

# المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط القائم

✿ إذا كان  $r$  طول نصف قطر قاعدة المخروط ،  $l$  طول راسمه ،  $h$  ارتفاعه فإن :

✿ المساحة الجانبية للمخروط  $= \pi r l$

✿ المساحة الكلية للمخروط  $= \pi r (l + r)$

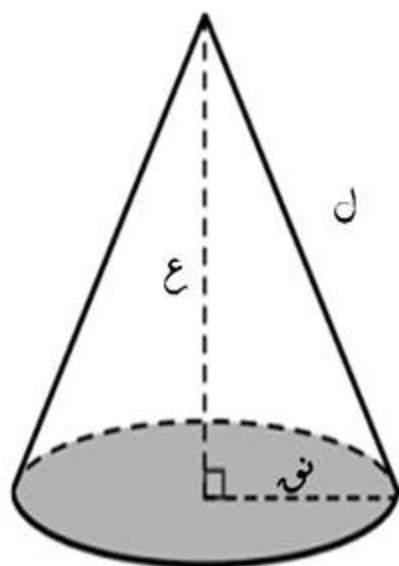
✿ حجم المخروط القائم  $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ملاحظات

✿ محيط الدائرة  $= 2\pi r$

✿ مساحة الدائرة  $= \pi r^2$

✿ الكثافة  $= \frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$



لتحميل جميع المذكرات  
والمراجعات  
في جميع المواد زوروا  
جروب  
"منتدى البحراوي التعليمي"  
ع الفيس بوك

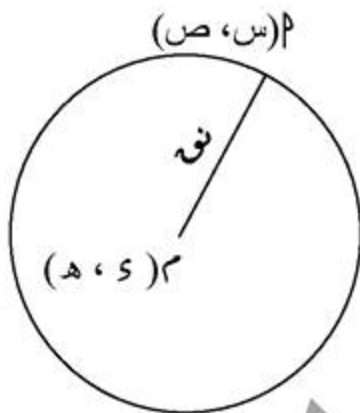




**الدائرة** هي مجموعة نقط المستوى التي تكون على بعد ثابت من نقطة ثابتة في نفس المستوى وتسمى مركز الدائرة .

**اولاً: معادلة الدائرة بدلالة إحداثي مركزها  $م$  وطول نصف قطرها  $ن$ .**

❖ إذا كانت  $م = (س، ص)$  نقطة على الدائرة التي مركزها النقطة  $م = (س، ص)$  وطول



نصف قطرها  $ن$  فإن معادلتها هي:

$$(س - س)^2 + (ص - ه)^2 = ن^2$$

❖ **ملاحظة (١)**

إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل فإن معادلتها هي :

$$س^2 + ص^2 = ن^2$$

❖ **ملاحظة (٢)** إذا كانت  $م = (س١، ص١)$ ،  $ب = (س٢، ص٢)$  نقطتين في المستوى فإن

$$١ - \text{البعد بين النقطتين } م، ب \text{ هو : } \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$

٢ - إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتين  $م، ب$  هو :

$$م = \left( \frac{س١ + س٢}{٢}, \frac{ص١ + ص٢}{٢} \right)$$

سَلَامَةُ الدُّوَاةِ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ  
مَدْرَسَةُ مَدِينَةِ مَكَّةَ الْمُحَرَّمَةِ

# ملخص قوانين تطبيقات الرياضيات

للمعلمة  
الرائدة الأستاذة / نورة بن عبد الله  
مَدْرَسَةُ مَدِينَةِ مَكَّةَ الْمُحَرَّمَةِ

تأليف  
مَدْرَسَةُ مَدِينَةِ مَكَّةَ الْمُحَرَّمَةِ

مَدْرَسَةُ مَدِينَةِ مَكَّةَ الْمُحَرَّمَةِ



م/ ١١٤٥٨١٥٢١٦

م/ ١٢٢٤٣٥٦٩٢٠

الاسم : .....

مدرسة : .....

العام الدراسي : ..... / .....



