حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد:

المعادلة : $ﺃ$ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ ، $ﺃ$ ، ب ، حـ $\in$ ح ، $ﺃ \neq ٠$

هى معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هو س لها جذران

* ويسمى $ﺃ$ معامل س^{٢} ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق

* جذرا المعادلة " مجموعة الحل للمعادلة " هو كل عدد حقيقى يحققها

طرق حل معادلة الدرجة الثانية جبريا :

١) بالتحليل ٢) باستخدام القانون العام س = $\dfrac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ﺃ حـ}}{٢ ﺃ}$

٣) بيانيا (الرسم البيانى : نوجد قيمتى س فى نقطتى تقاطع المنحنى مع محور السينات)

> **ملاحظة هامة :**
>
> إذا كانت س = م أحد جذرى المعادلة $ﺃ$ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
>
> فإن: د (م) = صفر أى قيمة م تحقق الدالة

الاعداد المركبة:

* **الاعداد التخيلية** : ت = $\sqrt{-١} \notin$ ح حيث ت^{٢} = − ١ و يسمى ت الوحدة التخيلية .

مثلا : $\sqrt{-٩} = \sqrt{٩ \times -١} = ٣$ ت بشكل عام : $\sqrt{-ﺃ} = \sqrt{ﺃ}$ ت حيث $ﺃ$ عدد حقيقى

* قوى ت الصحيحة: ت = $\sqrt{-١}$ ، ت^{٢} = - ١ ، ت^{٣} = - ت ، ت^{٤} = ١

$\dfrac{١}{ت}$ = − ت ، $\dfrac{١}{ت^{٢}}$ = −١ ، $\dfrac{١}{ت^{٣}}$ = ت ، $\dfrac{١}{ت^{٤}}$ = ١

مثلا : ت^{٨} = ت$^{٤ \times ٢}$ = (ت^{٤})^{٢} = ١ **[حل آخر ت^{٨} = ت$^{٤ \times ٢}$ = ١]**

ت^{٢٨} = ت$^{٤ \times ٧}$ = ١ ، ت^{١٧} = ت$^{١٦ + ١}$ = ت

ت^{١٤} = ت$^{٤ \times ٣ + ٢}$ = ت$^{٤ \times ٣}$ × ت^{٢} = ١ × -١ = -١

ت$^{-١٣}$ = ت$^{-١٦ + ٣}$ = ت$^{-١٦}$ × ت^{٣} = ١ × -ت = -ت

بصورة عامة : يكون ت$^{٤ن + ر}$ = ت^{ر} حيث ن عدد صحيح ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

تساوى عددين مركبين:

يقال لعددين مركبين س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ أنهما متساويان إذا تحقق أن :
س$_{١}$ = س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ [الحقيقى = الحقيقى ، التخيلى = التخيلى]

فمثلا إذا كان س + ت ص = ٥ + ٣ ت فإن س = ٥ ، ص = ٣

** جمع عددين مركبين :

إذا كان ع$_{١}$ = س$_{١}$ + ت ص$_{١}$ ، ع$_{٢}$ = س$_{٢}$ + ت ص$_{٢}$ فان
ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (س$_{١}$ + س$_{٢}$) + ت (ص$_{١}$ + ص$_{٢}$)

أى أنه عند جمع عددين مركبين نجمع الحقيقى مع الحقيقى والتخيلى مع التخيلى

مثلا : أ = ٣ + ٥ ت ، ب = ٢ − ت فان أ + ب = (٣ + ٥ ت) + (٢ − ت) = ٥ + ٤ ت

إذا كان ع = ٢ − ٣ ت فان المعكوس الجمعى هو −ع = −٢ + ٣ت

ضرب عددين مركبين :−

(٢ ت + ٣) (٢ ت − ٣) = (٢ ت)^{٢} − (٣)^{٢} = ٤ ت^{٢} − ٩ = −٤ − ٩ = − ١٣

(٣ + ٢ ت) (٢ − ٥ ت) = ٣ (٢ − ٥ ت) + ٢ ت (٢ − ٥ ت)
= ٦ − ١٥ ت + ٤ ت − ١٠ ت^{٢} = ٦ + ١٠ − ١١ ت
= ١٦ − ١١ ت
(٢ − ت)^{٢} = ٤ + ت^{٢} − ٤ ت = ٤ − ١ − ٤ ت = ٣ − ٤ ت

- **العدد المرافق $\overline{\text{ع}}$:**

العددان س + ت ص ، س – ت ص يسميان عددان مترافقان (نغير اشارة الجزء التخيلى)

