ = ظتا^{٢} μ جتا^{٢} μ

(د) ظا^{٢} α - جا^{٢} α = ظا^{٢} α جا^{٢} α

(هـ) جا^{٢} α + ظا^{٢} α جا^{٢} α = ظا^{٢} α

(و) جا ($٩٠^\circ - \mu$) جتا μ = ١ - جا^{٢} μ

⑥ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(أ) $\frac{\text{قتا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ (١ - جا^{٢} θ) = ظتا θ

(ب) $\frac{١}{\text{جا}^{٢}(٩٠^\circ - \theta)}$ - ظا^{٢} θ = ١

(ج) $\frac{١}{\text{١ + ظا}^{٢}\alpha} - \frac{١}{\text{١ + ظا}^{٢}\beta}$ = جتا^{٢} α - جتا^{٢} β

(د) $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\theta}{\text{قا}^{٤}\theta}$ = ١ - جا^{٢} θ

(هـ) (قا ϕ - ظا ϕ)^{٢} = $\frac{\text{١ - جا}\,\phi}{\text{١ + جا}\,\phi}$

(و) $\frac{١}{\text{١ + ظتا}\,\theta} = \frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{١ + ظا}\,\theta}$

(ز) $\frac{\text{جتا}^{٢}\theta\text{ - جا}^{٢}\theta}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}^{٢}\theta\text{ + جتا}\,\theta\,\text{جا}^{٢}\theta}$ = قتا θ - قا θ

* **أكمل العبارات الاتية**

(١) جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ...

(٢) جا^{٢} س = ١ – ....

(٣) جتا^{٢} س = ١ – ....

(٤) جاس قتاس = ...

(٥) ظاس ظتاس = ...

(٦) جتاس قاس = ...

(٧) ١ + ظا^{٢} س = ...

(٨) قا^{٢} س – ظا^{٢} س = ...

(٩) ١ – قا^{٢} س = ...

(١٠) ظا^{٢} س – قا^{٢} س = ...

(١١) ١ + ظتا^{٢} س = ...

(١٢) قتا^{٢} س – ظتا^{٢} س = ...

(١٣) ظتا^{٢} س – قتا^{٢} س = ...

(١٤) ١ – قتا^{٢} س = ...

(١٥) جا^{٢}س+جتا^{٢}س+جاس قتاس=.....

(١٦) ظاس × .... = ١

(١٧) جاس × .... = ١

(١٨) جتاس × .... = ١

(١٩) ١+ ظتا^{٢} (٩٠ – س) = ...

(٢٠) ١+ ظا^{٢} (٩٠ – س) = ...

(٢١) جتاهـ × .... = جاهـ

(٢٢) جاهـ × .... = جتاهـ

(٢٣) جا^{٢} ٥٠ + جا^{٢} .... = ١

(٢٤) جتا^{٢} ٧٠ + جتا^{٢} .... = ١

إثبت صحة المتطابقات الاتية :

[١] طا^{٢} θ حا^{٢} θ + حتا^{٢} θ + ٢ حا^{٢} θ = قا^{٢} θ

[٢] حا^{٤} β – حتا^{٤} β = ٢ حا^{٢} β – ١

[٣] حا θ حا ($\frac{\pi}{٢}$ – θ) طتا θ = ١ – حا^{٢} θ

[٤] ٢ حتا^{٢} β – ٣ حا β قتا β + ٢ حا^{٢} β = – ١

[٥] $\dfrac{\text{١ – حتا}^{٢}\,\alpha}{\text{١ – حا}^{٢}\,\alpha}$ = طا^{٢} α

[٦] $\dfrac{\text{١ + طا}^{٢}\,\theta}{\text{١ + طتا}^{٢}\,\theta}$ + ١ = قا^{٢} θ

[٧] $\dfrac{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta}$ + $\dfrac{\text{ظا}\,\theta}{\text{قا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta}$ = ١

[٨] $\dfrac{\text{جا}^{٣}\theta + \text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta}$ + $\dfrac{\text{جا}^{٣}\theta - \text{جتا}^{٣}\theta}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta}$ = ٢

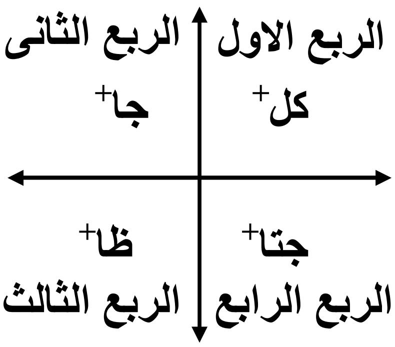
حل المعادلات المثلثية

* حل المعادلة المثلثية بحلول حقيقية :

تستخدم المتطابقات الأساسية فى حل المعادلات المثلثية ، و حل المعادلات المثلثية يشبه حل المعادلات الجبرية من حيث أن لها مجموعة تعويض و مجموعة حل و يتوقف عدد حلول المعادلة المثلثية حسب الفترة المعطاة فى مجموعة الحل
أما إذا كانت مجموعة التعويض هى ح فإنه يوجد عدد لا نهائى من الحلول للمعادلة المثلثية
و يمكن حل المعادلة المثلثية بإستخدام رسم المنحنيات

* **المعادلة** : هى متساوية صحيحة لبعض الأعداد الحقيقية التى تحقق هذه المتساوية و غير صحيحة للبعض الأخر الذى لا يحققها

* حل المعادلات المثلثية : معناه إيجاد قيمة الزاوية التى تحقق المعادلة



خطوات حل المعادلات المثلثية:

١- تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية (على حسب إشارة الدالة)

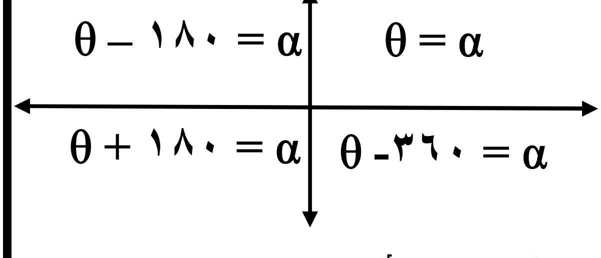
جا$^+$ (فى الربع الاول أو الثانى) جا$^-$ (فى الربع الثالث أو الرابع)

جتا$^+$ (فى الربع الاول أو الرابع) جتا$^-$ (فى الربع الثانى أو الثالث)

ظا$^+$ (فى الربع الاول أو الثالث) ظا$^-$ (فى الربع الثانى أو الرابع)

٢- تحديد الزاوية الحادة التى تحقق المعادلة (هـ)

٣- ايجاد قيمة الزاوية حسب الربع الذى تقع فيه



ملاحظات :

* عند إيجاد الحل العام لدوال القاطع و قاطع التمام و الظل و ظل التمام تأكد من الحلول التى تكون عندها الدالة غير معرفة
* يمكن إستخدام أحد البرامج الرسومية لحل المعادلة المثلثية و مطابقته مع الحل للتأكد من صحته

الحل العام للمعادلات المثلثية

(١) إذا كان : حا θ = ك حيث : ك ∋ [– ١ ، ١] ، حا α = ك

فإن : $\theta = \alpha +$ ٢ ن π ، $\theta = (\pi - \alpha) +$ ٢ ن π حيث : ن ∋ ص

بالمثل : قتا θ = ك حيث : $\theta \neq$ ن π تحول إلى الدالة حا θ

(٢) إذا كان : حتا θ = ك حيث : ك ∋ [– ١ ، ١] ، حتا α = ك

فإن : $\theta = \alpha +$ ٢ ن π ، $\theta = - \alpha +$ ٢ ن π حيث : ن ∋ ص

بالمثل : قا θ = ك حيث : $\theta \neq$ (٢ ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$ تحول إلى الدالة حتا θ

(٣) إذا كان : ظا θ = ك حيث : ك ∋] – ∞ ، ∞ [، $\theta \neq$ (٢ ن + ١) $\frac{\pi}{٢}$

، ظا α = ك

فإن : $\theta = \alpha +$ ن π حيث : ن ∋ ص

بالمثل : ظتا θ = ك حيث : $\theta \neq$ ن π تحول إلى الدالة ظا θ

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : حا $\theta = \frac{١}{٢}$

الحل : ∵ حا $\theta = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٦}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{٦} +$ ٢ ن π أو $(\pi - \frac{\pi}{٦}) +$ ٢ ن π ، ن ∋ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : حتا $\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

الحل :

∵ حتا $\theta = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٤}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{٤} +$ ٢ ن π أو $- \frac{\pi}{٤} +$ ٢ ن π ، ن ∋ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : ظا $\theta = \sqrt{٣}$

الحل :

∵ ظا θ = $\sqrt{٣}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{٣}$ + ن π ، ن ∈ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : ٢حتا θ ـ $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل : ∵ ٢حتا θ ـ $\sqrt{٣}$ = ٠ ∴ حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π أو − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : حا θ حتا θ = $\frac{١}{٢}$ حتا θ

الحل :

∵ حا θ حتا θ ـ $\frac{١}{٢}$حتا θ = ٠ ∴ حتا θ (حا θ ـ $\frac{١}{٢}$) = ٠ بالتحليل

∴ إما حتا θ = ٠ ∴ θ = $\frac{\pi}{٢}$

أو حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π ، − $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص

أو : $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π أو (π − $\frac{\pi}{٦}$) + ٢ ن π ، ن ∈ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : حا θ حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا θ

الحل : ∵ حا θ حتا θ ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا θ = ٠ ∴ حا θ (حتا θ ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٠ بالتحليل

∴ إما حا θ = ٠ ∴ θ = ٠

أو حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ الحل العام للمعادلة هو : ن π ، ± $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص

مثال : أوجد الحل العام للمعادلة : حتا^{٢} θ ـ حتا θ = ٠

الحل : ∵ حتا^{٢} θ ـ حتا θ = ٠ ∴ حتا θ (حتا θ ـ ١) = ٠ بالتحليل

∴ إما حتا θ = ٠ ∴ $\theta = \frac{\pi}{٢}$

أو حتا θ = ١ ∴ θ = ٠

∴ الحل العام للمعادلة هو : ن π ، ± $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص

تدريب : أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية بالراديان .