## ❖ ملاحظة (٦)

❖ إذا كانت النقطة  $P \in L$  الذى يقع فى مستوى الدائرة  $M$  التى طول نصف قطرها  $r$

❖ فإذا كان  $PM < r$  فإن المستقيم  $L$  يقع خارج الدائرة  $M$

❖ فإذا كان  $PM = r$  فإن المستقيم  $L$  مماس للدائرة  $M$

❖ فإذا كان  $PM > r$  فإن المستقيم  $L$  قاطع للدائرة  $M$

## ❖ ملاحظة (٧)

❖ إذا كان عدد أضلاع مضلع منتظم  $= n$  ضلعا ، وطول نصف قطر

الدائرة المارة برؤوسه  $= r$  فإن : مساحته  $= \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$  جا

# الديناميكا

$$\frac{f}{n} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \text{مقدار السرعة المتوسطة } \bar{v}$$

مقدار السرعة المتوسطة  $\bar{v}$   
Magnitude of the average velocity

متجه السرعة المتوسطة  $\vec{v}$   
Vector of the average velocity

$$\frac{\vec{f}}{n} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{t_1 - t_2} = \frac{\text{الإزاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \vec{v}$$



## ثانياً: الصورة العامة لمعادلة الدائرة

❖ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها  $M(-L, -N)$  هي :

$x^2 + y^2 + 2Lx + 2Ny + J = 0$  حيث يمكن استخراج قيم  $L, N, J$  من الصورة العامة لمعادلة الدائرة كالاتى :-

$$L = -\frac{1}{2} \text{ معامل } x, \quad N = -\frac{1}{2} \text{ معامل } y$$

$$J = L^2 + N^2 - R^2 = \frac{L^2 + N^2 - R^2}{1}, \quad R = \sqrt{L^2 + N^2 - J}$$

## ❖ ملاحظة (٣): على الصورة العامة لمعادلة الدائرة

١- الصورة العامة لمعادلة الدائرة تتصف بالآتى :-

❖ معادلة من الدرجة الثانية فى  $x, y$ .

❖ لا تحتوى على الحد  $xy$  أى أن معامل  $xy = 0$ .

❖ معامل  $x^2 =$  معامل  $y^2 = 1$ .

٢- لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى  $x, y$  ص يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة

بالإضافة إلى  $L^2 + N^2 - J > 0$ .

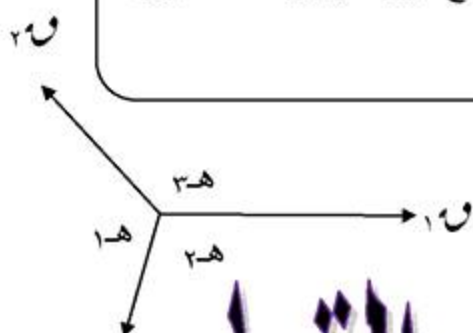
٣- عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون :

معامل  $x^2 =$  معامل  $y^2 = 1$  لذلك يجب القسمة على هذا المعامل إذا كان غير ١



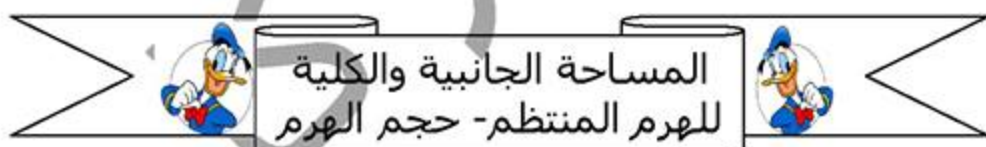
## قاعدة لامي lami's theorem

إذا إتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة  
فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة  
بين القوتين الاخرتين



$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

# الهندسة والقياس



✿ المساحة الجانبية للهرم المنتظم =  $\frac{1}{3}$  محيط القاعدة  $\times$  الارتفاع الجانبي

✿ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

✿ حجم الهرم =  $\frac{1}{3}$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

ملاحظات هامة :-

١- إذا لم يكن الهرم منتظم فإن مساحته الجانبية = مجموع مساحات الأوجه الجانبية

## ❁ حالات خاصة لمعادلة الدائرة

١- معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هي :-

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ٢لج = ٠ \quad \text{أى أن المعادلة خالية من الحد المطلق ( ج = ٠ )}$$

٢- معادلة الدائرة التي مركزها على محور السينات :-

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ج = ٠ \quad \text{أى أن المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص ( ل = ٠ )}$$

٣- معادلة الدائرة التي مركزها على محور الصادات :-

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ج = ٠ \quad \text{أى أن المعادلة خالية من الحد المشتمل على س ( ل = ٠ )}$$

٤- معادلة الدائرة التي تمس محور السينات :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ج = ٠ \quad \text{ويكون فيه } |ل| = ج , \quad ل = ج^٢$$