مثلا : العدد ٣ + ٢ ت مرافقه هو العدد ٣ – ٢ ت حيث (٣ + ٢ ت)(٣ – ٢ ت) = ٩ + ٤ = ١٣

*** قسمة عددين مركبين :**

مثلا : إذا كان $\text{ع}_{١} = ٢ + ٣\,\text{ت}$ ، $\text{ع}_{٢} = ١ - ٢\,\text{ت}$ فإن $\text{ع}_{١} \div \text{ع}_{٢} =$

بضرب البسط و المقام فى (١ + ٢ ت)

$$\text{ع}_{١} \div \text{ع}_{٢} = \frac{(٢ + ٣\,\text{ت})}{(١ - ٢\,\text{ت})} \times \frac{(١ + ٢\,\text{ت})}{(١ + ٢\,\text{ت})} = \frac{٢ + ٤\,\text{ت} + ٣\,\text{ت} + ٦\,\text{ت}^{٢}}{١ - ٤\,\text{ت}^{٢}}$$

$$= \frac{٢ - ٦ + ٧\,\text{ت}}{١ + ٤} = \frac{-٤ + ٧\,\text{ت}}{٥}$$

مثال : إذا كانت $\text{س} = \frac{٧ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{١٣ - \text{ت}}{٤ + \text{ت}}$

أثبت أن س ، ص عددان مركبان مترافقان ثم أثبت أن $\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٢٦$

الحل :

$$\text{س} = \frac{٧ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}} \times \frac{٢ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{١٤ + ٧\,\text{ت} - ٢\,\text{ت} - \text{ت}^{٢}}{٤ - \text{ت}^{٢}}$$

$$= \frac{١٥ + ٥\,\text{ت}}{٥} = ٣ + \text{ت}$$

$$\text{ص} = \frac{١٣ - \text{ت}}{٤ + \text{ت}} \times \frac{٤ - \text{ت}}{٤ - \text{ت}} = \frac{٥٢ - ١٣\,\text{ت} - ٤\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{١٦ - \text{ت}^{٢}}$$

$$= \frac{٥١ - ١٧\,\text{ت}}{١٧} = ٣ - \text{ت}$$

∴ س ، ص مترافقان (المطلوب أولا)

$$\text{س}^{٢} + \text{س ص} + \text{ص}^{٢} = (٣ + \text{ت})^{٢} + (٣ + \text{ت})(٣ - \text{ت}) + (٣ - \text{ت})^{٢}$$

$$= ٩ + ٦\,\text{ت} + \text{ت}^{٢} + ٩ - \text{ت}^{٢} + ٩ - ٦\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}$$

$$= ٩ + ٩ + ٩ - ١ = ٢٦$$

(المطلوب ثانيا)

حل المعادلة س^{٢} + ٤ = ٠ فى ك

الحل : ∵ س^{٢} = -٤ ∴ س^{٢} = ٤ ت^{٢} ∴ س = ± ٢ ت ∴ م ٠ ح = { ٢ ت ، -٢ ت }

أوجد مجموعة الحل للمعادلة فى ك : س^{٢} + ٢ س + ٤ = ٠

الحل : ﻫ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٤ ∴ المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = ٤ – ٤×١×٤ = - ١٢ > ٠

نستخدم القانون العام : س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ﻫ جـ}}{٢ ﻫ} = \frac{- ٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢ \times ١}$

$= \frac{- ٢ \pm ٢ \sqrt{٣} ت}{٢} = -١ \pm \sqrt{٣}$ ت ∴ م . ح = { -١ ± $\sqrt{٣}$ ت }

أوجد قيمة (ت^{٥} + ت^{٦} + ت^{٧} + ت^{٨})

الحل :

المقدار = ت$^{٤ + ١}$ + ت$^{٤ + ٢}$ + ت$^{٤ + ٣}$ + ت$^{٤ × ٢}$ = ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ١

= ت – ١ – ت + ١ = صفر

<u>بحث نوع جذرى المعادلة التربيعية</u> :

المميز هو ب^{٢} – ٤ ا جـ

(١) إذا كان المميز > ٠ كان الجذران حقيقيان مختلفان .

(٢) إذا كان المميز = ٠ كان الجذران حقيقيان متساويان . (جذر حقيقى واحد مكرر)

(٣) إذا كان المميز < ٠ كان الجذران تخيليان .(مركبان)

مثلا : حدد نوع جذرى المعادلة : س^{٢} – ٣ س – ٥ = ٠

ﻫ = ١ ، ب = - ٣ ، جـ = - ٥

المميز = ب^{٢} – ٤ ﻫ جـ = (- ٣)^{٢} – ٤ × ١ × (- ٥) = ٩ + ٢٠ = ٢٩ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

❋ <u>تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها :</u>

إذا كان ل ، م هما جذرى معادلة تربيعية فإن المعادلة تكون :
س^{٢} – (ل + م) س + ل م = ٠
س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

