



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لشئون الكتب

القسم الأدبي

الرياضيات

العامّة



Egyptian Knowledge Bank
بنك المعرفة المصري

الصف الثاني الثانوى

كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني



EGYPT VISION

طبعة ٢٠١٨-٢٠١٩ م

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ / سيرافيم إلياس إسكندر

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ / أسامة جابر عبد الحافظ

أ / مجدى عبد الفتاح الصفتى

المقدمة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها في الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.
- ٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفي من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.
- ٣ تبني مدخل المعايير القومية للتعليم في مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:
(أ) تحديد ما ينبغي على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.
(ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على ما يلي:
أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محباً للرياضيات ومبادراً بدراستها - أن يكون المتعلم قادراً على العمل منفرداً أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطاً ومثابراً ومواظباً ومبتكراً - أن يكون المتعلم قادراً على التواصل بلغة الرياضيات.
- ٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).
- ٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.
- ٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وفي ضوء ما سبق روعي في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هي: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، الاحتمال، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشاف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.
- ★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمي يقيس بعض المهارات اللازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.
- ★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسي.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولصننا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: المتابعات والمتسلسلات

٤	المتابعات والمتسلسلات	١ - ١
١٠	المتابعة الحسابية	٢ - ١
١٨	المتسلسلات الحسابية	٣ - ١
٢٤	المتابعة الهندسية	٤ - ١
٣٣	المتسلسلات الهندسية	٥ - ١
٤٢	ملخص الوحدة	
٤٤	اختبار تراكمي	

الوحدة الثانية: التباديل والتوافيق

٤٨	مبدأ العد	١ - ٢
٥١	مضروب العدد - التباديل	٢ - ٢
٥٦	التوافيق	٣ - ٢
٦٠	ملخص الوحدة	
٦٢	اختبار تراكمي	

المحتويات

المحتويات

الوحدة الثالثة: التفاضل والتكامل

٦٤ معدل التغير ١ - ٣

٧٠ الاشتقاق ٢ - ٣

٧٤ قواعد الاشتقاق ٤ - ٣

٨٤ التكامل ٤ - ٣

٩٠ ملخص الوحدة

٩٣ اختبار تراكمي

الوحدة الرابعة: الاحتمال

٩٦ حساب الاحتمال ١ - ٤

١١١ ملخص الوحدة

١١٦ اختبار تراكمي

المحتويات

الوحدة الأولى

المتتابعات والمتسلسلات Sequences and series

مقدمة الوحدة

مما لا شك فيه أن الرياضيات تساعد على اكتشاف وتمثيل الأنماط التي قد تكون منتهية أو غير منتهية حيث يمكن تواجدها في المواقف الحياتية المختلفة أو يمكن تركيبها وتكوينها، والكثير منها أنماط رقمية لما لها من استخدامات مختلفة في الحياة اليومية؛ حيث توجد في صور متتابعات ومتسلسلات، وقد تطورت هذه الأنماط في الدراسات الحديثة من الجانب النظرى إلى الجانب التطبيقي في مجال العلوم والهندسة والإحصاء، وقد أصبح الحاسب الآلى أول اختراع قابل للتطور؛ حيث إنه قد تم التفاعل معه بشكل فريد وغير مسبوق، ويمكن الاستعانة به في تحليل أعقد المسائل الرياضية والفيزيائية في جميع فروع المعرفة.

مخرجات تعلم الوحدة

- بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:
 - يتعرف مفهوم المتتابعات ويميز بينها وبين المتسلسلات.
 - يتعرف المتتابعة الحسابية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
 - يوجد الوسط الحسابى لمتتابعة حسابية، ويدخل عددًا محدودًا من الأوساط الحسابية بين عددين.
 - يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة حسابية بصور مختلفة.
 - يتعرف المتتابعة الهندسية، ويستنتج الحد العام لها بصور مختلفة.
 - يوجد الوسط الهندسى لمتتابعة هندسية.
 - يدخل عددًا محدودًا من الأوساط الهندسية بين عددين.
- يستنتج العلاقة بين الوسط الحسابى، والوسط الهندسى لعددين موجبين مختلفين.
- يوجد مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية بصور مختلفة.
- يوجد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية.
- يوظف المتتابعات الحسابية والهندسية في تفسير بعض المشكلات الحياتية مثل المشكلة السكانية.
- يستخدم الحاسبات في إجراء عمليات متطلبة في حل مشكلات رياضية وحياتية على المتتابعات والمتسلسلات.

المصطلحات الأساسية

Geometric mean	وسط هندسي	➤	Summation (Σ)	رمز التجميع	➤	Function	دالة	➤
Geometric series	متسلسلة هندسية	➤	Arithmetic sequence	متتابعة حسابية	➤	Term	حد	➤
	متسلسلة هندسية غير منتهية	➤	Common difference	أساس المتتابعة الحسابية	➤	Finite sequence	متتابعة منتهية	➤
Infinite geometric series			Arithmetic mean	وسط حسابي	➤	Infinite sequence	متتابعة غير منتهية	➤
Infinity	مالانهاية	➤	Arithmetic series	متسلسلة حسابية	➤	Increasing Sequence	متتابعة تزايدية	➤
			Geometric sequence	متتابعة هندسية	➤	Decreasing Sequence	متتابعة تناقصية	➤
			Common ratio	أساس المتتابعة الهندسية	➤	Series	متسلسلة	➤

مخطط تنظيمي للوحدة



المتابعات



دروس الوحدة



- الدرس (١ - ١): المتابعات والمتسلسلات.
- الدرس (١ - ٢): المتابعات الحسابية.
- الدرس (١ - ٣): المتسلسلات الحسابية.
- الدرس (١ - ٤): المتابعات الهندسية.
- الدرس (١ - ٥): المتسلسلات الهندسية.