٥- معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ج = ٠ \quad \text{ويكون فيه } |ل| = ج , \quad ل = ج^٢$$

٦- معادلة الدائرة التي تمس المحورين :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢لص + ج = ٠ \quad \text{ويكون فيه } |ل| = |ج|$$

$$\text{حيث } ج = ل = ل^٢ = ج^٢$$



## القوى Forces



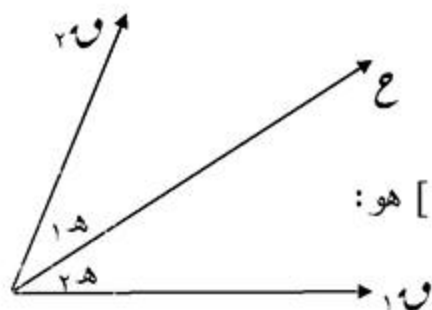
### إيجاد محصلة قوتين تحليلياً

إذا كانت  $F_1$  و  $F_2$  قوتان متلاقيتان في نقطة و، وقياس الزاوية بين إتجاهي القوتين هو  $\theta$  وقياس الزاوية بين إتجاهي المحصلة  $R$  والقوة الأولى  $F_1$  هي  $\alpha$

فإن محصلة القوتين :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$

❖ وإتجاه المحصلة [ زاوية ميل المحصلة  $R$  على  $F_1$  ] هو :



$$\cos \alpha = \frac{F_1 + F_2 \cos \theta}{R}$$

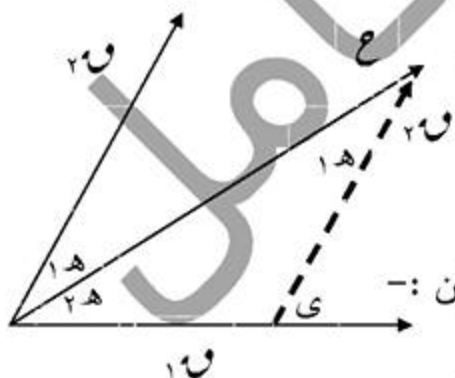
❖ ولايجاد زاوية ميل المحصلة  $R$  على  $F_2$  نعكس أماكن القوتين في العلاقة السابقة

$$\cos \alpha' = \frac{F_2 + F_1 \cos \theta}{R}$$

ويمكن استخدام قاعدة الجيب مباشرة كالاتى :  
نرسم مستقيم يوازي خط عمل  $F_2$

إذا كانت  $\alpha$  هي زاوية ميل  $F_2$  على المحصلة  $R$

إذا كانت  $\alpha'$  هي زاوية ميل  $F_1$  على المحصلة  $R$  فإن :-



$$\sin \alpha + \sin \alpha' = \sin \theta$$

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \alpha'} = \frac{R}{\sin \theta}$$



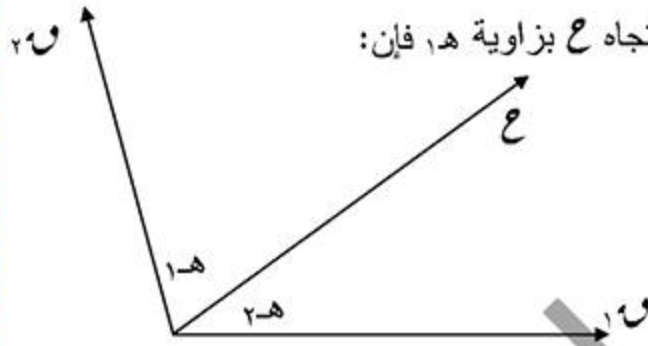
# تحليل القوى Forces resolution

✿ إذا كان لدينا قوة  $E$  يراد تحليلها الى مركبتين  $W_1$ ،  $W_2$  حيث:

✿ إتجاه المركبة الأولى  $W_1$  يميل على إتجاه  $E$  بزاوية  $\alpha$

✿ إتجاه المركبة الثانية  $W_2$  يميل على إتجاه  $E$  بزاوية  $\beta$  فإن:

وبتطبيق قاعدة الجيب يكون :-



$$\frac{E}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{W_1}{\sin \beta} = \frac{W_2}{\sin \alpha}$$

$$\frac{E \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = W_1$$

$$\frac{E \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = W_2$$



## (٤) إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل

ب

القوتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في اتجاهين متضادين:-  
 $ق > ح = ١٨٠^\circ$



$ح = |\vec{u} - \vec{v}|$  وتسمى  $ح$  في هذه الحالة أصغر محصلة أو القيمة الصغرى للمحصلة ويكون اتجاه المحصلة في اتجاه القوة الأكبر مقداراً.