*** قاعدة هامة:**

إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة $ا$ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ فإن :

ل + م = $\frac{-\text{ب}}{\text{ا}}$ أى أن مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

ل م = $\frac{\text{حـ}}{\text{ا}}$ أى أن حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

*** تذكر أن :**

١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م ٢) (ل – م)^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٤ ل م

٣) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م)^{٣} – ٣ ل م (ل + م)

٤) إذا كانت النسبة بين ل ، م هى ٣ : ٤ فإن : ل = ٣ ك ، م = ٤ ك

٥) ∵ الجذران معكوسان جميعان ∴ معامل س = ٠ (مجموع الجذرين = ٠)

٦) ∵ الجذران معكوسان ضربيان ∴ معامل س^{٢} = الحد المطلق (حاصل ضرب جذريها = ١)

مثال: كون المعادلة التى جذراها ٢ت ، - ٢ت

الحل : مجموع الجذرين = ٢ ت + (- ٢ ت)= صفر ، حاصل ضرب الجذرين = ٢ ت × - ٢ ت= ٤

س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى س^{٢} + ٤ = ٠

مثال : كون المعادلة التربيعية التى جذراها ١ + ٢ ت ، ١ – ٢ ت

الحل :

مجموع الجذرين = ل + م = ١ + ٢ ت + ١ – ٢ ت = ٢

حاصل ضربهما = ل م = (١ + ٢ ت)(١ – ٢ ت) = ١ + ٤ = ٥

∴ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م هى س^{٢} – ٢ س + ٥ = ٠

مثال : إذا كان (٢ +٣ ت) هو أحد جذور المعادلة س^{٢} + ب س + ١٣ = ٠

فأوجد : (أ) الجذر الآخر (ب) قيمة ب

الحل : (أ) ﻡ = ١ ، ب = ب ، جـ = ١٣

∵ (٢ +٣ ت) هو أحد جذرى المعادلة ∴ الجذر الآخر = (٢ – ٣ت) لان الجذرين مترافقان

و حاصل ضربهما = ١٣

(ب) مجموع الجذرين = (٢ +٣ ت) + (٢ – ٣ ت) = - ب

⟸ ٤ = - ب ∴ب = - ٤

أوجد قيمة ﻡ التي تجعل أحد جذري المعادلة : س^{٢} – ٢ ﻡ س + ١٢ = ٠ ثلاثة أمثال الأخر.

الحل :

نفرض أن الجذران هما ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل + ٣ ل = $\frac{٢ ﻡ}{١}$ ⟸ ٤ ل = ٢ ﻡ

⟸ $\boxed{\text{٢ ل = ﻡ}}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$ ∴ ل × ٣ ل = $\frac{١٢}{١}$ ⟸ ٣ ل^{٢} = ١٢

⟸ $\boxed{\text{ل = ± ٢}}$ (بالتعويض عن ل) ⟸ ﻡ = ± ٢ × ٢ ∴ ﻡ = ± ٤

أوجدالشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة ﻡ س^{٢}+ ب س + حـ = ٠ ضعف الجذر الأخر

الحل : نفرض الجذران هما ل ، ٢ ل

مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{ﻡ}}$ ∴ ل + ٢ ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{ﻡ}}$ ⟸ ٣ ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{ﻡ}}$ ∴ل = $\frac{-\text{ب}}{\text{٣ﻡ}}$ (١)

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ ل × ٢ ل = $\frac{جـ}{أ}$ ⟸ ٢ ل^{٢} = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ل^{٢} = $\frac{جـ}{٢أ}$ (٢)

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد : $(\frac{-ب}{٣أ})^{٢}$ = $\frac{جـ}{٢أ}$ ⟸ $\frac{ب^{٢}}{٩أ^{٢}}$ = $\frac{جـ}{٢أ}$ ∴ ٩ أجـ = ٢ ب^{٢}

الشرط اللازم : ٩ أجـ − ٢ ب^{٢} = ٠

---

* **إيجاد معادلة تربيعية جذراها على علاقة بجذرى معادلة تربيعية أخرى معلومة:**

مثال : أوجد المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة س^{٢} − ٧ س − ٩ = ٠

الحل : بفرض جذرى المعادلة المعطاة ل ، م فإن جذرى المعادلة المطلوبة ل + ١ ، م + ١

المعادلة المعطاة : ل + م = ٧ ، ل م = − ٩

المعادلة المطلوبة : هـ + و = ل + ١ + م + ١ = (ل + م) + ٢ = ٧ + ٢ = ٩

هـ × و = (ل + ١) (م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= − ٩ + ٧ + ١ = − ١

