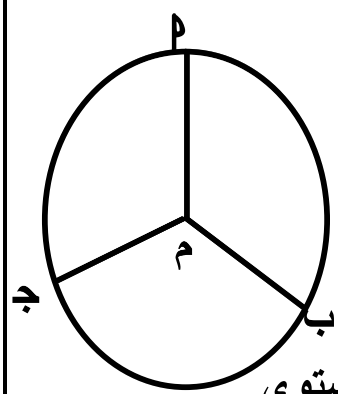
الدائـــــــــــرة

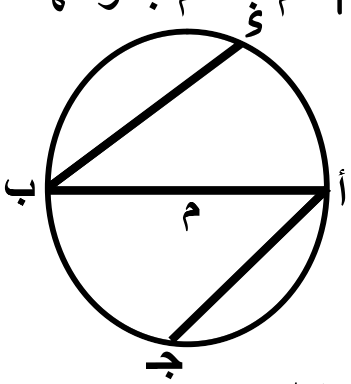


تعريف الدائرة :-

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعد ثابتا عن نقطة ثابتة فى المستوى تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة

نصف قطر الدائرة :-

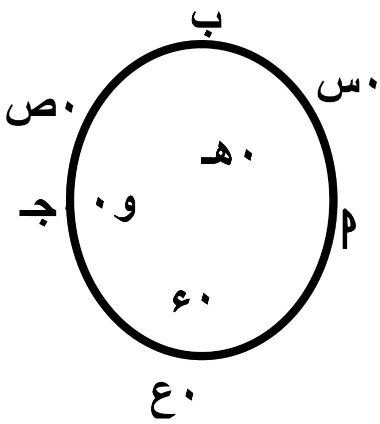
أى قطعة مستقيمة تصل بين المركز وأى نقطة على الدائرة مثل م م ، م ب ، م جـ وكلها متساوية وتساوى نق



وتر الدائرة :- **هى أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة مثل ب ء ، أ ب ، أ جـ**

قطر الدائرة :- **وتر يمر بالمركز أو أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة وتمر بالمركز مثل أ ب**

تجزئة المستوى



تجزئ الدائرة المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

(١) نقط خارج الدائرة : مثل س ، ص ، ع

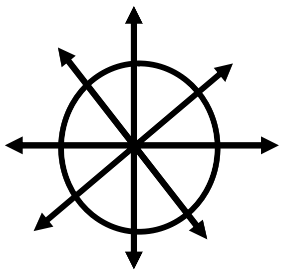
(٢) نقط على الدائرة : مثل أ ، ب ، جـ

(٣) نقط داخل الدائرة: مثل ء ، هـ ، و

لاحظ أن:

- **مركز الدائرة ينتمى الى مجموعة نقط داخل الدائرة**
- **مجموعة نقط داخل الدائرة تسمى الدائرة**
- **مجموعة نقط داخل الدائرة ∪ مجموعة نقط داخل الدائرة يسمى سطح الدائرة**

التماثل فى الدائرة



أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها
ولهذا فإن للدائرة عدد لا نهائى من محاور التماثل

مثال إذا كان أب قطر فى دائرة مركزها م حيث أ = (-٥ ، -٣) ، ب = (١ ، ٥)

أوجد (أولا) مركز الدائرة (ثانيا) طول نصف قطر هذه الدائرة (ثالثا) محيط الدائرة

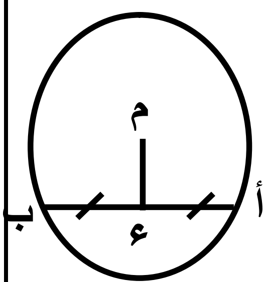
الحل :

م = منتصف أ ب = $\left(\frac{-٥+١}{٢} ، \frac{-٣+٥}{٢} \right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right)$ = (-٢ ، ١)

نق = م أ = $\sqrt{(-٢+٥)^{٢} + (١+٣)^{٢}} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ ط × ٥ = ١٠ ط

نتائج هامة على الدائـرة

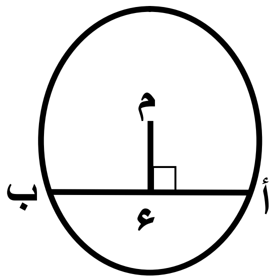


نتيجة(١)

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

فمثلا : إذا كانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فإن $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

نتيجة(٢)

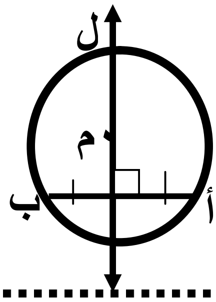


المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها

ينصف هذا الوتر

فمثلا إذا كان $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ فإن ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

نتيجة(٣)

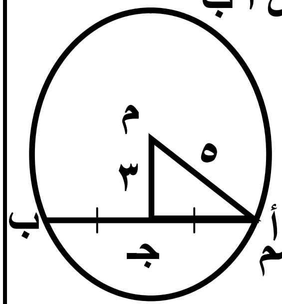


المستقيم المرسوم عموديا على الوتر من منتصفه يكون ماراً بالمركز

فمثلا إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ عمودى على $\overline{أ ب}$ من منتصفه فإن م $\in$ $\overleftrightarrow{ل}$

مثال <u>فى الشكل المقابل</u>

إذا كانت جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، م جـ = ٣سم ، نق = ٥سم أوجد طول $\overline{أ ب}$



? الحـــــــــــل @

∵ جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ ق(م $\widehat{جـ}$ أ) = ٩٠°

∴ $(أ جـ)^2$ = $(أ م)^2$ - $(م جـ)^2$ = $(٥)^2$ – $(٣)^2$

= ٢٥ – ٩ = ١٦

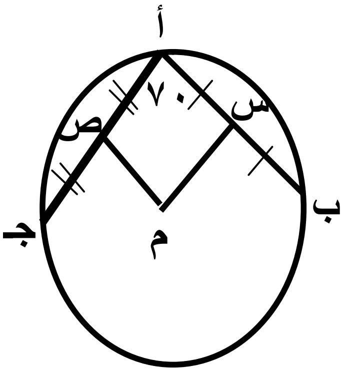
∴ أ جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

∴ أ ب = ٢ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨سم

مثال <u>فى الشكل المقابل</u>

س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ ، ق($\hat{أ}$) = ٧٠°

أوجد ق (س $\widehat{م}$ ص) ، ق (س $\widehat{م}$ ص) المنعكسة



? الحـــــــــــل @

∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ ق (م $\widehat{س}$ أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$

∴ ق(م $\widehat{ص}$ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

ق(س $\widehat{م}$ ص) = ٣٦٠° – [٩٠° + ٩٠° + ٧٠°]

∴ ق (س $\widehat{م}$ ص) = ٣٦٠° – ٢٥٠° = ١١٠

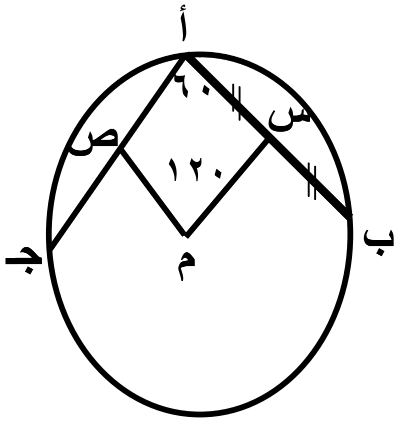
ق(س $\widehat{م}$ ص)المنعكسة = ٣٦٠° – ق(س $\widehat{م}$ ص)

= ٣٦٠° – ١١٠°

= ٢٥٠°

مثال

في الشكل المقابل



س منتصف أ ب ، ق(س أ ص) = ٦٠°

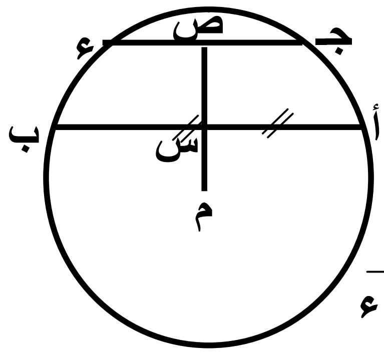
ق(س م ص) = ١٢٠ إثبت أن : ص منتصف أ جـ

الحـــــــــــل

∵ س منتصف أ ب ∴ ق(م س ب) = ٩٠°	ق(م ص أ) = ٣٦٠ - ٢٧٠ = ٩٠°
A مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°	∵ م ص ⊥ أ جـ
∴ ق(م ص أ) = ٣٦٠° – [٦٠° + ١٢٠° + ٩٠°]	∴ ص منتصف أ جـ

مثال

في الشكل المقابل



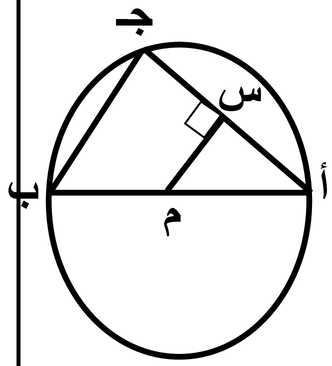
س منتصف أ ب ، أ ب // جـ ء

إثبت أن : ص منتصف جـ ء

الحل : A س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب	∴ ص منتصف جـ ء
A أ ب // جـ ء ، م س ⊥ أ ب	∴ م ص ⊥ جـ ء

مثال

في الشكل المقابل



أ ب قطر فى الدائرة م ، م س ⊥ أ جـ ، ب جـ = ١٠ سم

أوجد طول س م

الحـــــــــــل

A م س ⊥ أ جـ ∴ س منتصف أ جـ

A أ ب قطر فى الدائرة ∴ م منتصف أ ب

∵ س منتصف أ جـ ، م منتصف أ ب

∴ م س = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٥سم

> **طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث تساوى نصف طول الضلع الثالث**

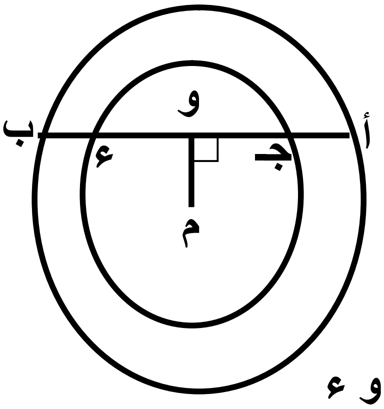
مثال

فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى

يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، م و ⊥ جـ ء

إثبت أن أ جـ = ب ء



? الحـــــل @

فى الدائرة الصغرى

م و ⊥ جـ ء ∴ جـ و = و ء (١)

فى الدائرة الكبرى

م و ⊥ أ ب ∴ أ و = و ب (٢)

بطرح ١ من ٢

أ و – جـ و = و ب – و ء

أ جـ = ب ء

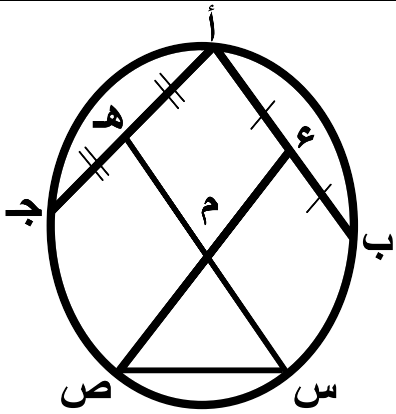
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م

ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ ، ق(أ) = ١٢٠°

إثبت أن △ م ص س متساوى الاضلاع



? الحـــــل @

∵ ء منتصف أ ب ∴ ق(م ء أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ ق (م هـ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(ء م هـ) = ٣٦٠ – [٩٠+٩٠+١٢٠]=٦٠

∴ ق(س م ص) = ق(ء م هـ)=٦٠ بالتقابل بالراس

∵ م س = م ص (أنصاف أقطار)

∴ ق(س) = ق(ص) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(س) = ق(ص) = ق(س م ص)=٦٠°

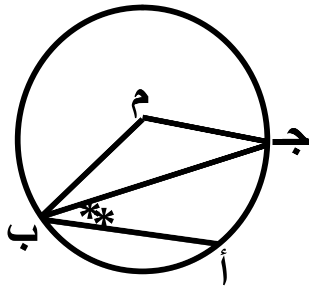
∴ م س ص متساوى الاضلاع

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ ينصف (أ ب م)

إثبت أن م جـ // أ ب



? الحـــــل @

∴ ب جـ ينصف (أ ب̂ م)

∴ ق(م ب̂ جـ) = ق (أ ب̂ جـ) (١)

∵ م جـ = م ب (أنصاف اقطار)

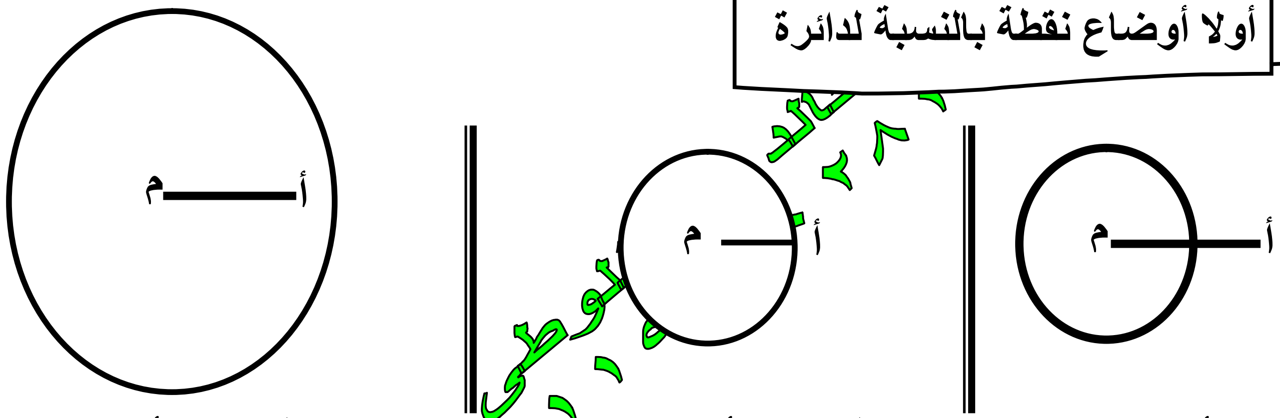
∴ ق(م جـ̂ ب) = ق (م ب̂ جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق(م جـ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) [وهما متبادلتان]

∴ $\overline{\text{جـ م}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

أولا أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة



إذا كان م أ > نق	إذا كان م أ = نق	إذا كان م أ < نق
فإن أ تقع خارج الدائرة	فإن أ تقع على الدائرة	فإن أ تقع داخل الدائرة

مثال بين موضع النقط أ =(-٣ ، ٧) ، ب=(-٢ ، ٦) ، جـ=(٣ ، ٥) من الدائرة التى مركزها م=(١ ، ٢) وطول نصف قطرها ٥ سم

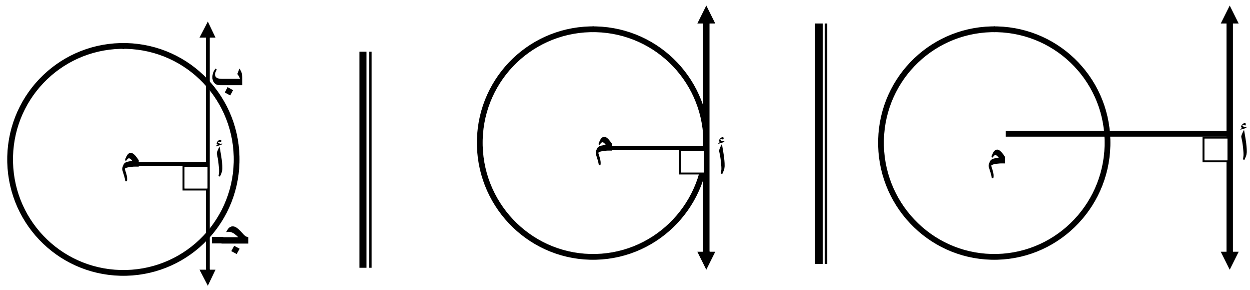
الحـــــــــل

م أ = $\sqrt{(١+٣)^٢ + (٧-٢)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٢٥}$ = $\sqrt{٤١}$ > نق ∴ أ تقع خارج الدائرة

م ب = $\sqrt{(١+٢)^٢ + (٦-٢)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ = نق ∴ ب تقع على الدائرة

م جـ = $\sqrt{(٣-١)^٢ + (٥-٢)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$ < نق ∴ جـ تقع داخل الدائرة

ثانياً أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة



إذا كان م أ > نق فإن

ل يقع خارج الدائرة

ل ∩ الدائرة = ϕ

إذا كان م أ = نق فإن

ل يكون مماس للدائرة

ل ∩ الدائرة = { أ }

إذا كان م أ < نق فإن

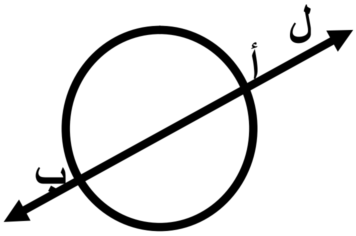
ل يكون قاطع للدائرة

ل ∩ الدائرة = { ب ، جـ }

لاحظ أن :

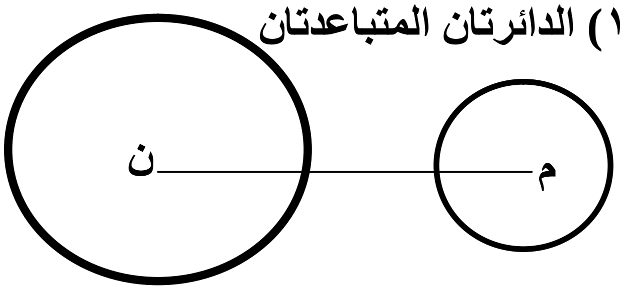
المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ ، ب }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = أب



أوضاع دائرتين بالنسبة لبعضهما

(١) الدائرتان المتباعدتان

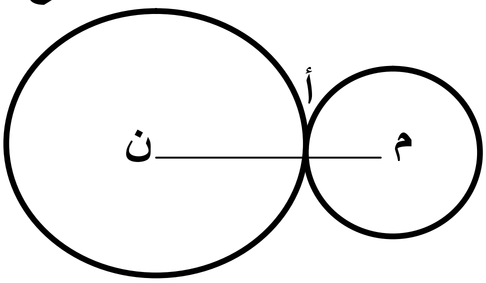


م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ

(٢) الدائرتان المتماستان من الخارج

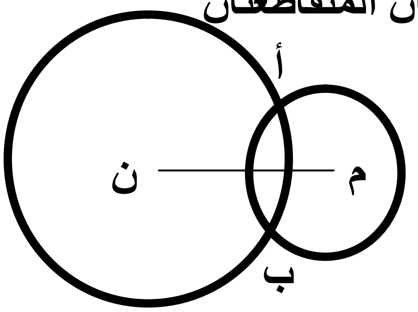


م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

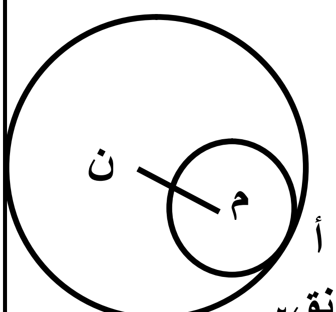
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

(٣) الدائرتان المتقاطعتان



نق١ – نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

(٤) الدائرتان المتماستان من الداخل



م ن = نق١ – نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح م

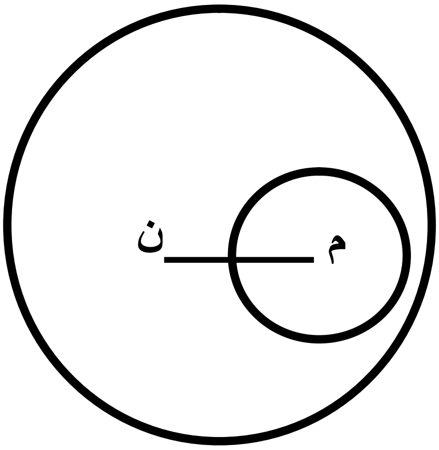
---

(٥) الدائرتان المتداخلتان

م ن < نق$_1$ – نق$_2$

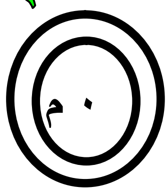
الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح م



---

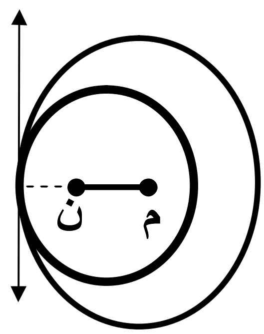
(٦) متحدتا المركز : م ن = صفر

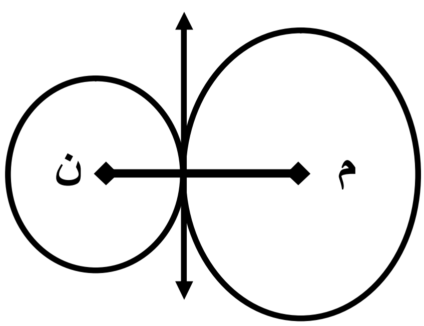


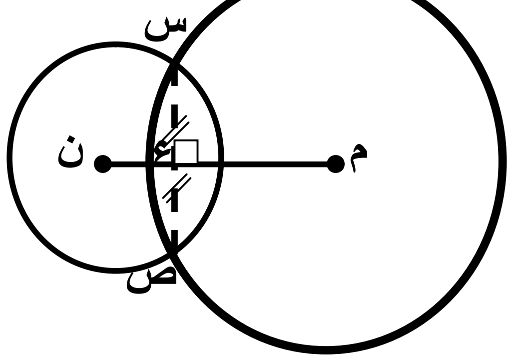
خط المركزين لدائرتين :- **هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزيهما ($\overline{\text{م ن}}$)**

ملاحظات :-

١ - خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس



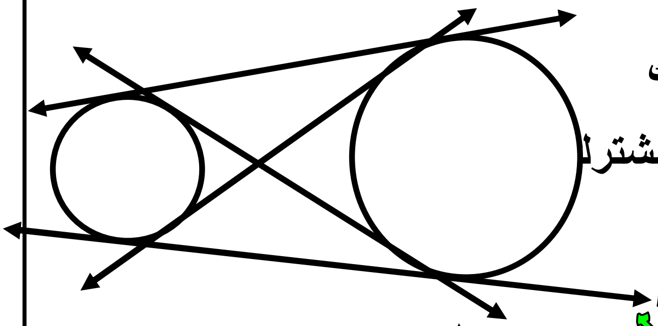




٢ - خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه

∵ $\overline{\text{م ن}}$ خط المركزين

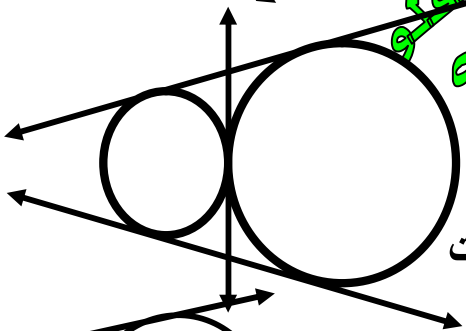
∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ، س د = ص د



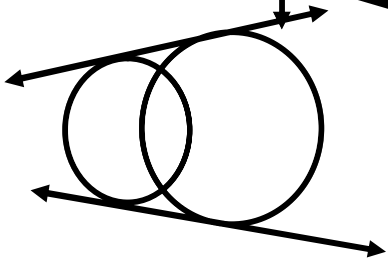
٣ - الدائرتان المتداخلتان ليس لهما مماس مشترك

٤ - الدائرتان المتماستان من الداخل لهما مماس مشترك

٤ - عدد المماس المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متباعدتين = ٤ مماسات



٥ - عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متماستين من الخارج = ٣مماسات