(أ) ظا θ = ١ (ب) جتا θ = جا ٢ θ (جـ) ٢ جا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

د] ٢ حا^{٢} θ = حا θ هـ] $\sqrt{٢}$ حا θ حتا θ ــ حا θ = ٠

حل المعادلات المثلثية فى الفترة [٠ ، ٢π[

مثال : حل المعادلة : حا θ حتا θ = $\frac{١}{٢}$ حتا θ حيث θ ∈] ٠ ، π [

الحل : ∵ حا θ حتا θ ــ $\frac{١}{٢}$ حتا θ = ٠ ∴ حتا θ (حا θ ــ $\frac{١}{٢}$) = ٠ بالتحليل

∴ إما حتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠ [تقع على محور الصادات]

أو حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠ أو ١٥٠ [تقع فى الربع الاول ، الثانى]

مجموعة الحل = { ٣٠ $^{\circ}$ ، ٩٠ $^{\circ}$ ، ١٥٠ $^{\circ}$ }

مثال : إذا كانت ٠° < θ ⩽ ٣٦٠° فأوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) ٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ (ب) ٤ جا^{٢} θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

الحل :

(أ) ∵ ٢ حا θ حتا θ + ٣ حتا θ = ٠ ∴ حتا θ (٢ حا θ + ٣) = ٠ بالتحليل

∴ حتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠ أو ٢٧٠ °

إما ٢ حا θ + ٣ = ٠ ∴ حا θ = $\frac{-٣}{٢}$ ∌ [-١ ، ١]

∴ لا توجد حلول حقيقية تحقق المعادلة ∴ مجموعة الحل = { ٩٠ ° ، ٢٧٠ ° }

(ب) ∵ ٤ حا^{٢} θ ـ ٣ حا θ حتا θ = ٠ ∴ حا θ (٤ حا θ ـ ٣ حتا θ) = ٠

∴ حا θ = ٠ ∴ θ = ٣٦٠ °

إما ٤ حا θ ـ ٣ حتا θ = ٠ ∴ ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ θ = ١٢ ″ ٥٢ ′ ٣٦ ° أو ١٢ ″ ٥٢ ′ ٢١٦ °

∴ مجموعة الحل = { ٣٦٠ ° ، ١٢ ″ ٥٢ ′ ٣٦ ° ، ١٢ ″ ٥٢ ′ ٢١٦ ° }

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : ٢ حتا^{٢} θ - حتا θ ــ ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

الحل : بالتحليل نجد : (٢ حتا θ + ١) (حتا θ ــ ١) = ٠

∴ إما ٢ حتا θ + ١ = ٠ ∴ حتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ θ = ١٢٠ ° أو ٢٤٠ °

أو حتا θ ــ ١ = ٠ ∴ حتا θ = ١ ∴ θ = صفر

∴ مجموعة الحل = { صفر° ، ١٢٠ ° ، ٢٤٠ ° }

مثال : حل المعادلة : ٤ جتا^{٢} θ ــ ١ = ٠ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

الحل: ∵ ٤ جتا^{٢} θ ــ ١ = ٠ ∴ حتا^{٢} θ = $\frac{١}{٤}$ ∴ حتا θ = ± $\frac{١}{٢}$

∵ حتا θ = $\frac{١}{٢}$ [تقع فى الربع الأول و الرابع] ∴ θ = ٦٠ أو ٣٠٠ °

إما حتا θ = ـ $\frac{١}{٢}$ [تقع فى الربع الثانى و الثالث] ∴ θ = ١٢٠ أو ٢٤٠ °

∴ مجموعة الحل = { ٦٠ ، ٣٠٠ ، ١٢٠ ، ٢٤٠ }

تمارين على حل المعادلات المثلثية

أولًا : أكمل ما يأتى

(١) الحل العام للمعادلة جتا θ = ١ لجميع قيم θ هو ....

(٢) الحل العام للمعادلة جا θ = ١ حيث $\theta \in [\pi، ٢\pi]$ هو ....

(٣) الحل العام للمعادلة جا θ = جتا θ لجميع قيم θ هو ....

(٤) مجموعة حل المعادلة ظتا θ = $\sqrt{٣}$ حيث $\theta \in [\pi، ٢\pi]$ هى ....

ثانيًا : الاختيار من متعدد

(٥) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت جا θ + ١ = ٠ فإن θ تساوى ....

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٦) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت جتاθ + ١ = ٠ فإن θ تساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°

(٧) إذا كانت ٠° $\leqslant \theta <$ ١٨٠° وكانت $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = ٠ فإن θ تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٨) إذا كانت ١٨٠° $\leqslant \theta <$ ٣٦٠° وكانت ٢ جتاθ + ١ = ٠ فإن θ تساوى ....

(أ) ٢١٠° (ب) ٢٤٠° (ج) ٣٠٠° (د) ٣٣٠°

ثالثًا : أجب عن الأسئلة الآتية

(٩) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية .

(أ) جاθ = $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢جتاθ − $\sqrt{٣}$ = ٠ (ج) $\sqrt{٣}$ ظا θ − ١ = ٠

(١٠) أوجد حل كل من المعادلات الآتية فى الفترة $[٠، \frac{٣\pi}{٢}]$:

(أ) ظا^٢ θ − ظاθ = ٠ (ب) ٢جا θ جتا θ − جتا θ = ٠

(ج) ٢جا^٢ θ − ٣جاθ − ٢ = ٠

حل المثلث القائم الزاوية

<u>* تذكر أن :</u> للمثلث ستة عناصر هى ثلاث أضلاع و ثلاث زوايا

حل المثلث يقصد به إيجاد أطوال أضلاعه و قياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاث عناصر من عناصره الستة (إحداها على الاقل ضلع) .

إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يلزم معرفة شرطين لحل المثلث :

إما طولا ضلعين أو طول ضلع و قياس إحد زاويته الحادتين .

<u>* طرق حل المثلث القائم الزاوية :</u>

[١] <u>إذا علم طولا ضلعين :</u>

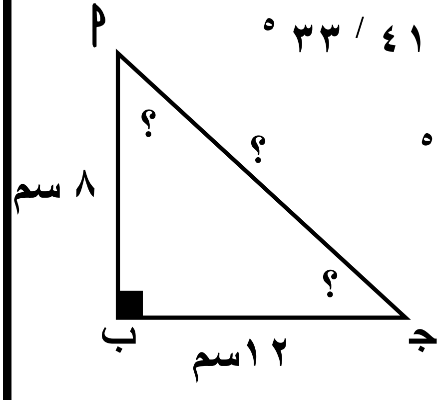
١- نحسب قياس إحدى الزاويتين الحادتين كالتالى :

$\frac{\text{طول أحد الضلعين المعلومين}}{\text{طول الضلع المعلوم}}$ = نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين

٢- نحسب قياس الزاوية الأخرى (٩٠° ـ الزاوية الحادة المعلومة)

٣- نحسب طول الضلع الثالث من (١) و يفضل استخدام نظرية فيثاغورث للدقة

مثال : حل المثلث أبج القائم الزاوية فى ب الذى فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم



الحل: ∵ طا جـ = $\frac{\text{أب}}{\text{بج}}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ق($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٣° ٤١' ٢٤''

∴ ق($\widehat{\text{أ}}$) = ٩٠° ـ ٣٣° ٤١' ٢٤'' = ٥٦° ١٨' ٣٦''

∵ حا جـ = $\frac{\text{أب}}{\text{أج}}$ ∴ حا ٣٣° ٤١' ٢٤'' = $\frac{٨}{\text{أج}}$

∴ أج = $\frac{٨}{\text{حا } ٣٣° ٤١' ٢٤''}$ ≈ ١٤,٤٢٢٢٣٠٦ سم

حل أخر : باستخدام نظرية فيثاغورث : أج = $\sqrt{(٨)^٢ + (١٢)^٢}$ ≈ ١٤.٤٢٢٢٥٠٦ سم

---

[٢] إذا علم طول ضلع و قياس زاوية (احدى الزاويتين الحادتين) :

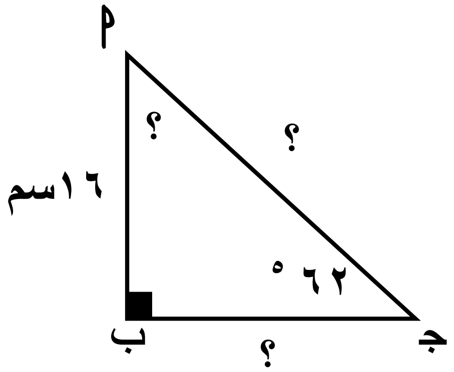
١- نحسب قياس الزاوية الثالثة (= ٩٠ ° - قياس الزاوية الحادة المعلومة)

٢- نوجد طول الضلعين الآخرين كالتالى :

طول الضلع المطلوب / طول الضلع المعلوم = نسبة مثلثية لإحدى الزاويتين الحادتين .

مثال : حل المثلث ؟ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث ق(جـ) = ٦٢ ° ، ؟ب = ١٦ سم

مقربا الناتج لرقمين عشريين .



الحل : ق(؟) = ٩٠ ° - ٦٢ ° = ٢٨ °

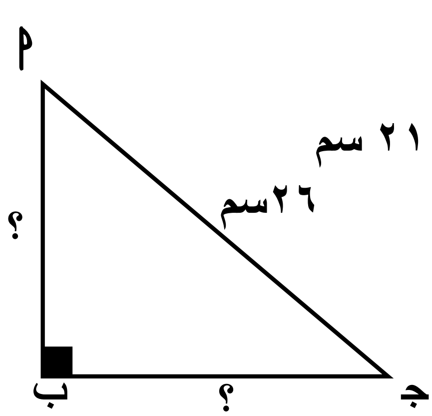
∵ ظا جـ = ؟ب / ب جـ ∴ ظا ٦٢ ° = ١٦ / ب جـ

∴ ب جـ = ١٦ / ظا ٦٢ ° = ٨.٥٠٧٣٥٠٩٠٧ ≃ ٨.٥١ سم

∵ حا جـ = ؟ب / ؟جـ ∴ حا ٦٢ ° = ١٦ / ؟جـ ∴ ؟جـ = ١٦ / حا ٦٢ ° ≃ ١٨.١٢ سم

مثال : حل المثلث ؟ب جـ القائم الزاوية فى ب حيث ق(؟) = ١٢ ″ ٥٣ ° ، ؟ جـ = ٢٦ سم

الحل : ق(جـ) = ٩٠ ° - ١٢ ″ ٥٣ ° = ٤٨ ″ ٣٦ °



∵ حا ؟ = جـ ب / ؟جـ ∴ حا ١٢ ″ ٥٣ ° = جـ ب / ٢٦

∴ جـ ب = ٢٦ × حا ١٢ ″ ٥٣ ° ≃ ٢٠.٨١٩٠١٥٦٤ ≃ ٢١ سم

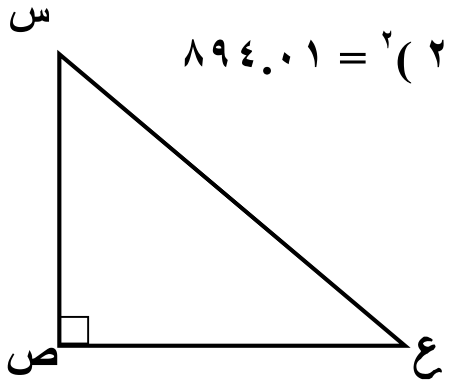
∵ حتا ؟ = ؟ب / ؟جـ ∴ حتا ١٢ ″ ٥٣ ° = ؟ب / ٢٦

∴ ؟ب = ٢٦ × حتا ١٢ ″ ٥٣ ° ≃ ١٥.٥٧٤٦١٣٥٦

≃ ١٦ سم

مثال : س ص ع مثلث فيه س ص = ١١.٥ سم ، ص ع = ٢٧.٦ سم ، س ع = ٢٩.٩ سم

أثبت أن المثلث قائم الزاوية فى ص ثم أوجد زاوية س .