الأدوات والوسائل

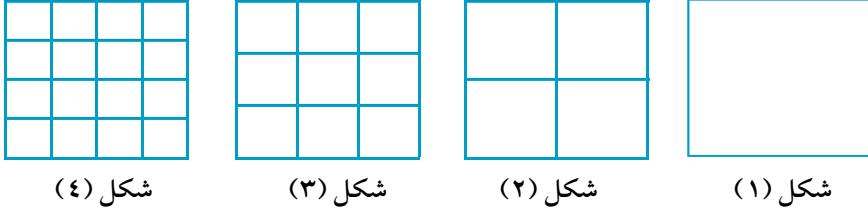


- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

المتتابعات والمتسلسلات

Sequences and Series

فكر و ناقش



النمط السابق يوضح مربع يمكن تقسيمه إلى عدد من المربعات الصغرى:
 (١) أوجد عدد المربعات الصغرى التي يحتويها الشكل الخامس (ارسم الشكل الخامس).

(٢) هل يمكنك إيجاد عدد المربعات الصغرى بالشكل الثامن.

(٣) هل تستطيع إيجاد العلاقة بين عدد المربعات الصغرى وبين ترتيب الشكل.

Sequence

المتابعة

تعلم



تذكر أن



الدالة هي علاقة بين مجموعتين S ، T بحيث كل عنصر من عناصر S يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط في أحد الأزواج المرتبة المحددة؛ لبيان العلاقة.

المتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة \mathbb{N}^+ أو مجموعة جزئية منها ومدادها مجموعة من الأعداد الحقيقية \mathbb{R} حيث يرمز للحد الأول بالرمز a_1 ، الحد الثاني بالرمز a_2 ، الحد الثالث بالرمز a_3 وهكذا... والحد النوني بالرمز a_n ويمكن التعبير عن المتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالآتي:
 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ أو يرمز لها بالرمز (a_n) .

مثال



١ اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ) متتابعة الأعداد الزوجية الموجبة التي تبدأ

بالعدد (٢)

ب) متتابعة الأعداد المحصورة بين ١٠ ، ٣٠ والتي

يقبل كل منها القسمة على ٣.

لاحظ أن



(١) حدود المتابعة هي صور عناصر مجال المتابعة.
 (٢) الرمز (a_n) يعبر عن المتابعة، بينما الرمز a_n يعبر عن حدها النوني.

سوف تتعلم



- تعريف المتابعة
- المتابعة المنتهية والمتابعة غير المنتهية
- الحد النوني للمتابعة
- التمثيل البياني للمتابعة
- المتسلسلات ورمز المجموع

المصطلحات الأساسية



- Sequence متابعة
- Finite Sequence متابعة منتهية
- infinite Sequence متابعة غير منتهية
- Set مجموعة
- Term حد
- Series متسلسلة
- Summation notation رمز المجموع

الأدوات المستخدمة



- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

الحل

أ (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢)

ب (١٢، ١٥، ١٨، ٢١، ٢٤، ٢٧)

٤ حاول أن تحل

١ اكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

أ متتابعة الأعداد الفردية السالبة التي تبدأ بالعدد (-١).

ب متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١، ٨١ والتي يقبل كل منها القسمة على ٥.

الحد العام لمتتابعة: General term of a sequence

الحد العام لمتتابعة (ويسمى أحياناً بالحد النوني) ويكتب عن حيث عن صورة العنصر الذي ترتيبه ن في مجال المتتابعة، ويمكن استنتاجه أحياناً من خلال حدود معطاة للمتتابعة.

مثال ذلك:

$$\leftarrow \text{الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية: } ٢، ٤، ٦، ٨، \dots \text{ هو } ع = ٢ن$$

$$\leftarrow \text{الحد العام لمتتابعة الأعداد الفردية: } ١، ٣، ٥، ٧، \dots \text{ هو } ع = ٢ن - ١$$

$$\leftarrow \text{الحد العام للمتتابعة: } -\frac{1}{٣}، -\frac{1}{٤}، -\frac{1}{٥}، -\frac{1}{٦}، \dots \text{ هو } ع = \frac{١-ن}{٢+ن}$$

تفكير ناقد: هل توجد قاعدة لإيجاد الحد العام لجميع المتتابعات؟ فسر إجابتك.

مثال

٢ اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة (ع) المعرفة كالتالي: $ع = ١ - ١$ ، $ع = ٢ - ١$ ، $ع = ٣ - ١$ حيث $١ \leq ن$

الحل

بالتعويض عن قيمة ن = ١، ٢، ٣، ٤ في العلاقة $ع = ١ - ١$ عن:

$$\text{بوضع } ن = ١ \text{ تكون } ع = ٢ - ١ = ١ \text{ أي أن: } ع = ٢ - ١ = ١ \text{ (بالتعويض عن } ع = ١ \text{)}$$

$$\text{بوضع } ن = ٢ \text{ تكون } ع = ٣ - ٢ = ١ \text{ أي أن: } ع = ٣ - ٢ = ١ \text{ (بالتعويض عن } ع = ٢ \text{)}$$

$$\text{بوضع } ن = ٣ \text{ تكون } ع = ٤ - ٣ = ١ \text{ أي أن: } ع = ٤ - ٣ = ١ \text{ (بالتعويض عن } ع = ٣ \text{)}$$

$$\text{بوضع } ن = ٤ \text{ تكون } ع = ٥ - ٤ = ١ \text{ أي أن: } ع = ٥ - ٤ = ١ \text{ (بالتعويض عن } ع = ٤ \text{)}$$

الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة هي: (١ -، ٢ -، ٣ -، ٤ -، ٥ -)

٤ حاول أن تحل

٢ اكتب الستة حدود الأولى للمتتابعة (ع) المعرفة كالتالي: $ع = ١$ ، $ع = ٣$ ، $ع = ٥$ ، $ع = ٧$ ، $ع = ٩$ ، $ع = ١١$ حيث $١ \leq ن$

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية: Finite sequence and infinite sequence

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً (أي يمكن حصره أو عدّه) وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منتهٍ (عدد لا نهائي من العناصر لا يمكن حصره).

مثال

- ٣ اكتب كلاً من المتتابعات التي حدها النوني يعطى بالعلاقة:
 أ عن $n = 2n - 1$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).
 ب عن $n = 2^n$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

الحل

- أ بوضع $n = 1, 2, 3, 4, 5$
 أ. $1 = 2(1) - 1$ ، $3 = 2(2) - 1$ ، $5 = 2(3) - 1$ ، $7 = 2(4) - 1$ ، $9 = 2(5) - 1$
 ب. المتتابعة هي: (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١) متتابعة منتهية

- ب بوضع $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
 أ. $1 = 2^1$ ، $2 = 2^2$ ، $4 = 2^3$ ، $8 = 2^4$ ، $16 = 2^5$
 ب. المتتابعة هي: (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...) متتابعة غير منتهية.