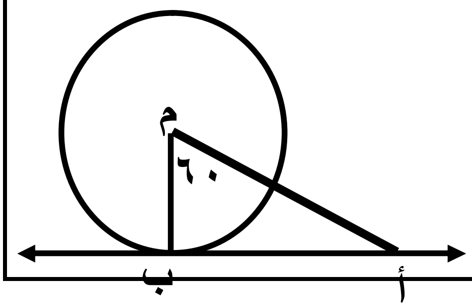


٦ - عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متقاطعتين = ٢

حقائق هندسية

١ - المماس لدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس
٢ - المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايته يكون مماس للدائرة
٣ - المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان

مثال **فى الشكل المقابل**



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، ق(أ $\widehat{\text{م}}$ ب) = ٦٠°

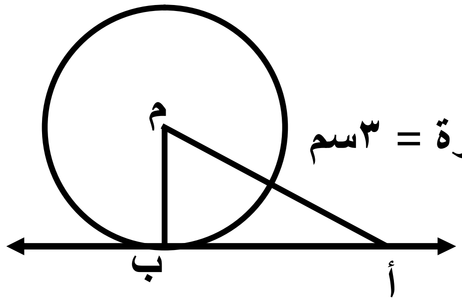
، أ م = ١٠سم أوجد طول نصف قطر الدائرة

? الحـــــــل @

A أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر
A م ب ⊥ أ ب ∴ ق(أ ب م) = ٩٠°
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

ق (م أ ب) = ١٨٠ – [٩٠+٦٠]
= ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°
نق = ب م = ½ أ م = ½ × ١٠ = ٥سم

مثال فى الشكل المقابل



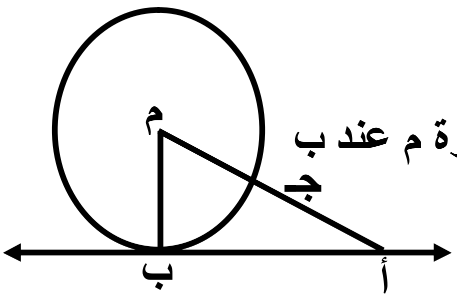
أ ب مماس للدائرة م عند ب ، طول نصف قطر الدائرة = ٣سم
، أ ب = ٤ سم أوجد طول أ م

? الحـــــــل @

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر
B م ب ⊥ أ ب B ق(أ ب م) = ٩٠°
B (أ م)² = (أ ب)² + (ب م)²

(أ م)² = (٣)² + (٤)²
= ٩ +١٦ = ٢٥
B أ م = √٢٥ = ٥سم

مثال فى الشكل المقابل



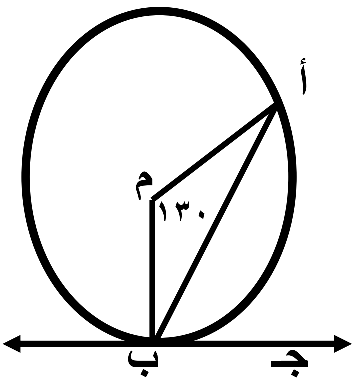
دائرة م طول نصف قطر الدائرة = ٦سم
، أ ب = ٨ سم، أ جـ = ٤سم إثبت أن أ ب مماس للدائرة م عند ب

? الحـــــــل @

أ م = أ جـ + جـ م = ٤ + ٦ = ١٠سم
∵ (أ م)² = (١٠)² = ١٠٠
، (أ ب)² + (ب م)² = (٨)²+(٦)²=٦٤+٣٦=١٠٠

∴ (أ م)² = (أ ب)² + (ب م)²
∴ ق (م ب أ) = ٩٠°
∵ م ب ⊥ أ ب
∴ أ ب مماس للدائرة م عند أ

مثال في الشكل المقابل



جـ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق (أ م ب) = ١٣٠°

أوجد ق (أ ب جـ)

الحـــــــــل

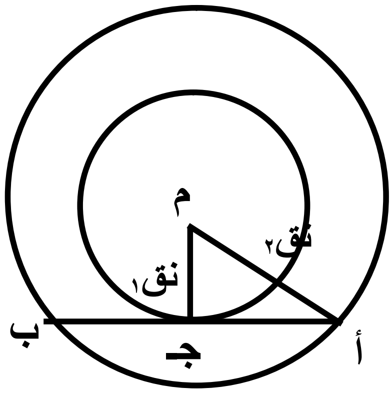
∵ ب جـ مماس للدائرة م عند ب ، ب م نصف قطر

∴ م ب ⊥ ب جـ ∴ ق(م ب جـ) = ٩٠° ∴ ق(أ ب جـ) = ٩٠° − ٢٥° = ٥٥°

في △ أ م ب ∵ م ب = م أ (أنصاف أقطار)

∴ق(م ب أ) = ق(م أ ب) = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

مثال في الشكل المقابل



دائرتان لهما نفس المركز م ، أ ب وتر في

الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى عند

جـ ، أ ب = ١٠سم

احسب المساحة المحصورة بين الدائرتين

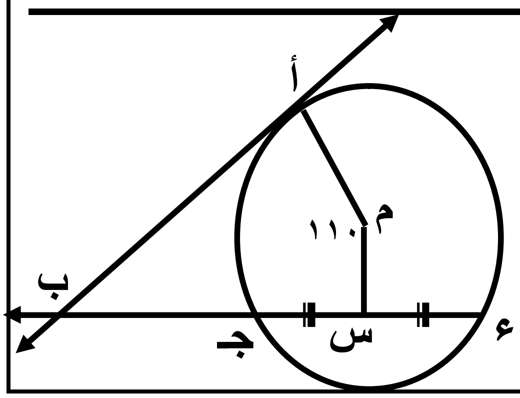
الحـــــــــل

∵ أ ب مماس للدائرة الصغرى ∴م جـ ⊥ أ ب = ط [نق٢ ^٢^ − نق١ ^٢^]

∴جـ منتصف أ ب ∴ أ جـ = ٥سم = ط [(أ م)^٢^ − (جـ م)^٢^]= ط (أ جـ)^٢^

∴ المساحة المحصورة بين الدائرتين= ط نق٢ ^٢^ − ط نق١ = ط (٥)^٢^ = ٢٥ ط

مثال في الشكل المقابل



إذا كانت س منتصف ء جـ ، أ ب مماس للدائرة م

عند أ ، ق (أ م س) = ١١٠ ، أوجد ق (ب)

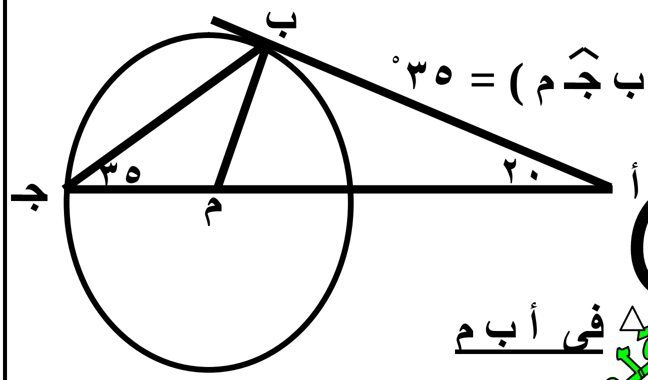
? الحـــــــــل @

∵ س منتصف ء جـ ∴ ق(م سَ جـ) = ٩٠°
∵ أ ب مماس ، م أ (نق) ∴ ق(م أ ب)=٩٠°
∵ مجموع قياسات زوايا الرباعى = ٣٦٠°

∴ق(بَ) = ٣٦٠° – [٩٠°+٩٠°+١١٠]
= ٣٦٠ – ٢٩٠ = ٧٠°

مثال فى الشكل المقابل

إثبت أن أ ب مماس للدائرة م إذا كان ق(ب جَـ م) = ٣٥° ، ق(أ)=٢٠°



? الحـــــــــل @

فى△ ب م جـ ∵ م ب = م جـ (أنصاف أقطار) △ فى أ ب م

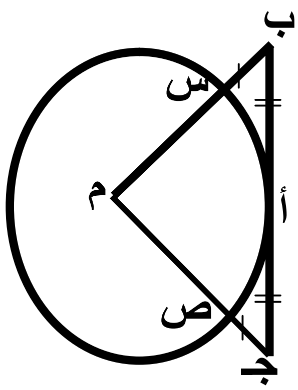
∴ ق(م بَ جـ) = ق(م جَـ ب) = ٣٥°
∴ ق(أ مَ ب) = ق(م بَ جـ) + ق(م جَـ)
= ٣٥° +٣٥° = ٧٠°

ق(أ بَ م) = ١٨٠ – [٧٠ +٢٠] = ٩٠°
∴ م ب ⊥ أ ب
∴ أ ب مماس للدائرة م عند ب

مثال فى الشكل المقابل

ب س = جـ ص ،، أ ب = أ جـ إثبت أن :

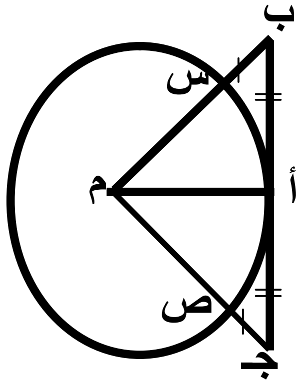
(١) م ب = م جـ (٢) ب جـ مماس للدائرة م



? الحـــــــــل @

∵ م س = م ص = نق ، ب س = جـ ص
∴ م س + س ب = م ص + ص جـ
B م ب = م جـ (وهو المطلوب أولا)
فى △ م ب جـ

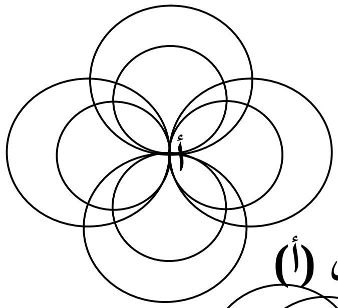
∴ م أ ⊥ ب جـ
∴ ب جـ مماس للدائرة م عند أ



∵ م ب = م جـ (مثلث متساوى الساقين) ، أ منتصف ب جـ

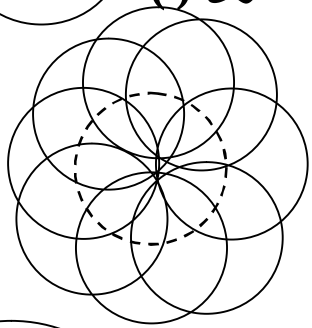
تعيين الدائرة

تعيين دائرة تمر بنقطة معلومة

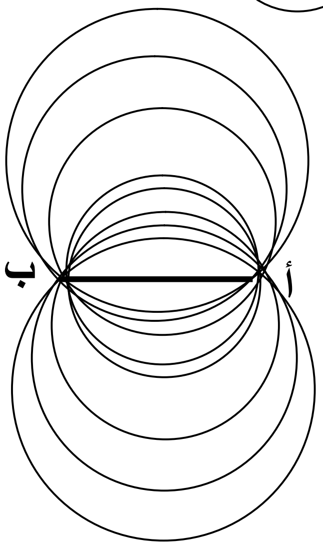


يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطة معلومة فى المستوى (أ)

* إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول فإن مراكزها تقع جميعا على محيط دائرة واحدة



تعيين دائرة تمر بنقطتين معلومتين



يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين فى المستوى أ ، ب

(١) مراكز هذه الدوائر على محور $\overline{\text{أ ب}}$ [محور القطعة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها]

(٢) أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بين النقطتين أ ، ب طولها يساوى نصف طول $\overline{\text{أ ب}}$

[إذا كان طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ١٠سم فإن أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يكون طول نصف قطرها =٥سم]

طول نصف قطر الدوائر المارة بنقطتين معلومتين يكون x نصف البعد بين النقطتين

تعيين دائرة تمر بثلاث نقط

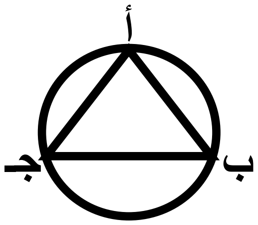
(أ) تعين دائرة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة:-

لا يمكن رسم دائرة واحدة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة

(ب) تعيين دائرة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة

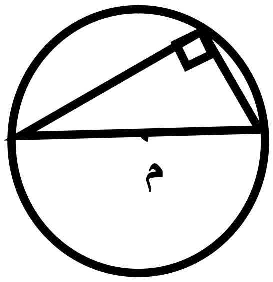
يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة

الدائرة الخارجة للمثلث :-



هى الدائرة التى تمر برؤوس المثلث من الخارج

لاحظ أن



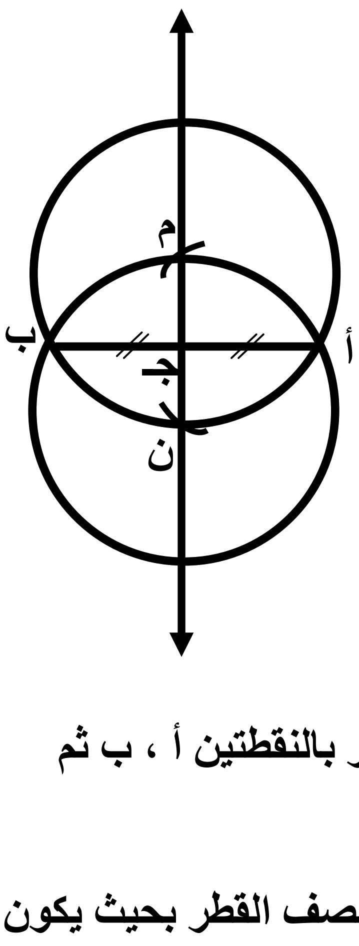
١-مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع الاعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها

٢-مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية هو منتصف الوتر

٣-مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

مثال ارسم القطعة المستقيمة أ ب طولها ٥سم ثم أرسم دائرة يكون أ ب وتر فيها كم دائرة يمكن رسمها ؟

الحـــــل



الخطوات :-

١-نرسم أ ب بحيث أ ب = ٥سم ثم ننصف أ ب فى جـ

٢-نرسم محور أ ب وليكن ل

٣-نركز فى احدى نهايتى أ ب بسن الفرجار بفتحة تساوى اكبر من نصف أ ب قليلا

٤-نرسم قوساً يقطع المستقيم ل فى نقطتى م ، ن

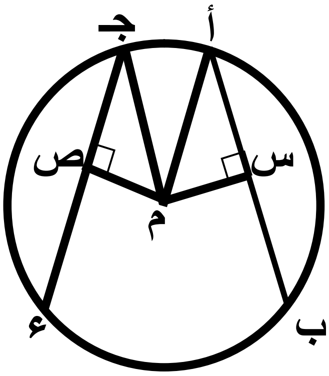
٥-نركز بسن الفرجار فى م وبنفس الفتحة نرسم الدائرة م فتمر بالنقطتين أ ، ب ثم نركز فى ن بنفس الفتحة ونرسم الدائرة ن

<u>لاحظ أن</u> :- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر مختلفة فى طول نصف القطر بحيث يكون أ ب وترا فيها

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية (٢ ـ ١)

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها



المعطيات : أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

المطلوب : إثبات أن م س = م ص

البرهان : ∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب ∴ أ س = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∵ أ ب = جـ ء ∴ أ س = جـ ص

△△ أ س م ، جـ ص م

فيهمـــا
أ س = جـ ص
أ م = جـ م (أنصاف أقطار)
ق(أ س م) = ق(جـ م ص)= ٩٠°

∴ △ أ س م ≡ △ جـ ص م

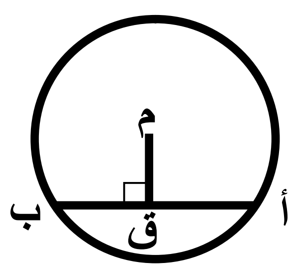
ومن التطابق ينتج أن

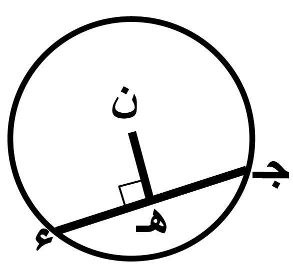
س م = ص م

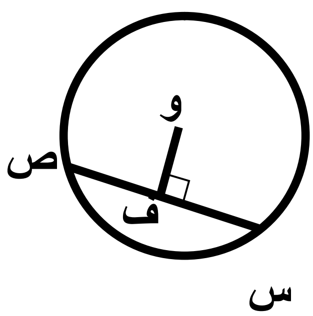
وهو المطلوب إثباته

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الاوتار المتساوية فى الطول تكون على أبعاد متساوية من مراكزها

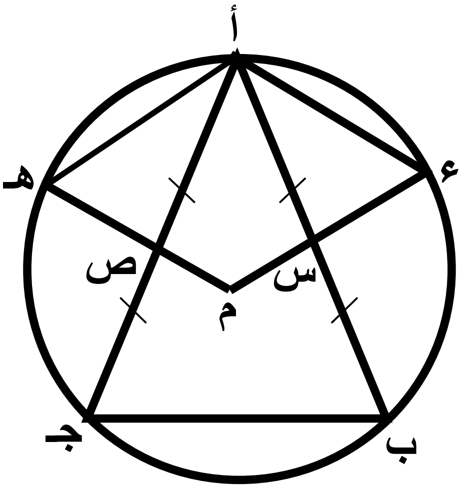






إذا كانت الدوائر م ، ن ، و متطابقة ، أ ب = جـ ء = س ص فإن م ق = ن هـ = و ف

مثال فى الشكل المقابل



أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص يقطع الدائرة فى هـ

إثبت أن(١) س ء = ص هـ

(٢) ق(ء أ س) = ق (هـ أ ص)

? الحـــــــل @

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ ∴ م س = م ص (١)

∵ م ء = م هـ (أنصاف أقطار) (٢)

بطرح ٢ من ١

م ء – م س = م هـ - م ص

س ء = هـ ص (وهو المطلوب أولا)

△△ أ ء س ، أ هـ ص

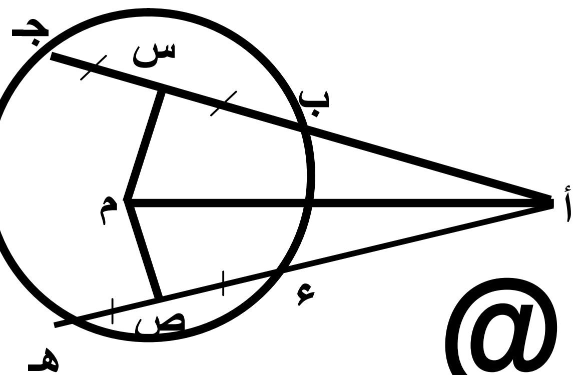
فيهما
أ س = أ ص
ء س = هـ ص (مثبت)
ق(أ ء س)=ق(أ ص هـ)=٩٠°

△ أ ء س ≡ △ أ هـ ص

ومن التطابق ينتج أن

ق(ء أ س) = ق(هـ أ ص)[المطلوب ثانياً]

مثال فى الشكل المقابل



ب جـ = ء هـ ، س منتصف ب جـ

ص منتصف ء هـ إثبت أن أ ب = أ ء

? الحـــــــل @

∵ س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ

∵ ص منتصف ء هـ ∴ م ص ⊥ ء هـ

∵ ب جـ = ء هـ ∴ م س = م ص

△ أ س م ≡ △ أ ص م

ومن التطابق ينتج أن

أ س = أ ص (١)

ΔΔ أ م س ، أ م ص

فيهما
أ م ضلع مشترك
م س = م ص
ق(أ سَ م)=ق(أ صَ م) = ٩٠ ْ

ولكن ب س = ء ص (٢)

بطرح ٢ من ١

أ س – ب س = أ ص – ء ص

أ ب = أ ء وهو المطلوب إثباته

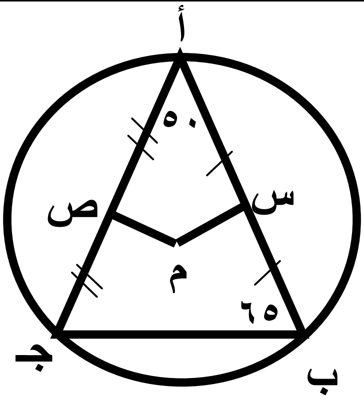
مثال

في الشكل المقابل

ق(أَ) = ٥٠ ْ ، ق(بَ) = ٦٥ ْ س ، ص منتصفا

أ ب ، أ جـ على الترتيب

(١) أوجد ق(س مَ ص) (٢) إثبت أن م س = م ص



؟ الحـــــــــل @

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠ ْ

B ق(جَـ) = ١٨٠ ْ – [٥٠ ْ +٦٥ ْ] = ٦٥ ْ

A ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∴ ق(م صَ أ) = ٩٠ ْ

A س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق(م سَ أ) = ٩٠ ْ

B ق(س مَ ص)=٣٦٠– [٥٠+٩٠+٩٠] =١٣٠

A ق(بَ) = ق(جَـ) ∴ أ ب = أ جـ

∴ م س = م ص

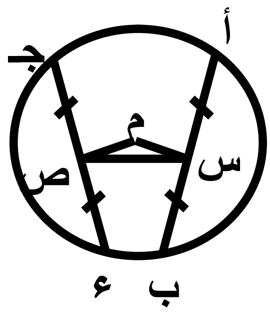
مثال

في الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الدائرة م

س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

برهن أن ق(ب سَ ص) = ق (ء صَ س)



? الحـــــــــل @

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ ق(م $\widehat{س}$ ب) = ٩٠°

∵ ص منتصف $\overline{جـ ء}$ ∴ ق(م $\widehat{ص}$ ء) = ٩٠

∴ ق(م $\widehat{س}$ ب) = ق(م $\widehat{ص}$ ء) (١)

∵ أب = جـ ء ، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

∴ م س = م ص

فى △ م س ص : ∵ م س = م ص

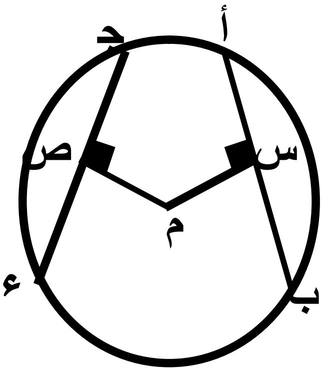
∴ ق(م $\widehat{س}$ ص) = ق(م $\widehat{ص}$ س) (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن

ق(ب $\widehat{س}$ ص) = ق (ء $\widehat{ص}$ س)

عكس نظرية (٢ – ١)

فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول



فمثلا فى الشكل المقابل

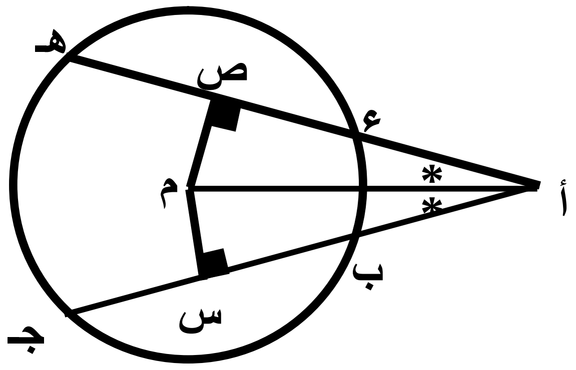
إذا كان $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{جـ ء}$

A م س = م ص فإن أ ب = جـ ء

مثال فى الشكل المقابل

دائرة م فيها $\overline{أ م}$ ينصف (هـ $\widehat{أ}$ جـ)

إثبت أن ب جـ = ء هـ



? الحـــــــــل @

نرسم $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{ء هـ}$

△ △ م أ س، م أ ص

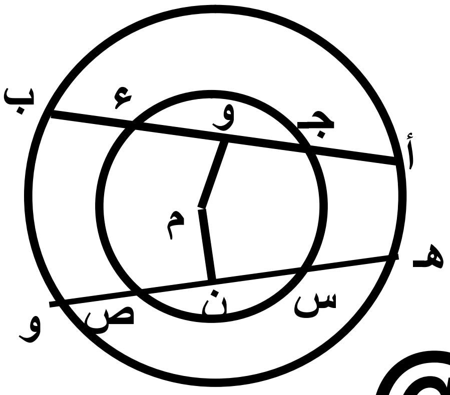
فيهما { أ م ضلع مشترك
ق(س $\widehat{أ}$ م) = ق(ص $\widehat{أ}$ م)
ق(أ $\widehat{س}$ م) = ق(أ $\widehat{ص}$ م)