الحل : ∵ (س ص)^{٢} + (ص ع)^{٢} = (١١.٥)^{٢} + (٢٧.٦)^{٢} = ٨٩٤.٠١

، (س ع)^{٢} = (٢٩.٩)^{٢} = ٨٩٤.٠١

∴ (س ص)^{٢} + (ص ع)^{٢} = (س ع)^{٢}

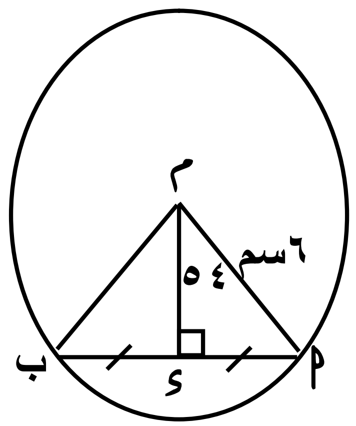
∴ ق (ص̂) = ٩٠° قائمة

∵ ظا س = ص ع / س ص = ٢٧,٦ / ١١,٥ = ١٢ / ٥ ∴ ق (س̂) = ٦٧° ٢٢′ ٤٨″

مثال: دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٨°

احسب طول هذا الوتر مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين .

الحل :



نرسم م ء ⊥ أب ∴ ء منتصف أب من خواص الدائرة

∴ ق (أ م̂ ء) = ١٠٨ ÷ ٢ = ٥٤°

∴ حا (أ م̂ ء) = أء / م أ ∴ حا ٥٤° = أء / ٦

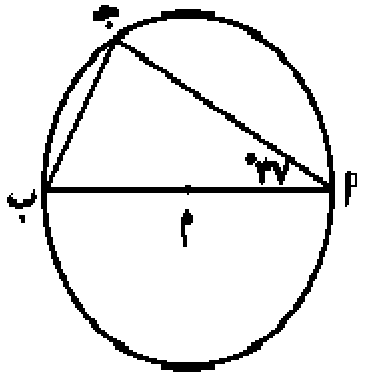
∴ أء = ٦ × حا ٥٤° ≃ ٤.٨٥٤١٠١٩٦٦ سم

∴ أب = ٢ × أء = ٢ × ٤.٨٥٤١٠١٩٦٦ ≃ ٩,٧٠٨٢٠٣٩٣٢ سم

<u>تدريب</u> : دائرة م طول نصف قطرها ٨ سم رسم فيها وتر يقابل زاوية محيطية قياسها ٥٦°

أوجد طول هذا الوتر

مثال : فى الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overline{\text{ءب}}$ قطر فيها ، ءجـ = ١٢ سم ، ق$(\widehat{\text{ء}})$ = ٣٧ °
فأوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب رقمين عشريين .



الحل: ∵ $\overline{\text{ءب}}$ قطر فى الدائرة ∴ ق$(\widehat{\text{جـ}})$ = ٩٠ °

∵ حتا ء = $\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءب}}$ ∴ حتا ٣٧ ° = $\frac{١٢}{\text{ءب}}$

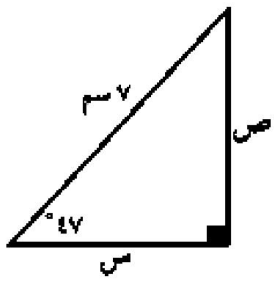
∴ ءب = $\frac{١٢}{\text{حتا ٣٧}}$ = ١٥,٠٤

∴ نق = ١٥,٠٤ ÷ ٢ = ٧.٥٢ سم

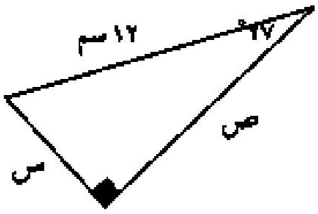
تمارين على حل المثلث القائم

(١) أوجد قيمة كل من س ، ص فى كل شكل من الأشكال الآتية

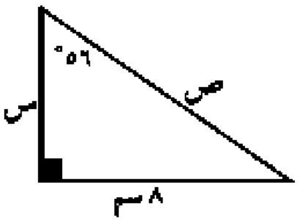
(أ)



(ب)

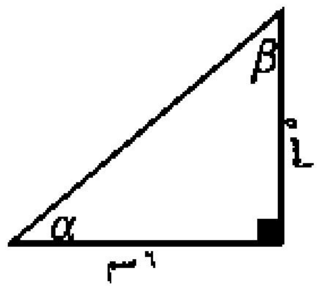


(جـ)

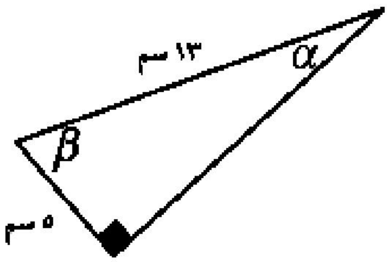


(٢) أوجد قيمة كل من الزاويتين α، β بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية:

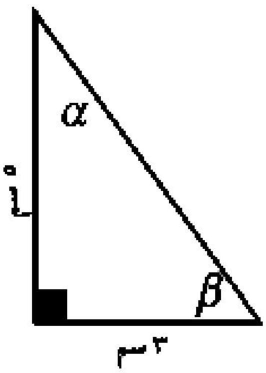
(أ)



(ب)



(جـ)



(٣) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزاويا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث:

(أ) أ ب = ٤ سم، ب جـ = ٦ سم (ب) أ ب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ١٧,٦ سم

(جـ) أ ب= ٥,٣ سم ، أ جـ = ١٢,٢ سم (د) ب جـ = ٣١ سم، أ جـ = ٤٢ سم

(٤) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب مقربًا الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من السنتميترات حيث:

(أ) ق ($\angle$ أ) = ٠,٩٢٥ء، ب جـ = ٨ سم (ب) ق ($\angle$ أ) = ١,١٦٩ء، أ ب = ١٨ سم

(٥) أ ب جـ مثلث رسم $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان أ ء = ٦ سم، ق($\angle$ ب) = ٥٢° ق ($\angle$ جـ) = ٢٨° فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

(٦) دائرة طول قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ يساوى ٢٠ سم رسم $\overline{\text{أ جـ}}$ وترًا فيها طوله ١٢ سم . أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

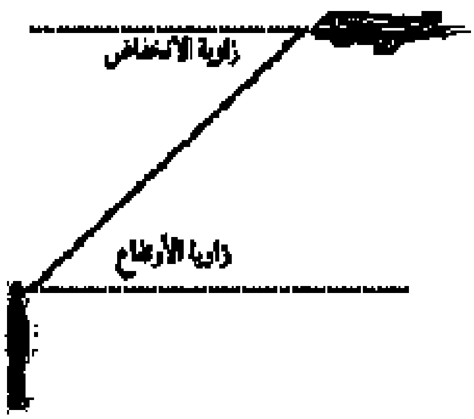
(٧) قطعة أرض على شكل معين أ ب جـ ء طول ضلعه ١٢ مترًا، ق ($\angle$ أ ب جـ) = ١٠٠° أوجد طول كل من قطريه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ لأقرب متر.

(٨) أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، أ ب = جـ ء = ٥سم، أ ء = ٤سم، ب جـ = ١٠سم. أوجد قياس كل من زواياه الأربعة.

مع تمنياتى للجميع بالتفوق و النجاح
أنت معنا دائما فى القمة

تطبيقات على حل المثلث
زوايا الإرتفاع والإنخفاض

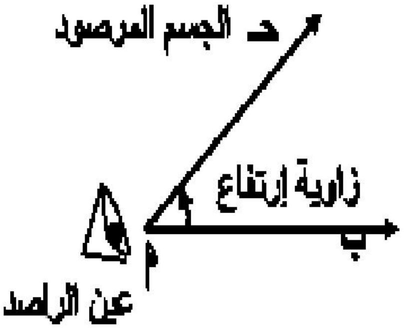
* <u>زاوية الارتفاع و زاوية الانخفاض</u> :



زاوية الارتفاع أو الانخفاض هى اتحاد الشعاع الأفقى مع الشعاع البادئ من الجسم مارًا بعين الراصد.

قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض (بالتبادل).

زاوية الإرتفاع :



إذا فرض أن الراصد عند أ

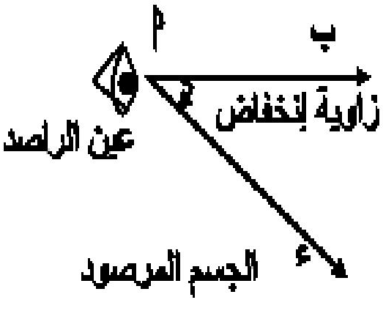
، الجسم المرصود عند حـ أعلى مستوى النظر

فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ الأفقى ،

$\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ الواصل بين عين الراصد و الجسم المرصود

تسمى زاوية إرتفاع الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

زاوية الإنخفاض :



إذا فرض أن الراصد عند أ

، الجسم المرصود عند ء أسفل مستوى النظر

فإن الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ الأفقى ،

$\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ الواصل بين عين الراصدو الجسم المرصود