٦ حاول أن تحل

- ٣ اكتب كلاً من المتتابعات التي حدها النوني يعطى بالعلاقة:
 أ عن $n = 3n - 1$ (إلى خمسة حدود ابتداءً من الحد الأول).
 ب عن $n = 2^n$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الأول).

Series and summation notation

المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هي عملية جمع حدود المتتابعة.
 فمثلاً: (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) هي متتابعة بينما $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$ هي المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة، ويمكن استخدام رمز التجميع "Σ" وقرأ (سيجما) لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

مثال

- ٤ اكتب مفكوك كلاً من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك.
 أ $\sum_{r=1}^2 r$ ب $\sum_{r=3}^5 (1 - r^2)$

الحل

- أ بوضع $r = 1$ يكون $1 = 1$ ، بوضع $r = 2$ يكون $2 = 2$ ، $4 = 2^2$
 ب بوضع $r = 3$ يكون $3 = 3$ ، بوضع $r = 4$ يكون $4 = 4$ ، $16 = 4^2$
 أي أن المتسلسلة هي (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٩ + ١٦) ويكون $\sum_{r=1}^5 r = 1 + 2 + 3 + 4 + 9 + 16 = 30$

ب) بوضع $r = 3$ يكون $u = 1 - 3 \times 2 = 5$ ، بوضع $r = 4$ يكون $u = 1 - 4 \times 2 = 7$
 بوضع $r = 5$ يكون $u = 1 - 5 \times 2 = 9$ ، بوضع $r = 6$ يكون $u = 1 - 6 \times 2 = 11$
 بوضع $r = 7$ يكون $u = 1 - 7 \times 2 = 13$
 أي أن المتسلسلة هي $(5 + 7 + 9 + 11 + 13)$ ويكون $\sum_{r=3}^7 (1 - r \cdot 2) = 40$



استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة:

تتيح لنا الآلات الحاسبة إنجاز الكثير من العمليات الحسابية المعقدة بسرعة ودقة تامة بشرط التأكد من بيانات الإدخال، ومن بين هذه العمليات الهامة هو إيجاد مجموع متسلسلة، فعلى سبيل المثال يمكن التحقق من مجموع المتسلسلة في السؤال السابق (ب) على النحو التالي:

(١) نضغط على مفتاح رمز التجميع \sum حسب اللون المحدد لذلك

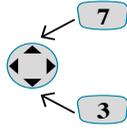
(٢) نكتب قاعدة المتباينة $(1 - r \cdot 2)$ كالاتي:

1 - (x) ALPHA 2 ابدأ

(٣) نستخدم المفتاح (Replay) للتنقل كالاتي:

نكتب عدد حدود المتتابعة (٧) في التنقل لأعلى،

نكتب رتبة الحد الذي نبدأ به وهو في هذا المثال (٣) في التنقل لأسفل



(٤) نضغط على مفتاح الإدخال $=$ ليعطى على الشاشة الناتج ٤٥ وهو مطابق لناتج الجمع السابق.

٦ حاول أن تحل

٤ اكتب مفكوك كلاً من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

ج $\sum_{r=0}^9 1 - r \cdot 2 \times 3$

ب $\sum_{r=1}^4 (1 + r)^2$

أ $\sum_{r=1}^3 (2 - r \cdot 3)$

@ معلومات إثرائية



قم بزيارة المواقع الآتية:

تمارين ١ - ١

أكمل ما يأتي:

- ١ الحد الخامس للمتتابعة (ع.ن) حيث $ع_٢ = ١ - ع_١$ هو
 ٢ الحد الرابع في للمتتابعة (ع.ن) حيث $ع_٣ = ٢ + ع_٢$ هو
 ٣ في المتتابعة (ع.ن) حيث $ع_١ = ١$ ، إذا كان $ع_٢ = ١$ فإن $ع_٣ =$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ٤ الحد الخامس في متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥ هو
 أ ٥ ب ٢٥ ج ٢٠ د ١٠
- ٥ الحد العاشر من المتتابعة التي حدها النوني: $ع_١ = ١ - \frac{٢}{١}$ حيث $ع_٣ = ٣ + ع_٢$ هو:
 أ $\frac{٤-}{٥}$ ب $\frac{١-}{٥}$ ج $\frac{١}{٥}$ د $\frac{٤}{٥}$
- ٦ قاعدة المتتابعة (٢×٣) ، (٣×٤) ، (٤×٥) ، (٥×٦) ، ... هي:
 أ $(١ - ن) (١ + ن)$ ب $ن (١ + ن)$ ج $٢ن (١ + ن)$ د $(١ + ن) (٢ + ن)$

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٧ بين أي المتتابعات الآتية منتهية أو غير منتهية:
 أ $(١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...)$
 ب $(٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٢١)$
 ج المتتابعة (ع.ن) حيث $ع_١ = ١ - ٢$ ، $ع_٢ = ٣ + ع_١$
 د المتتابعة (ع.ن) حيث $ع_١ = ٣ + \frac{٢}{١}$ ، $ع_٢ = ٣$ ، $ع_٣ = ٤$ ، $ع_٤ = ٥$
- ٨ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التي حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:
 أ $ع_١ = ٢ + ن$ ب $ع_١ = \frac{١}{٥ - ٢}$ ج $ع_١ = \frac{١}{٣}$ د $ع_١ = (١ - ن) (٢ - ن)$
- ٩ اكتشف النمط ثم اكتب الحد التالي
 أ ٦٥ ، ٦٩ ، ٧٣ ، ٧٧ ، ٨١ ، ...
 ب ٣ ، ٦- ، ١٢ ، ٢٤- ، ٤٨ ، ...
 ج $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، ...
 د ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ...

١٠ **الربط بالرياضة:** يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق في اليوم الأول، ثم يزيد الفترة بعد ذلك

- بمعدل دقيقتين يومياً.
 أ اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.
 ب أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.
 ج أوجد الزمن الذي يستغرقه كريم في اليوم السابع.

٥) في أي يوم سيكون الزمن الذي يستغرقه كريم نصف ساعة؟ وضح إجابتك.