المعادلة هى س^{٢} − ٩ س − ١ = ٠

مثال : إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} − ٥ س + ٧ = ٠ أوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ل^{٢} ، م^{٢}

الحل : المعادلة المعطاة: ل + م = ٥ ، ل م = ٧

المعادلة المطلوبة :

هـ + و = ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ ل م =(٥)^{٢} -٢ × ٧ = ٢٥ − ١٤ = ١١

هـ × و = ل^{٢} م^{٢} = (ل م)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩

∴ المعادلة المطلوبة س^{٢} − ١١ س +٤٩ = ٠

مثال : إذا كان ل ، م جذرى المعادلة س^{٢} − ٧ س + ٣ = ٠ فأوجد معادلة الدرجة الثانية التى جذراها $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ [المعادلة هى ٣ س^{٢} − ١٤ س + ٤ = ٠]

مثال : إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} ـ ٥ س + ٧ = ٠ كون المعادلة التى جذراها ٢ ل ، ٢ م

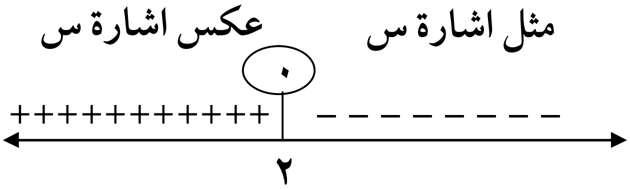
الحل : المعادلة المعطاة : ل + م = ٥ ، ل م = ٧
المعادلة المطلوبة
هـ + و = ٢ل +٢م = ٢ (ل+ م) = ٢ × ٥ = ١٠
هـ × و = ٢ل × ٢ م = ٤ ل م = ٤ × ٧ = ٢٨
∴ المعادلة المطلوبة س^{٢} ـ ١٠ س + ٢٨ = ٠

*** <u>بحث اشارة الدالة :</u>**

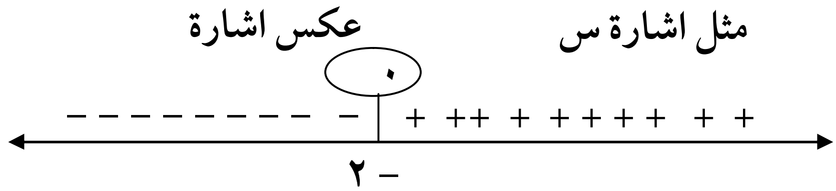
[١] <u>الدالة الثابتة</u> : د(س) = ρ حيث ρ ∈ ح* هى نفس اشارة ρ
مثلا : د(س) = ٧ تكون موجبة ، د(س) = ـ ٨ تكون سالبة

[٢] <u>الدالة الخطية</u> : د(س) = ρ س + جـ ، ρ ≠ ٠ بوضع ρ س + جـ = ٠ ∴ س = $\frac{-\text{جـ}}{\rho}$
<u>مثلا</u> : د(س) = ٦ ـ ٣ س بوضع ٦ ـ ٣ س = ٠ ∴ ٦ = ٣ س ∴ س = ٢

الدالة موجبة عند س < ٠ <u>أو</u> س ∈] ـ ∞ ، ٢ [
الدالة سالبة عند س > ٠ <u>أو</u> س ∈] ٢ ، ∞ [
الدالة صفر عند س = ٢



<u>مثلا</u> : الدالة د(س) = س + ٢ فى ح نضع س + ٢ = ٠ ∴ س = ـ ٢
الدالة موجبة فى] ـ ٢ ، ∞ [
الدالة سالبة فى] ـ ∞ ، ـ ٢ [
الدالة صفر عند س = ـ ٢



---

[٣]<u>اشارة الدالة التربيعية</u> : د(س) = ρ س^{٢} + ب س + حـ ، ρ ≠ ٠

ـ نقوم بكتابة المعادلة التربيعية المرتبطة بالدالة ρ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

ـ نوجد المميز ب^{٢} ـ ٤ ρ حـ و له ثلاث حالات :

١) المميز > ٠ (عدد موجب) فيكون الجذرين حقيقيان مختلفان (نوجدهما بالتحليل أو الالة)
ويقسم الجذران خط الاعداد ثلاث فترات مثل اشارة س^{٢} ، عكس اشارة س^{٢} ، مثل اشارة س^{٢}

٢) المميز = صفر فيكون الجذران حقيقيان متساويان (نوجدهما بالتحليل أو الالة)
و يقسم خط الاعداد الى فترتين مثل اشارة س^{٢} ، مثل اشارة س^{٢}

٣) المميز < ٠ (عدد سالب) فيكون الجذران مركبان (ولا نوجد الجذران)
و يكون الخط كلة مثل اشارة س^{٢}