٢

القوتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في نفس الاتجاه:-  
 $ق > ح = \text{صفر}^\circ$



$ح = \vec{u} + \vec{v}$  وتسمى  $ح$  في هذه الحالة أكبر محصلة أو القيمة العظمى للمحصلة ويكون اتجاه المحصلة هو نفس اتجاه خط عمل القوتين.

$$\vec{u} - \vec{v} \geq ح \geq \vec{u} + \vec{v}$$

أي أن  $ح \in [\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}]$

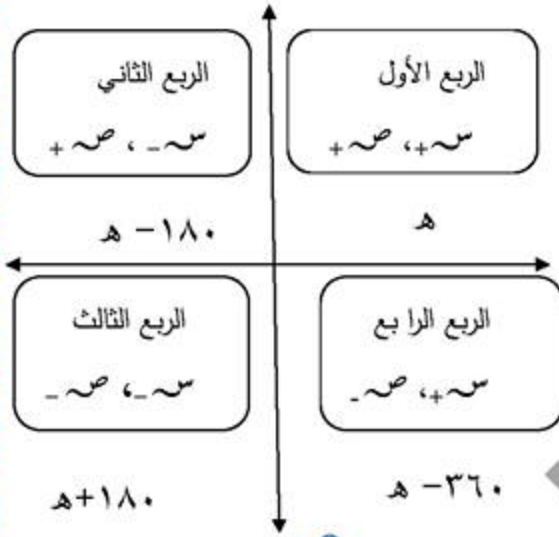
∴ مما سبق نستنتج أن :-

لتحميل جميع المذكرات  
 والمراجعات  
 في جميع المواد زوروا  
 جروب  
 " منتدى البحراوى التعليمى "  
 ع الفيس بوك



$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \|\vec{v}\| \text{ معيار السرعة المتوسطة } \vec{v}$$

$$\frac{v_x}{v} = \cos \theta \text{ اتجاه السرعة المتوسطة ظاهري}$$



السرعة النسبية



السرعة النسبية لجسيم  $M$  بالنسبة لجسيم آخر  $B$  هي

مفهوم السرعة النسبية

السرعة التي يبدو للجسيم  $M$  أن يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم  $B$  في حالة سكون.

إذا كان  $M$  جسم سرعته  $\vec{v}_M$  ،  $B$  جسم سرعته  $\vec{v}_B$  فإن:-

متجه السرعة النسبية

$$\vec{v}_{M/B} = \vec{v}_M - \vec{v}_B$$

متجه سرعة  $M$  بالنسبة إلى  $B$  = متجه سرعة  $M$  - متجه سرعة  $B$

$$\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_B - \vec{v}_M$$

متجه سرعة  $B$  بالنسبة إلى  $M$  = متجه سرعة  $B$  - متجه سرعة  $M$



## ❖ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليا :-

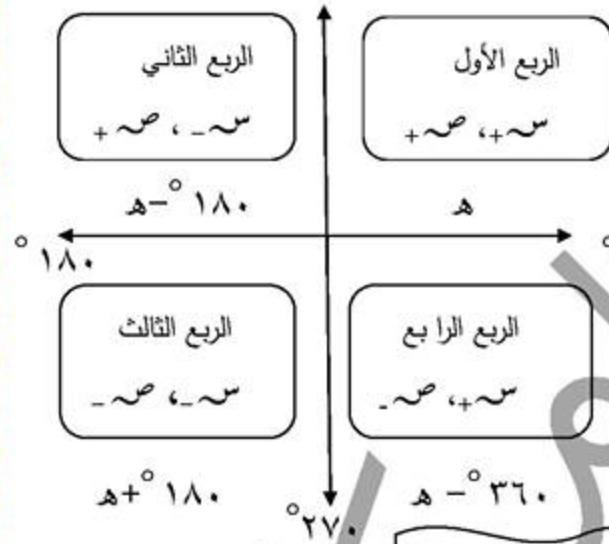
إذا كان لدينا مجموعة من القوى المستوية  $1\vec{F}, 2\vec{F}, 3\vec{F}, \dots, n\vec{F}$  والمتلاقية فى نقطة  $O$ ، وكانت  $1\vec{F}, 2\vec{F}, 3\vec{F}, \dots, n\vec{F}$  هى قياسات الزوايا القطبية للقوى مع الإتجاه الموجب لمحور السينات و  $\vec{S}$  فإنه يمكن إيجاد مقدار وإتجاه محصلة هذه القوى كما يلى :