B △ أ س م ≡ △ أ ص م

∴ م س = م ص

∴ ب جـ = ء هـ

مثال **فى الشكل المقابل**



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى جـ ، ء ، $\overline{\text{هـ و}}$ وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى س ، ص فإذا كان أ ب = هـ و

إثبت أن جـ ء = س ص

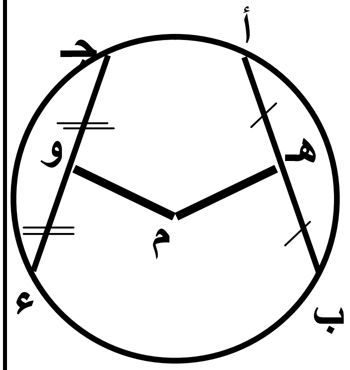
? الحـــــــــــل @

العمل :- نرسم $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$

فى الدائرة الكبرى A أ ب = هـ و ∴ م و = م ن

فى الدائرة الصغرى A م و = م ن ∴ جـ ء = س ص

مثال **فى الشكل المقابل**



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران فى الدائرة م حيث م=(٢ ، -٣)

فإذا كان هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ حيث

هـ = (-١ ، ١) ، و = (٦ ، ٠) إثبت أن أ ب = جـ ء

? الحـــــــــــل @

م هـ = $\sqrt{(٢+١)^{٢} + (-٣-١)^{٢}}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

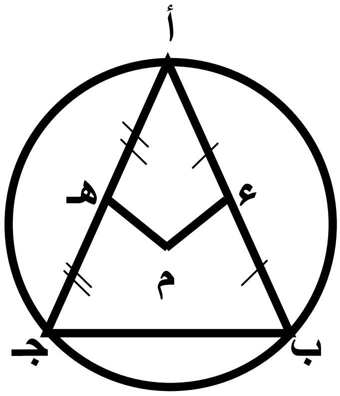
م و = $\sqrt{(٢ - ٦)^{٢} + (٠+٣)^{٢}}$ = $\sqrt{١٦+٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

A هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

A و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ ∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

A م هـ = م و ∴ أ ب = جـ ء

مثال **فى الشكل المقابل**



ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

م ء = م هـ ، ق (ء م̂ هـ) = ١٢٠°

إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

? الحـــــــــــل @

A ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب (١)

A هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ (٢)

م ء = م هـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

أ ب = أ جـ

∴ ق(ب̂) = ق (جـ̂)

ق(أ̂) = ٣٦٠ − [٩٠+٩٠+١٢٠]= ٦٠°

ق(ب̂) = ق(جـ̂) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠

∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = ق(جـ̂)

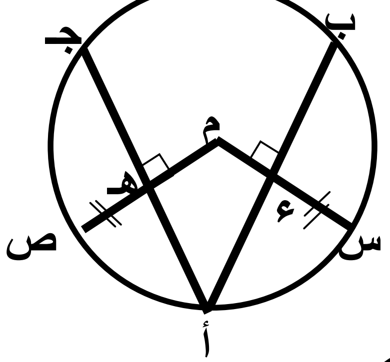
∴ △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

مثال فى الشكل المقابل

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

س ء = ص هـ

إثبت أن : أ ب = أ جـ



? الحـــــــــــل @

Aم س = م ص (أنصاف أقطار) (١)

، س ء = ص هـ (معطى) (٢)

بطرح ٢ من ١

B م س − س ء = م ص − ص هـ

B م ء = م هـ (٤)

م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ (٥)

من ٤ ، ٥ ينتج أن

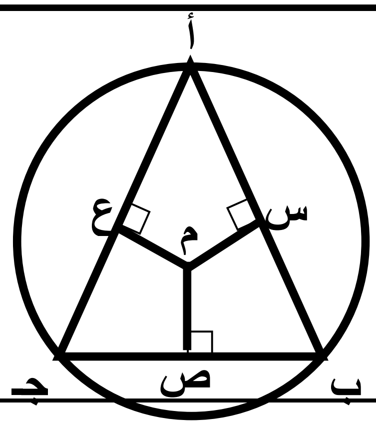
أ ب = أ جـ

مثال فى الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع

أوجد ق(أ̂) وإذا كان أ ب = ١٠سم

أوجد محيط △ أ ب جـ



الحـــــــل

A م س ⊥ أ ب ، م ع ⊥ أ جـ ، م س = م ع

∴ أ ب = أ جـ (١)

A م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ ب جـ ، م س = م ص

∴ أ ب = ب جـ (٢)

A م ص ⊥ ب جـ ، م ع ⊥ أ جـ ، م ص = م ع

∴ ب جـ = أ جـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

A أ ب = ب جـ = أ جـ = ١٠سم

B ق(أ⌢) = ق(ب⌢) = ق(جـ⌢) = ٦٠°

B محيط △أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ١٠ + ١٠ + ١٠ = ٣٠ سم

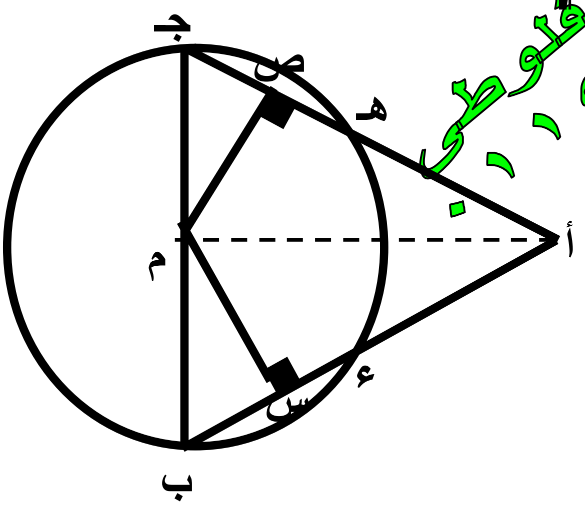
مثال فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث ، ب جـ قطر فى الدائرة م

رسم م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

فإذا كان ب ء = جـ هـ

إثبت أن أ ب = أ جـ



الحـــــــل

A م س ⊥ ء ب ، م ص ⊥ هـ جـ ، ء ب = هـ جـ

∴ م ص = م س

△△ أ ص م ، أ س م

فيهما { أ م ضلع مشترك

م ص = م س

ق(أ س م) = ق(أ ص⌢ م) = ٩٠

△ أ س م ≡ △ أ ص م

∴ أ س = أ ص (١)

A م س ⊥ ء ب

∴ س منتصف ء ب

B ب س = $\frac{1}{2}$ ء ب

A م ص ⊥ هـ جـ ∴ ص منتصف هـ جـ

B ص جـ = $\frac{1}{2}$ هـ جـ

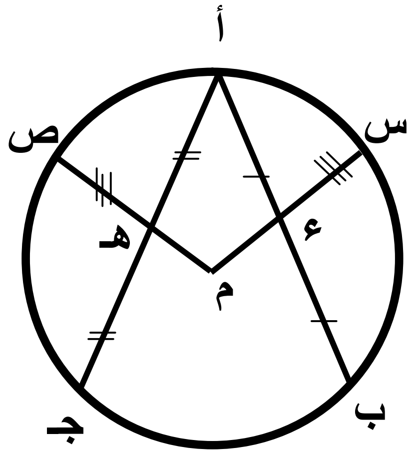
A ب ء = هـ جـ ∴ ب س = ص جـ (٢)

بجمع ١ ، ٢

أ س + س ب = أ ص + ص جـ

∴ أ ب = أ جـ

مثال **فى الشكل المقابل**



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران فى الدائرة م

ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب

$\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ يقطعان الدائرة فى س ، ص

على الترتيب فإذا كان ء س = هـ ص

إثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــــــــل

A ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

A هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

A م س = م ص ، س ء = ص هـ

B م س – س ء = م ص – ص هـ

∴ م ء = م هـ ∴ أ ب = أ جـ

تمارين عامة على الدائرة

(١) أكمل العبارات الاتية

١ ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٣سم فإن أ تقع .... الدائرة

٢ ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ٧سم فإن أ تقع .... الدائرة

٣ ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٠سم فإن أ تقع ....الدائرة

٤ ـ دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = صفرسم فإن أ تنطبق على......... الدائرة

٥ ـ دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = $\frac{٣}{٥}$ نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

٦ ـ دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = $\frac{٧}{٥}$ نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

٧- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = نق سم فإن أ تقع .... الدائرة

٨- دائرة طول قطرها ١٠سم فإذا كان المستقيم ل يمس الدائرة فإنه يبعد عن مركزها .... سم

٩- إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ نقطة تقع على الدائرة فإن م أ = ...سم

١٠- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = ٥سم ، أ ∈ ل حيث م أ ⊥ ل فإذا كان

(أ) م أ = ٧سم فإن ل يقع ....الدائرة

(ب) م أ = ٥سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م أ = ٢سم فإن ل يسمى .... للدائرة

١١- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = نق ، أ ∈ ل حيث م أ ⊥ ل فإذا كان

(أ) م أ = $\frac{٢}{٥}$ نق سم فإن ل يقع ....الدائرة

(ب) م أ = نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

(جـ) م أ = $\frac{٩}{٥}$ نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة

١٢- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة =φ فإن ل يكون .... الدائرة

١٣- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س } فإن ل يكون .... الدائرة

١٤- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س ، ص} فإن ل يكون .... الدائرة

١٥- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ ، ب} فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

١٦- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ } فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

١٧- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

١٨- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

١٩- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٥سم فإن الدائرتان تكونان ....

٢٠- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٣سم فإن الدائرتان تكونان ....

٢١- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١سم فإن الدائرتان تكونان ....

٢٢- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

٢٣- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ } فإن الدائرتان تكونان .... أو.........

٢٤- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان ....

٢٦- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن فإن الدائرتان تكونان .... أو ....

٢٧- إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان ....

٢٨- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

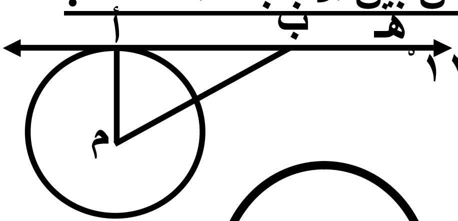
٢٩- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = ...

٣٠- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

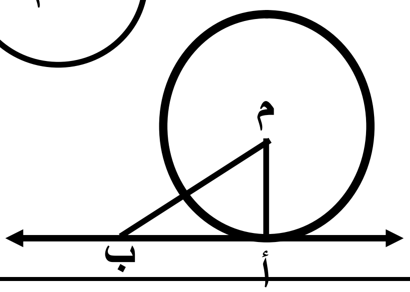
٣١- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الداخل = ...

٣٢- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

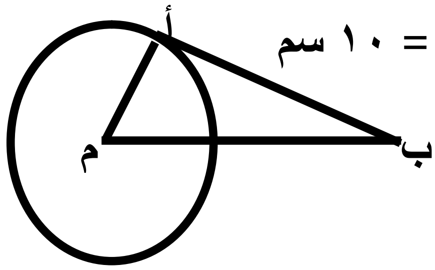
[١] بأستخدام كلا من الاشكال الاتية أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :



١- إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ ، ق (م بَ هـ) = ١٢٠°
فإن ق (أ مَ ب) = ...
(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٨٠° (ء) ٩٠°



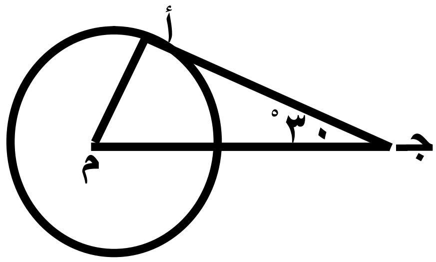
٢- إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ ، أ ب = أ م
فإن : ق(مَ) = ...
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°



٣- إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة م عند أ ، أ م = ٦سم ، م ب = ١٠ سم

فإن أ ب= ......سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (ء) ١٢

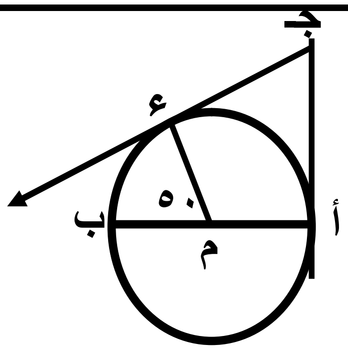


٤- $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ يمس الدائرة م عند أ ، ق(أ جـ^ م) = ٣٠°

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥سم

فإن م جـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ء) ٢.٥

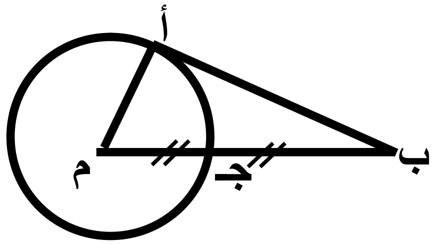


٥- $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يمسان الدائرة عند أ ، ء

فإذا كان ق(ء م^ ب) = ٥٠°

فإن: ق(جـ^) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٣٠° (جـ) ٩٠° (ء) ٤٠°



٦- إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الدائرة م عند أ

$\overline{\text{م ب}}$ ∩ الدائرة م = { جـ }

حيث م جـ = ب جـ فإن ق(ب^) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

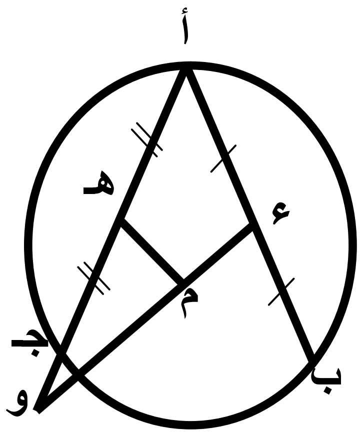
---

(١) فى الشكل المقابل

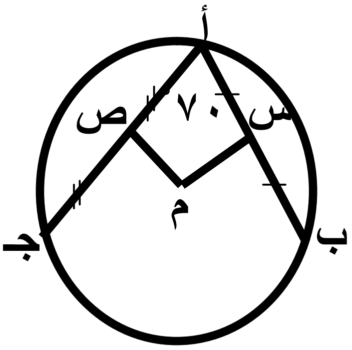
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وترين فى دائرة م ، ق (ب أ^ جـ) = ٤٥°

ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب

رسم $\overrightarrow{\text{ء م}}$ فقطع $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى و إثبت أن : م هـ = هـ و



(٢) فى الشكل المقابل

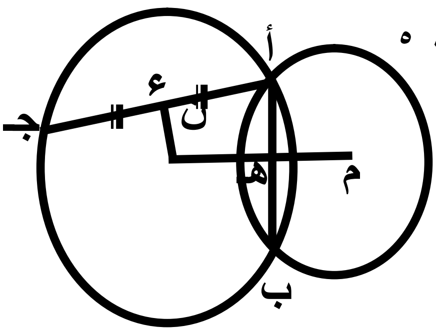


س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، ق(ب أ جـ) = ٧٠ ˚

أوجد : ق (س م ص)

---

[٣] فى الشكل المقابل



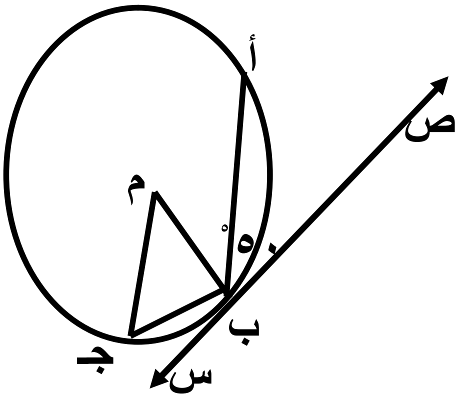
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، ق(م ن د)= ١٠٠ ˚

أ ب ∩ ن م = { هـ } ، أ جـ وتر فى الدائرة ن

ء منتصف أ جـ أوجد : ق (ب أ جـ)

---

[٤] فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، الوتر أ ب // م جـ

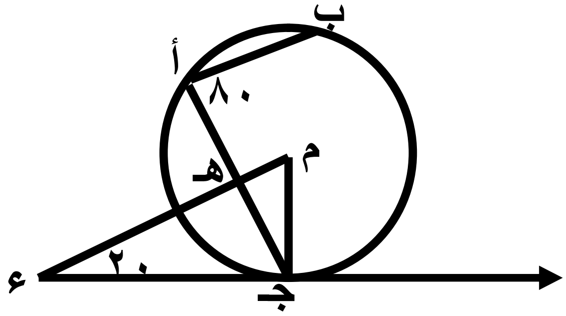
ص س مماس للدائرة عند ب

فإذا كان ق (أ ب ص) = ٥٠ ˚

أوجد ق (جـ ب س)

---

[٥] فى الشكل المقابل

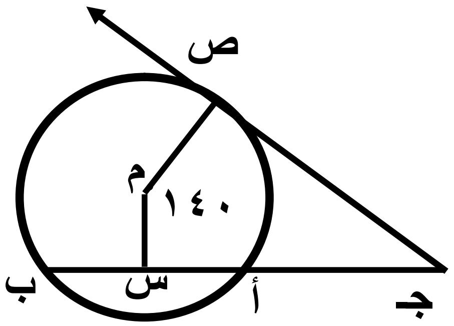


ء جـ يمس الدائرة م عند جـ ، أ ب // م ء

ق(ب أ جـ) = ٨٠ ˚ ، ق (م ء جـ) = ٢٠ ˚

أ جـ ∩ م ء = { هـ }

أوجد ق (هـ جـ م)

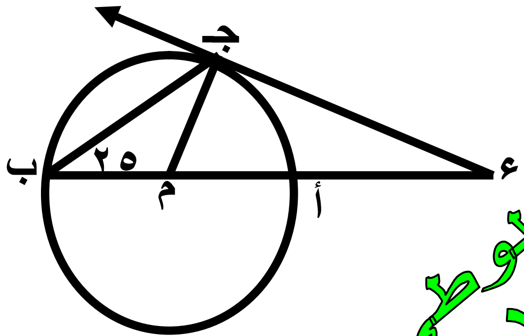


[٦] فى الشكل المقابل

$\overleftarrow{\text{جـ ص}}$ مماس للدائرة م

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

ق (ص $\widehat{\text{م}}$ س) = ١٤٠ ْ أوجد: ق($\widehat{\text{جـ}}$)



[٧] فى الشكل المقابل

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

فإذا كان $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$ مماس للدائرة عند جـ

ق($\widehat{\text{ب}}$) = ٢٥ ْ أوجد ق ($\widehat{\text{ء}}$)

---

[٨] أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١ - يمكن رسم .... تمر بنقطة معلومة

(أ) دائرة واحدة **(ب) دائرتان**

(جـ) ثلاث دوائر **(ء) عدد لا نهائى من الداوائر**

٢ - عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة

(أ) دائرة واحدة **(ب) دائرتان**

(جـ) ثلاث دوائر **(ء) عدد لا نهائى من الداوائر**

٣ - أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد ....

(أ) لا يمكن رسم دائرة تمر بها **(ب) تمر بها دائرة واحدة**

(جـ) تمر بها دائرتان **(ء) تمر بها عدد لا نهائى من الدوائر**

٤ - يمكن تعيين دائرة بمعلومية ....

(أ) ثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة **(ب) نقطتين**

(جـ) ثلاث نقط على أستقامة واحدة **(ء) نقطة واحدة**

٥- عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأى ثلاث رؤوس لمتوازى أضلاع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (ء) عدد لا نهائى

٦- جميع الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع مراكزها جميعا على ....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) محور تماثل أ ب (ء) نقطة منتصف أ ب

٧- مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع ....

(أ) متوسطاته (ب) أرتفاعاته

(جـ) منصفات زواياه الداخلة (ء) محاور تماثل أضلاعه

٨- إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو ....

(أ) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

(جـ) منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (ء) خارج المثلث

٩- لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

(أ) مستطيل (ب) مثلث (جـ) مربع (ء) معين

١٠- إذا كانت أ ، ب نقطتين فى المستوى بحيث أ ب = ٤سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

(أ) ٢سم (ب) ٣سم (جـ) ٤سم (ء) ٨سم

---

[٩] أكمل ما يأتى

١- تتعين الدائرة إذا علم مركزها وطول ....

٢- الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة ....

٣- إذا كانت أ ب = ٦سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

٤ـ إذا كانت أ ب = ٥.٤سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٢.٧سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو ....

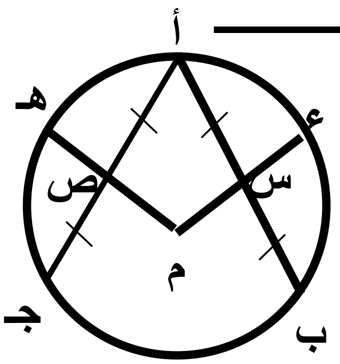
٥ـ أكبر طول لقطعة مستقيمة يقع طرفاها على دائرة طول نصف قطرها ٧سم يساوى ....

---

[١٠] ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تبعد عن المستقيم ل بمقدار ٢سم بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم بحيث تمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل كم عدد الحلول

---

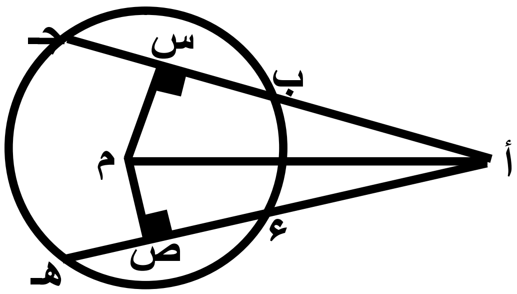
[١١] أ ب قطعة مستقيمة طولها ٨سم أرسم الدائرة التي تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٥سم ، كم حلا لهذه المسألة



(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب

ص منتصف أ جـ إثبت أن س ء = ص هـ

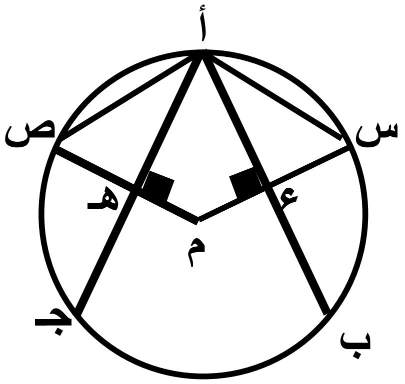


(١٣) فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، م س ⊥ ب جـ

م ص ⊥ ء هـ أثبت أن : أ ب = أ ء

(١٤) فى الشكل المقابل



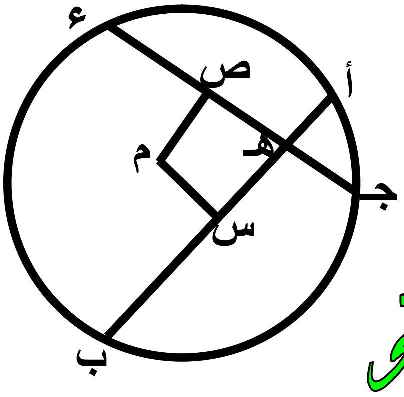
أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب

م ص ⊥ أ جـ إثبت أن:

(١) أ س = أ ص

(٢) ق (س أ جـ) = ق (ص أ ب)

(١٥) فى الشكل المقابل

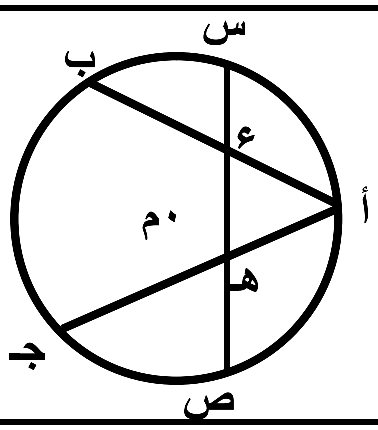


أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

أثبت أن : هـ س ص متساوى الساقين

---

(١٦) فى الشكل المقابل



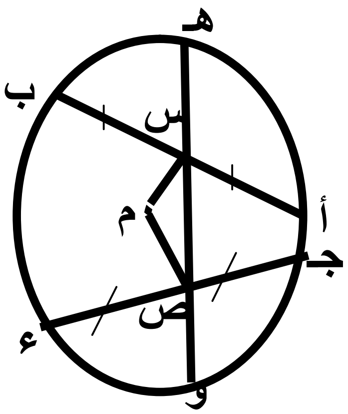
أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ إثبت أن :

(أولا) س ص ⊥ أ م (ثانيا) س ء = هـ ص

---

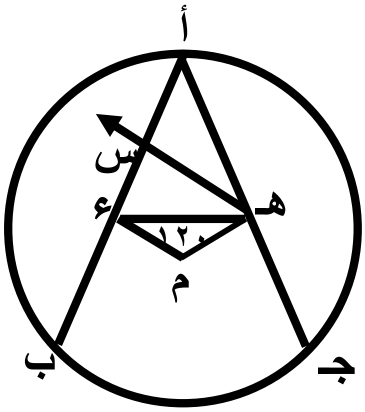
(١٧) فى الشكل المقابل



أ ب = جـ ء ، س ، ص منتصفات أ ب

، جـ ء على الترتيب

أثبت أن : هـ س = ص و



(١٨) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ ، ق(ء مˆ هـ) = ١٢٠ْ

هـ س ينصف (أ هـˆ ء)

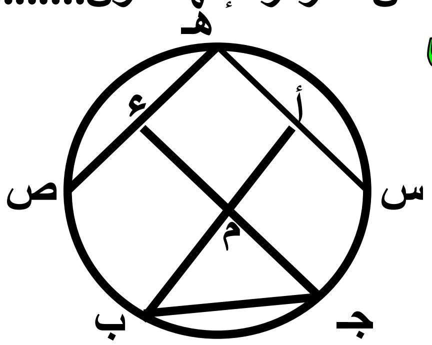
إثبت أن هـ س // م ء

---

(١٩) أكمل ما يأتى

١ - الاوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد ....