١١) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{r=1}^{\infty} (2 - r^3)$ ب) $\sum_{r=1}^{\infty} (r^4 + (-1)^r)$

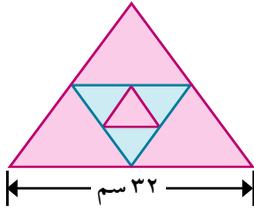
ج) $\sum_{r=1}^{\infty} (r - \frac{1}{2})$ د) $\sum_{r=1}^{\infty} (\frac{1}{1+r} - \frac{1}{r})$

١٢) اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

أ) $\sum_{r=3}^{\infty} (r^2 + 3)$ ب) $\sum_{r=2}^{\infty} (2 - r^2)$

ج) $\sum_{r=1}^{\infty} 3 \times (\frac{1}{3})^{r-1}$ د) $\sum_{r=3}^{\infty} (2 + \frac{1}{r})$

١٣) **الربط بالتعددين:** منجم للذهب ينتج في العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠٪ سنوياً من معدل إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. اكتب الخمسة حدود الأولى من متتابعة الإنتاج، ثم أوجد هذا المجموع.



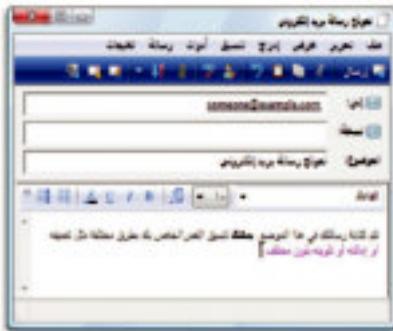
١٤) **الربط بالهندسة:** يمثل الشكل المقابل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٣٢ سم

نصفت أضلاعه الثلاثة، ورسم المثلث الداخلي، واستمر هذا النمط نحو الداخل حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.

أ) اكتب المتسلسلة التي تمثل محيطات المثلثات باستخدام رمز التجميع.

ب) أوجد محيط المثلث الرابع.

ج) أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات الأربعة مثلثات الأولى من هذا النمط.



١٥) **الربط بالتكنولوجيا:** استخدم كريم البريد الإلكتروني في إرسال

رسالة إلى ثلاثة من أصدقائه، ومن ثم قام كل منهم بإرسال نفس الرسالة إلى ثلاثة أصدقاء آخرين، وهكذا استمر إرسال نفس الرسالة بهذا النمط.

(علماً بأن كل شخص تسلم هذه الرسالة مرة واحدة فقط)

أ) اكتب المتسلسلة باستخدام رمز التجميع.

ب) أوجد عدد الأشخاص التي ستصلهم هذه الرسالة في المرحلة الخامسة.

ج) أوجد مجموع جميع الأشخاص الذين تداولوا هذه الرسالة حتى المرة الخامسة.

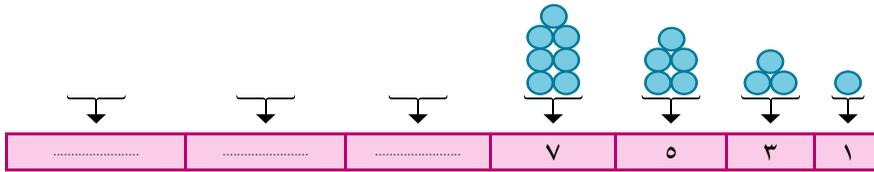
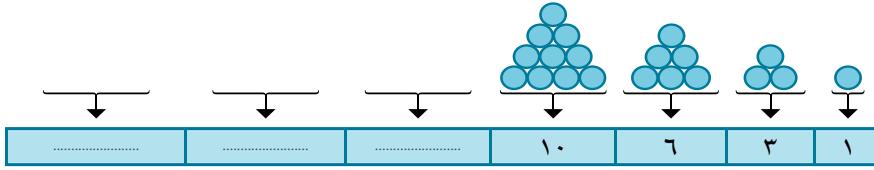
المتتابعة الحسابية

Arithmetic Sequence

نشاط



ادرس كلاً من النمطين التاليين، ثم أكمل كل منهما حتى الشكل السابع.



أجب عن الأسئلة الآتية:

- (١) ما أوجه الشبه والاختلاف بين النمطين الأول والثاني؟
- (٢) اكتب المتتابعين الممثلين للنمطين السابقين.
- (٣) ماذا تلاحظ على قيم المتتابعة في النمط الثاني؟ هل يمكنك استنتاج قاعدة للربط بين حدود هذه المتتابعة؟ اكتب هذه القاعدة.

من النشاط السابق نجد أن:

- ◀ التزايد في قيم عناصر النمط الأول يتغير، ولكن التزايد في قيم عناصر النمط الثاني هو تزايد بمقدار ثابت.
- ◀ المتتابعة الممثلة لعناصر النمط الثاني هي: (١، ٣، ٥، ٧، ...) حيث كل حد فيها يزيد عن الحد الذي يسبقه مباشرة بمقدار ثابت قيمته ٢، ولذلك سميت بالمتتابعة الحسابية.

المتتابعة الحسابية Arithmetic Sequence

تعريف

هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقدراً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (س).
أي أن: $u_n - u_{n-1} = s$ لكل $n \geq 2$ ويمكن تكوينها بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (س).

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الحسابية.
- التمثيل البياني للمتتابعة الحسابية.
- الحد النوني للمتتابعة الحسابية.
- تعيين المتتابعة الحسابية.
- تعريف الوسط الحسابي.
- إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

المصطلحات الأساسية

- نمط Pattern
- متتابعة حسابية
- Arithmetic sequence
- حد نوني nth Term
- أساس المتتابعة الحسابية
- Common difference
- رتبة الحد Order of the term
- وسط حسابي arithmetic mean

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

مثال

١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

- أ) (٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩) ب) $(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})$
- ج) $ع_n = 3 + 2n$ د) $ع_n = 2 + \frac{3}{n}$