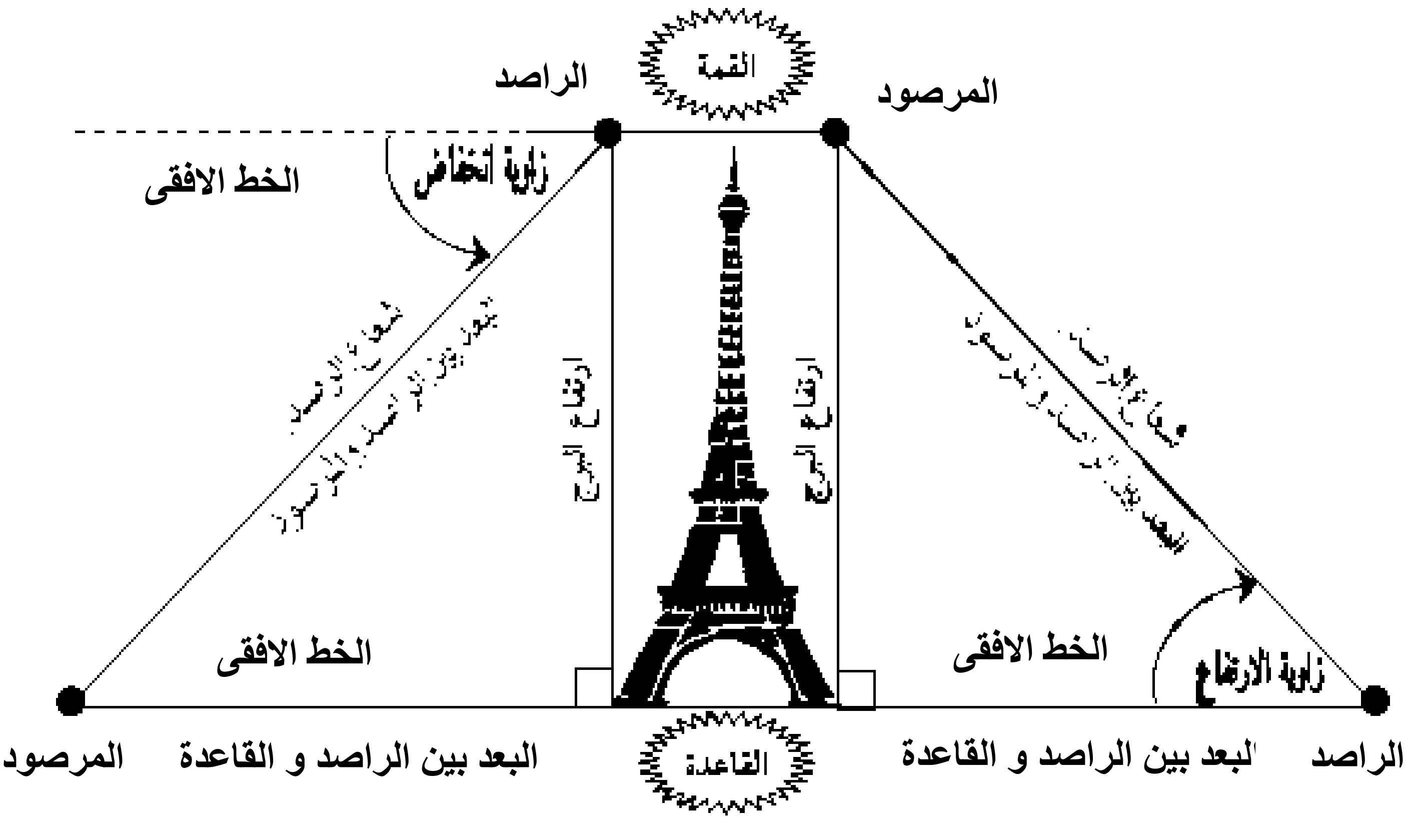
تسمى زاوية إنخفاض الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ

ملاحظات هامة :

أولا : زاوية الارتفاع (أو الانخفاض) تكون محصورة بين الخط الأفقى المار بالراصد (أو المرصود) و شعاع الرصد .

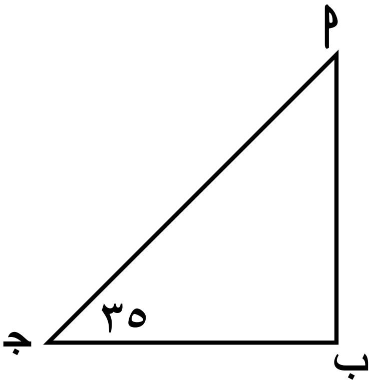
ثانيا : يجب رسم المسألة رسم صحيح بإتباع الآتى :

- **ارتفاع أى جسم (برج أو صخرة أو منزل أو عمود أو تل أو مئذنة أو فنار أو طائرة) يمثل بعمود على السطر .**
- **رجل أو طائرة أو زورق أو راصد أو سفينة أو متطاد أو سيارة تمثل بنقطة**



- **من المهم جدا عند رسم زاوية الارتفاع أو الانخفاض التأكد من وجود الخط الافقى المار بنقطة الرصد .**
- **أى جسم يصنع زاوية قائمة مع الأفقى فإن أعلى نقطة فيه تسمى قمته و أسفل نقطة تسمى قاعدته .**

مثال : يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعدة برج ، رصد زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٣٥° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

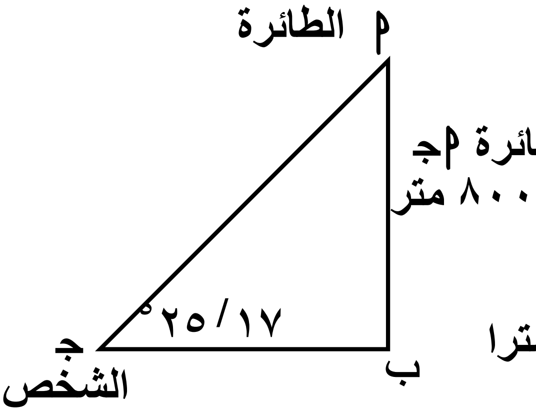


الحل : بفرض أن ارتفاع البرج أب ، $\widehat{أجب}$ زاوية الارتفاع

∵ ظا جـ = $\frac{أب}{ب جـ}$ ∴ ظا ٣٥° = $\frac{أب}{٥٠}$

∴ أب = ٥٠ ظا ٣٥° ≃ ٣٥.٠١٠٣٧٦٩١ مترا

مثال: رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر عن سطح الأرض، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥°. أوجد المسافة بين الشخص والطائرة.



الحل: بفرض أن ارتفاع الطائرة عن الارض أب

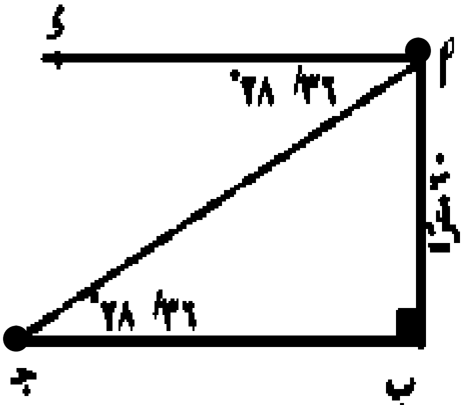
، $\widehat{أجب}$ زاوية الارتفاع ، المسافة بين الشخص و الطائرة أجـ

∵ حا جـ = $\frac{أب}{أجـ}$ ∴ حا ١٧َ ٢٥° = $\frac{٨٠٠}{أجـ}$

∴ أجـ = $\frac{٨٠٠}{حا ١٧َ ٢٥°}$ ≃ ١٨٧٣.١٢٠١٨٥ مترا

مثال : من قمة برج ارتفاعه ٦٠ مترا وجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج تساوى ٣٦َ ٢٨° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب م

الحل :



نفرض أن أ هى قمة البرج $\overline{أب}$

فتكون ∠ ء أ جـ هى زاوية انخفاض الجسم

لذلك فإن: ق (∠ جـ) = ق (∠ ء أ جـ)

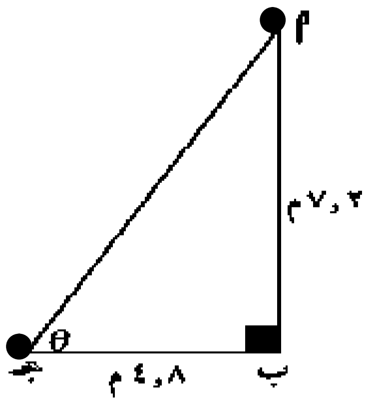
∵ ظا جـ = $\frac{أب}{ب جـ}$ ∴ ظا ٣٦َ ٢٨° = $\frac{٦٠}{ب جـ}$

∴ ب جـ × ظا ٣٦َ ٢٨° = ٦٠

∴ ب جـ = $\frac{٦٠}{ظا ٣٦َ ٢٨°}$ = ١٢٥,٢٢٩٦٦ ≃ ١٢٥ مترا

مثال : عمود إنارة طوله ٧,٢ متر يلقى ظلًا على الأرض طوله ٤,٨ متر، أوجد بالراديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ.

الحل :



نفرض أن نقطة أ هي قمة عمود الإنارة أ ب، وأن ب جـ هو طول ظل العمود، θ زاوية ارتفاع الشمس

∵ ظاجـ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ظا θ = $\frac{٧,٢}{٤,٨}$ = ١,٥

ق (∠θ) = ٣٦ً ١٨َ ٥٦°

∴ زاوية ارتفاع الشمس بالراديان = ٣٦ً ١٨َ ٥٦° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٩٨٢٧٩٣٧٢٣٢ ء

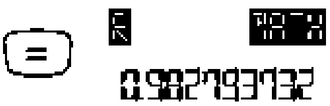
ملاحظة :

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد θ بالراديان مباشرة دون إيجادها بالدرجات كالآتي:

١ - تهيئة الآلة الحاسبة على نظام (Radian): Shift Mode 4 (Rad :4)

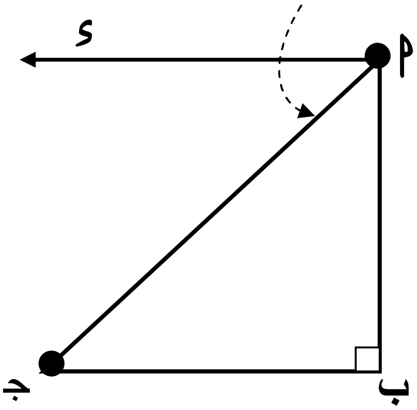
٢ - أدخال البيانات (Data): Shift tan (tan⁻¹) 1 . 5

٣- أستدعاء النواتج (call outputs): =



مثال: من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة، فما مقدار قياس زاوية الانخفاض بالراديان؟

الحل :



بفرض أن أ قمة البرج $\overline{\text{أب}}$ ، ء $\widehat{\text{أ}}$ جـ زاوية الانخفاض

∴ ق(ء$\widehat{\text{أ}}$جـ) = ق($\widehat{\text{جـ}}$) بالتبادل

∴ ظا جـ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{١٨٠}{٣٠٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق($\widehat{\text{جـ}}$) = ٥٠ // ٥٧ / ٣٠ °

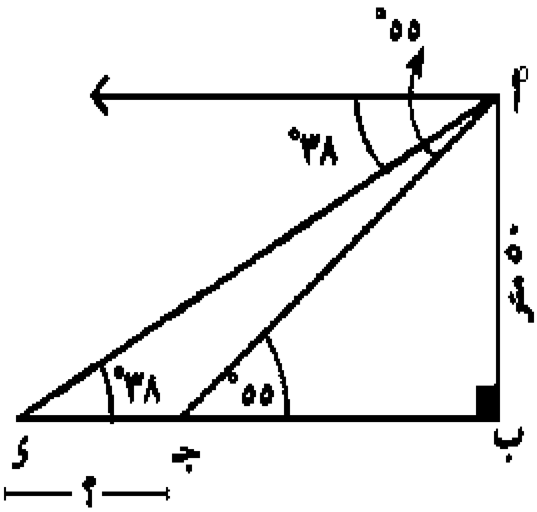
∴ زاوية الانخفاض بالراديان = ٥٠ ″ ٥٧ ′ ٣٠ ° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ ≃ ٠.٥٤٠٤١٩٥٠٠٣ ء

[يمكن ايجاد زاوية الانخفاض مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة]

مثال: وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٥٠ مترًا، ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتى انخفاضيهما، فوجدهما ٣٨ °، ٥٥° أوجد البعد بين السفينتين لأقرب متر.