٢ - فى الدائرة الواحدة إذا كانت الاوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون..........

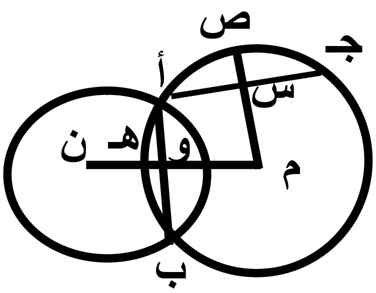


[٢٠] فى الشكل المقابل

دائرة م ، ب أ ⊥ س هـ ، جـ ء ⊥ ص هـ

أ ب ∩ جـ ء = { م } ، أ ب = جـ ء

أ س = ٣سم أوجد : طول هـ ص



[٢١] فى الشكل المقابل

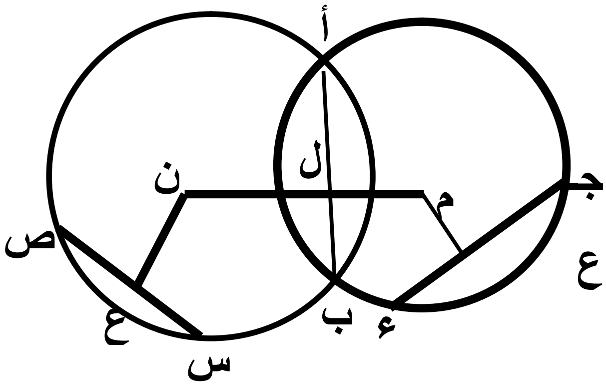
دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب رسم م س ⊥ أ جـ

فقطعه فى س ويقطع الدائرة فى ص ، ورسم م ن

يقطع أ ب فى و ويقطع الدائرة فى هـ فإذا كان

س ص = و هـ إثبت أن أ جـ = أ ب

[٢٢] فى الشكل المقابل



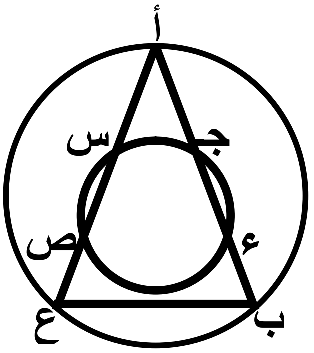
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م ن ∩ أ ب = { ل } ، و منتصف جـ ء

ع منتصف س ص ، م و = م ل ، ن ل = ن ع

إثبت أن جـ ء = س ص

[٢٣] فى الشكل المقابل

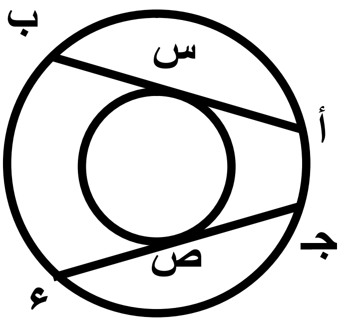


دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، أ ع وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص

فإذا كان ق(أ بَ ع) = ق (ا عَ ب) إثبت أن جـ ء = س ص

---

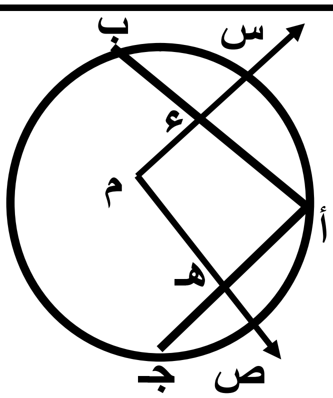
[٢٤] فى الشكل المقابل



دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة الكبرى ويمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص على الترتيب إثبت أن أ ب = جـ ء وإذا كان نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم وطول نصف قطر الدائرة الصغرى ٣سم أوجد طول أ ب

---

[٢٥] فى الشكل المقابل



دائرة مركزها م ، أ ب ، أ جـ وتران فيها

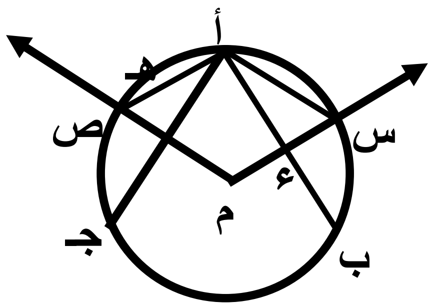
ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب

فإذا كان ء س = هـ ص إثبت أن أ ب = أ جـ

---

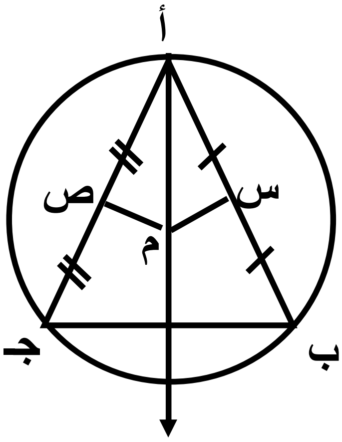
[٢٦] فى الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ، رسم م ء فقطع الدائرة فى س ورسم م هـ فقطع الدائرة فى ص

إثبت أن (١) س ء = هـ ص

(٢) ق (س أَ ب) = ق (ص أَ جـ)



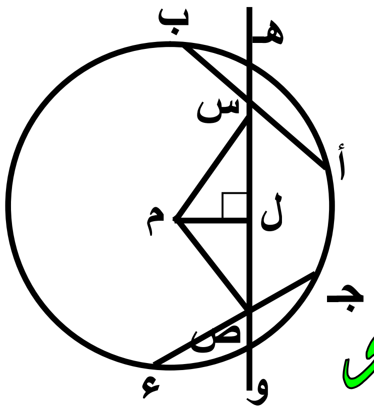
[٢٧] فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ق(ب أ جـ) = ٦٠°

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، م س = م ص

إثبت أن (١) △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

(٢) أ م ⊥ ب جـ



[٢٨] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب ، رسم

س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و ،

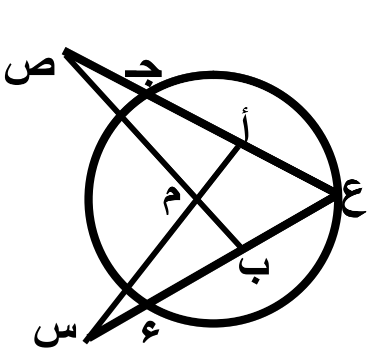
رسم م ل ⊥ س ص برهن أن : س هـ = ص و

[٢٩] أ م ينصف (س أ ص) رسمت الدائرة م تقطع أ س فى ب ، جـ و تقطع أ ص

فى ء ، هـ إثبت أن ب جـ = ء هـ

[٣٠] أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا أ ب

، جـ ء بحيث ب ، ء فى جهة واحدة من س ص إثبت أن ق(ب سَ ص) = ق (ء صَ س)



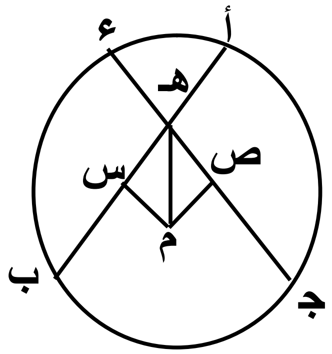
[٣١] فى الشكل المقابل

ع جـ ، ع ء وتران فى الدائرة م ، أ ∈ ع جـ

بحيث أ م ⊥ ع جـ ، أ م ∩ ع ء = { س }

ب ∈ ع ء بحيث ب م ⊥ ع ء ، ب م ∩ ع جـ = {ص}

فإذا كان م أ = م ب إثبت أن جـ ص = ء س

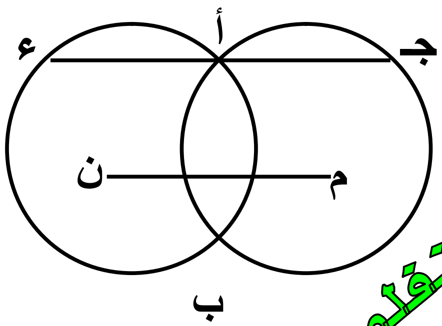


[٣٢] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م يتقاطعان فى هـ

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

ق(أ هـ م) = ق (ء هـ م)   إثبت أن : أ ب = جـ ء



[٣٣] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب

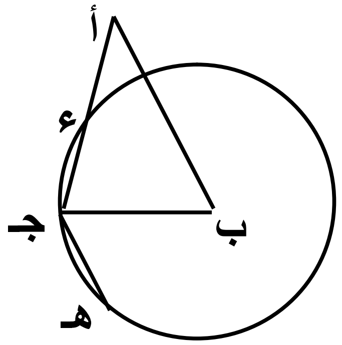
جـ ء // م ن ، أ ∋ جـ ء

إثبت أن جـ أ = أ ء

---

[٣٤] إذا كانت الدائرتان م ، ن متطابقتين ومتماستان من الخارج فى أ ، رسم س ص يمر بنقطة أ ، يقطع الدائرة م فى س ويقطع الدائرة ن فى ص

إثبت أن أ س ، أ ص على أبعاد متساوية من مركزيهما



[٣٥]فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ رسمت دائرة مركزها ب

ونصف قطرها ب جـ قطعت أ جـ فى ء

رسمت جـ هـ // أ ب إثبت أن : جـ ء = جـ هـ

مع التمنيات لكم بالنجاح الباهر

ا لوحدة الأولى : ا لزوايا و الاقواس في ا لدائرة

(١) **ا لقوس** : هو جزء من ا لدائرة محدد بنقطتي نهاية يقعان علي ا لدائرة .

(٢) **ا لزاوية ا لمركزية** : هي ا لزاوية ا لتي رأسها مركز ا لدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر في ا لدائرة . قياسها أقل من أو تساوي ١٨٠° و تقابل قوس أصغر في ا لدائرة .

(٣) **ا لزاوية ا لمحيطية** : هي ا لزاوية ا لتي رأسها علي ا لدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً في ا لدائرة .

(٤) **ا لزاوية ا لمركزية ا لمنعكسة** : هو نفس تعريف ا لزاوية ا لمركزية ولكن تقابل قوس أ كبر في ا لدائرة و قياسها أ كبر من ١٨٠°

(٥) **قياس ا لقوس** = قياس ا لزاوية ا لمركزية ا لمقابلة له .

(٦) **طول ا لقوس** هو طول جزء من محيط ا لدائرة .

طول ا لدائرة = محيطها = ٢ ط نق ، قياس ا لدائرة = ٣٦٠°

طول نصف دائرة = ط نق ، قياس نصف دائرة = ١٨٠°

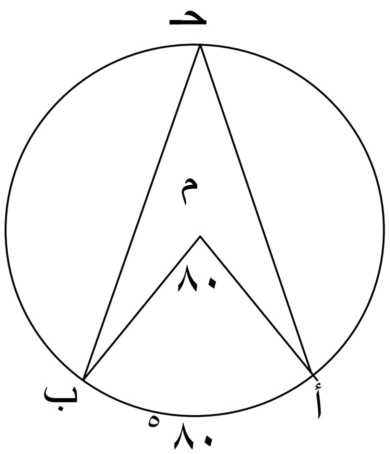
طول $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ ط نق = $\frac{٣}{٢}$ ط نق

قياس $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٣٦٠ = ٢٧٠°

(٧) طول ا لقوس = $\frac{\text{قياس الزاوية ا لمركزية ا لمقابلة له}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

نق نصف قطر ا لدائرة ، ط = $\frac{٢٢}{٧}$ (ما لم يذكر خلاف ذلك)

شكل توضيحي على ما سبق :



$\frown{}$أ حـ ، $\frown{}$أ ب ، $\frown{}$حـ ب أ قواس في الدائرة

ا لزاوية أ $\hat{\text{حـ}}$ ب محيطية ، الزاوية أ $\hat{\text{م}}$ ب مركزية

ق $\frown{}$أ ب = ق(أ $\hat{\text{م}}$ ب) ا لمركزية = ٨٠°

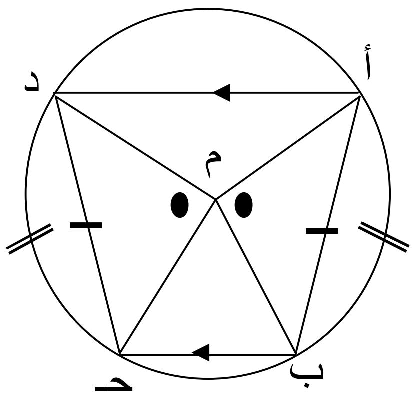
إذا كان طول نصف قطر ا لدائرة ٧ سم فإن :

طول $\frown{}$أ ب = $\frac{٨٠}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق = $\frac{٢}{٩}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = $\frac{٨٨}{٩}$ سم

نتائج هامه :

(١) في ا لدائرة ا لواحدة (أو ا لدوائر ا لمتطابقة) الأقواس ا لمتساوية في ا لقياس متساوية في ا لطول و ا لعكس صحيح .

(٢) في ا لدائرة ا لواحدة (أو ا لدوائر ا لمتطابقة) الأقواس ا لمتساوية في ا لقياس أوتارها متساوية في ا لطول و العكس صحيح .
(أو يقال تقابل أوتار متساوية في ا لطول)



A ق(أ ب) = ق(د حـ)

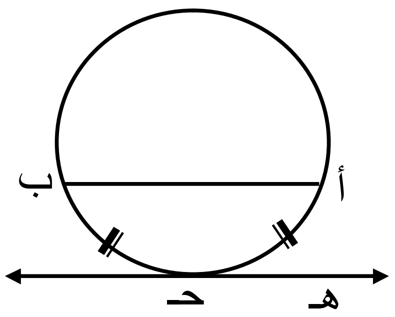
B طول (أ ب) = طول (د حـ)

A طول ا لوتر أ ب = طول ا لوتر د حـ أي أ ب = د حـ

(٣) ا لوتران ا لمتوازيان في ا لدائرة يحصران قوسين متساويين في ا لقياس .
(أو الأوتار ا لمتوازية تحصر بينها أ قواسا متساوية في ا لقياس)

A أ د // ب حـ B ق(أ ب) = ق(د حـ)

(٤) ا لقوسان ا لمحصوران بين وتر و مما س يوازيه في ا لدائرة يكونان متساويان في ا لقياس .



A ا لوتر أ ب // ا لمماس هـ حـ

B ق(أ حـ) = ق(ب حـ)

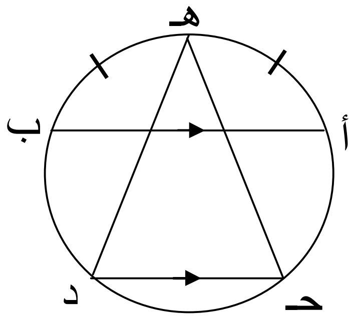
مثال : أ وجد قياس يمثل $\frac{٢}{٣}$ قياس ا لدائرة و إذا كان طول نصف قطر هذه ا لدائرة يساوي ٢١ سم فأوجد طول ا لقوس (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

ا لحل : قياس ا لقوس = $\frac{٢}{٣}$ × ٣٦٠ = ٢٤٠ °

طول ا لقوس = $\frac{٢}{٣}$ × ٢ ط نق = $\frac{٢}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٨٨ سم

مثال : إذا كانت : هـ منتصف أ ب ، أ ب // حـ د برهن أن : هـ حـ = هـ د

ا لحل :



A أ ب // حـ د

B ق(أ حـ) = ق(ب د) ٠٠٠٠٠ (١)

A هـ منتصف أ ب

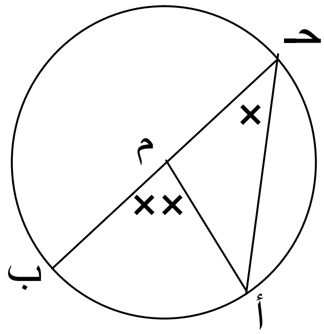
B ق(أ هـ) = ق(هـ ب) ٠٠٠٠٠ (٢) بجمع (١) ، (٢) :

B ق(هـ أ حـ) = ق(هـ ب د) ٠٠ هـ حـ = هـ د

ا لعلاقة بين ا لزاويتين ا لمحيطية و ا لمركزية ا لمشتركتين في ا لقوس

نظرية (١ ـ ١) :

قياس ا لزاوية ا لمحيطية يساوي نصف قياس ا لزاوية ا لمركزية ا لمشتركة معاً في ا لقوس .



ا لمعطيات : أ ب حـ محيطية و أ م ب مركزية تشتركان في أ ب

ا لمطلوب : أثبات أ ن : ق(أ حـ^ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ م^ ب)

ا لبرهان : A أ م^ ب خارجة عن ا لمثلث أ م حـ

B ق(أ م^ ب) = ق(م أ^ حـ) + ق(م حـ^ أ) ٠٠٠ (١)

A م أ = م حـ = نق (أ نصاف أ قطار)

B ق(م أ^ حـ) = ق(م حـ^ أ) ٠٠٠ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أ ن : ق(أ م^ ب) = ٢ ق(م حـ^ أ)

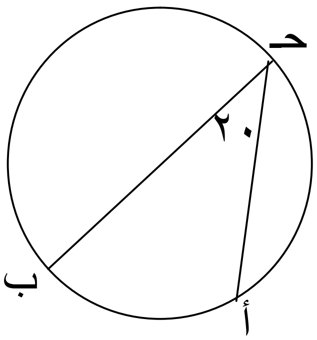
B ق(أ حـ^ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ م^ ب)

يمكن صياغة ا لنظرية كما يلي :

قياس ا لزاوية ا لمركزية يساوي ضعف قياس ا لزاوية ا لمحيطية ا لمشتركة معها في ا لقوس .

أي ق(أ م̂ ب) = ٢ ق(أ حـ̂ ب)

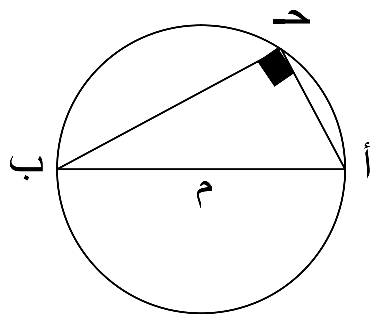
نتيجة (١) : قياس ا لزاوية ا لمحيطية يساوي نصف قياس ا لقوس ا لمقابل لها .



ق(أ حـ̂ ب) ا لمحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (أ⌢ب)

ق(أ⌢ب) = ٢ ق(أ حـ̂ ب)

نتيجة (٢) : ا لزاوية ا لمحيطية ا لمرسومة في نصف دائرة قائمة .