١) مجموع مركبات القوى فى إتجاه  $\vec{S}$  :  $\vec{S} = \text{مجموع مركبات القوى فى إتجاه } \vec{S}$

٢) مجموع مركبات القوى فى إتجاه  $\vec{V}$  :  $\vec{V} = \text{مجموع مركبات القوى فى إتجاه } \vec{V}$

ويكون معيار المحصلة :-

$$R = \sqrt{S^2 + V^2}$$



واتجاه المحصلة ظا  $\vec{H} = \frac{\vec{S}}{\vec{V}}$



ملاحظات خطيرة

١) إيجاد  $\vec{H} > 90^\circ$  نحدد الربع الذى تقع فيه حسب إشارة  $\vec{S}$ ،  $\vec{V}$  ثم نستعين بالشكل السابق.

٢) فى مسائل الإتجاهات ترسم الزاوية بجوار الإتجاه المعرف ولذا لم يذكر الزاوية نعتبرها  $0^\circ$

٣) عند حساب الزاوية القطبية لكل قوة نبدأ من الإتجاه الموجب لمحور السينات و  $\vec{S}$

مع العلم أن قياس الزاوية القطبية للقوة المنطبقة على  $\vec{S}$  يساوى "صفر" دائما.



إذا كان لدينا كتلتين  $m_1$  ،  $m_2$  وتفصل بينهما مسافة  $r$  فإن مقدار قوة الجاذبية بينهما

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{حيث : -}$$

$m_1$  ،  $m_2$  مقياسان بالكيلو جرام ،  $r$  مقاسة بالمتر ،  $G$  هو ثابت الجذب العام .

عجلة الجاذبية على سطح أى كوكب:-

ملاحظة (١)

حيث  $m$  كتلة الكوكب بالكجم ،  $r$  طول نصف قطره بالمتر



شدة مجال الجاذبية الأرضية لجسم موضوع

ملاحظة (٢)

على إرتفاع قدره  $h$  من سطح الأرض :

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} \quad \text{حيث : -}$$

$G$  ثابت الجذب العام ،  $M$  كتلة الأرض بالكجم ،  $r$  طول نصف قطر الأرض بالمتر.

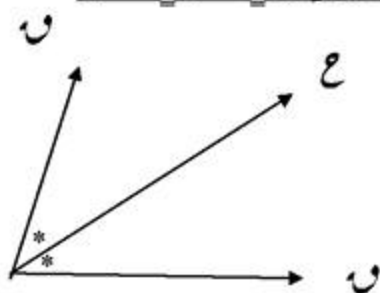
المقارنة بين عجلتي الجاذبية على سطحي كوكبين

النسبة بين عجلتي الجاذبية  $g_1$  ،  $g_2$  على كوكبين كتلتاهما  $m_1$  ،  $m_2$  وطولاهما نصفى

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{قطريهما } m_1 ، m_2 \text{ على الترتيب هي :-}$$

## حالات خاصة

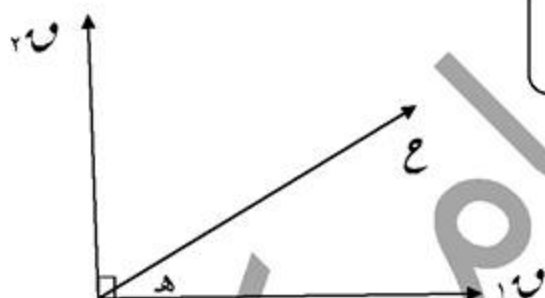
(١) إذا كانت القوتان  $U_1$  ،  $U_2$  متساويتين في المقدار  $U_1 = U_2 = U$



فإن المحصلة  $R = U_2 = U_1$  جتا  $\frac{U}{2}$   
وإتجاه المحصلة  $H = \frac{U}{2}$

أي أنه في حالة تساوى القوتين فإن :-  
إتجاه المحصلة  $R$  ينصف الزاوية بين القوتين .