<u>ملحوظة</u> : اشارة الدالة عند قيمة س التى تجعل المعادلة = صفر هى صفر(لا موجب و سالب)

مثال :وضح على خط الاعداد اشارة الدالة د(س) = س^{٢} + ٥ س ـ ٦ فى ح

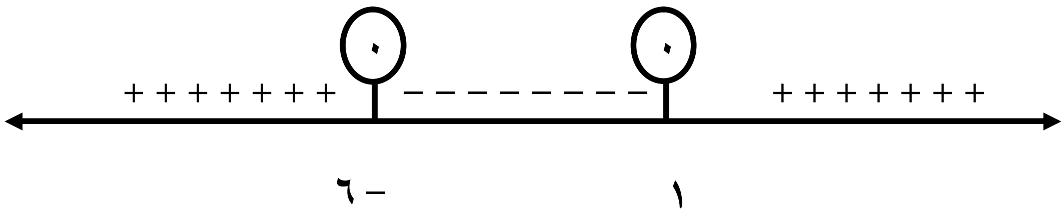
الحل : ﻡ = ١ ، ب = ٥ ، جـ = − ٦

المميزة = ب^{٢} ـ ٤ ﻡ جـ = (٥)^{٢} ـ ٤ × ١ × − ٦ = ٢٥ + ٢٤ = ٤٩ > ٠

للدالة جذران حقيقيان مختلفان هما ١ ، − ٦

<u>بالتحليل</u> : س^{٢} + ٥ س ـ ٦ = ٠

∴ (س ـ ١)(س + ٦) = ٠ ⟸ س = ١ ، س = − ٦



الدالة سالبة عندما س ∈] − ٦ ، ١ [، الدالة موجبة عندما س ∈ ح ـ [− ٦ ، ١]

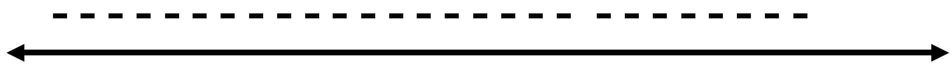
الدالة صفر عندما س ∈ [− ٦ ، ١]

مثال : عين (حدد) اشارة الدالة د(س) = ٢ س ـ س^{٢} ـ ٣ على ح

الحل : ﻡ = − ١ ، ب = ٢ ، جـ = − ٣

المميزة = ب^{٢} ـ ٤ ٩ جـ = (٢)^{٢} ـ ٤ × – ١ × – ٣ = ٤ ـ ١٢ = – ٨ < ٠

للدالة جذران تخيليان (غير حقيقية) و تكون الدالة سالبة دائما



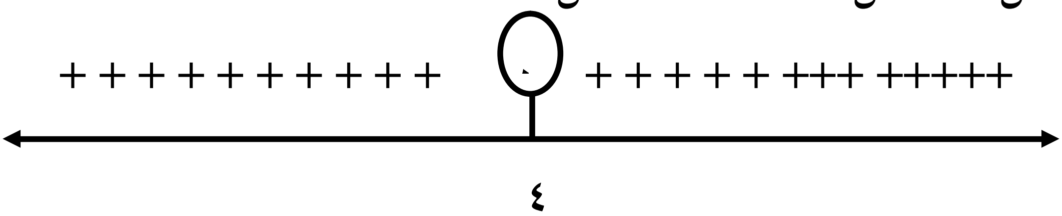
مثال : ابحث اشارة د(س) = س^{٢} ـ ٨ س + ١٦ على ح

الحل : ٩ = ١ ، ب = – ٨ ، جـ = ١٦

المميزة = ب^{٢} ـ ٤ ٩ جـ = (– ٨)^{٢} ـ ٤ × ١ × ١٦ = ٦٤ – ٦٤ = صفر

للدالة جذران حقيقيان متساويان هما ٤ **بالتحليل** س^{٢} – ٨ س + ١٦ = ٠

⟸ (س ـ ٤)(س ـ ٤) = ٠ ⟸ س = ٤



الدالة موجبة عندما س ∋ ح ـ { ٤ } ، الدالة صفر عندما س = ٤

<u>حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد</u>

٩ س^{٢} + ب س + حـ > ٠ [< ٠ أ، ⩾ ٠ أ، ⩽ ٠]

خطوات الحل : ١) نبحث اشارة الدالة
٢) نمثل الحل على خط الاعداد
٣) نوجد مجموعة الحل التى تحقق المتباينة