الحل :

نفرض أن ارتفاع الصخرة هو أب ، وأن البعد بين السفينتين هو جـ ء



فى Δ أب ء:

∵ ظا ٣٨° = $\frac{٥٠}{\text{ب ء}}$ ∴ ب ء = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٣٨°}}$

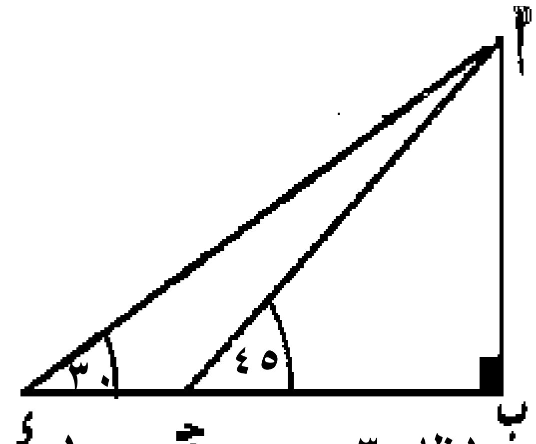
∴ ب ء ≃ ٦٤ متر

∵ ظا ٥٥° = $\frac{٥٠}{\text{ب جـ}}$ ∴ ب جـ = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٥٥°}}$ ≃ ٣٥ متر

∵ جـ ء = ب ء − ب جـ ∴ جـ ء = ٦٤ − ٣٥ = ٢٩ متر

مثال: شاهد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى ٣٠°، ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ١٠٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الارتفاع هى ٤٥°. أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر.

الحل :



نفرض أن ارتفاع المنطاد هو $\overline{\text{أب}}$

، المسافة الأفقية التى سارها الشخص هى $\overline{\text{ءجـ}}$

فى Δ أب ء : ظا ٣٠ ° = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ} + ١٠٠٠}$

فى Δ أب جـ : أب = ب جـ ∴ ظا ٣٠ ° = $\frac{\text{أب}}{\text{أب} + ١٠٠٠}$

∴ أب = أب ظا ٣٠ + ١٠٠٠ ظا ٣٠

∴ أب (١ − ظا ٣٠) = ١٠٠٠ ظا ٣٠ ∴ أب = $\frac{\text{١٠٠٠ ظا ٣٠}}{\text{١ − ظا ٣٠}}$ = ١٣٧ مترا

تمارين على زوايا الارتفاع و الانخفاض

(١) طائرة ورقية طول خيطها ٤٢ مترًا، فإذا كانت الزاوية التى يصنعها الخيط مع الأرض الأفقية تساوى ٦٣°. أوجد لأقرب متر ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض.

(٢) وجد راصد أن قياس زاوية ارتفاع قمة مئذنة على سطح الأرض تبعد ٤٢ مترًا عن قاعدتها يساوى ٥٢° فما ارتفاع المئذنة لأقرب متر؟

(٣) جبل ارتفاعه ١٨٢٠ مترًا وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الأرض ٦٨° فما هى المسافة بين النقطة والراصد لأقرب متر

(٤) سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى، ويرتفع عن سطح الأرض ٣,٨ متر والطرف السفلى للسلم على الأرض وقياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٤°. أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من:

(أ) بعد الطرف السفلى عن الحائط (ب) طول السلم

(٥) من سطح منزل ارتفاعه ٨ أمتار رصد شخص زاوية ارتفاع أعلى عمارة أمامه فوجد أن قياسها ٦٣° ورصد زاوية انخفاض قاعدتها، فوجد أن قياسها ٢٨°، أوجد ارتفاع العمارة لأقرب متر.

(٦) إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بعد ١٤٠ مترًا من قاعدتها يساوى ٤٦َ ٢٦° فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر؟ وإذا قيست زاوية ارتفاع المئذنة نفسها من نقطة تبعد ١١٠ أمتار من قاعدتها، فأوجد لأقرب دقيقة قياس زاوية ارتفاعها عندئذ

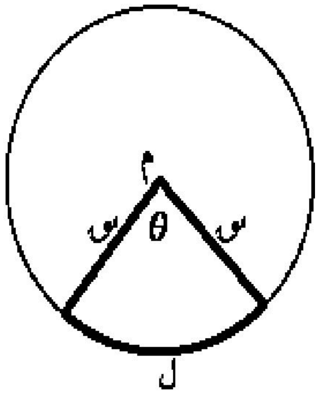
(٧) شاهد راصد أن قياس زاوية ارتفاع منطاد مثبت هى $\frac{\pi}{٦}$، ولما سار الراصد فى مستوى أفقى نحو المنطاد مسافة ٨٠٠ متر شاهد أن قياس زاوية الارتفاع هى $\frac{\pi}{٤}$. أوجد ارتفاع المنطاد لأقرب متر.

(٨) تقترب سفينة من منارة ارتفاعها ٥٠ مترًا، رصدت قمة المنارة فى لحظة ما فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ١١,٠ء وبعد ١٥ دقيقة رصدت قمة المنارة ثانية فوجدت أن قياس زاوية ارتفاعها ٢٢,٠ء. احسب سرعة السفينة علمًا بأنهاتسير بسرعة منتظمة.

القطـــاع الدائرى

تذكر أن :

بفرض $\theta^{ء}$ القياس الدائرى ، ل طول القوس ، نق نصف قطر الدائرة فإن :



١) $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

ل	
نق	$\theta^{ء}$

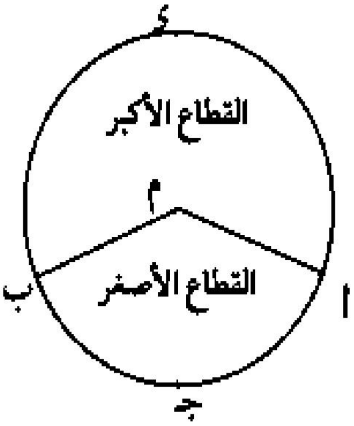
٢) العلاقة بين القياس الدائرى و القياس الستينى :

$\because \frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠}$ من هذا القانون نستنتج أن :

$\therefore$ الزاوية بالتقدير الدائرى ($\theta^{ء}$) $= \frac{س^{\circ} \times \pi}{١٨٠^{\circ}}$

$\therefore$ الزاوية بالتقدير الستينى ($س^{\circ}$) $= \frac{\theta^{ء} \times ١٨٠}{\pi}$

القطاع الدائرى : هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفى قطرين و قوس



فى الشكل المقابل :

$\overline{م\,ا}$ ، $\overline{م\,ب}$ يقسمان الدائرة الى قطاعين دائريين القطاع الأصغر م ا جـ ب

و القطاع الأكبر م ا ء ب ، ا م ب زاوية القطاع الأصغر ، ا م ب المنعكسة زاوية القطاع الأكبر .

مساحة القطاع الدائرى :

هو مساحة جزء من دائرة قياس زاويتها المركزية يساوى ٢ π

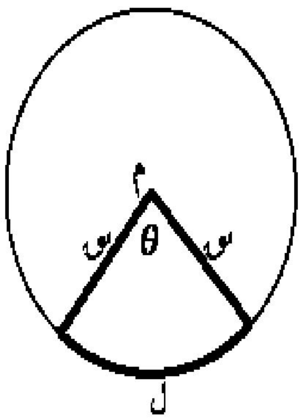
أولا : مساحة القطاع الدائرى بمعلومية قياس زاويته المركزية و طول نصف القطر:

$\frac{مساحة\ القطاع}{مساحة\ الدائرة} = \frac{\theta^{ء}}{٢\pi}$ $\therefore$ مساحة القطاع $= \frac{\theta^{ء}}{٢\pi} \times$ مساحة الدائرة

$\therefore$ مساحة القطاع $= \frac{\theta^{ء}}{٢\pi} \times \pi$ نق^{٢}

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{١}{٢} \times \text{نق}^٢ \times \theta^{ء}$$

حيث $\theta^{ء}$ زاوية القطاع ، نق نصف قطر دائرته



مثال : قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٨ سم ، و قياس زاويته المركزية ١.٤ ء

الحل :

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{١}{٢}\ \text{نق}^٢\ \theta^{ء} = \frac{١}{٢} \times (٨)^٢ \times ١.٤^{ء} = ٤٤.٨\ \text{سم}^٢$$

مثال : قطاع دائرى مساحته ٢٧٠ سم ٢ و طول نصف قطر دائرته ١٦ سم أوجد بالراديان قياس زاويته .

الحل :

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{١}{٢}\ \text{نق}^٢\ \theta^{ء} \quad \therefore ٢٧٠ = \frac{١}{٢} \times (١٦)^٢ \times \theta^{ء}$$

$$\therefore \theta^{ء} = \frac{٢ \times ٢٧٠}{(١٦)^٢} = ٢.١٠٩٣٧٥^{ء}$$

<u>* ثانيا : ايجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية زاويته بالدرجات :</u>

$$\because \frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\frac{١}{٢}\text{نق}^٢\ \theta^{ء}}{\pi\ \text{نق}^٢} \quad \text{حيث} \quad \theta^{ء} = \frac{س^{\circ} \times \pi}{١٨٠^{\circ}}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{س^{\circ}}{٣٦٠} \times \text{مساحة الدائرة}$$

حيث س° زاوية القطاع بالدرجات ، نق نصف قطر دائرته

مثال : قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٦ سم و قياس زاويته ١٢٠ ° أوجد مساحته لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل :

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{س^{\circ}}{٣٦٠} \times \pi\ \text{نق}^٢ = \frac{١٢٠^{\circ}}{٣٦٠} \times \pi \times (١٦)^٢ \simeq ٢٦٨\ \text{سم}^٢$$

مثال : قطاع دائرى قياس زاويته ٦٠ ° و طول نصف قطر دائرته ١٢ سم أوجد مساحته لأقرب رقم عشرى واحد .