الحل

$$أ) \because ٧ع_١ - ١٠ع_٢ = ١ع - ٣ع = ٣ - ١٠ = ١٣ - ١٠ = ٣ع - ٢ع$$

وبالمثل $٣ = ٤ع - ٥ع = ٢ع - ٣ع = ١ع - ٢ع$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية أساسها } ٣$$

$$ب) \because ١ع - ٢ع = \frac{1}{7} - \frac{1}{6} = \frac{1}{42} \quad ، \quad ٢ع - ٣ع = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\therefore \text{المتتابعة ليست حسابية.}$$

$$ج) \because ١ع_{n+1} - ٢ع_n = (3 + 2(n+1)) - (3 + 2n) = 3 + 2n + 2 - 3 - 2n = 2$$

 \therefore المتتابعة حسابية أساسها ٢

$$د) \because ١ع_{n+1} - ٢ع_n = (2 + \frac{3}{n+1}) - (2 + \frac{3}{n}) = \frac{3}{n(n+1)} - \frac{3}{n} = \frac{3 - 3(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3 - 3n - 3}{n(n+1)} = \frac{-3n}{n(n+1)} = -\frac{3}{n+1}$$

$$= -\frac{3}{n+1} \neq -\frac{3}{n} \quad \therefore \text{لا تساوى مقادارا ثابتا}$$

 \therefore المتتابعة ليست حسابية.

٤) حاول أن تحل

١) أى من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية؟ ولماذا؟

- أ) (٣٨، ٣٣، ٢٨، ٢٣، ١٨) ب) (-١٤، -٨، -٢، ٤، ١٠)
- ج) $ع_n = 3 + 2n$ د) $ع_n = 1 - \frac{3}{n}$

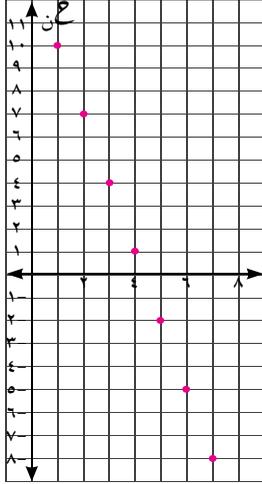
المتتابعة التزايدية والمتتابعة التناقصية

المتتابعة الحسابية (ع_n) تكون تزايدية إذا كان أساسها موجباً (و < صفر) مثل: (١، ٥، ٩، ١٣، ...)والمتتابعة الحسابية (ع_n) تكون تناقصية إذا كان أساسها سالباً (و > صفر) مثل: (٤، -١، -٦، -١١، ...)

التمثيل البياني للمتتابعة الحسابية : Graphical representation of arithmetic Sequence

٢) أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابعة الحسابية (١٠، ٧، ٤، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً.

الحل



ن

$$3 \cdot 5 = 10 - 7 = 10 - 7 = 3$$

∴ الحدود الأربعة التالية هي: ١، ٢، ٥، ٨ -

مجال المتتابعة هو {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

مدى المتتابعة هو {١٠، ٧، ٤، ١، ٢، ٥، ٨}

ويمثل الشكل المجاور التمثيل البياني للمتتابعة.

نلاحظ من الشكل أن:

النقاط التي تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في ن حيث ن ∈ ص⁺ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

٦ حاول أن تحل

٢ في المتتابعة (ع_ن) حيث ع_ن = ٣ن - ٥

- أ أثبت أن (ع_ن) متتابعة حسابية، وأوجد أساسها. ب بين أن هذه المتتابعة تزايدية.
ج أوجد حدها الخامس عشر. د إذا كان ع_ن = ٨٥، فما قيمة ن؟

إيجاد الحد النوني للمتتابعة الحسابية: Finding the nth term of an arithmetic sequence

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النوني للمتتابعة الحسابية (ع_ن) التي حدها الأول أو أساسها كالاتي:

$$ع_١ = ١، ع_٢ = ١ + ١ = ٢، ع_٣ = ٢ + ١ = ٣$$

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النوني لهذه المتتابعة هو:

$$ع_n = ١ + (١ - ١) \cdot ١$$

مثال

٣ في المتتابعة الحسابية (١٣، ١٦، ١٩،، ١٠٠)

- أ أوجد الحد العاشر ب أوجد عدد حدود هذه المتتابعة

الحل

$$١٣ = ١ \cdot ٣، ١٦ = ١٣ + ٣، ١٩ = ١٦ + ٣$$

$$ع_n = ١٣ + (١ - ١) \cdot ٣$$

$$٤٠ = ٢٧ + ١٣ = ٣ \cdot ٩ + ١٣ =$$

ب المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما ع_ن = ١٠٠

$$ع_n = ١٣ + (١ - ١) \cdot ٣ = ١٠٠ \cdot ٣ = ١٠٠ - ١٣ = ٨٧$$

$$٨٧ = ١٠٠ - ١٣ = ٨٧ \cdot ٣ = ٨٧ - ١٣ = ٧٤$$

٦ حاول أن تحل

٣ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧، ٩، ١١، ...، ٦٥) ثم أوجد قيمة الحد العاشر من النهاية.

تعيين المتتابعة الحسابية: Identifying the arithmetic Sequence

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدّها الأول والأساس.

مثال

٤ أوجد المتتابعة الحسابية (ع.ن) التي فيها $u_7 = 18$ ، $u_{10} = 34$

الحل

نعلم من معطيات المسألة أن: $u_7 = 18$ ، $u_{10} = 34$
 $\therefore u_n = a + (n-1)d$ $\therefore u_7 = a + 6d = 18$ ومنها:

$$(1) \quad 18 = a + 6d$$

$$\text{بالمثل } 34 = a + 9d$$

$$(2) \quad 34 = a + 9d$$

$$\text{وبحل المعادلتين (1)، (2) } d = 2$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى

$$\therefore 18 = 2 \times 6 + a \therefore a = 12 - 18 = -6$$

\therefore المتتابعة الحسابية هي (6 ، 8 ، 10 ، ...)