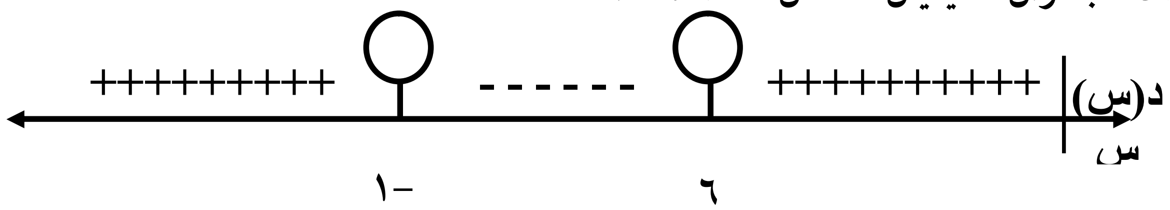
<u>مثلا</u> : المتباينة > ٠ تكون م . ح = ح – فترة معكوسة
المتباينة < ٠ تكون م . ح = فترة مفتوحة من الطرفين أو مغلقة عند المتباينة ⩽ ٠

مثال : عين إشارة الدالة د حيث د(س) = س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ على خط الأعداد ثم أوجد مجموعة حل المتباينة : س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ > ٠

الحل : ٮ = ١ ، ب = – ٥ ، جـ = – ٦

المميزة = ب^٢ ـ ٤ ٮ جـ = (- ٥)^٢ ـ ٤ × ١ × - ٦ = ٢٥ + ٢٤ = ٤٩ > ٠

للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما ٦ ، – ١



الدالة موجبة عند س ∈ ح – [- ١ ، ٦] ، **الدالة سالبة عند س ∈] -١ ، ٦[**

الدالة صفر عند س ∈ { - ١ ، ٦ }

∴ م.ح = ح - [-١ ، ٦]

<u>ملحوظة</u> : إذاكانت المتباينة س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ >٠ فإن م . ح = ح – [- ١ ، ٦]
إذاكانت المتباينة س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ ⩾ ٠ فإن م . ح = ح –] - ١ ، ٦ [
إذا كانت المتباينة س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ < ٠ فإن م . ح =] – ١ ، ٦ [
إذا كانت المتباينة س^٢ ـ ٥ س ـ ٦ ⩽ ٠ فإن م . ح = [– ١ ، ٦]

<u>حســـــاب المثلثات :</u>

١- – للتحويل من القياس الموجب للزاوية الموجهة الى القياس السالب نطرح ٣٦٠° أو ٢π

مثلا : ١٠٠° = ١٠٠ – ٣٦٠ = – ٣٠٠° ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ـ ٢π = ـ $\frac{٤\pi}{٣}$

٢- للتحويل من القياس السالب للزاوية الموجهة الى القياس الموجب نضيف ٣٦٠° أو ٢π

مثلا : ـ ٤٠° = ـ ٤٠ + ٣٦٠ = ٣٢٠ ، ـ $\frac{\pi}{٤}$ + ٢π = $\frac{٧\pi}{٤}$

٣- لكتابة الزاوية المكافئة لزاوية ما كالتالى :

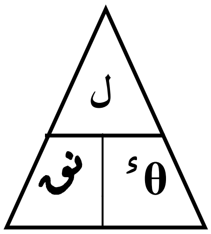
- إذا كان قياس الزاوية أكبـر من ٣٦٠° فيجب طرح منها ٣٦٠ حتى نصل لأول عدد أقل من ٣٦٠°
- إذا كان قياس الزاوية سالب يجب جمع عليها ٣٦٠ حتى نصل لأول عدد موجب

مثلا : الزاوية المكافئة للزاوية (- ٣٠°) هى (٣٣٠°) ، الزاوية ٩٢٠° تكافئ الزاوية ٢٠٠°

٤- الزوايا التى قياسها صفر ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠ تسمى زوايا ربعية حيث يقع الضلع النهائى على أحد محوري الاحداثيات .

٥- أنواع قياسات الزوايا : (قياس ستينى ، قياس دائرى)

* القياس الدائرى (**R**) : **هو قياس يعتمد على طول القوس من دائرة الذى تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة .**



$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} \Longrightarrow ل = \theta^{د} \times نق \Longrightarrow نق = \frac{ل}{\theta^{د}}$$

حيث $\theta^{د}$ قياس الزاوية بالقياس الدائرى ، ل طول القوس ، **نق** نصف قطر الدائرة

وحدة القياس الدائرى هى الزاوية النصف قطرية و يرمز لها (١ ^{د}) واحد دائرى [راديان]

٦- العلاقة بين القياس الدائرى و القياس الستينى :

$\because \frac{\theta^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠}$ من هذا القانون نستنتج أن :

$\therefore$ الزاوية بالتقدير الدائرى ($\theta^{د}$) = $س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$