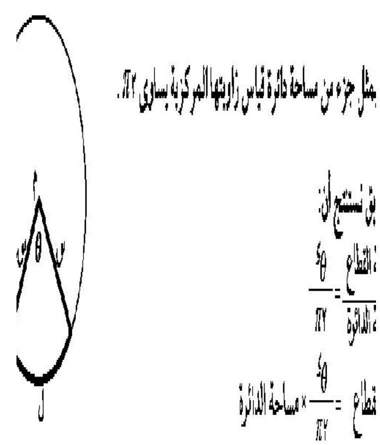
الحل :

مساحة القطاع = $\frac{\text{س}^\circ}{\text{٣٦٠}} \times \pi\,\text{نق}^{٢}$ = $\frac{\text{٦٠}^\circ}{\text{٣٦٠}} \times \pi \times (\text{١٢})^{٢} \simeq$ ٧٥.٤ سم^{٢}

---

* ثالثا : ايجاد مساحة القطاع الدائرى بمعلومية طول قوسه :

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢} \times \text{نق}^{٢}\,\theta^{ء}$ = $\frac{١}{٢} \times \text{نق}^{٢} \times \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{١}{٢}$ ل نق



$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائرى} = \frac{١}{٢}\ \text{ل نق}}$$

حيث ل طول قوس القطاع ، ونق نصف قطر دائرته

$$\boxed{\text{محيط القطاع الدائرى} = ٢\,\text{نق} + \text{ل}}$$

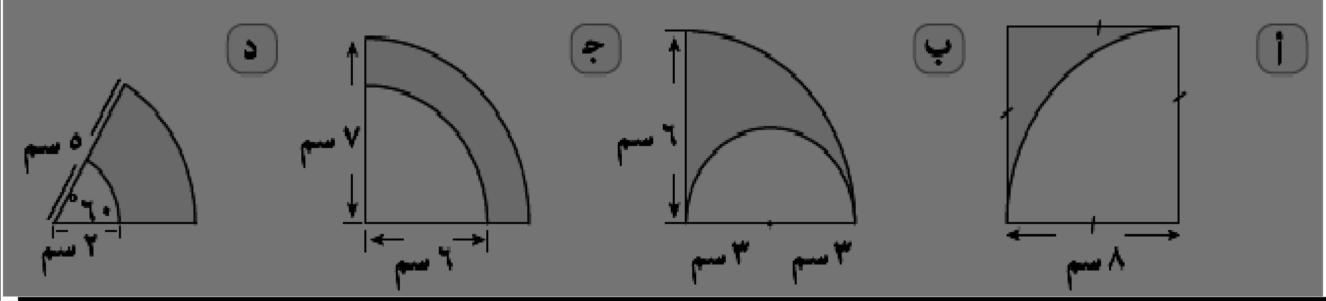
مثال : أوجد مساحة قطاع دائرى محيطه يساوى ٢٨ سم و طول نصف قطر دائرته ٨ سم .

الحل :

$\because$ محيط القطاع = ٢ نق + ل $\therefore$ ٢٨ = ٢ × ٨ + ل $\therefore$ ل = ٢٨ – ١٦ = ١٢ سم

، مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ = ٤٨ سم^{٢}

تدريب : أوجد بدلالة π مساحة الجزء المظلل فى كل شكل من الأشكال الآتية:



تمارين على القطاع الدائرى

أولًا: أكمل ما يأتى

(١) مساحة القطاع الدائرى الذى فيه ل = ٦ سم، نق = ٤ سم يساوى ....

(٢) مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته يساوى ٤ سم، ومحيطه ٢٠ سم تساوى ـــــ سم^{٢}

(٣) محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ٢٤ سم^{٢}، طول قوسه ٨ سم يساوى ـــــــ

ثانيًا: اختيار من متعدد

(١) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١,٢^{ء} وطول نصف قطر دائرته ٤ سم يساوى ـــــــ

(أ) ٤,٨ سم^{٢} (ب) ٩,٦ سم^{٢} (ج) ١٢,٨ سم^{٢} (د) ١٩,٦ سم^{٢}

(٢) محيط القطاع الدائرى الذى طول قوسه ٤ سم وطول قطر دائرته ١٠ سم يساوى ـــــــ

(أ) ١٤ سم (ب) ٢٠ سم (ج) ٣٠ سم (د) سم

(٣) مساحة القطاع الدائرى الذى قياس زاويته ١٢٠° وطول نصف قطر دائرته ٣ سم تساوى ـــــــ

(أ) ٣ π سم^{٢} (ب) ٦ π سم^{٢} (ج) ٩ π سم^{٢} (د) ١٢ π سم^{٢}

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢ سم وطول قوسه ٦ سم تساوى ـــــــ

(أ) ٦ سم^{٢} (ب) ٩ سم^{٢} (ج) ١٢ سم^{٢} (د) ١٨ سم^{٢}

(٥) إذا كانت مساحة قطاع دائرى تساوى ١١٠سم^{٢} وقياس زاويته ٢,٢^{ء} فإن طول نصف قطر دائرته يساوى: ـــــ

(أ) ٢ سم (ب) ٥ سم (ج) ١٠ سم (د) ٢٠ سم

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(١) أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠°.

(٢) قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم. أوجد مساحته

(٣) قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، محيطه ٢٥ سم. أوجد مساحته.

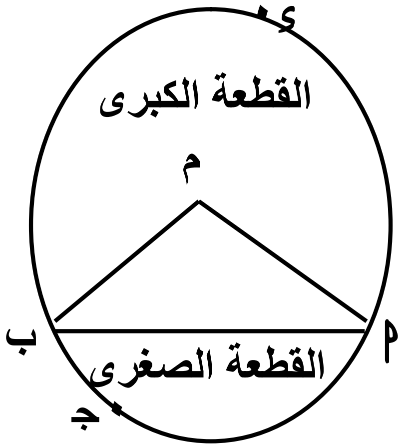
(٤) حوض زهور على شكل قطاع دائرى مساحته ٤٨ م^{٢} وطول قوسه ٦ م . أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته .

(٥) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم. أوجد مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع.

القطــعة الدائرية

تعريف :

القطعة الدائرية هى جزء من سطح دائرة المحدود بقوس فيها ووتر نار بنهايتى الوتر



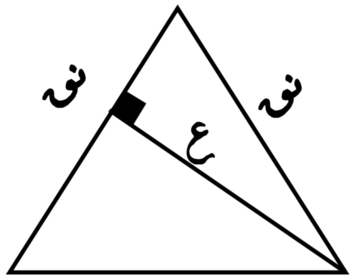
فى الشكل المقابل :

الوتر يقسم الدائرة الى قطعتين دائرتين

ٍجب القطعة الصغرى ، ٍىب القطعة الكبرى

و تسمى ٍ م ب بزاوية القطعة الصغرى بينما ٍ م ب المنعكسة بزاوية القطعة الكبرى .

* ايجاد مساحة القطعة الدائرية :



من الشكل المقابل : مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × نق × ع

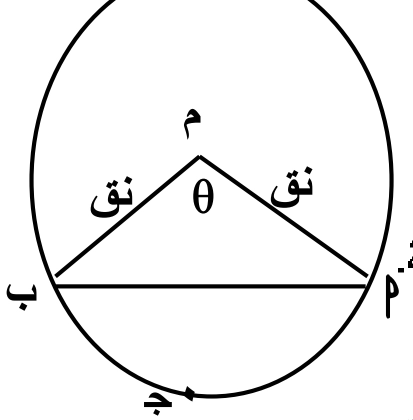
حيث حا θ = $\frac{ع}{نق}$ ، ع = نق حا θ

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × نق × نق حا θ

مساحة القطعة الصغرى أ جـ ب = مساحة القطاع الأصغر م أ ب ـ مساحة سطح المثلث م أ ب

$$= \frac{1}{2} نق^2 \theta^{ء} - \frac{1}{2} \times نق \times نق\ جا \theta$$

$$\boxed{مساحة القطعة الدائرية = \frac{1}{2} نق^2 (\theta^{ء} - جا \theta)}$$



حيث نق طول نصف قطر دائرتها، θ هو قياس زاوية القطعة.

ملاحظة : مساحة القطعة الكبرى = مساحة الدائرة ـ مساحة القطعة الصغرى

مثال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١٢٠ ° وطول نصف قطر دائرتها = ١٠سم

الحل:

$$\theta^{ء} = \frac{١٢٠ \times \pi}{١٨٠} = ٢.١^{ء}$$

$$\text{مساحة القطعة} = \frac{١}{٢}\text{نق}^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta) = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ (٢.١ - \text{جا}١٢٠)$$

$$= ٥٠ (٢.١ - \text{جا } ١٢٠) = ٦١.٧ \text{ سم}^٢$$

مثال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١.٢^ء وطول نصف قطر دائرتها = ٨سم

الحل:

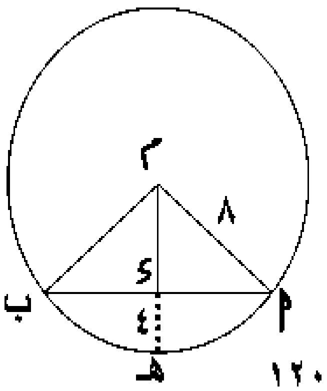
$$\text{س}^{°} = \frac{١.٢ \times ١٨٠}{\pi} = ٦٩^{°}$$

$$\text{مساحة القطعة} = \frac{١}{٢}\text{نق}^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta) = \frac{١}{٢} \times ٦٤ (١.٢ - \text{جا}٦٩)$$

$$= ٣٢ (١.٢ - \text{جا}٦٩) = ٨.٥ \text{ سم}^٢$$

مثال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨سم وارتفاعها = ٤ سم

الحل :



∵ م هـ = نق = ٨ سم ∴ م ء = ٨ − ٤ = ٤ سم

$$\therefore \text{جتا}(\widehat{\text{أ م ء}}) = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

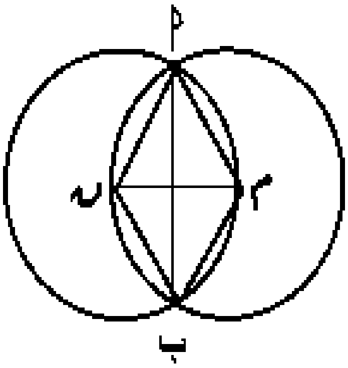
$$\therefore \text{ق}(\widehat{\text{أ م ء}}) = ٦٠ \quad \therefore \text{ق}(\widehat{\text{أ م ب}}) = ٢ \times ٦٠ = ١٢٠^{°}$$

$$\therefore \theta^{ء} = \frac{١٢٠ \times \pi}{١٨٠} = ٢.١^{ء}$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{١}{٢}\text{نق}^٢ (\theta^{ء} - \text{جا}\theta) = \frac{١}{٢} \times ٦٤ (٢.١ - \text{جا}١٢٠) \simeq ٤٨.٦ \text{ سم}^٢$$

مثال : أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم، قياس زاويتها ٢,٢^ء مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل :



∵ أم = م ن = أ ن = ١٢سم ∴ ق ($\widehat{أ م ن}$) = ٦٠°

∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) = ق ($\widehat{أ ن ب}$) = ١٢٠°