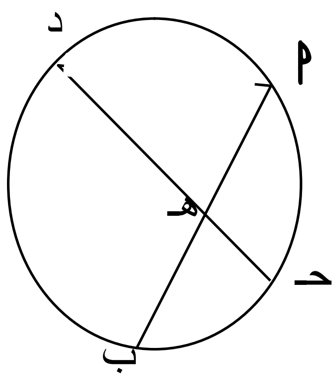


A أ ب قطر في ا لدائرة

B ق(أ حـ̂ ب) = ٩٠ ° قائمة

تمارين مشهورة

تمرين مشهور (١) : إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياس القوسين المقابلين لها



A أ ب ∩ جـ د = { هـ }

B ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ⌢حـ) + ق (ب⌢د)]

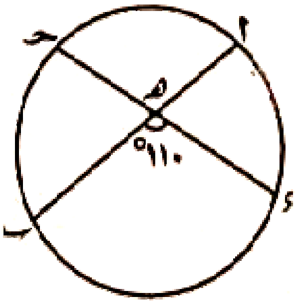
مثال : إذا كان ق{ أ⌢جـ } + ق{ ب⌢د } = ٨٠ °

اوجد ق{ أ هـ̂ جـ }

الحل : A أ ب ∩ جـ د = { هـ }

B ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ⌢حـ) + ق (ب⌢د)]

= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ = ٤٠ °



مثال : إذا كان

ق{ د هـ^ب} = ١١٠ ° ، ق{ ب⌒جـ } = ٧٠ °

اوجد ق{ أ⌒د }

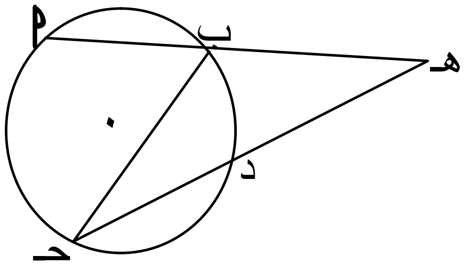
الحل : ق (∠ أ هـ د) = ١٨٠ - ١١٠ = ٧٠

ق (∠ أ هـ د) = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ⌒د) + ق (ب⌒حـ)]

٧٠ = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ⌒د) + ٧٠]

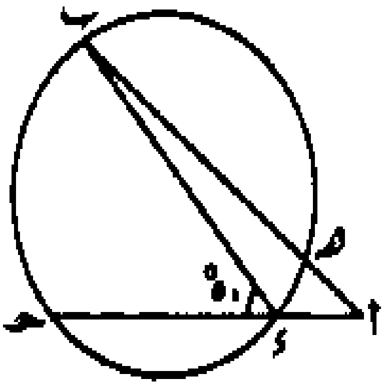
ق (أ⌒د) + ٧٠ = ١٤٠ B ق (أ⌒د) = ١٤٠ ــ ٧٠ = ٧٠ °

<u>تمرين مشهور (٢)</u> : إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية



A $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{حـد}}$ = { هـ }

B ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ⌒حـ) – ق (ب⌒د)]



مثال : إذا كان

ق{ ب دَ^جـ } = ٥٠ ° ، ق{ د⌒هـ } = ٣٠ °

اوجد ق{ أ^ }

الحل :

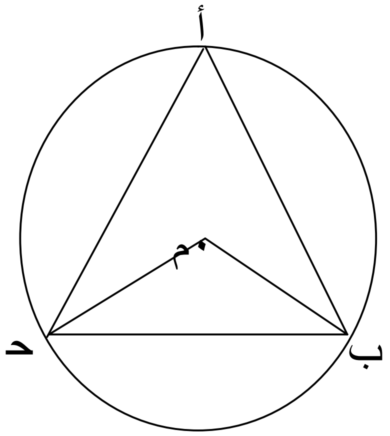
A ق (∠ب د حـ) = ٥٠ B ق (ب⌒حـ) = ٢ × ٥٠ = ١٠٠

B ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (ب⌒حـ) – ق (د⌒هـ)] = $\frac{١}{٢}$ [١٠٠ - ٣٠]

= $\frac{١}{٢}$ × ٧٠ = ٣٥ °

<u>ملحوظة :</u> **ا لتمارين ا لمشهورة هي تمارين تأخذ شكل القواعد أي يمكن أن تستخدم في حل ا لتمارين كالنظريات و النتائج و الحقائق .**

<u>مثال</u> : في ا لشكل ا لمقابل :



ق(م بˆ حـ) = ٢٥ ° ، أ وجد ق(ب أˆ حـ)

ا لحل :

A م ب = م حـ = نق

B ق(م بˆ حـ) = ق(م حـˆ ب) = ٢٥

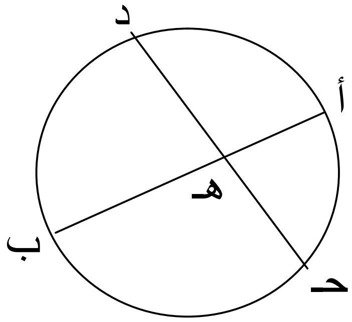
B ق(ب مˆ حـ) = ١٨٠ - (٢٥ + ٢٥)

= ١٣٠

B ق(ب أˆ حـ) ا لمحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(ب مˆ حـ) ا لمركزية

= $\frac{١}{٢}$ × ١٣٠ = ٦٥°

<u>مثال</u>: في ا لشكل ا لمقابل :



إذا كان : ق(أ حـ⌒) = ٦٠ ° ، ق(د ب⌒) = ٢٠ °

أ وجد : ق(أ هـˆ حـ)

الحل : A $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{حـ د}}$ = { هـ }

B ق(أ هـˆ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ حـ⌒) + ق(د ب⌒)]

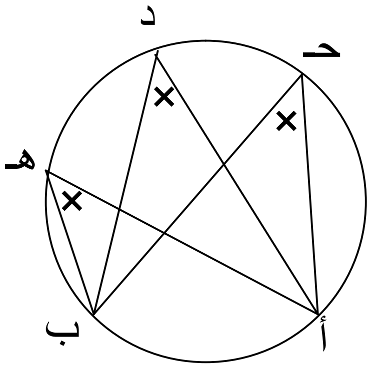
= $\frac{١}{٢}$ [٢٠ + ٦٠] = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ = ٤٠ °

مع خالص أمنياتى لكم
بالنجاح الباهر
الاستاذ / خالد المنفلوطى ت / ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

الزوايا المحيطية المرسومة علي نفس القوس

نظرية (١ - ٣) :

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة متساوية في القياس



المعطيات : حـ ، د ، هـ زوايا محيطية مشتركة في أب

المطلوب : أثبات أن :

ق(حـ) = ق(د) = ق(هـ)

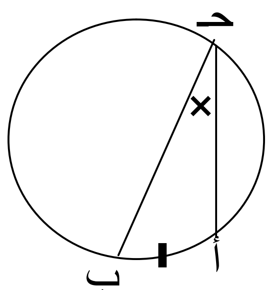
البرهان :

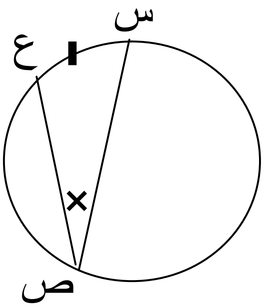
∵ ق(حـ) = ½ ق(أ ب)

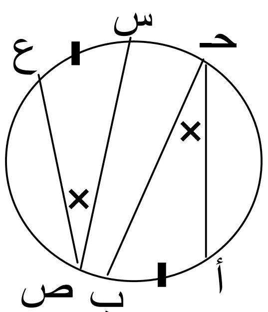
، ق(د) = ½ ق(أ ب) ، ق(هـ) = ½ ق(أ ب)

∴ ق(حـ) = ق(د) = ق(هـ)

نتيجة : **الزوايا المحيطية التي تحصر أ قواساً متساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدد دوائر ليس شرطاً أن تكون متطابقة) تكون متساوية في القياس**







A ق(أ ب) = ق(س ع)

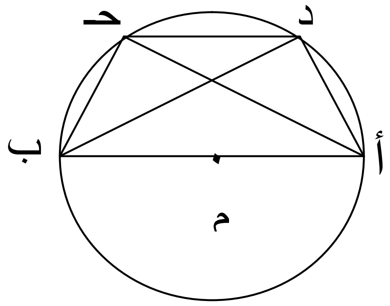
B ق(أ حـ ب) = ق(س ص ع)

لاحظ أن :

١ - الزوايا المحيطية التي تقابل أ قواساً متساوية في الطول في نفس الدائرة (أ و في الدوائر المتطابقة) تكون متساوية في القياس .

٢ - أما إذا كانت الزوايا المحيطية تقابل أ قواساً متساوية في الطول في دوائر غير متطابقة فإنها لا تكون متساوية في القياس .

مثال : في ا لشكل ا لمقابل :



إذا كان : ق(أ د̂ حـ) = ١٢٠ ، أ ب قطر

فأوجد : ق(ب أ̂ حـ)

ا لحل :

A أ ب قطر B ق(أ د̂ ب) ا لمحيطية = ٩٠ °

B ق(ب د̂ حـ) = ١٢٠ - ٩٠ = ٣٠

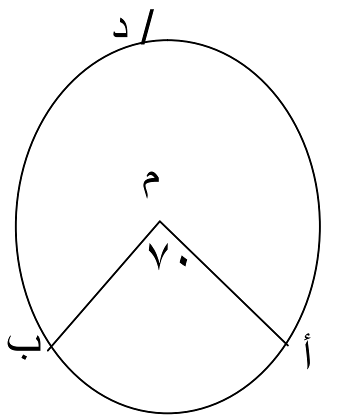
B ق(ب د̂ حـ) = ق(ب أ̂ حـ) = ٣٠ محيطيان لهما ا لقوس ب حـ

تمارين على الزوايا والأقواس في الدائرة

- **الأسئلة ا لموضوعية :**

اختــــــــــر الإجابة ا لصحيحة مما بين الاقواس:

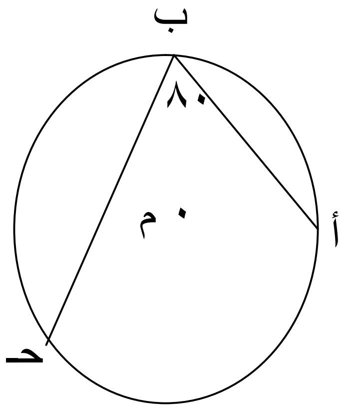
(١) في ا لشكل ا لمقابل :



دائرة مركزها م ، ق(أ م̂ ب) = ٧٠ °
فيكون ق(أ د ب) مساويا :

(أ) ٧٠ (ب) ٢٩٠ (حـ) ١٤٠ (د) ١١٠

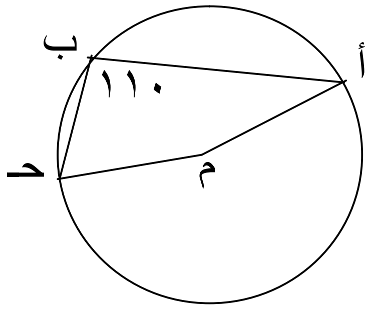
(٢) في ا لشكل ا لمقابل :



دائرة مركزها م ، ق(أ ب̂ حـ) = ٨٠ °
فيكون ق(أ ب حـ) مساويا :

(أ) ١٠٠ (ب) ١٦٠ (حـ) ٢٨٠ (د) ٢٠٠

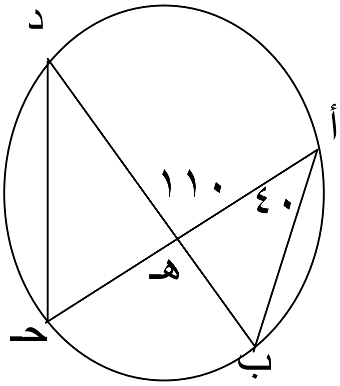
(٣) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



دائرة مركزها م ، ق(أ $\hat{ب}$ حـ) = ١١٠ °
فيكون ق($\overset{\frown}{أ ب حـ}$) مساويا :

(أ) ٢٢٠ (ب) ١٤٠ (حـ) ١١٠ (د) ٧٠

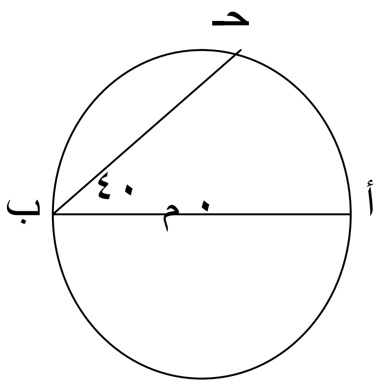
(٤) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



$\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب د}$ وتران في دائرة متقاطعتان في هـ
، ق($\hat{أ}$) = ٤٠ ، ق(أ $\hat{هـ}$ د) = ١١٠
فيكون ق($\overset{\frown}{أ د}$) مساويا :

(أ) ٧٠ (ب) ٨٠ (حـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

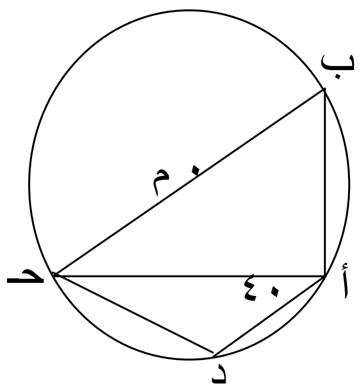
(٥) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



$\overline{أ ب}$ قطر في ا لدائرة م ، ق($\hat{ب}$) = ٤٠ °
فيكون ق($\overset{\frown}{ب حـ}$) مساويا :

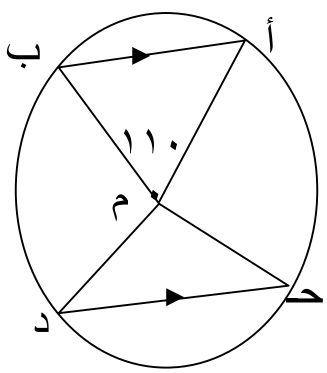
(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (حـ) ٤٠ (د) ٩٠

(٦) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



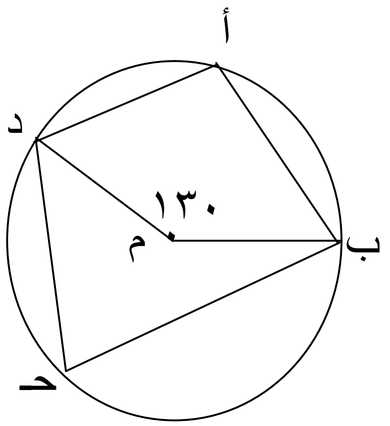
$\overline{ب حـ}$ قطر في ا لدائرة م ، ق(د $\hat{أ}$ حـ) = ٤٠ °
فيكون ق($\overset{\frown}{ب أ د}$) مساويا :
(أ) ١٠٠ (ب) ١٣٠ (حـ) ٩٠ (د) ٦٥

(٧) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



م مركز ا لدائرة ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ د}$
، ق(أ $\hat{م}$ ب) = ٨٠ ° ، ق(حـ $\hat{م}$ د) = ١١٠
فيكون ق(حـ $\hat{م}$ أ) مساويا :
(أ) ٩٥ (ب) ١٠٠ (حـ) ٧٠ (د) ٨٥

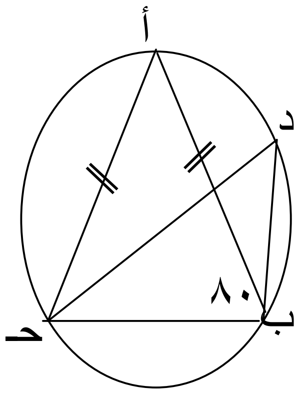
(٨) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



م مركز ا لدائرة ، ق(ب م̂ د) = ١٣٠
فيكون ق(ب أ̂ د) مساويا :

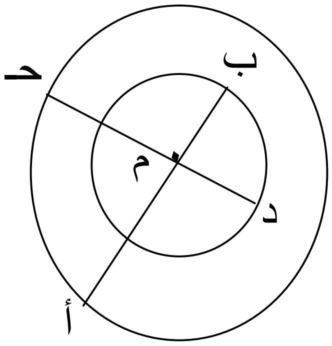
(أ) ٥٠ (ب) ٦٥ (حـ) ١٣٠ (د) ١١٥

(٩) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



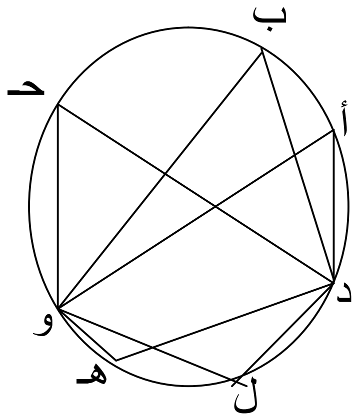
أ ب = أ حـ ، ق(أ ب̂ حـ) = ٨٠
فيكون ق(ب د̂ حـ) مساويا :
(أ) ٨٠ (ب) ٤٠ (حـ) [illegible] (د) ١٠٠

(١٠) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



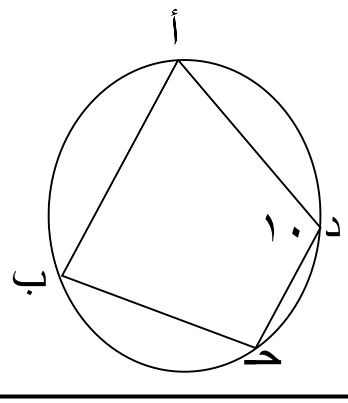
طائرتان متحدتا ا لمركز م ، $\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{حـ د}}$ = { م }
فإذا كان ق(ب د⌒) = ٨٠
فإن ق(أ حـ⌒) يساوي ......
(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (حـ) ١٦٠ (د) ١٠٠

(١١) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



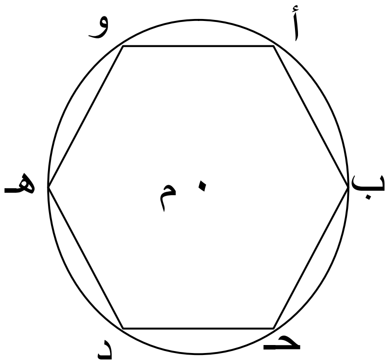
أي ا لجمل الآتية خطأ ؟
(أ) ق(أ̂) = ق(حـ̂)
(ب) ق(ب̂) = ق(هـ̂)
(ت) ق(ب̂) = ق(حـ̂)
(ث) ق(ل̂) = ق(هـ̂)

(١٢) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



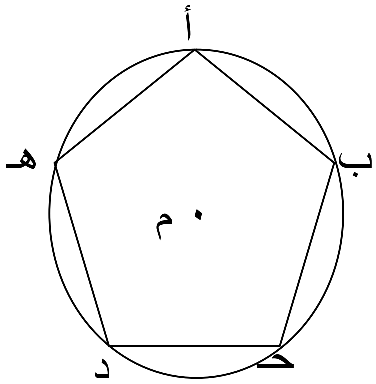
ق(أ د̂ حـ) = ١٠٠
فيكون ق(ب̂) مساويا :
(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (حـ) ٨٠ (د) ٩٠

(١٣) في ا لشكل ا لمقابل :



أ ب حـ د هـ و سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة
فيكون ق(أ حـ هـ) مساويا :
(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (حـ) ١٨٠ (د) ٢٤٠

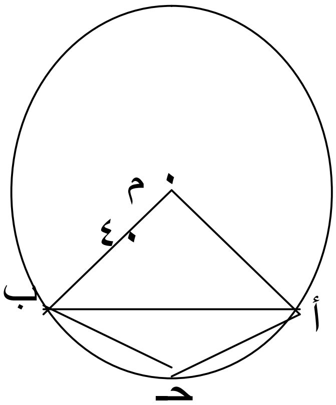
(١٤) في ا لشكل ا لمقابل :



أ ب حـ د هـ خماسي منتظم مرسوم داخل دائرة
فيكون ق(أ ب حـ) مساويا :

(أ) ١٠٨ (ب) ٥٤ (حـ) ٢١٦ (د) ١٤٤

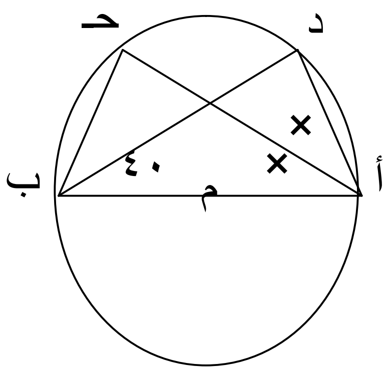
(١٥) في ا لشكل ا لمقابل:



م مركز ا لدائرة ، ق(أ $\hat{ب}$ م) = ٤٠
فيكون ق(أ $\hat{حـ}$ ب) مساويا :

(أ) ١٤٠ (ب) ١٣٠ (حـ) ١٠٠ (د) ٨٠

*** أكـــــــــــمل :**
(١) في ا لشكل ا لمقابل :

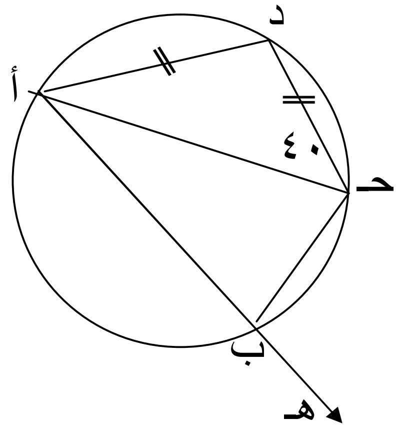


$\overline{أ ب}$ قطر في ا لدائرة ، ق(أ $\hat{ب}$ د) = ٤٠

، ق(ب $\hat{أ}$ حـ) = ق(حـ $\hat{أ}$ د)

فيكون ق(حـ $\hat{ب}$ د) مساويا : ٠٠٠٠٠

(٢) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

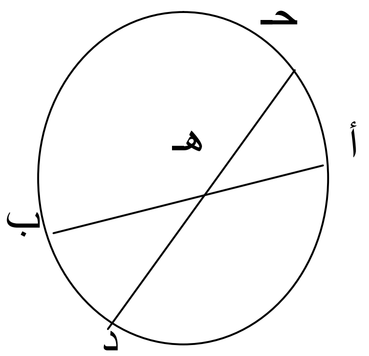


د أ = د حـ ، ق(أ $\hat{\text{حـ}}$ د) = ٤٠

، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

فيكون ق(حـ $\hat{\text{ب}}$ هـ) مساويا .....

(٣) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

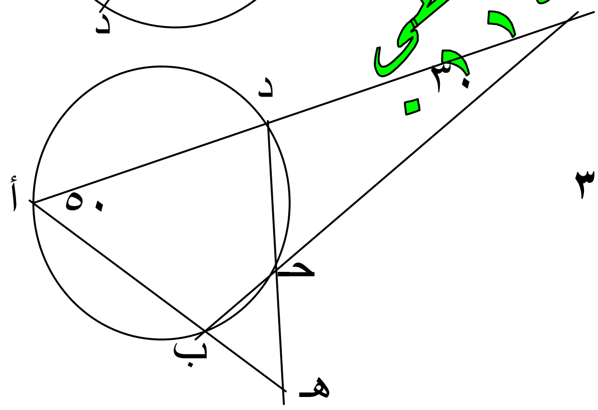


$\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ د}}$ = { هـ}

إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$) = ٤٠ ، ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) = ٦٠

فإن ق(حـ $\hat{\text{هـ}}$ ب) يساوي .....

(٤) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{د حـ}}$ = { هـ }

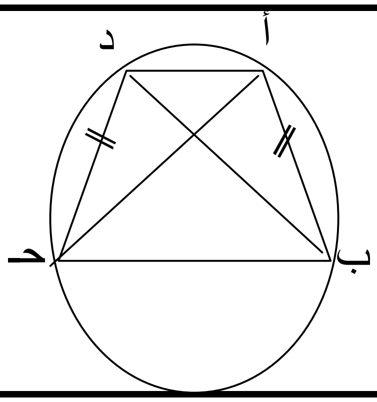
، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ = { و }

إذا كان ق($\hat{\text{أ}}$) = ٥٠ ، ق($\hat{\text{و}}$) = ٣٠

فإن ق($\hat{\text{هـ}}$) يساوي .....

<u>أســــــئلة ا لمقال</u> :

(١) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



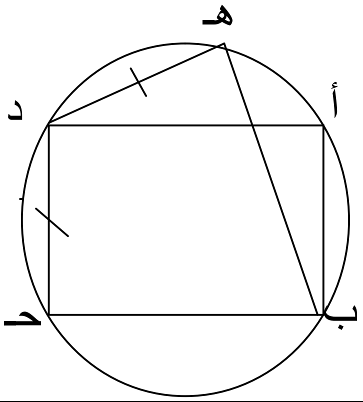
أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

إذا كان أ ب = حـ د

فأثبت أن : أ حـ = ب د

---

(٢) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

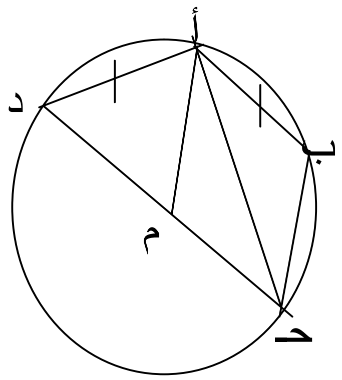


أ ب حـ د مستطيل داخل دائرة

، د حـ = د هـ

أُثبت أن : ب هـ = أ د

(٣) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



حـ د قطر في دائرة م ، أ ب = أ د

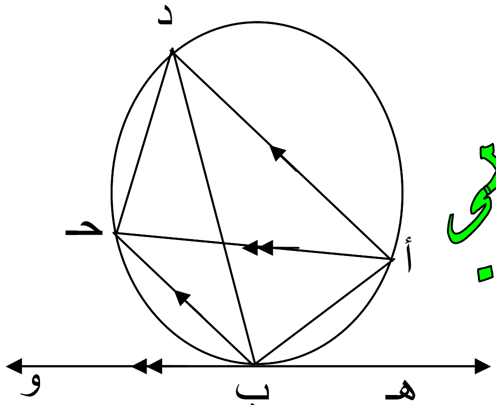
أثبت أن : ق(أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أ م د)

---

(٤) أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل ا لدائرة م بحيث أ ب // د حـ
هـ منتصف أ ب . أثبت أن : حـ هـ = د هـ .