استخدام الآلة الحاسبة:

للتأكد من صحة حل المعادلتين: $u_7 = 18$ ، $u_{10} = 34$

باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

إدخال البيانات

نضغط على مفتاح العمليات **MODE** ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بالضغط على المفتاح **EXE** في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية $anX + bnY = cn$ وذلك بالضغط على المفتاح

ندخل معاملات (X) ، (Y) ، والحد المطلق (cn) بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية مباشرة على النحو التالي:

$$\text{ابداً} \rightarrow \boxed{1} = \boxed{6} = \boxed{18} = \boxed{1} = \boxed{1} \boxed{4} = \boxed{3} \boxed{4} = \boxed{34}$$

استدعاء النواتج:

بالتالي $X = 6$ بالضغط على المفتاح **=** للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول، وليكن (X) ويكون الناتج

بالتالي $Y = 2$ بالضغط على المفتاح **=** مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثاني، وليكن (Y) ويكون الناتج

للخروج من البرنامج: نضغط على المفاتيح: **MODE** **1** \rightarrow ابداً

حاول أن تحل

٤ أوجد المتتابعة الحسابية (ع.ن) التي فيها $u_6 = 17$ ، $u_9 = 37$



الأوساط الحسابية Arithmetic means

تعلم أن الوسط الحسابي (المتوسط) للعددين a ، b هو $\frac{a+b}{2}$ و باعتبار أن: (٩، ١٣، ١٧، ٢١، ٢٥) متتابعة حسابية

مماذا تلاحظ؟ \leftarrow الوسط الحسابي للحددين الأول والثالث $= \frac{17+9}{2} = 13$

مماذا تلاحظ؟ \leftarrow الوسط الحسابي للحددين الثاني والرابع $= \frac{21+13}{2} = 17$

تعريف

إذا كانت a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن b تعرف بالوسط الحسابي بين العددين a ، c حيث: $b - a = c - b$ أي أن: $2b = a + c$ فتكون $b = \frac{a+c}{2}$ لذلك فإن $(a, \frac{a+c}{2}, c)$ متتابعة حسابية.

تذكر أن

الوسط الحسابي لعدة كميات يساوي مجموع هذه الأعداد مقسومًا على عددها.
مثال
أوجد الوسط الحسابي للأعداد:
٩، ٨، ٨، ٧، ٦، ٤
الوسط الحسابي
 $\frac{9+8+8+7+6+4}{6} = 7$

ويمكن إدخال عدة أوساط حسابية: $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ بين العددين a ، b بحيث تكون $(a, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, b)$ متتابعة حسابية.

تعبير شفهي: أكمل:

(١) إذا كونت (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ٢٣) متتابعة حسابية فإن: ٧، ١١، ١٥، ١٩ تسمى

(٢) عدد الأوساط الحسابية = عدد حدود المتتابعة

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية = عدد أوساط هذه المتتابعة

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين:

Insert an infinite number of arithmetic means between two number

مثال

٥ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦، ٤٨

الحل

أولاً: نوجد عدد حدود المتتابعة

نوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير في المتتابعة لذا فإن عدد حدود المتتابعة الحسابية

$$n = 5 + 2 = 7$$

ثانياً: نوجد قيمة s : الحد النوني للمتتابعة الحسابية: $a + (n-1)s$

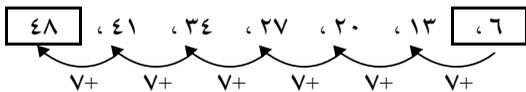
$$6 = a + (n-1)s \Rightarrow 6 = 48 + (7-1)s \Rightarrow 6 = 48 + 6s \Rightarrow 6 - 48 = 6s \Rightarrow -42 = 6s \Rightarrow s = -7$$

$$6 = 48 + 6(-7) = 48 - 42 = 6$$

أي أن: $s = -7$ بقسمة الطرفين على 6

ثالثاً: نستخدم قيمة s لإيجاد الأوساط الحسابية المطلوبة

الأوساط المطلوبة هي: ١٣، ٢٠، ٢٧، ٣٤، ٤١



٣ حاول أن تحل

٥ أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٣ ، ٤٨

تمارين ١ - ٢

حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية، وأيها غير حسابية، ثم أوجد الأساس في حال كونها حسابية:

١ (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤) ٢ (٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٣٨)

٣ (٥- ، ١١- ، ١٧- ، ٢٣- ، ٢٩-)

٤ (س + ٢ ، ص + ٣ ، س + ٣ ، ص + ٤) حيث س، ص كميّتان موجبتان

اكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية في كل من الحالات الآتية:

٥ $٥ = ا$ ، $٢ = ب$ ، $٥ = ج$ ، $٧ = د$ ، $٣ = هـ$ ، $٧ = و$ ، $٤ = ز$ ، $\frac{١}{٤} = ح$

أكمل ما يأتي:

٨ الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) هو

٩ الحد الحادي عشر من المتتابعة (ع) حيث $ع = ٣ - ن$ هو ٥

١٠ الحد النوني للمتتابعة الحسابية (٨١ ، ٧٧ ، ٧٣ ، ...) هو

١١ الحد النوني للمتتابعة الحسابية ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، صفر ، ...) هو

١٢ الوسط الحسابي للعددين ٨ ، ١٢ هو

١٣ إذا كان الوسط الحسابي للعددين س، ٢٦ هو ٢١ فإن س تساوى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٤ جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة:

أ (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) ب (١١- ، ١٥- ، ١٩- ، ٢٣- ، ...)

ج ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ...) د ($\frac{٢١}{٥}$ ، $\frac{١٦}{٥}$ ، $\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ ، ...)

١٥ المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هي:

أ (ع) $(\frac{١+ن}{ن})$ ب (ع) $(٢(١+ن))$

ج (ع) $(\frac{٣}{ن} + ٢)$ د (ع) $(\frac{١-٣ن}{١+ن+٣ن})$

١٦ إذا كانت (ع) متتابعة حسابية حيث $ع = ٣ + ٢$ فإن الوسط الحسابي بين ع، ع يساوى:

أ ٨ ب ١٦ ج ٢٢ د ٢٦

- ١٧ إذا كان $1 + 12$ ، $10 - 1$ ، $16 + 3$ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن تساوى
 ا (١) ب (٢) ج (٣) د (٤)

اكتشف الخطأ:

- ١٨ يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه يساوى الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة أى أن $s = ع - ن - ١$ لكل $n \in \mathbb{N}^+$

- ١٩ ليس بالضرورة أن تكون النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة.

- ٢٠ تعطى العلاقة بين n ، $ع$ فى المتتابعة الحسابية كالاتى $ع = ان + ب$ حيث $ا$ ، $ب$ ثابتان ، $ب$ هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة .