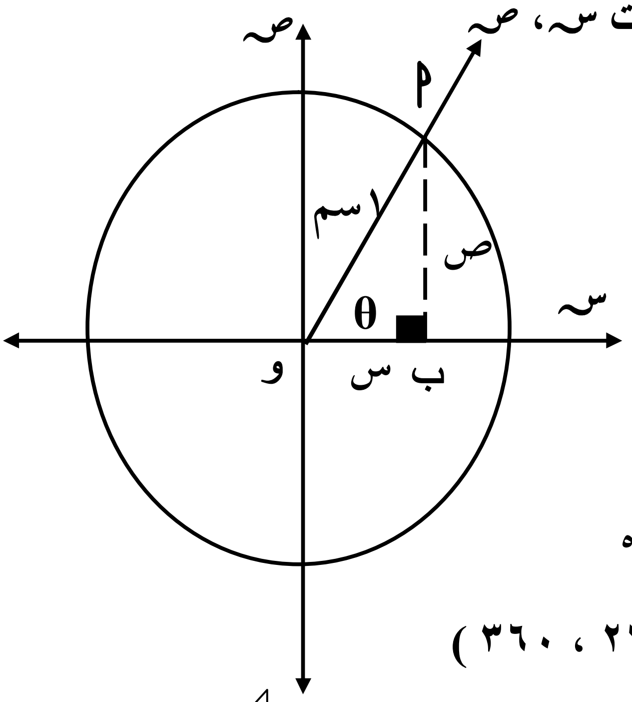
$\therefore$ الزاوية بالتقدير الستينى ($س^{\circ}$) = $\theta^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

ط = ٣.١٤ = $\frac{٢٢}{٧}$ أو π باى بالآلة الحاسبة حسب ما يذكر

$\pi^{د}$ = ١٨٠° ستينى، π° = ١٨٠°

إذا أعطيت القياس الدائرى بدلالة ط فإنه يحول مباشرة الى القياس الستينى بالتعويض عن π بـــ ١٨٠°

٧- **دائرة الوحدة :** هى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوى الواحد الصحيح تقطع محورى الاحداثيات سَ، صَ



نقطة أ (س ، ص) = (حتا θ ، حا θ)

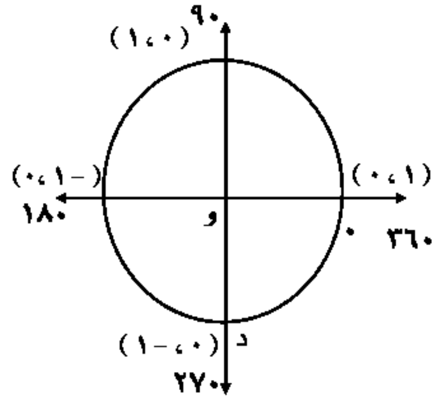
الاحداثى الصادى و السينى لنقطة أ يرتبطان بالعلاقة :

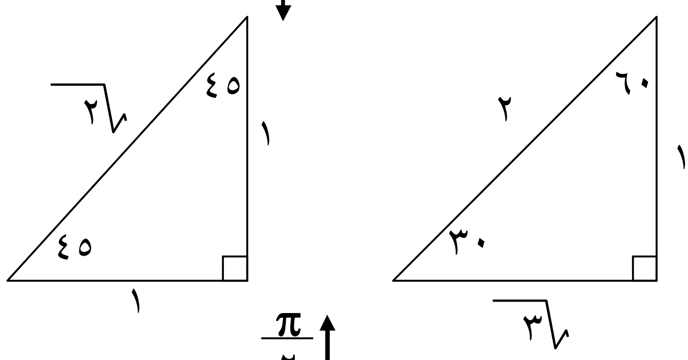
$س^٢ + ص^٢ = ١$ (معادلة دائرة الوحدة)

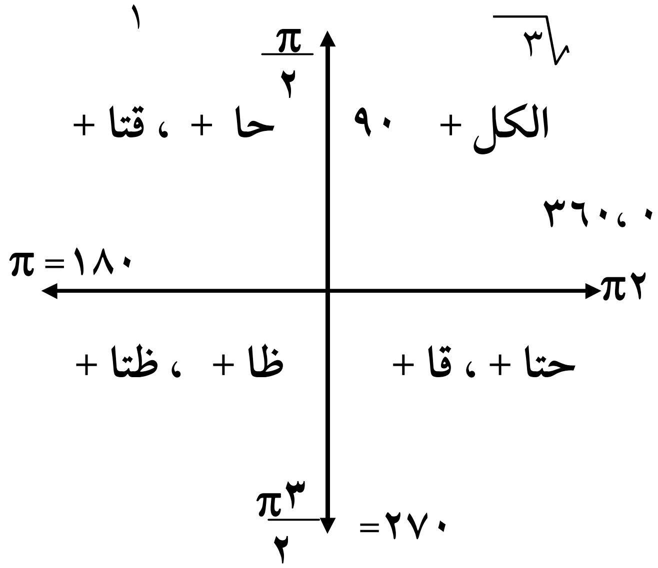
$حتا^٢ θ + حا^٢ θ = ١$

حيث حا θ ∋ [- ١ ، ١] ، حتا θ ∋ [- ١ ، ١]

٨- الزوايا الخاصة (٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠)







٩- **اشارة الدوال المثلثية :** أكمـــل العبارات الاتية :

١- اشارة ظا ١٥٠ تكون ....