---

(٥) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



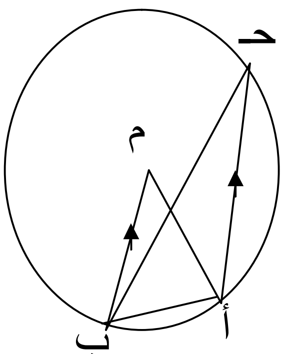
هـ و مماس للدائرة عند ب
هـ و // أ حـ ، أ د // ب حـ
أثبت أن : ا لمثلث ب حـ د متساوي ا لساقين

---

(٦) أ ب ، حـ د وتران في ا لدائرة م ، أ ب ∩ حـ د = { هـ }
فإذا كان أ هـ = حـ هـ أثبت أن : أ ب = حـ د

---

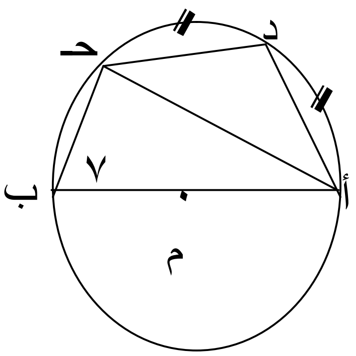
(٧) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



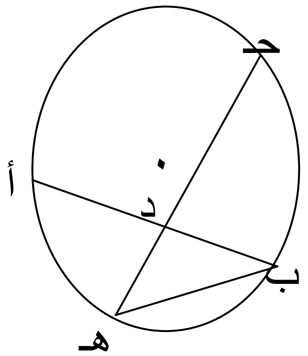
دائرة مركزها م ، أ حـ // ب م ، ق(أ م ب) = ٥٠
أوجد با لبرهان :
أولا : ق(أ حـ ب)
ثانيا : ق(أ ب حـ)
ثالثا : ق(أ حـ)

---

(٨) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

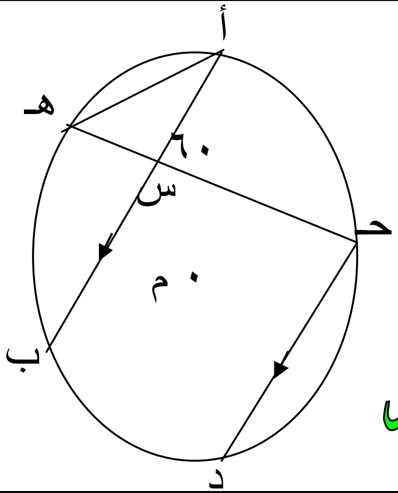


أ ب قطر في الدائرة م ، د ، حـ ∋ الدائرة م
بحيث طول د أ = طول د حـ ، ق(ب) = ٧٠
أ وجد كلا من ق(د) ، ق(د حـ ب)



(٩) **في الشكل ا لمقابل :**

م مركز ا لدائرة ، إذا كان أ ب ∩ حـ هـ = { د }
، ق(ب حـ) = ١٠٠ ، ق(أ هـ) = ٦٠
فأوجد قياس كل من حـ د ب ، أ ب هـ با لدرجات

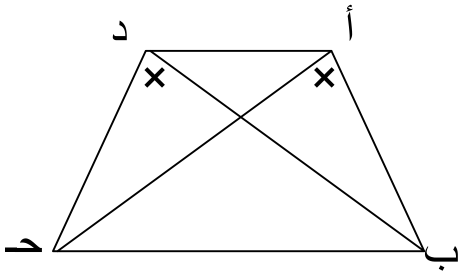


(١٠) **في ا لشكل ا لمقابل :**

أ ب // حـ د ، أ ب ∩ حـ هـ = {س}
، ق(أ س حـ) = ٦٠ ، ق(أ حـ) = ٨٠
أ وجد با لبرهان :
أولا : ق(أ هـ حـ)
ثانيا: ق(ب د)
ثالثا : ق(ب هـ)

ا لشـــــكل ا لرباعي ا لدائري

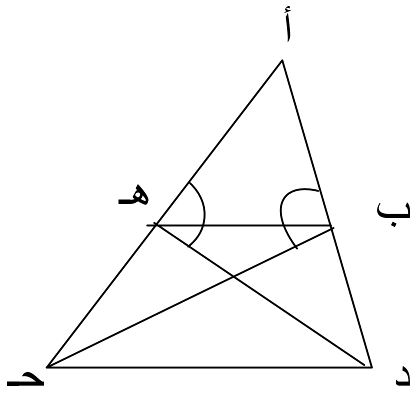
نظرية : (بدون برهان)
إذا تساوت قياسا زاويتين مرسومين علي قاعدة واحدة و في جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه ا لقاعدة وتراً فيها .



في الشكل ا لمقابل :
إذا كان : ق(ب أ حـ) = ق(ب د حـ)
و هما مرسومتان علي قاعدة واحدة ب حـ
و في جهة واحدة منها
A أ ب حـ د يسمى رباعي دائرى ، و نستنتج أن :

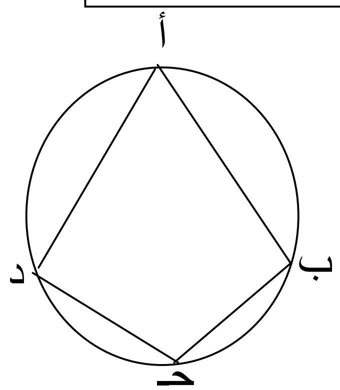
ق(د أ حـ) = ق(د ب حـ) لهما نفس القاعدة د حـ
ق(أ د ب) = ق(أ حـ ب) لهما نفس القاعدة أ ب
ق(أ ب د) = ق(أ حـ د) لهما نفس القاعدة أ د

مثال : في ا لشكل ا لمقابل : ق(أ ب̂ حـ) = ق(أ هـ̂ د)
برهن أن : هـ ب د حـ رباعي



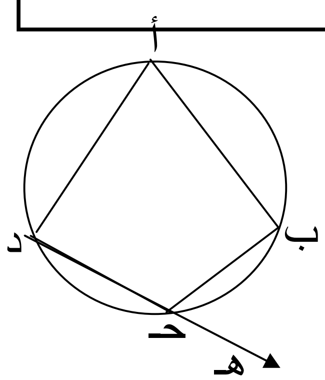
ا لحل : A ق(أ ب̂ حـ) = ق(أ هـ̂ د)
، د ب̂ حـ تكمل أ ب̂ حـ ، د هـ̂ حـ تكمل أ هـ̂ د
B ق(د ب̂ حـ) = ق(د هـ̂ حـ)
و هما مرسومتان علي قاعدة واحدة د حـ
و في جهة واحدة منها B هـ ب د حـ شكل رباعي دائري

نظرية: إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلين في متكاملتان



ا لمعطيات : أ ب حـ د شكل رباعي دائرياً
ا لمطلوب : (١) ق(أ̂) + ق(حـ̂) = ١٨٠
(٢) ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠
ا لبرهان :
A ق(أ̂) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب حـ̂ د)
، ق(حـ̂) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب أ̂ د)
B ق(أ̂) + ق(حـ̂) = $\frac{١}{٢}$ [ق(ب حـ د) + ق(ب أ د)]
= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠ = ١٨٠
با لمثل ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠

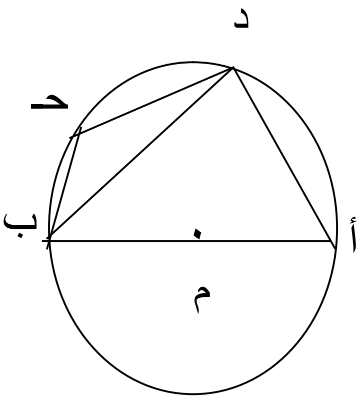
نتيجة :
قياس ا لزاوية ا لخارجة عند أي رأس من رؤوس ا لشكل ا لرباعي الدائري يساوي قياس ا لزاوية ا لداخلة ا لمقابلة للمجاورة لها .



A أ ب حـ د رباعي دائري
B ق(ب حـ̂ هـ) = ق(أ̂)

مثال : <u>في ا لشكل ا لمقابل :</u> أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل ا لدائرة م ، أ ب قطر فيها ،

، ق(د حـ ب) = ١٣٠ أوجد : ق(أ ب د)



البرهان :

A أ ب قطر B ق(أ د ب) ا لمحيطية = ٩٠

A أ ب حـ د رباعي دائري

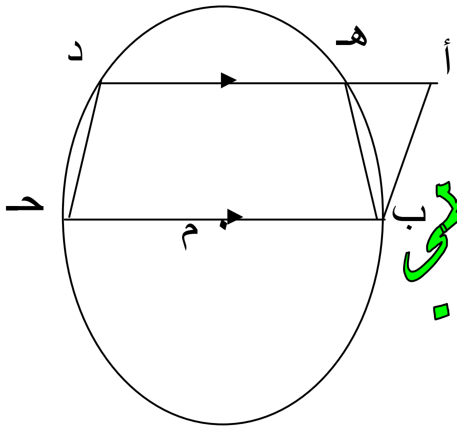
B ق(أ) = ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠

في ∆ أ د ب : ق(أ ب د) = ١٨٠ ـ (٩٠ + ٥٠) = ٤٠

مثال : <u>في ا لشكل ا لمقابل:</u>

أ ب حـ د متوازي أضلاع

برهن أن: ب أ = ب هـ



البرهان :

البرهان : A أ ب حـ د متوازي الأضلاع

B ق(أ) = ق(حـ) (١)

A أ هـ ب خارجة عن الشكل الرباعي الدائري هـ ب حـ د

B ق(أ هـ ب) = ق(حـ) ٠ (٢)

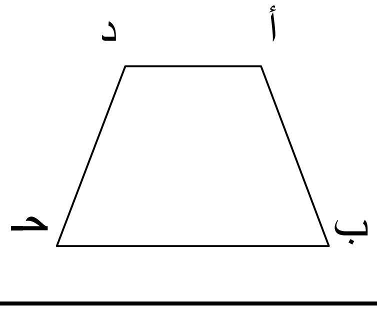
من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(أ) = ق(أ هـ ب) B أ ب = ب هـ

<u>نظرية :</u> (بدون برهان)

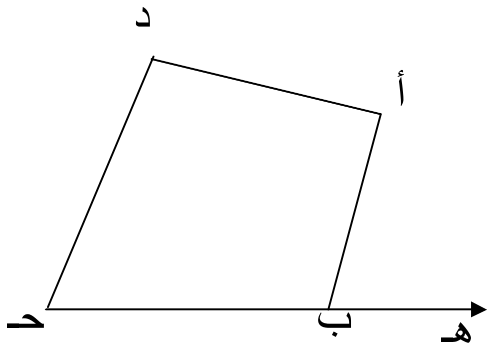
إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان في شكل رباعي كان هذا الشكل رباعيا دائرياً

إذا كان : ق(أ) + ق(حـ) = ١٨٠ و هما متقابلتان



B أ ب حـ د رباعي دائري

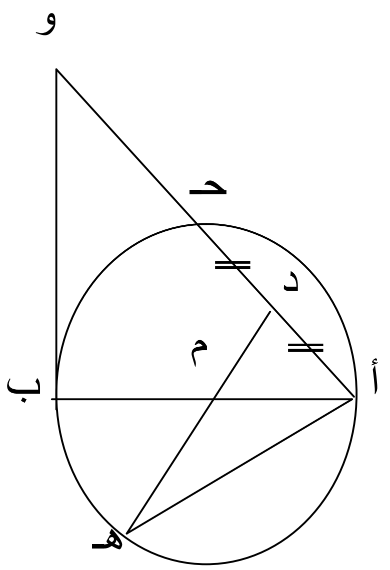
نتيجة :
إذا وجدت زاوية عند رأس من رؤوس شكل رباعي قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيا دائرياً .



A أ ب حـ د شكل رباعي

، ق(أ بˆ هـ) = ق(دˆ)

B أ ب حـ د رباعي دائري



مثال : في ا لشكل ا لمقابل :
أ ب قطر في ا لدائرة م ، أ حـ وتر فيها
، د منتصف أ حـ .
برهن أن :
(١) ا لشكل م ب و د رباعي
(٢) ق(وˆ) = ٢ ق(ب أˆ هـ)

البرهان : A د منتصف أ حـ B م د ⊥ أ حـ

A م ب = نق ، ب و مماس B م ب ⊥ ب و

A ق(و دˆ م) + ق(م بˆ و) = ١٨٠

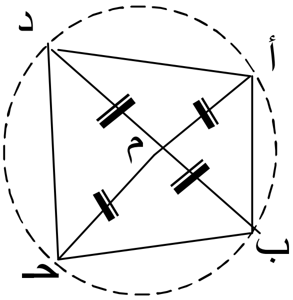
B الشكل م ب و د رباعي دائري
A ب مˆ هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري د م ب و

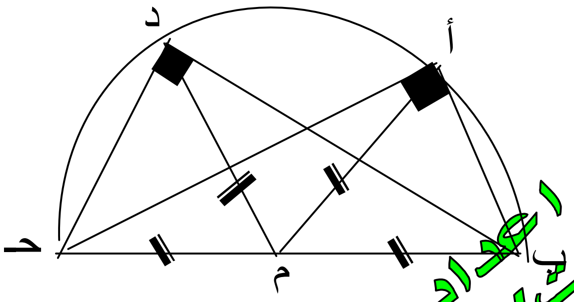
B ق(وˆ) = ق(ب مˆ هـ) (١)

A ق(ب مˆ هـ) = ٢ ق(ب أˆ هـ) (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : ق(وˆ) = ٢ ق(ب أˆ هـ)

<u>حالة خاصة</u> : يكون ا لشكل رباعيا دائريا إذا كانت رؤوسه علي أبعاد متساوية من نقطة ثابتة في ا لمستوى هي مركز ا لدائرة ا لمارة برؤوسه .



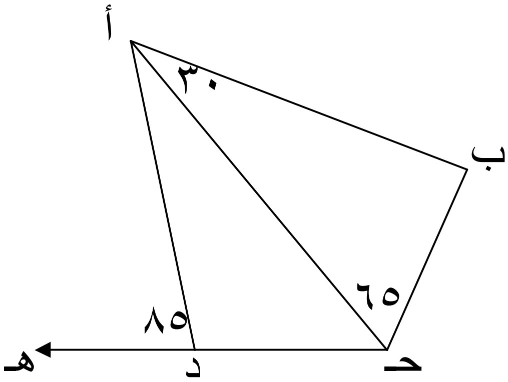


مثلا : إذا كانت م ب = م أ = م حـ = م د فإن ا لنقط أ ، ب ، حـ ، د تمر بها دائرة وحيدة ، يكون ا لشكل أ ب حـ د رباعي دائري .

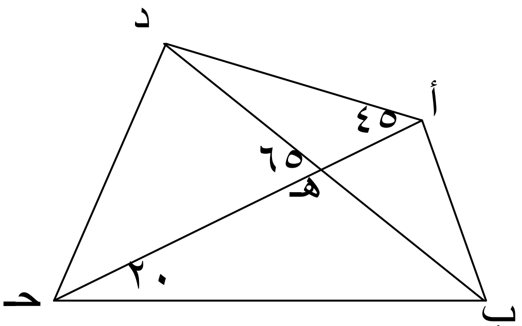
<u>لإثبات: أن ا لشكل ا لرباعي دائري يجب أن يتوفر أحد ا لخواص الآتية :</u>

١ ـ إذا وجدت زاويتان مرسومتان علي قاعدة واحدة متساويتان في ا لقياس .
٢ ـ إذا وجدت فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان .
٣ ـ إذا وجدت فيه زاوية خارجة عند أي رأس من رؤوسه قياسها يساوي قياس الزاوية ا لداخلة ا لمقابلة للمجاورة لها .
٤ ـ إذا كانت رؤوسه علي أبعاد متساوية من نقطة ثابتة في ا لمستوى .
٥ ـ إذا مرت رؤوسه بدائرة

<u>مثال :</u> أثبت أن الشكل أ ب حـ د رباعي دائري مستعينا بالبيانات علي الرسم .



ا لشكل (١)



ا لشكل (٢)

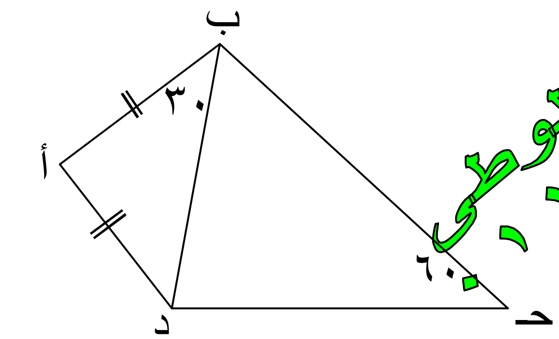
<u>البرهان :</u>

<u>في ا لشكل (١)</u> : A ق(ب أ̂ حـ) = ٣٠ ، ق(أ حـ̂ ب) = ٦٥
B ق(أ ب̂ حـ) = ١٨٠ ـ (٣٠ + ٦٥)
= ١٨٠ ـ ٩٥ = ٨٥
A ق(أ د̂ هـ) = ق(أ ب̂ حـ) = ٨٥ خارجة عند أحد رؤوسه
B الشكل أ ب حـ د رباعي دائري .

في ا لشكل (٢) : A د هـ^ حـ خارجة عن ا لمثلث ب هـ حـ
B ق(د بَ^ حـ) = ٦٥ ـ ٢٠ = ٤٥
A ق(د أ^ حـ) = ق(د بَ^ حـ) = ٤٥
مرسومتان علي قاعدة واحدة و في جهة واحدة .
B الشكل أ ب حـ د رباعي دائري .

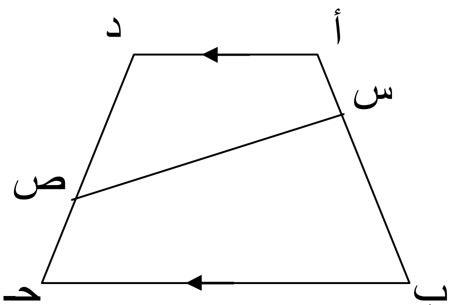
تمارين على الشكل الرباعى الدائرى

(١) في ا لشكل ا لمقابل :



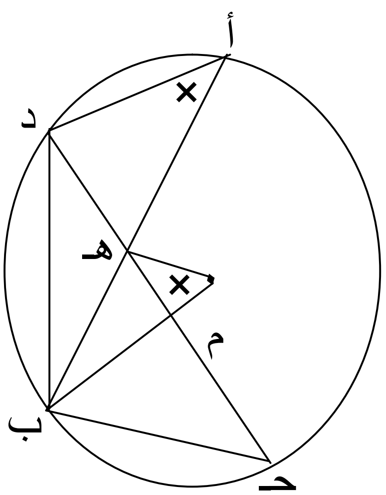
أ ب = أ د ، ق(أ بَ^ د) = ٣٠
، ق(حـ^) = ٦٠
أثبت أن : أ ب حـ د رباعي دائرى

(٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$
، س ∈ أ ب ، ص ∈ د حـ
فإذا علم أن الشكل أ س ص د رباعي دائرى
أثبت أن الشكل س ب حـ ص رباعي دائري

(٣) في ا لشكل ا لمقابل :



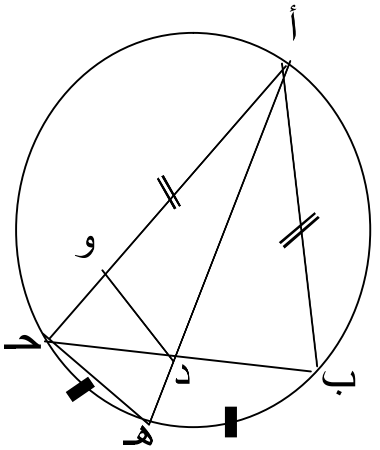
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ وتران في ا لدائرة م
، $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{حـ د}}$ = { هـ }
، ق(ب أ^ د) = ق(ب م^ هـ)
أثبت أن :
أولا : ا لشكل م حـ ب هـ رباعي دائري
ثانيا : ق(حـ هـ^ ب) = ٢ ق(حـ د^ ب)

(٤) أ ب حـ د شكل رباعي فيه أ ب // د حـ ، د ب ∩ أ حـ = { م } ، م د = م حـ
، ق(حـ أ^ ب) = ٣٠ أوجد :ق(حـ د^ ب) وأثبت أن : الشكل أ ب حـ د دائريا

(٥) دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب . رسم الوتر أ د في الدائرة ن فإذا كان
س منتصف أ د ، أ ب ∩ م ن = { ص }
برهن أن : الشكل أ س ن ص رباعي دائري .

(٦) أ ب حـ مثلث . رسمت دائرة قطرها ب حـ ، تقطع أ ب في نقطة د ، أ حـ في
نقطة هـ ، فإذا كان ب هـ ∩ حـ د = { و }
أثبت أن :
أولا : أ د و هـ رباعي دائري
ثانيا : ق(د أ^ و) = ق(ب حـ^ د)

(٨) في الشكل المقابل :

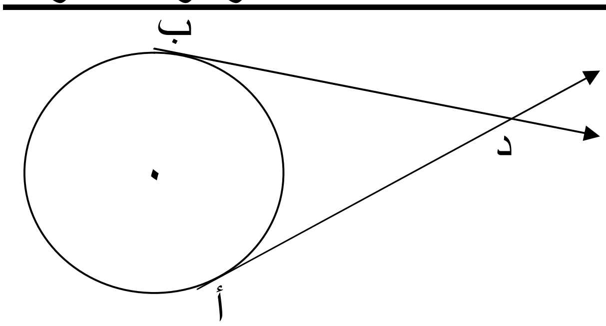


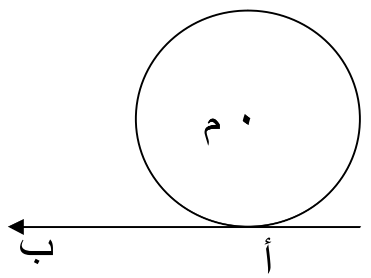
أ ب = أ و ، طول ب هـ = طول هـ حـ

برهن علي أن الشكل د هـ حـ و رباعي دائري

الوحدة الثانية : التماس و الزاوية المماسية

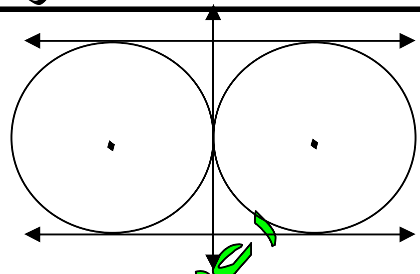
الحالات المختلفة للمماسات المرسومة لدائرة :

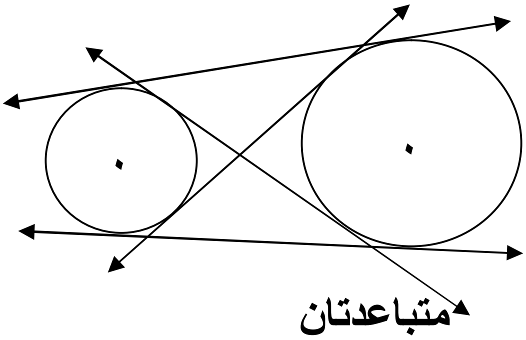




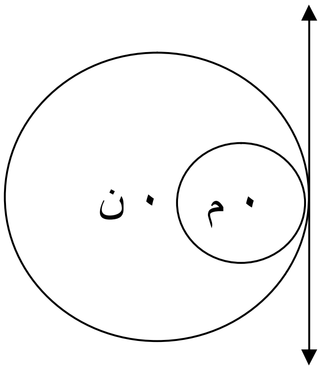
١- من أي نقطة علي الدائرة يمكن رسم مماس واحد لها عند هذه النقطة .
٢- من أي نقطة خارج الدائرة يمكن رسم مماسان لهذه الدائرة .
٣- لا يمكن رسم أي مماس للدائرة من نقطة داخل الدائرة .

ا لحالات ا لمختلفة للمماسات ا لمرسومة لدائرتين :





دئرتان متماستين من الخارج **متباعدتان**

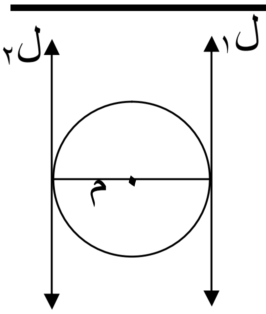


١ - الدائرتان المتباعدتان : يمكن رسم ٤ مماسات مشتركة لهما .

٢ - الدائرتان المتماستان من ا لخارج :
يمكن رسم ٣ مماسات مشتركة للدائرتين إحداها عند نقطة تماس ا لدائرتين (ا لمماس ا لداخلي)

٣-الدائرتان المتماستان من الداخل : يمكن رسم مماس مشترك وحيد لهما

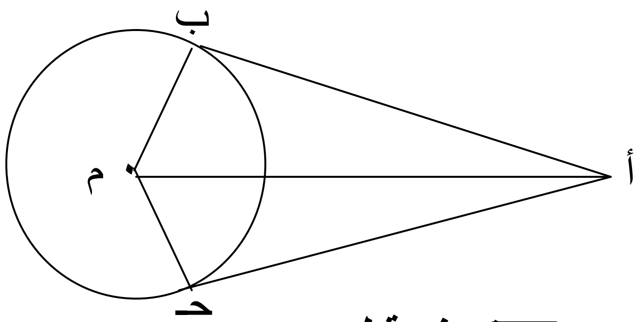
٤-ا لدائرتان ا لمتقاطعتان : يمكن رسم مماسين مشتركين لهما .