- ٢١ إذا أدخلنا n وسطاً حسابياً بين عددين متتاليين فإن عدد حدود هذه المتتابعة يساوى $n - 2$

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٢٢ أوجد الحدين الثانى عشر والعشرون من المتتابعة الحسابية (٤ ، ٧ ، ١٠ ، ...)

- ٢٣ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... - ١٣٣)

- ٢٤ اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة (٢ + ٥ن) ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من هذه المتتابعة .

- ٢٥ (ع ن) متتابعة حسابية فيها $ع_١ = -٥١$ ، $ع_٢ = -١٥٦$ ، أوجد أساس هذه المتتابعة.

- ٢٦ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع يساوى ١٨ ، وحدها السابع يساوى ٢٧

- ٢٧ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ع = ٣٩$ ، $ع = ٧٩$ ، ما قيمة n ؟ أوجد المتتابعة.

- ٢٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوى ثلاثة أمثال حدها الثانى

- ٢٩ (ع ن) متتابعة حسابية فيها $ع_١ + ع_٢ = ٩$ ، $ع_٣ = ٢٢$. أوجد هذه المتتابعة

- ٣٠ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، والنسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

- ٣١ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ، ومجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ ، أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

- ٣٢ إذا كانت ٣٦ ، ١ ، ٢٤ ، ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمتى $ا$ ، $ب$.

- ٣٣ إذا كان الوسط الحسابى بين $ا$ ، $ب$ هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ١٤ ، ٢ هو ٢٠ ، فأوجد قيمة كل من $ا$ ، $ب$.

- ٣٤ إذا كانت (٨ ، ١ ، ، ب ، ٦٨) تكون متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حداً فأوجد قيمتى $ا$ ، $ب$

- ٣٥ أدخل ١٦ وسطاً حسابياً بين ٢٧ ، - ٢٤

- ٣٦ في المتابعة الحسابية (٥ + ٦ ، ٣ + ١٥ ، ... ، ٩ - ٥٠ ، ٤٠ + ١٦) أوجد قيمة s ثم أوجد عدد حدود المتابعة.
- ٣٧ **الربط بالفيزياء:** بدأ كريم في قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة في منحدر، فقطع في الثانية الأولى ١٠٠ سم، وفي كل ثانية تالية يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم. أوجد المسافة التي يقطعها في الثانية العاشرة.
- ٣٨ **الربط بالتجارة:** اشترى رجل دراجة بخارية، واتفق مع البائع على أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متابعة حسابية حدها النوني هو ١٢٠ + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه . أوجد عدد هذه الأقساط.
- ٣٩ **تفكير إبداعي:** متابعة حسابية حدها التاسع يساوي ٢٥ ، الوسط الحسابي بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتابعة.

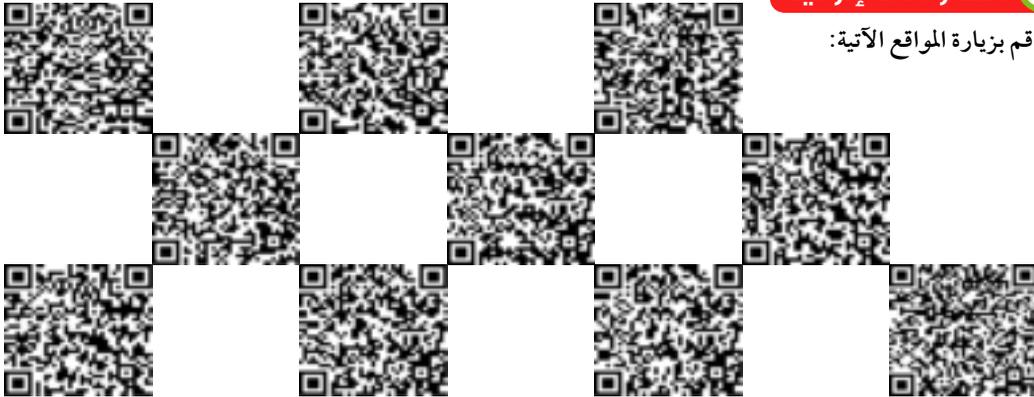
نشاط



- الربط بالصحة** يتناول مريض ٢١ حبة من عقار طبي في الأسبوع، وقد طلب منه الطبيب أن يقلل استخدام العقار بمعدل ٣ حبات في الأسبوع التالي عن الأسبوع الذي يسبقه مباشرة.
- ١ أوجد عدد حبات العقار التي سوف يتناولها المريض في الأسبوع الخامس.
- ٢ بعد كم أسبوعًا سوف يتوقف المريض عن تناول هذا العقار؟
- ٣ بم تنصح المرضى الذين يتعاطون العقاقير الطبية دون استشارة الطبيب؟

@ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:



المتسلسلات الحسابية

Arithmetic Series



كارل جاوس - عالم ألماني
١٧٧٧م - ١٨٥٥م

مجموع المتسلسلة الحسابية: *The sum of arithmetic series*

لقد أثار العالم الألماني كارل جاوس (Karl Gauss) دهشة معلمه، وهو في سن السابعة من عمره عندما توصل إلى إيجاد ناتج جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ ذهنياً وبطريقة سريعة حيث لاحظ أن المجموع يساوي ناتج ٥٠ زوجاً من الأعداد التي ناتج كل منها ١٠١
أي يساوي: $٥٠ \times ١٠١ = ٥٠٥٠$

فهل يمكنك إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ٢٠ ذهنياً؟

المتسلسلة الحسابية *Arithmetic series*

هي عملية جمع حدود المتتابعة الحسابية

فمثلاً: مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٣، ٥، ٧، ٩، ١١)

$$١١ + ٩ + ٧ + ٥ + ٣ = \text{تكتب جـ}$$

مجموع ن حداً الأولى من متسلسلة حسابية

Sum of first n terms of an arithmetic series

أولاً: إيجاد مجموع ن حداً من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير إذا كان لدينا متسلسلة حسابية حدها الأول أ، أساسها س، حدها الأخير ل وعدد حدودها ن فإن مجموع ن حداً من هذه المتسلسلة يرمز له بالرمز جـ حيث:

$$جـ = ١ + (س + ١) + (س + ٢) + \dots + (س - ١) + ل \quad (١)$$

ويمكن التعبير عن هذا المجموع بصورة أخرى كالآتي:

$$جـ = ل + (س - ١) + (س - ٢) + \dots + (س + ١) + أ \quad (٢)$$

ويجمع المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن:

$$٢جـ = (ل + أ) + (ل + أ) + (ل + أ) + \dots + (ل + أ)$$

إلى ن من المرات

$$\text{أي أن } ٢جـ = ن(ل + أ) \text{ وبقسمة الطرفين على } ٢ \quad \boxed{جـ = \frac{ن}{٢}(ل + أ)}$$

سوف تتعلم

- مفهوم متسلسلة حسابية
- إيجاد مجموع ن حداً من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأخير.
- إيجاد مجموع ن حداً من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس.