مساحة القطعة الدائرية الصغرى فى الدائرة م =

مساحة القطعة الدائرية الصغرى فى الدائرة ن

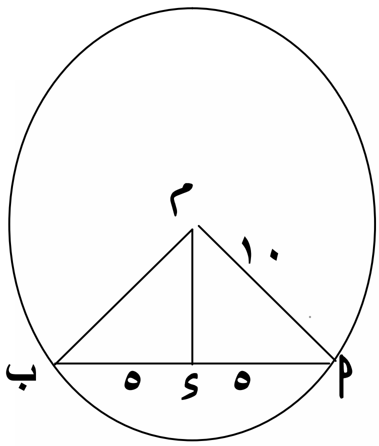
$= \frac{١}{٢} \times ١٤٤ \times (١٢٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} -$ حا $١٢٠) \simeq ٨٨.٤$ سم^{٢}

∴ مساحة المنطقة المشتركة = ٢ × مساحة القطعة الدائرية الصغرى فى الدائرة م

$= ٢ \times ٨٨.٤ \simeq ١٧٦.٨٨$ سم^{٢}

مثال : أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول نصف قطر دائرتها يساوى طول وترها يساوى ١٠سم

الحل :



∵ أب = ء ب = ٥ سم ∴ جا($\widehat{أ م ء}$) = $\frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ق ($\widehat{أ م ء}$) = ٣٠ ∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∴ ق ($\widehat{أ م ب}$) المنعكسة = ٣٦٠ – ٦٠ = ٣٠٠°

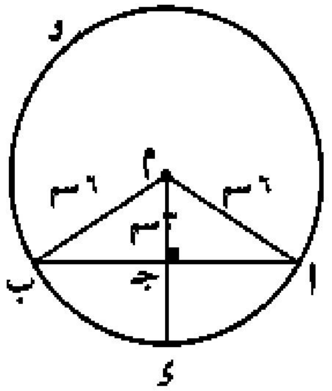
$\theta^{ء} = \frac{٣٠٠ \times \pi}{١٨٠} = ٥.٢^{ء}$

مساحة القطعة الدائرية الكبرى = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢}($\theta^{ء}$ – جا θ) = $\frac{١}{٢} \times ١٠٠$ (٢.١– جا٣٠٠)

= ٥٠ (٥.٢ – جا٣٠٠) = ٣٠٣ سم^{٢}

تمارين على القطعة الدائرية

① فى الشكل المرسوم:



م دائرة طول نصف قطرها ٦ سم $\overline{م جـ} \perp \overline{اب}$ ، م جـ = ٣ سم.

(أ) ارتفاع القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ... سم

(ب) ارتفاع القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... سم

(جـ) قياس زاوية القطعة الدائرية الصغرى أ ء ب = ... °

(د) قياس زاوية القطعة الدائرية الكبرى أ و ب = ... °

(هـ) مساحة سطح المثلث م أ ب = ... سم^2.

(و) مساحة القطاع الدائرى م أ ء ب بدلالة π = ... سم^2.

(ز) مساحة القطعة الصغرى بدلالة π = ... سم^2.

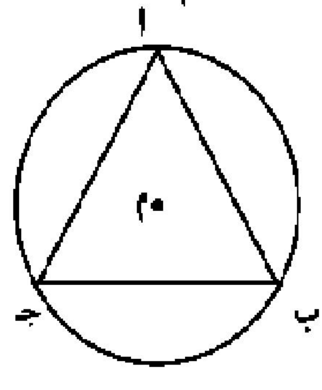
② أوجد مساحة القطعة الدائرية التى

(أ) طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم وقياس زاويتها يساوى ٤, ١ء.

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم، وقياس زاويتها تساوى ١٣٥°.

(جـ) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٤ سم وطول قوسها ٢٢ سم.

③ فى الشكل المرسوم:



أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم، داخل الدائرة م التى طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد مساحة كل جزء من القطع الدائرية المظللة.

④ أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى التى طول وترها يساوى طول نصف قطر دائرتها يساوى ١٢ سم.

⑤ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى:

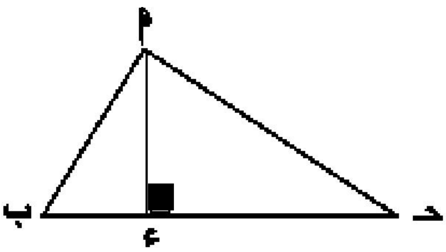
(أ) طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٥ سم.

(ب) ارتفاعها ٥ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

⑥ وتر فى دائرة طوله ٨ سم على بعد ٣ سم من مركزها . أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى الحادثة من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائرة.

المســــاحات

تذكر أن :



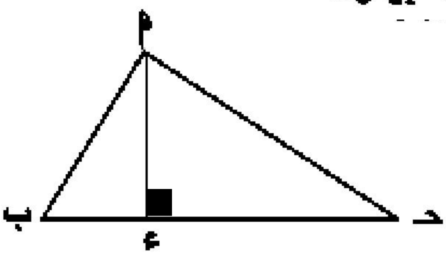
مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الإرتفاع

فى الشكل المقابل :

مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ب ﺣ × ﺃ ء

، و هذه القاعدة صحيحة للمثلث المنفرج الزاوية و المثلث القائم الزاوية أيضاً

مساحة المثلث بمعلومية طولى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما



من الشكل المقابل :

، ∵ حا ب = $\frac{\text{ﺃ ء}}{\text{ﺃ ب}}$ ∴ ﺃ ء = ﺃ ب حا ب

، ∵ مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ب ﺣ × ﺃ ء

∴ مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ب ﺣ × ﺃ ب حا ب

، بالمثل : مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ﺃ ب × ﺃ ﺣ حا ﺃ

مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ﺃ ﺣ × ﺣ ب حا ﺣ

و بوجه عام فإن :

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مثال: أوجد مساحة Δ ﺃ ب ﺣ الذى فيه : ﺃ ب = ٧ سم ، ﺃ ﺣ = ١٠ سم ، ق (∠ ﺃ) = ٥٠° لأقرب رقمين عشريين

الحل:

مساحة Δ ﺃ ب ﺣ = $\frac{1}{2}$ × ﺃ ب × ﺃ ﺣ حا ﺃ

= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ١٠ × حا ٥٠° ≃ ٢٦,٨١ سم^2

مثال : أوجد مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ١٦ سم، ب أ = ٢٢ سم ، ق(∠ب) = ٦٣° مقربا الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

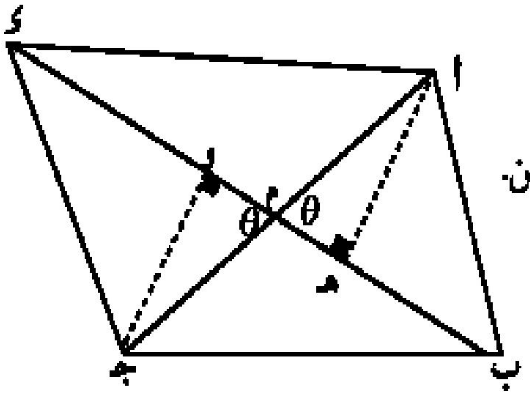
الحل : مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة

= $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × ب أ × حا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٢ × حا ٦٣ ≃ ٢٩.٤٥٥ سم^٢

إيجاد مساحة الشكل الرباعى المحدب

فى الشكل المقابل:



أ ب جـ ء شكل رباعى فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = {م}

$\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$، $\overline{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$، θ هى الزاوية المحصورة بين القطرين.

مساحة الشكل الرباعى = مساحة △أ ب ء + △جـ ب ء

= $\frac{١}{٢}$ ب ء × أ هـ + $\frac{١}{٢}$ ب ء × جـ و

= $\frac{١}{٢}$ ب ء (أ هـ + جـ و) = $\frac{١}{٢}$ ب ء (أ م جاθ + جـ م جاθ)

= $\frac{١}{٢}$ ب ء × جاθ (أ م + جـ م) = $\frac{١}{٢}$ ب ء × أ جـ × جاθ

وبوجه عام يكون مساحة الشكل الرباعى بمعلومية طولى قطريه والزاوية المحصورة بينهما هى:

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

ملاحظة : لا تتغير مساحة الشكل الرباعى إذا إستبدلنا الزاوية الحادة بالزاوية المنفرجة المكملة لأن : حا (١٨٠° − θ) = حا θ

مثال : أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ١٢ سم، ١٦ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٨°
مقربا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع.

الحل :

مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٦ × جا ٦٨° ≃ ٨٩ سم^٢

مثال : أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى فيه طولا قطريه ١٠ سم ، ١٤ سم ، قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٥° لأقرب رقمين عشريين

الحل : مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٤ × حا ٦٥° ≃ ٦٣,٤٤ سم^٢

مثال : احسب باستخدام القانون السابق مساحة كلاً من:

(أ) مربع طول قطره ١٠ سم (ب) معين طولا قطريه ٨ سم ، ١٢ سم

الحل :

(أ) طول قطر المربع = $\sqrt{١٠}$ سم

مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطرية × جيب الزاوية المحصورة

= $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٠}$ × حا ٩٠ ≃ ٤.٥ سم^٢

(ب) مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطرية × جيب الزاوية المحصورة

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٢ × حا ٩٠ ≃ ٤٣ سم^٢

تذكر أن : قطرا المربع و المعين متعامدان ، حا ٩٠° = ١

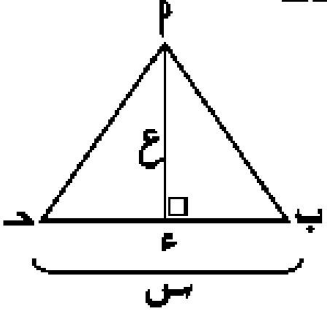
و بالتالى يكون : مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

، مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

إيجاد مساحة المضلع المنتظم :

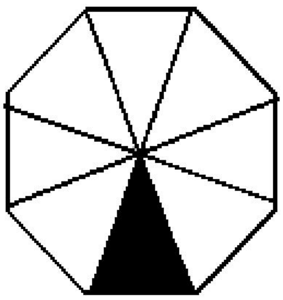
نعلم أن :

المضلع المنتظم جميع أضلاعه متساوية فى الطول ، و جميع زواياه متساوية فى القياس
و يتكون المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن من نفس العدد من المثلثات المتطابقة و المتساوية الساقين حيث يكون قياس زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين $= \frac{\text{٣٦٠}^\circ}{\text{ن}}$

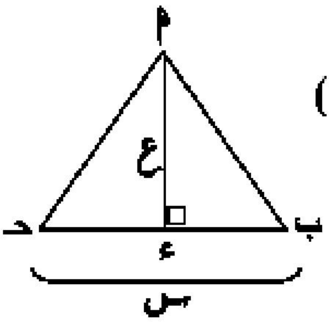


∴ من الشكل المقابل : $\text{ق}(\angle \text{ب أ ء}) = \frac{\text{٣٦٠}^\circ}{\text{٢ن}} = \frac{\pi}{\text{ن}}$