نتيجة : المماسان المرسومتان من نهايتي قطر في ا لدائرة متوازيان .

A ل١ ، ل٢ **عموديان على القطر** B ل١ // ل٢

نظرية :
القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول .



المعطيات : أ نقطة خارج الدائرة م
، أ ب ، أ حـ قطعتان متساويتان في الطول
المطلوب : إثبات أن أ ب = أ حـ
العمل : نرسم م أ ، م حـ ، م ب
البرهان : A أ ب قطعة مماسة للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

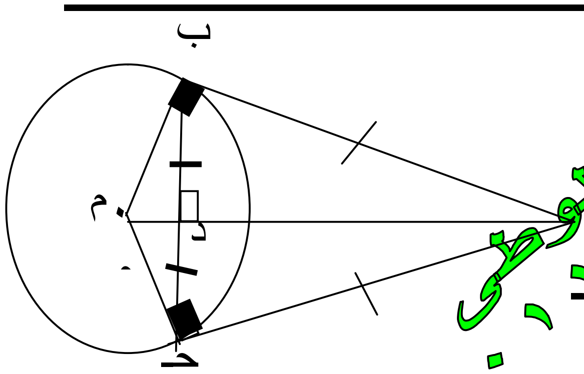
B ق(أ بَ^ م) = ٩٠

A أ حـ قطعة مماسة للدائرة عند حـ ، م حـ نصف قطر

Δ Δ م أ ب ، م أ حـ فيهما
ق(ب^) = ق(حـ^)
م ب = م حـ = نق
أ م ضلع مشترك

Δ م أ ب ≡ Δ م أ حـ و ينتج أن : أ ب = أ حـ

نتائج على ا لنظرية :



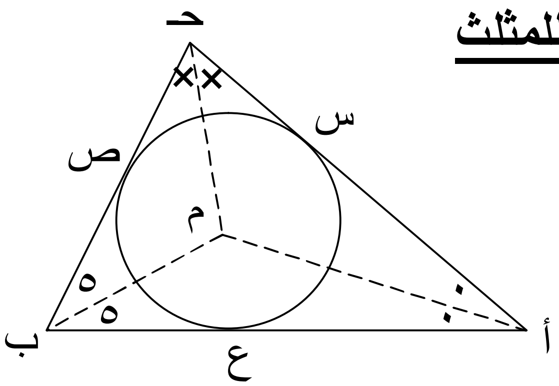
١- م أ ↔ يكون محور ا لوتر ب حـ

٢- أ م ← ينصف ب أ^ حـ ، م أ ← ينصف ب م^ حـ

نلاحظ أن : ب حـ يسمي وتر التماس ،

A ق(أ ب^ حـ) = ق(أ حـ^ ب) B الشكل أ ب م حـ رباعي دائري

ا لدائرة ا لداخلة للمثلث



ا لدائرة م مرسومة داخل ا لمثلث أ ب حـ

م أ ← ، م ب ← ، م حـ ← منصفات زوايا ا لمثلث

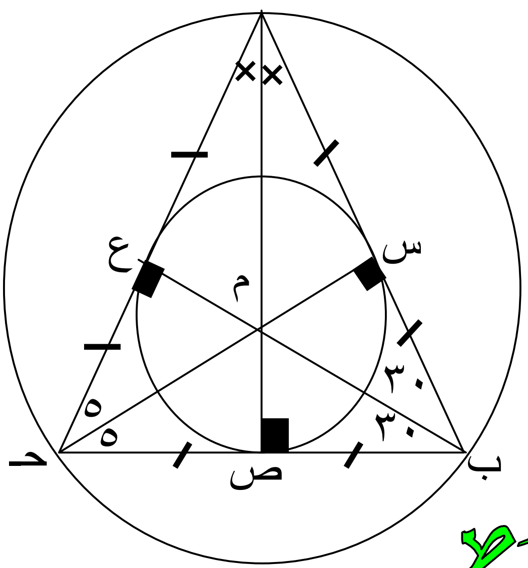
تعريف : الدائرة الداخلة للمثلث هي الدائرة التي تمس أضلاعه من ا لداخل

تمرين مشهور :
مركز ا لدائرة ا لداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه ا لداخلة .

تذكر أن : مركز ا لدائرة ا لخارجة للمثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

<u>حالة خاصة</u> : في المثلث المتساوي الأضلاع :

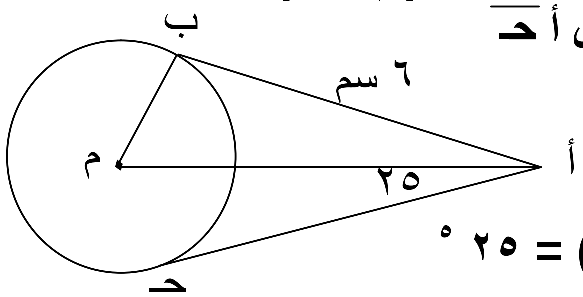
١ـ مركز الدائرة الداخلة هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة أيضا هو نقطة تقاطع ارتفاعاته أ و نقطة تقاطع متوسطاته .



٢ـ مركز ا لدائرة ا لداخلة ينطبق علي مركز ا لدائرة ا لخارجة .

(ا لدائرة ا لداخلة للمثلث ا لمتساوي الأضلاع و ا لدائرة ا لخارجة له متحدتي ا لمركز)

مثال : <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة ، ق(م $\hat{\text{أ}}$ حـ) = ٢٥ ° ، أ ب = ٦ سم ، أوجد ق(أ $\hat{\text{م}}$ ب) ، طول $\overline{\text{أ حـ}}$



البرهان : A $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة م

B أ ب = أ حـ = ٦ سم

A $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف ب $\hat{\text{أ}}$ حـ B ق(حـ $\hat{\text{أ}}$ م) = ق(ب $\hat{\text{أ}}$ م) = ٢٥ °

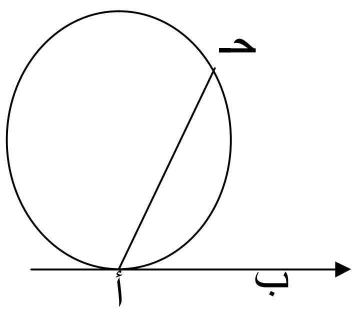
A $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس ، م ب = نق

B $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ١٨٠ ـ (٩٠ + ٢٥) = ٦٥ °

<u>تعريف</u> : ا لزاوية ا لمماسية :

هي ا لزاوية ا لمكونة من اتحاد شعاعين أحدهما مماس و الآخر يحتوي وتراً في ا لدائرة يمر بنقطة ا لتماس .

ا لزاوية ا لمماسية تمثل حالة خاصة من ا لزاوية ا لمحيطية .

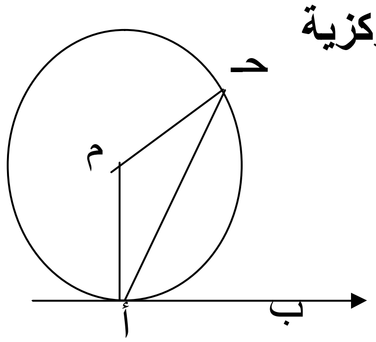


و قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس ا لمحصور بين ضلعيها .

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ حـ) ا لمماسية = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$)

نتيجة :

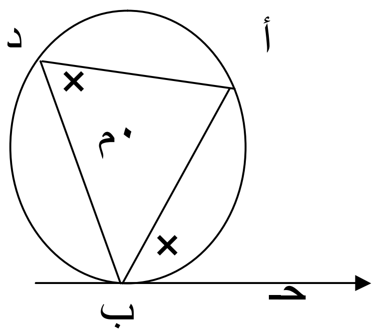
قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس .



ق(ب أ^ حـ) المماسية = ١/٢ ق(أ⌒حـ)

نظرية:

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزواية المحيطية المشتركة معها في القوس .



المعطيات : أ ب حـ زاوية مماسية ، أ د ب زاوية محيطية مشتركتان في أ⌒ب

المطلوب : ق(أ ب^ حـ) = ق(أ د^ ب)

البرهان :

A **أ ب^ حـ زاوية مماسية تحصر القوس أ⌒ب**

B **ق(أ ب^ حـ) = ١/٢ ق(أ⌒ب) ... (١)**

A **أ د^ ب زاوية محيطية تحصر القوس أ⌒ب**

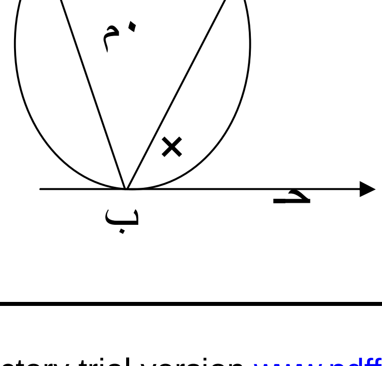
B **ق(أ د^ ب) = ١/٢ ق(أ⌒ب) ... (٢)**

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق(أ ب^ حـ) = ق(أ د^ ب)

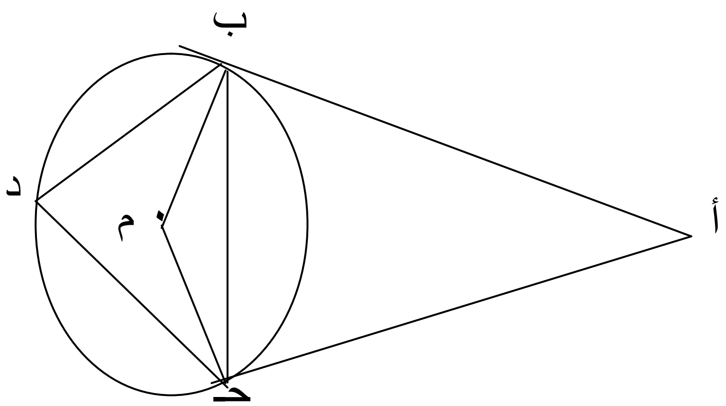
عكس النظرية :

إذا رسم شعاع من إحدى نقطتي النهاية لوتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة علي نفس الوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة علي نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسا للدائرة .



إذا كان ق(حـ أ^ ب) = ق(أ د^ ب)

فإن أ حـ⃖ مماس للدائرة م عند أ



مثال : <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة م

، ق(أ^) = ٥٠

أوجد : ق(د^) ، ق(ب م^ حـ)

ا لبرهان : A أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة م B أ ب = أ حـ

B ق(أ ب^ حـ) = ق(أ حـ^ ب) = (١٨٠ ـ ٥٠) ÷ ٢ = ٦٥

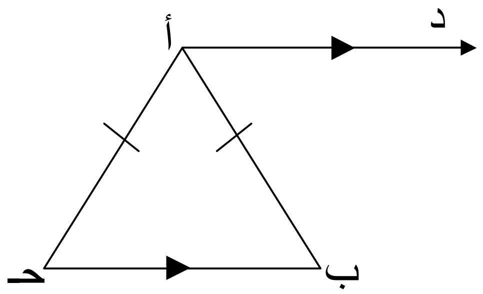
A أ ب^ حـ مماسية ، ب د^ حـ محيطية مشتركتان فى ب حـ

B ق(أ ب^ حـ) = ق(د^) = ٦٥

مثال : <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> : أ د // ب حـ ، أ ب = أ حـ

برهن أن : أ د مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

ا لبرهان :



A أ ب = أ حـ

B ق(ب^) = ق(حـ^) ... (١)

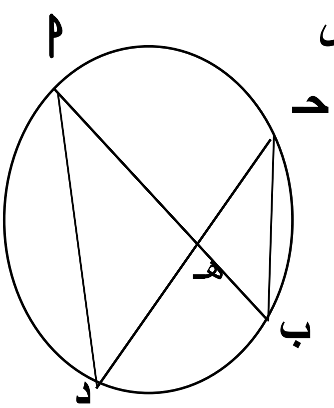
A أ د // ب حـ

B ق(د أ^ ب) = ق(ب^) با لتبادل ... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(د أ^ ب) = ق(حـ^) B أ د مماس للدائرة ا لمارة برؤوس Δ أ ب حـ

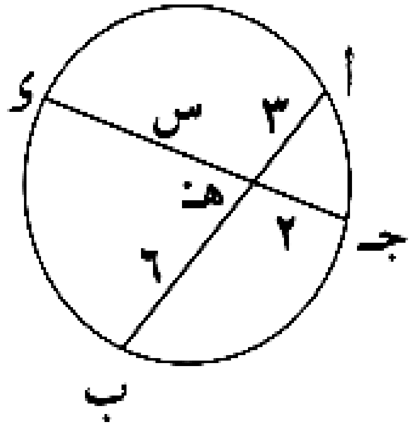
<u>تمرين مشهور (٣)</u> : إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب طولا جزئى الوتر الأول يساوى حاصل ضرب طولا جزئى الوتر الثانى



A م ب ∩ جـ د = { هـ }

B هـ م × هـ ب = هـ حـ × هـ د

مثال: في الشكل الموضح امامك اوجد طول هـ د



الحل

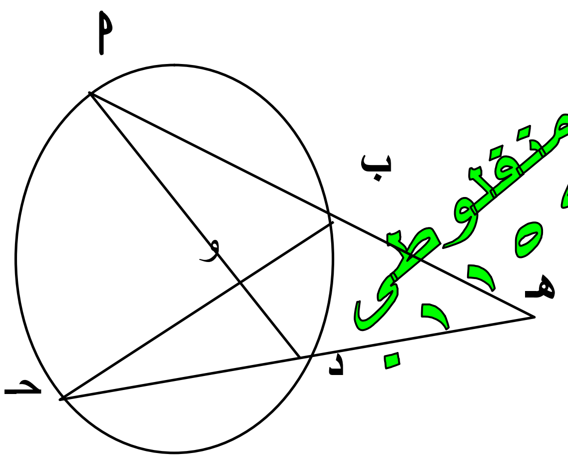
∵ م ب ∩ جـ د = {هـ}

∴ م هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ د

∴ ٣ × ٦ = ٢ × هـ د

∴ هـ د = ١٨ ÷ ٢ = ٩

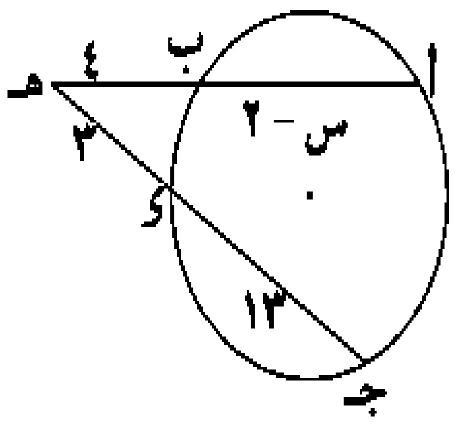
تمرين مشهور (٤) :



A $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ = { هـ }

B هـ م × هـ ب = هـ حـ × هـ د

مثال: في الشكل الموضح أمامك اوجد قيم س



الحل :

A $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ = { هـ }

B هـ م × هـ ب = هـ حـ × هـ د

B (س – ٢ + ٤) × ٤ = (١٣ + ٣) × ٣

B (س + ٢) × ٤ = ١٦ × ٣ B ٤ س + ٨ = ٤٨ B ٤ س = ٤٠

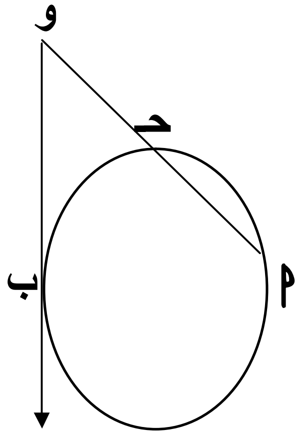
B س = ١٠

مع خالص أمنياتى لكم

بالنجاح الباهر

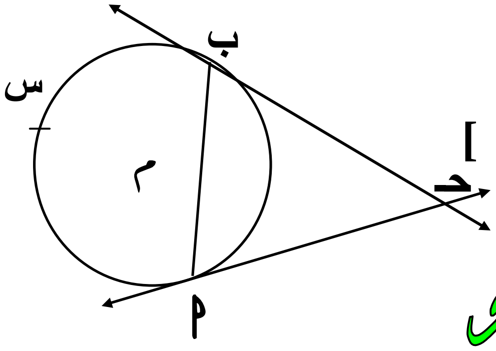
الاستاذ / خالد المنفلوطى ت / ٠١١٥٤٨٠٢٨١١

تمرين مشهور (٥):



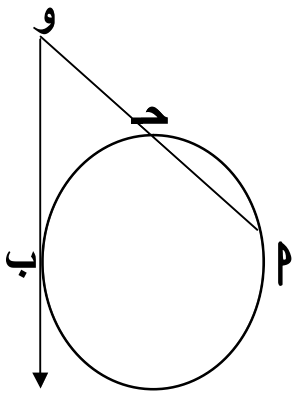
A $\overrightarrow{وب} \cap \overrightarrow{وأ}$ = { و }

B ق (∠ و) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\frown{أ ب}$) − ق ($\frown{ب حـ}$)]



، ق (∠ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\frown{أ س ب}$) − ق ($\frown{أ ب}$)]

تمرين مشهور (٦) :



A $\overrightarrow{وب} \cap \overrightarrow{وأ}$ = { و }

B (وب)^{٢} = وحـ × و أ

ملحوظة : ا لتمارين ا لمشهورة هي تمارين تأخذ شكل ا لقواعد أي يمكن أن تستخدم في حل ا لتمارين كا لنظريات و ا لنتائج و ا لحقائق .

تمارين متنوعة على المماسات

(١) أ كـــمــل :

(١) عدد ا لمماسات ا لمشتركة ا لتي يمكن رسمها لدائرتين متباعدتين هو ٠٠٠٠٠

(٢) عدد ا لمماسات ا لمشتركة لدائرتين متماستين من ا لخارج هو ٠٠٠٠٠

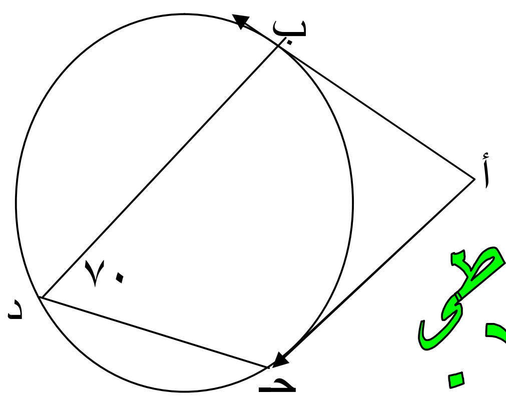
(٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل هو ٠٠٠٠٠

(٤) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين هو ٠٠٠٠٠

اختـــــــــــر الإجابة الصحيحة :

(١) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين :

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (د) ٣



(٢) في الشكل المقابل :

أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة

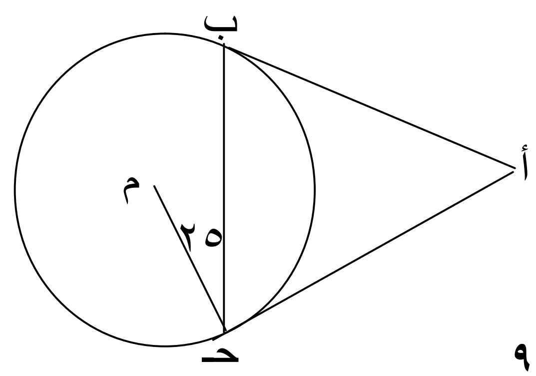
، ق(ب د̂ حـ) = ٧٠ °

فيكون ق(ب أ̂ حـ) مساويا :

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (حـ) ٣٥ (د) ٧٠

---

(٣) في الشكل المقابل :



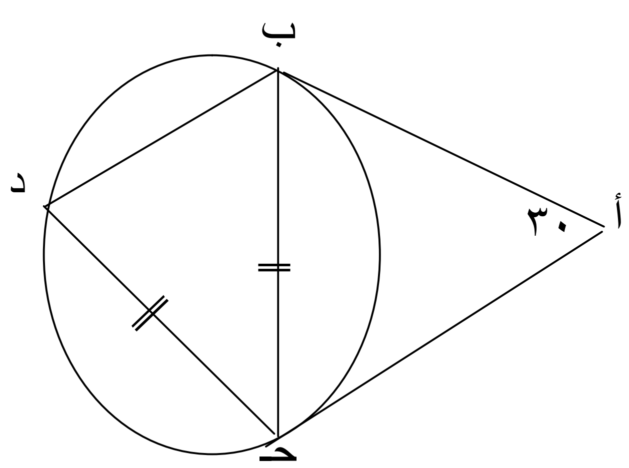
أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة

، ق(ب حـ̂ م) = ٢٥ °

فيكون ق(أ̂) مساويا :

(أ) ٢٥ (ب) ٦٥ (حـ) ٥٠ (د) ٩٠

(٤) في الشكل المقابل :



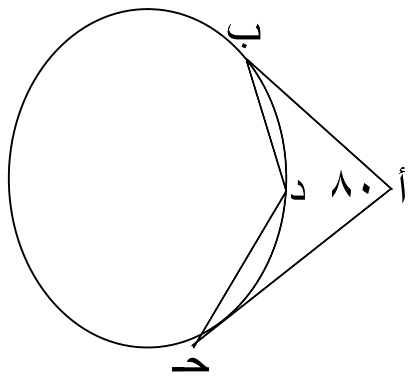
أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان

، ب حـ = حـ د ، ق(أ̂) = ٣٠

فيكون ق(ب حـ̂ د) مساويا :

(أ) ٧٠ (ب) ٧٥ (حـ) ٦٠ (د) ١٥

(٥) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



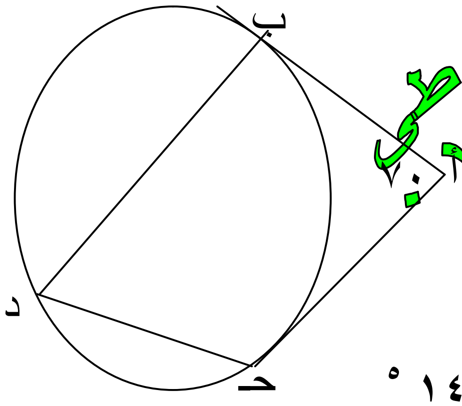
أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة

، ق(أ^) = ٨٠ °

فيكون ق(ب د^ حـ) مساويا :

(أ) ٨٠ (ب) ١٦٠ (حـ) ١٠٠ (د) ١٣٠

(٦) <u>في ا لشكل ا لمقابل:</u>



أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة

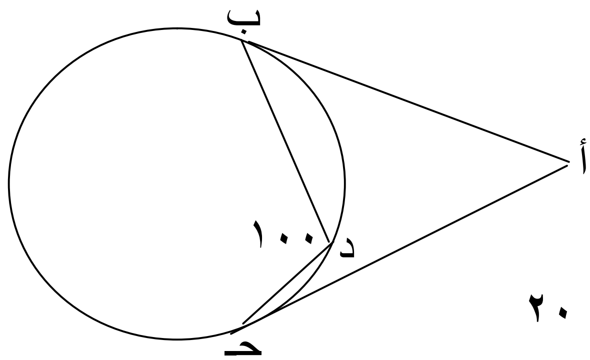
، ق(أ^) = ٧٠ °

فيكون ق(د^) مساويا ٠٠٠٠٠٠

(أ) ٧٠ ° (ب) ١١٠ ° (حـ) ٥٥ ° (د) ١٤٠ °

---

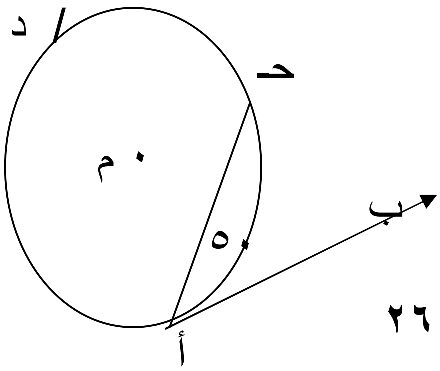
(٧) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة
، ق(ب د^ حـ) = ١٠٠