(٢) إذا كانت القوتان متعامدتين [ قياس الزاوية بينهما  $= 90^\circ$  ]

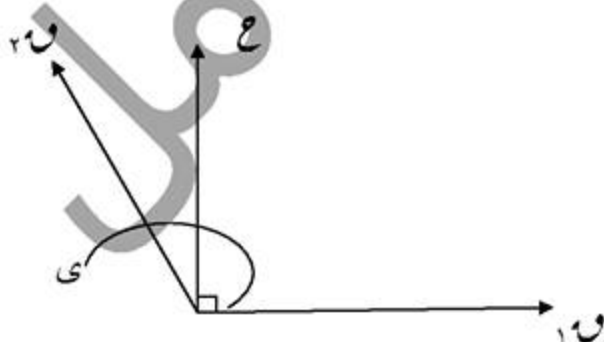


$$R = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \quad \text{فإن}$$

وإتجاه المحصلة

$$\frac{U_2}{U_1} = \text{ظاه}$$

(٣) إذا كانت المحصلة عمودية على إحدى القوتين  
عندما تكون المحصلة عمودية على إحدى القوتين فإنها دائماً تكون متعامدة مع القوة



الصغرى ويكون

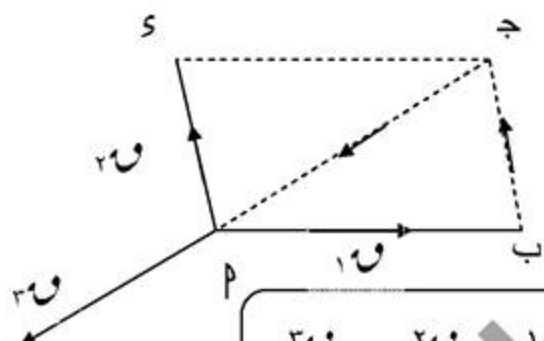
$$R = \sqrt{U_1^2 - U_2^2}$$

$$\frac{U_1 - U_2}{U_2} = \text{جتا } \theta$$



## قاعدة مثلث القوى Triangle of forces

إذا أترن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى الثلاث وفي إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.



$$\frac{30}{P \rightarrow B} = \frac{20}{B \rightarrow J} = \frac{10}{J \rightarrow P}$$

أى أنه حسب القاعدة السابقة يكون

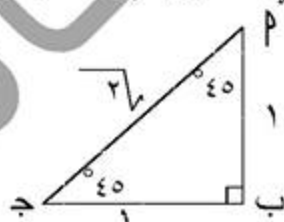
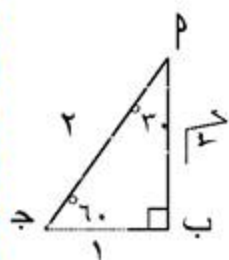
### ملاحظات خطيرة

❖ إذا كان مثلث القوى لثلاث قوى متزنة

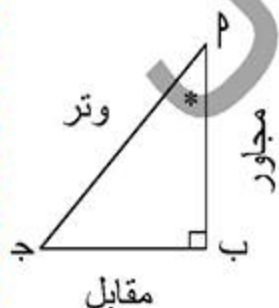
مثلث ثلاثينى ستينى كانت النسبة بين أطوال أضلاعه  $1:2:\sqrt{3}$

❖ وإذا كان مثلث القوى قائم الزاوية ومتساوي الساقين فإن النسبة بين أطوال أضلاعه

كنسبة  $1:1:\sqrt{2}$



في  $\Delta P \rightarrow B \rightarrow J$  القائم الزاوية فى ب



$$\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \tan P$$

$$\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \cos P$$

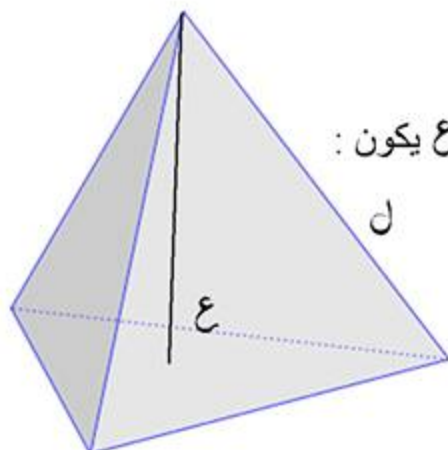
$$\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \sin P$$