شكل (١) يمثل مضلع منتظم عدد أضلاعه ن
و طول ضلعه س
شكل (٢) يمثل أحد المثلثات المأخوذة من شكل (١)



شكل (١)



شكل (٢)

∴ $\text{ق}(\angle \text{ب أ ء}) = \frac{\pi}{\text{ن}}$

∴ من Δ أ ب ء : $\text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}}$

∴ $\text{أ ء} = \text{ب ء} \times \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{س}\ \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{ب حـ} \times \text{أ ء} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{ب حـ} \times \text{ب ء}\ \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{س}\ \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\ \text{س}^{\text{٢}}\ \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}}$

∴ مساحة المضلع الذى عدد أضلاعه ن ، و طول ضلعه س

$= \frac{\text{١}}{\text{٤}}\ \text{ن}\ \text{س}^{\text{٢}}\ \text{ظتا}\ \frac{\pi}{\text{ن}}$

ملاحظات :

(١) عندما : ن = ٣ فإن : المساحة $= \frac{\text{١}}{\text{٤}} \sqrt{\text{٣}}\ \text{س}^{\text{٢}}$ " المثلث المتساوى الأضلاع "

(٢) عندما : ن = ٤ فإن : المساحة $= \text{س}^{\text{٢}}$ " المربع "

(٣) عندما : ن = ٦ فإن : المساحة $= \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \sqrt{\text{٣}}\ \text{س}^{\text{٢}}$ " السدلسى المنتظم "

مثال : أوجد مساحة الشكل الثماني المنتظم الذى طول ضلعه ٦ سم مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

الحل:
$$\text{مساحة الشكل المنتظم} = \frac{١}{٤} \text{ن س}^٢ \times \text{ظتا} \frac{\pi}{\text{ن}}$$

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٤} \times ٨ \times (٦)^٢ \times \text{ظتا} \frac{١٨٠^\circ}{٨}$$

$$= ٧٢ \times \frac{١}{\text{ظا } ٢٢,٥^\circ} \simeq ١٧٣,٨ \text{ سم}^٢$$

مثال : أوجد مساحة الشكل الخماسي المنتظم الذى طول ضلعه ١٠ سم لأقرب رقمين عشريين

الحل : $\text{مساحة الخماسي المنتظم} = \frac{١}{٤} \times ٥ \times (١٠)^٢ \times \text{ظتا} \frac{١٨٠^\circ}{٥} = ١٧٢,٠٥ \text{ سم}^٢$

تمارين على المساحات

[١] أوجد مساحة المثلث أ ب جـ فى كل من الحالات الآتية:

(أ) أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم، ق(∠ب) = ٩٠°

(ب) أ جـ = ١٢سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{\text{أ جـ}}$ يساوى ٧ سم.

(جـ) أ ب = ١٦سم، ب جـ = ٢٠ سم، ق(∠ب) = ٤٦°

(د) أ ب = ٨سم، ب جـ = ٧سم، أ جـ = ١١سم.

[٢] أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ء فى كل من الحالات الآتية:

(أ) متوازى أضلاع فيه أ ب = ٨سم، ب جـ = ١١سم، ق(∠ب) = ٦٠°

(ب) شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ يساوي ٧سم، ١١سم على الترتيب وطول العمود المرسوم من ء على $\overline{\text{ب جـ}}$ يساوي ٦سم.

(ج) معين فيه أ ب = ٨سم، وقياس الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين فيه تساوي ٥٨°.

[٣] أوجد مساحة كل مضلع منتظم من المضلعات الآتية (مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة)

(أ) خماسي منتظم طول ضلعه يساوى ١٦سم. (ب) سداسي منتظم طول ضلعه يساوى ١٢سم.

[٤] صمم حوضًا لأسماك الزينة قاعدته على شكل خماسي منتظم طول قطره ٧٢ سم، أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة قاعدته.

[٥] يصمم كريم حديقة لمنزله، ويرغب أن يكون الجزء المخصص للزهور على شكل سداسي منتظم مساحته ٥٤$\sqrt{٣}$ متر مربع. أوجد طول ضلعه.

تمارين عامة

(١) بسط كلًا مما يأتي:

(أ) جا($-\theta$) قتا (θ) ______________

(ب) (جاθ + جتاθ)^{٢} − $\frac{٢}{\text{قا}\theta \text{ قتا}\theta}$ ______________

(٢) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(أ) جتا(١٨٠° + θ) قتا(٩٠° + θ) = −١

(ب) قاθ − جاθ ظاθ = جتا θ

(ج) ظا$^{٢}\theta$ + ظتا$^{٢}\theta$ − (قا$^{٢}\theta$ + قتا$^{٢}\theta$) = −٢

(د) (جاθ + جتاθ)^{٢} + (جاθ − جتاθ)^{٢} = ٢

(٣) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في [٠، ٢π[

(أ) ٢ جاθ − ١ = ٠

(ب) $\sqrt{٣}$ ظتاθ = ١

(ج) ٢ جتا$^{٢}\theta$ + جتاθ = ٠

______________ ______________ ______________

(٤) أوجد الحل العام لمجموعة المعادلات الآتية :

(أ) ظاθ − $\sqrt{٣}$ = ٠

(ب) جتا٥ θ = جا٤θ

(ج) قا٤θ = قتا٢θ

______________ ______________ ______________

(٥) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب الذى فيه:

(أ) ق ($\angle$أ) = ٤٣° ، ب جـ = ١٢ سم

(ب) أ ب = ١٢,٨ سم ، ب جـ = ١٩,٢ سم

(٧) وقف شخص على صخرة ارتفاعها ٤٠ مترًا ولاحظ سفينتين في البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة ، وقاس زاويتى انخفاضيهما، فوجدهما ٣٥° ١٢َ ، ٥٣° ٦َ أوجد البعد بين السفينتين .

---

(٩) دائرة م طول نصف قطرها ٧,٥ سم، رسم فيها نصفا القطرين $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ على الترتيب بحيث أ ب = ١٢سم . أوجد مساحة القطاع الأصغر م أ ب لأقرب ستيمتر مربع .

---

(١٠) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٢٦,١٩ سم.

---

(١١) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ، رسمت دائرة تمر برؤوسه، أوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الصغرى التى وترها $\overline{\text{ب جـ}}$.

(١٣) أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب جـ ى الذى فيه أجـ = ١٤ سم ، ب ى = ١٨ سم وقياس الزاوية بين قطريه ٧٨° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

---

(١٤) أوجد مساحة ثمانى منتظم طول ضلعه ١٠ سم مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

اختبار الوحدة

أولًا : أكمل ما يأتى :

(١) أبسط صورة للمقدار : (جا θ + جتا θ)^٢ − ٢ جا θ جتا θ يساوى ....

(٢) إذا كان ٢ جا س − $\sqrt{٣}$ = ٠ وكانت س ∈] ٠ ، π [فإن ق(∠س) = ...

(٣) إذا كان جتا (٩٠° − θ) = ١ فإن الحل العام للمعادلة هو ....

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢سم وطول قوسه ٤سم يساوى ....

(٥) إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩$\sqrt{٣}$ سم٢ فإن س تساوى .... سم.

ثانيًا : الاختيار من المتعدد

(٦) أبسط صورة للمقدار جا (٩٠° − θ) قتا (١٨٠° − θ) تساوى: ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) جتا θ (د) ظتا θ

(٧) المقدار جا^٢ θ + جتا^٢ θ − قتا^٢ θ ، في أبسط صورة يساوى:

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) −ظتا^٢ θ (د) ظا^٢ θ

(٨) إذا كانت θ ∈ [٠ ، π] ، جتا θ + ١ = ٠ فإن θ تساوى: ....

(أ) صفرًا (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) ٢π

(٩) نصف قطر دائرة القطاع الدائرى الذى مساحته ٤٥سم^٢ وطول قوسه ٣سم يساوى:

(أ) ١٥سم (ب) ٣٠سم (جـ) ٢٢,٥ سم (د) ٩٠سم

(١٠) الحل العام للمعادلة: ظتا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = $\sqrt{٣}$ هو ....

(١) ابسط صورة للمقدار : (جا θ + جتا θ)^٢ − ٢جا θ جتا θ يساوى ....

(٢) إذا كان ٢ جا س − $\sqrt{٣}$ = ٠وكانت س ∈] ٠، π[فإن ق($\angle$س) = ...

(٣) إذا كان جتا (٩٠° − θ) = ١ فإن الحل العام للمعادلة هو ....

(٤) مساحة القطاع الدائرى الذى محيطه ١٢سم وطول قوسه ٤سم يساوى ....

(٥) إذا كان س هو طول ضلع المثلث المتساوى الأضلاع الذى مساحته ٩$\sqrt{٣}$ سم٢ فإن س تساوى .... سم.

ثانيًا: الاختيار من المتعدد

(٦) أبسط صورة للمقدار جا (٩٠° − θ) قتا (١٨٠° − θ) تساوى: ....

(أ) −١ (ب) ١ (ج) جا θ (د) ظاθ

(٧) المقدار جا^٢ θ + جتا^٢ θ − قتا^٢ θ ٠ فى أبسط صورة يساوى:

(أ) صفرًا (ب) ١ (ج) −ظتا^٢ θ (د) ظا^٢θ

(٨) إذا كانت θ ∈ [٠، π[، جتاθ + ١ = ٠ فإن θ تساوى: ....

(أ) صفرًا (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) π (د) ٢π

(٩) نصف قطر دائرة القطاع الدائرى الذى مساحته ٤٥سم^٢ وطول قوسه ٣سم يساوى:

(أ) ١٥سم (ب) ٣٠سم (ج) ٢٢٫٥ سم (د) ٩٠سم

(١٠) الحل العام للمعادلة: ظتا($\frac{\pi}{٢}$ − θ) = $\sqrt{٣}$ هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ + ن π (ب) $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ن π

(ج) $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π (د) $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ن π أو $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ ن π

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) (أ) أثبت صحة المتطابقة (١ − جاθ)(قاθ + ظاθ) = جتا θ

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة ٢جا^٢ θ − ٥جا θ + ٢ = ٠ فى الفترة [٠، π]

(١٢) (أ) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٦سم، أ جـ = ٨سم، ق($\angle$جـ) = ٤٢°.

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٢سم وطول قوسها ٢٠سم. ....

(١٣) (أ) أوجد الحل العام للمعادلة : جتا٥ θ = جا θ ....

(ب) رصد شخص يقف على صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر سيارة واقفة فى الطريق، فكان قياس زاوية انخفاضها ٢٥°. أوجد لأقرب متر بعد الراصد عن السيارة. ....

(١٤) (أ) قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٤٨ وطول نصف قطر دائرته ٦سم. أوجد مساحة القطاع لأقرب سم^٢.

(ب) أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى قطراه ١٢سم ، ١٦سم وقياس الزاوية بينهما ٦٢ مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر مربع. ....