٢- اشارة ظا (- ٣٠٠) تكون ....

٣- اشارة حا ٢٢٥ تكون ....

٤- اشارة ظتا ٣٠٠ تكون ....

٥- اشارة قتا ٣٠٠ تكون ....

كـل جبار ظالم جتو داهية

٦- اشارة حا (- ١٠٠) تكون ....

٧- اشارة ظا (- ٣٠) تكون ......

٨- إذا كانت حا س > ٠ ، حتا س < ٠ فإن س تقع فى الربع ....

٩- إذا حا س > ٠ ، حتا س > ٠ فإن س تقع فى الربع ....

*** ايجاد الزاوية التى تنتسب لها الزاوية المعطاة :**

١) نحدد الربع الذى تقع فيه

٢) نستخدم أحد العلاقات الاتية : (٠ + θ) ، (٠ ـ θ) ، (٣٦٠ + θ) ، (٣٦٠ – θ)

(١٨٠ + θ) ، (١٨٠ ـ θ) ، (٢٧٠ + θ) ، (٢٧٠ ـ θ) ، (٩٠ + θ) ، (٩٠ – θ)

ملاحظات : ١- إذا كانت الزاوية هى ٩٠ أو ٢٧٠ و مضاعفتها الفردية تقلب الدوال من تاء الى غير تاء

مثلا: حا ⟵ حتا ، حتا ⟵ حا ، ظا ⟵ ظتا ، قا ⟵ قتا ، قتا ⟵ قا

٢- إذا كانت الزاوية المعطاة ليست بالقياس الاصلى لها يجب تحويلها الى القياس الاصلى ثم نوجد الزاوية التى تنتسب لها .

٣- لايجاد دالة أى زاوية و معرفة قيمتها لابد من تحديد الربع أولا ثم اختيار زاوية مناسبة من من الزوايا ٣٠ °، ٤٥ °، ٦٠ °

ملحوظة هامة : لأى زاويتين ∝ ، β مجموعهما يساوى ٩٠ ° فإن :

حا ∝ = حتا β ، قتا ∝ = قا β ، طا ∝ = ظتا β و يكون : ∝ + β = ٩٠ °

مثلا حا ٣٥ = حتا ٥٥ ، ظا ٣٠ = ظتا ٦٠ ، قا ٧٠ = قتا ٢٠

مثال : أوجد قيمة المقدار: ٢ ظا ٢٢٥ حتا ١٢٠ ـ قتا (ـ ٣٠٠) حا ٢٤٠

الحل : ظا ٢٢٥ = ظا (١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١

حتا ١٢٠ = حتا (١٨٠ ـ ٦٠) = ـ حتا ٦٠ = ـ $\frac{١}{٢}$

قتا (ـ ٣٠٠) = قتا ٦٠ = $\frac{١}{\text{حا } ٦٠}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

حا ٢٤٠ = حا (١٨٠ + ٦٠) = ـ حا ٦٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

المقدار = ٢ × ١ × ـ $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × (ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ـ ١ + ١ = صفر

تدريب : أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : حا (ـ ٣٠) حتا ٤٢٠ + $\frac{\text{طا } ٢٥}{\text{ظتا } ٦٥}$

(ارشاد : طا ٢٥ = ظتا ٦٥ ثم نكمل الحل ....)

خواص كل من دالتى الجيب وجيب التمام

الخاصية	دالة الجيب د(θ) = جا θ	دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ
المجال والمدى	المجال هو]-∞، ∞[، المدى هو [-١، ١]	المجال هو]-∞، ∞[، المدى هو [-١، ١]
القيمة العظمى	تساوى ١ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π ، ن ∈ ص	تساوى ١ عند س = ± ٢ن π ، ن ∈ ص
القيمة الصغرى	تساوى -١ عند π = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π ، ن ∈ ص	تساوى -١ عند س = π ± ن π ، ن ∈ ص

مثال : إذا كان طا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < ب < ٣٦٠°

أوجد قيمة : حتا (٣٦٠ – ب) - حتا (٩٠ – ب)

الحل:

المقدار = حتا ب – حا ب = $\frac{-٤}{٥}$ - $\frac{-٣}{٥}$ = $\frac{-٤}{٥}$ + $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{-١}{٥}$