تذكر





## ٢- حالة خاصة



فى الهرم الثلاثى المنتظم الذى طول حرفه ل وإرتفاعه ع يكون :

$$ل^2 - ع^2 = ٣$$

$$ب - مساحته الكلية = ٣ \sqrt{٣} ل^2$$

$$ج - حجمه = \frac{\sqrt{٣}}{١٢} ل^3$$

٣- إذا علمت أطوال أضلاع مثلث فإنه يمكن حساب مساحته مباشرة كالآتى :

$$م \Delta ا ب ج = \sqrt{ع (ع - ا) (ع - ب) (ع - ج)} \text{ حيث } ع \text{ نصف محيط المثلث}$$

٤- مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س :

$$م = \frac{١}{٤} ن س^2 \text{ ظنا } \frac{\pi}{ن}$$

علاقة أويلر لآى مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون :

$$\text{عدد الأوجه} + \text{عدد الرؤوس} = \text{عدد الأحرف} + ٢$$



## زمن ومسافة أقصى ارتفاع

$$\frac{ع}{س} = \nu$$

مقدار سرعة القذف



(١) زمن أقصى ارتفاع =

مقدار عجلة الجاذبية الأرضية  
مربع سرعة القذف

$$\frac{ع}{س} = \nu$$



(٢) مسافة أقصى ارتفاع =  
ضعف مقدار عجلة الجاذبية الأرضية

ملاحظات هامة

\* إذا قذف جسم رأسياً لأعلى فان :-

(١) زمن الصعود = زمن الهبوط

(٢) مقدار السرعة التي يعود الجسم إلى نقطة القذف = مقدار سرعة القذف

(مع ملاحظة إختلافهما في الإشارة)

(٣) مقدار سرعة الجسم عند أي نقطة وهو صاعد = يساوى مقدار السرعة

عند نفس النقطة وهو هابط .

(٤) إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التي قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

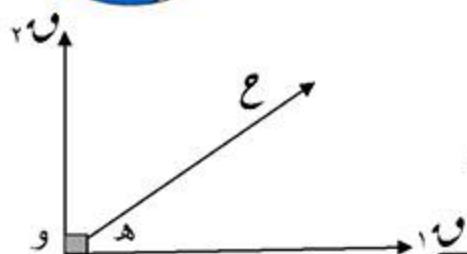


لتحميل جميع المذكرات  
والمراجعات  
في جميع المواد زوروا  
جروب  
"منتدى البحراوي التعليمي"  
ع الفيس بوك





## تحليل قوة معلومة في اتجاهين متعامدين



✽ إذا كان لدينا قوة  $F$  تؤثر في نقطة  $O$

ويراد تحليلها إلى مركبتين  $F_1$  و  $F_2$  حيث

$F_1$  و  $F_2$  واتجاه  $F_1$  يميل على اتجاه  $F$  بزاوية

قياسها  $\theta$  فإن :-

$$F_2 = F \sin \theta$$

$$F_1 = F \cos \theta$$

ملاحظة: المركبة القريبة من الزاوية تأخذ "جتا" والمركبة البعيدة تأخذ "جا"

## محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة

*The resultant of coplanar forces meeting at a point*



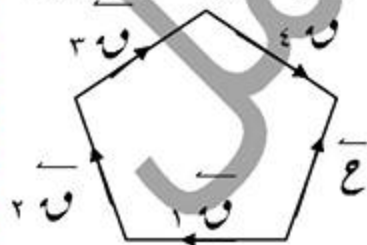
✽ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة هندسيًا:

إذا أثرت مجموعة القوى  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  في نقطة مادية وأمكن تمثيلها

بأطوال أضلاع مضلع مأخوذة في ترتيب دوري واحد فإن محصلة هذه القوى تساوي طول

الضلع الذي يقفل هذا المضلع في الاتجاه الدوري المضاد.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$







## الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة Uniformly accelerated rectilinear



\* معادلات الحركة منتظمة التغير Equations of the change uniforme motion

$$v = u + at \quad (1)$$

$$v^2 = u^2 + 2as \quad (2)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$



حيث

ج العجلة

ف الإزاحة



ع. السرعة الابتدائية

ع السرعة النهائية

ن الزمن



## السقوط الحر Free Fall



يمكن تلخيص قوانين الحركة الرأسية تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية كما يلي :-

إذا كان الجسم صاعد (لأعلى)

$$v = u - at$$

$$v^2 = u^2 - 2as$$

$$s = ut - \frac{1}{2}at^2$$



إذا كان الجسم هابط (لأسفل)

$$v = u + at$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