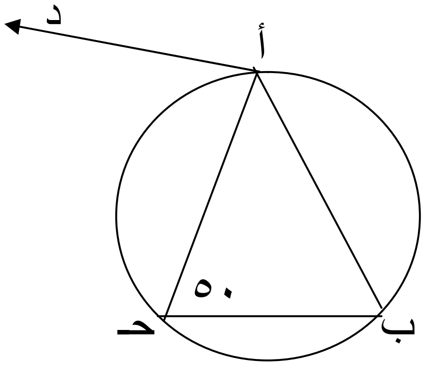
فيكون ق(أ^) مساويا :
(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (حـ) ٨٠ (د) ٢٠

(٨) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



أ ب مماس للدائرة م
، ق(ب أ^ حـ) = ٥٠
فيكون ق(أ د^ حـ) يساوي
(أ) ٥٠ (ب) ١٣٠ (حـ) ٣١٠ (د) ٢٦٠

(٩) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



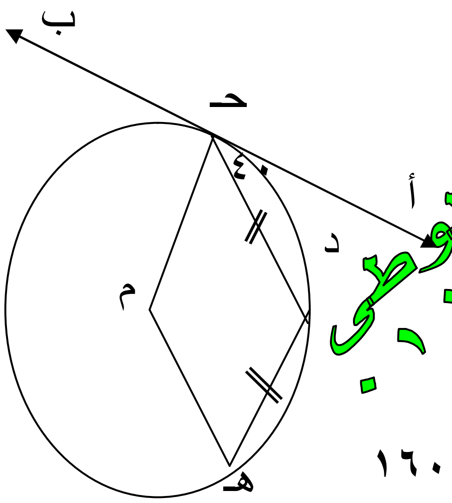
أ د مماس للدائرة عند أ

، ق(أ حـ^ ب) = ٥٠

فيكون ق(ب أ^ د) مساويا :

(أ) ١٤٠ (ب) ١٣٠ (حـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١٠) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



أ ب مماس للدائرة م عند حـ

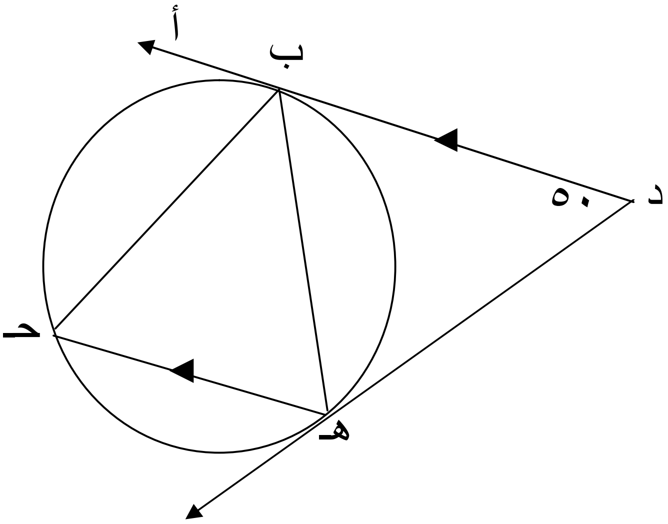
، حـ د = هـ د ، ق(أ حـ^ د) = ٤٠

فيكون ق(أ حـ^ د) مساويا :

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (حـ) ١٤٠ (د) ١٦٠

<u>* أســــــــئلة ا لمــــــــقال</u> :

(١) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



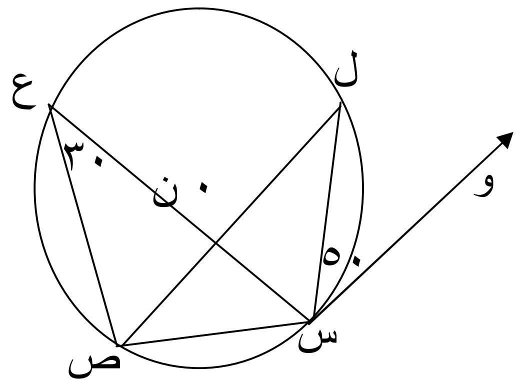
د ب ، د هـ مماسان للدائرة

عند ب ، هـ ، ق(د^) = ٥٠

، د ب // هـ حـ ، أ ∋ د ب

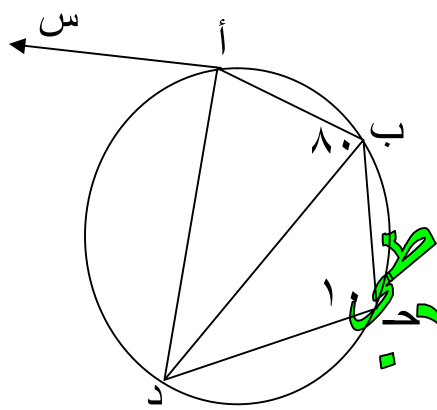
أ وجد با لبرهان : ق(أ ب^ حـ)

(٢) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



$\overleftarrow{\text{س و}}$ مماس للدائرة ن
، ق(و $\hat{\text{س}}$ ل) = ٥٠
، ق(س $\hat{\text{ع}}$ ص) = ٣٠
أ وجد قياسات زوايا ا لمثلث س ص ل
مع ذكر ا لسبب ؟

(٣) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

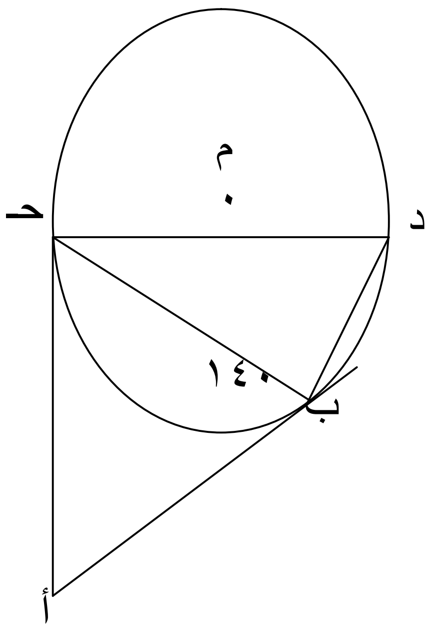


أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة
، $\overleftarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ
، ق($\hat{\text{حـ}}$) = ١٠٠ ، ق(أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ٨٠

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ينصف ب $\hat{\text{أ}}$ س

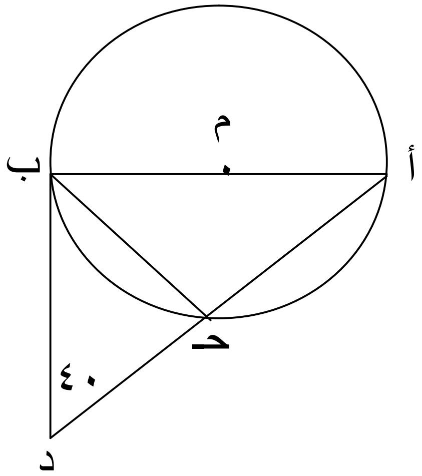
(٤) س ص ع مثلث مرسوم خارج دائرة تمس أضلاعه $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$
في أ ، ب ، حـ علي ا لترتيب فإذا كان س أ = ٣ سم ، ص ب = ٢ سم
، ع حـ = ٤ سم أ وجد محيط ا لمثلث س ص ع .

(٥) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :



$\overline{\text{د حـ}}$ قطر في ا لدائرة م ،
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة
عند ب ، حـ علي ا لترتيب ،
، ق(د $\hat{\text{ب}}$ أ) = ١٤٠°
أ وجد مع ا لبرهان : ق(ب $\hat{\text{أ}}$ حـ)

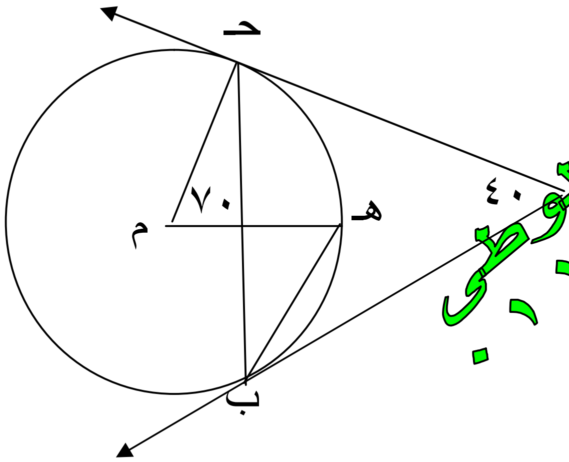
(٦) في الشكل المقابل :



أ ب قطر في الدائرة م ،
أ حـ وتر فيها ، رسم ب د مماسا للدائرة
يقطع أ حـ في د ، ق(حـ د̂ ب) = ٤٠ °

أثبت أن : أ ب مماس للدائرة المارة برؤوس
المثلث حـ ب د

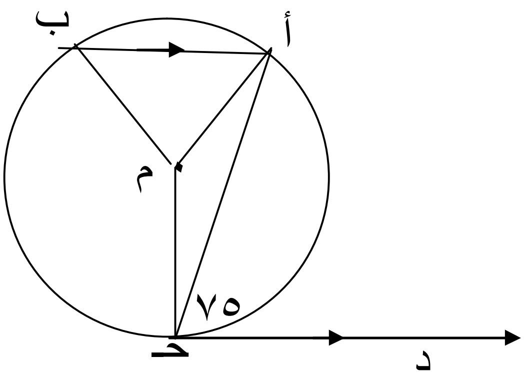
(٧) في الشكل المقابل :



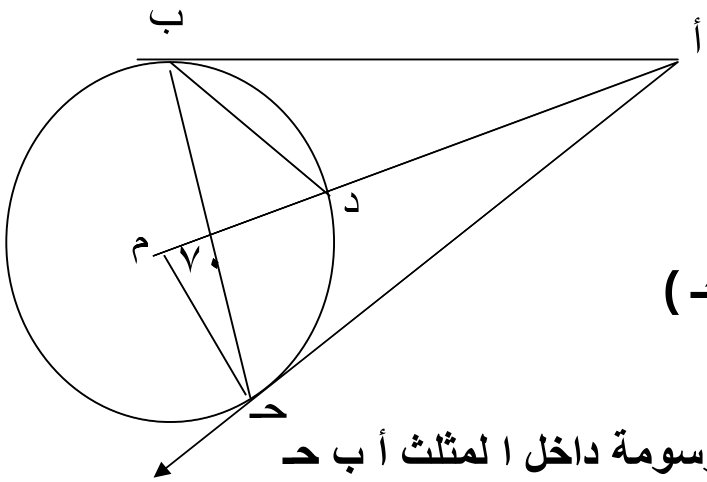
أ ب ، أ حـ يمسان الدائرة م عند
ب ، حـ علي الترتيب ،
، ق(ب أ̂ حـ) = ٤٠
، ق(هـ م̂ حـ) = ٧٠

أثبت أن : ب هـ ينصف أ ب̂ حـ

(٨) في الشكل المقابل :
دائرة مركزها م ، حـ د مماس
فإذا كان أ ب // حـ د
، ق(أ حـ̂ د) = ٧٥
أثبت أن : ق(أ م̂ ب) = ٦٠ °

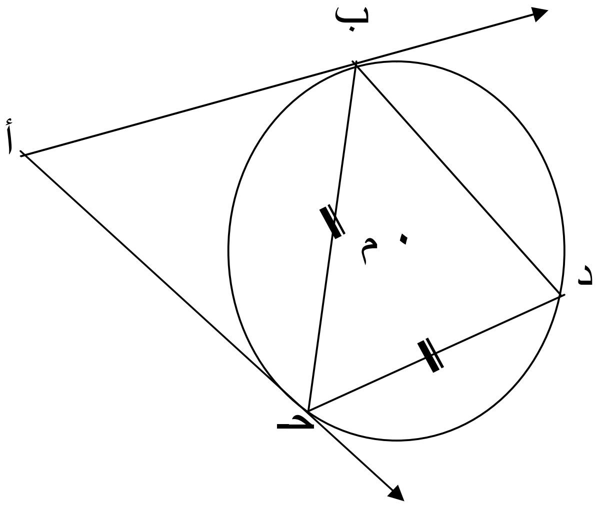


(٩) في الشكل المقابل :



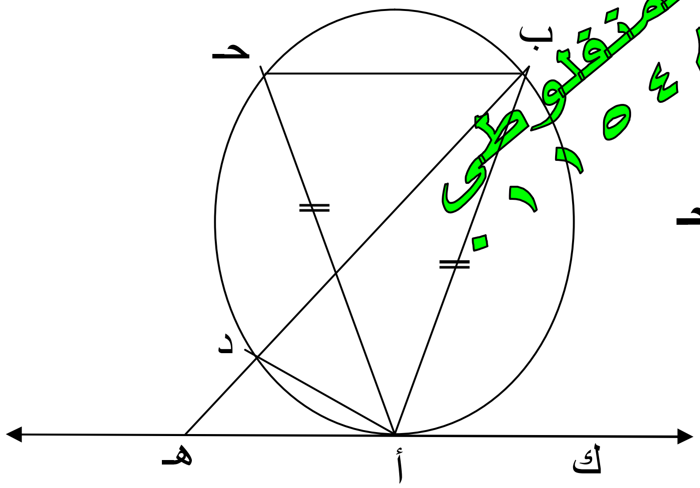
أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة م
، ق(أ م̂ حـ) = ٧٠
أولا : أوجد : ق(م أ̂ حـ) ، ق(أ ب̂ حـ)
، ق(أ ب̂ د)

ثانيا : أثبت أن د مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث أ ب حـ



(١٠) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

أ نقطة خارج ا لدائرة م
رسم أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة عند
ب ، حـ ، رسم حـ د وترا في ا لدائرة
بحيث حـ د = حـ ب
أثبت أن :
أولا : ب حـ ينطف أ ب د
ثانيا : حـ د قطعة مماسة للدائرة ا لمارة
برؤوس ا لمثلث أ ب حـ



(١١) <u>في ا لشكل ا لمقابل</u> :

ك أ مماس للدائرة عند أ ، أ ب = أ حـ
، أ ك ∩ ب د = { هـ }

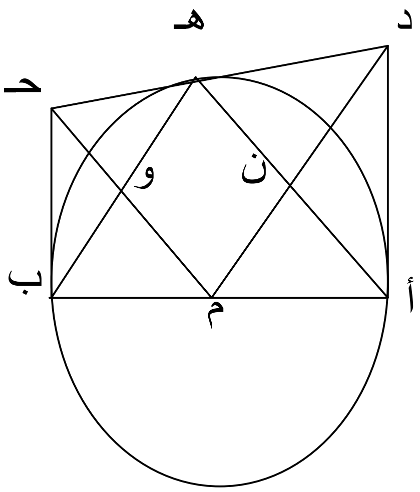
أثبت أن :
أولا : ق(ك أ ب) = ق(أ ب حـ)

ثانيا : أ حـ قطعة مماسة للدائرة ا لخارجة للمثلث أ د هـ

(١٢) س ص ع ل شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، س ع ∩ ل ص = { هـ }
رسم س و مماس للدائرة عند س بحيث س و // ل ص
أثبت أن :
أولا : ق(س ص ل) = ق(س ل ص)
ثانيا : ص س مماس للدائرة ا لمارة با لنقط ص ، هـ ، ع

(١٣) أ ب حـ د معين فيه ق(أ) = ٦٠ أثبت أن : أ ب مماس للدائرة ا لمارة
برؤوس ا لمثلث ب حـ د

(١٤) أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، ب حـ = ب أ
أثبت أن : محيط ا لمثلث أ ب حـ يساوي ٣ ٢ √نق
(حيث نق طول نصف قطر ا لدائرة م)

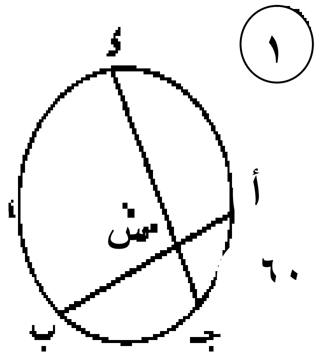


(١٥) في ا لشكل ا لمقابل :

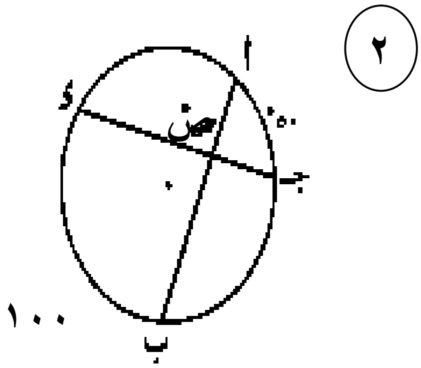
أ ب قطر في ا لدائرة م
، أ د مماس للدائرة عند أ
، ب حـ مماس للدائرة عند ب
، د حـ مماس للدائرة عند هـ
، م ب = ٤ سم ، د حـ = ١٠ سم
أولا : أثبت أن : ا لشكل هـ ن م و مستطيل
ثانيا : أوجد محيط ا لشكل أ ب حـ د

---

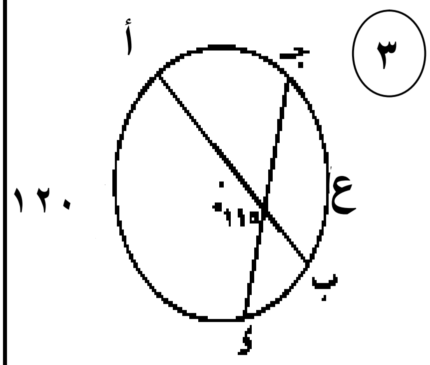
(١٦) في كلٍّ من الأشكالِ الآتية. أوجد قيمةَ الرمز المستخدم في القياس:



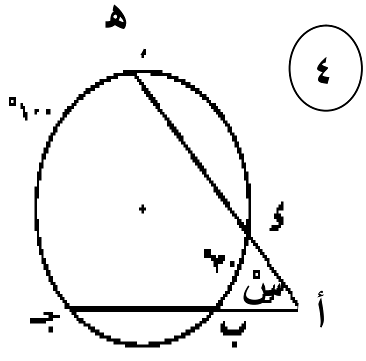
س = ...



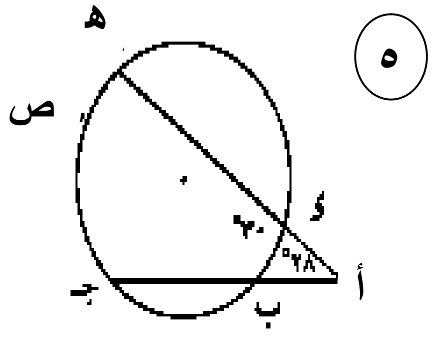
ص = ...



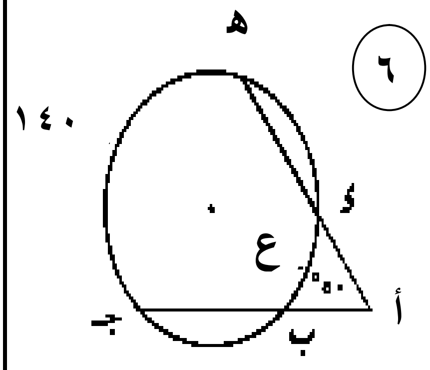
ع = ...



س = ...



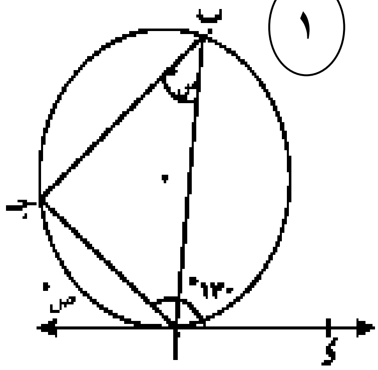
ص = ...



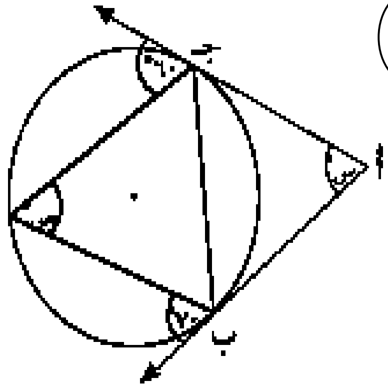
ع = ...

مستعيناً بمعطيات الشكل أوجد قيمةَ الرمزَ المستخدم فى القياس .

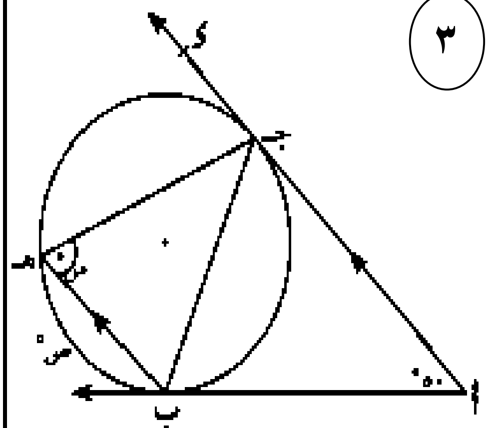
١



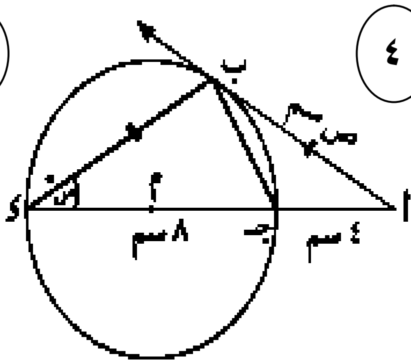
٢



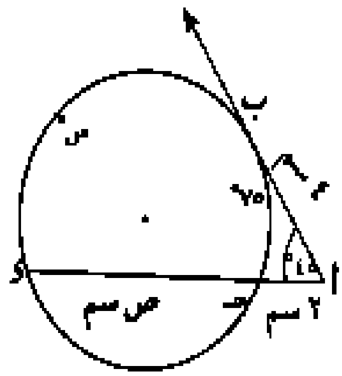
٣



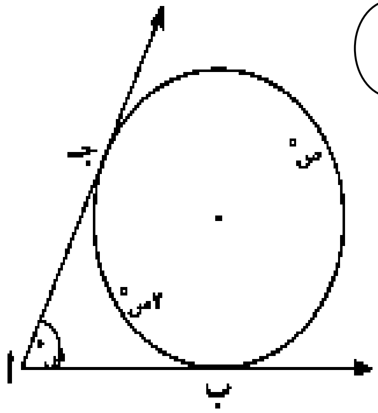
٤



٥

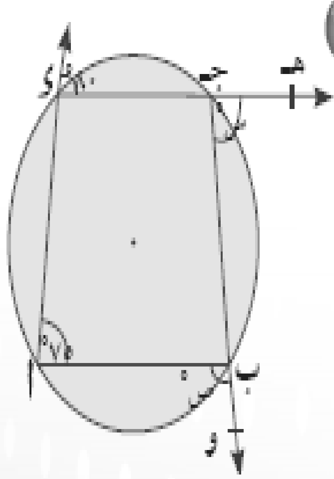


٦

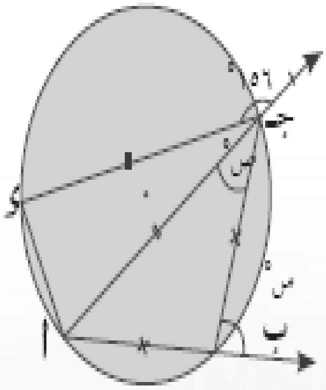


في كلٍّ من الأشكالِ الآتية ، أوجد قيمةَ الرمزِ المستخدم في القياسِ .

١



٢



٣