المصطلحات الأساسية

- متسلسلة حسابية. *Arithmetic series*
- رمز التجميع
- Summation notation (Σ)

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

تذكر أن



مثال

١ استخدام رمز التجميع Σ : أوجد $\sum_{r=0}^{24} (3-4r)$

الحل

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع من الدرجة الأولى فهو يمثل متتابعة حسابية
نوجد عدد حدود المتتابعة $20 = 1 + 0 - 24 = 20$

الحد النوني للمتتابعة $ع = 3 - 4ن$

$$ع = 3 - 4 \times 0 = 3, \quad ع = 3 - 4 \times 24 = 93$$

صيغة المجموع $ج = \frac{ن}{2}(ل + ا)$

$$ج = \frac{20}{2}(3 + 93) = 1100$$

بالتعويض عن: $ا = 3, ل = 93, ن = 20$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد:

$$ب \quad \sum_{v=6}^{22} (12 - 5v)$$

$$أ \quad \sum_{k=1}^{20} (6k + 5)$$

مثال

٢ أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $2 + 5 + 8 + \dots + 62$

الحل

الحد النوني للمتتابعة $ل = ا + (ن - 1)س$

$$62 = 2 + (ن - 1)3 \quad \text{بالتعويض عن } ا = 2, س = 3, ل = 62$$

أى أن: $3ن - 3 = 60 \Rightarrow 3ن = 63 \Rightarrow ن = 21$

فتكون $ن = 21$

صيغة المجموع $ج = \frac{ن}{2}(ل + ا)$

$$ج = \frac{21}{2}(62 + 2) = 672$$

بالتعويض عن $ا = 2, ن = 21, ل = 62$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد:

$$أ \quad \text{مجموع المتسلسلة الحسابية } 89 + 85 + 81 + \dots + 33$$

ب) عدد حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول يساوى 3 وحدها الأخير يساوى 39 ومجموع ن حدها الأولى منها يساوى 210.

ثانيًا: إيجاد مجموع ن حدها من متسلسلة حسابية بمعلومية حدها الأول والأساس

نعلم أن $ل = ا + (ن - 1)س$, $ج = \frac{ن}{2}(ل + ا)$

وبالتعويض من العلاقة الأولى فى العلاقة الثانية فإن:

$$ج = \frac{ن}{2} [ا + (ن - 1)س] \quad \text{أى أن: } ج = \frac{ن}{2} [ا + (ن - 1)س]$$

مثال

٣ في المتسلسلة الحسابية $5 + 8 + 11 + \dots$ أوجد:

- أ مجموع ٢٠ حداً الأولى منها.
 ب مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع.
 ج مجموع حدود المتسلسلة بدءاً من ١٠.ع إلى ٢٠.ع

الحل

$$3 = 5 - 8 = 5 - 11 = 5 - 14 = \dots$$

صيغة المجموع
 بالتعويض عن $5 = 3$ ، $8 = 5$ ، $11 = 7$

بالتبسيط

الحد النوني للمتتابعة

بالتعويض عن $5 = 3$ ، $8 = 5$ ، $11 = 7$
 بالتعويض في صيغة المجموع

بالتبسيط

الحد النوني للمتتابعة

بالتعويض عن $5 = 3$ ، $8 = 5$ ، $11 = 7$

صيغة المجموع (ن = $1 + 10 - 20 = 11$)

بالتعويض عن ١٠.ع = ٣٢ ، ٢٠.ع = ٦٢ ، ن = ١١

أ جن $\frac{n}{4} = [2 + (n-1)5]$

ج.ع $\frac{20}{4} = [3 \times (1 - 20) + 5 \times 2] \times \frac{2}{4}$

جن $10 = (3 \times 19 + 10)$

$670 = 67 \times 10 =$

ب ع $n = 1 + (n-1)5$

٧ع $7 = 1 + 6 = 7$

$23 = 3 \times 6 + 5 =$

ج.ع $\frac{11}{4} = [3 \times (1 - 10) + 5 \times 2] \times \frac{1}{4}$

ج.ع $11 = [27 + 23 \times 2] \times 5 =$

$365 = 73 \times 5 =$

ج مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من ١٠.ع إلى ٢٠.ع

ع $n = 1 + (n-1)5$

١٠.ع $10 = 1 + 9 = 10$

$32 = 3 \times 9 + 5 =$

٢٠.ع $20 = 3 \times 19 + 5 = 62$

جن $\frac{n}{4} = (1 + n)$

ج.ع $\frac{11}{4} = (٢٠.ع + ١٠.ع)$

$517 = (62 + 32) \times \frac{11}{4} =$

فكر:

هل توجد حلول أخرى لإيجاد مجموع حدود المتتابعة بدءاً من ١٠.ع إلى ٢٠.ع

٤ حاول أن تحل

٣ في المتسلسلة الحسابية $9 + 12 + 15 + \dots$ أوجد:

- أ مجموع ١٥ حداً الأولى منها.
 ب مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر.
 ج عدد الحدود التي مجموعها يساوي ٧٥٠ ابتداءً من الحد الأول.

Constracting the arithmetic sequence **تكوين المتتابعة الحسابية****مثال**٤ أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها: $ع_١ = ١١$ ، $ع_٢ = ٨٧$ ، $ع_٣ = ٩٨٠$ **الحل**

أ إيجاد قيمة ن

$$ع_٣ = \frac{ن}{٣} (١ + ن)$$

$$٩٨٠ = \frac{ن}{٣} (١١ + ٨٧)$$

$$٩٨٠ = \frac{ن}{٣} \times ٩٨ \text{ فيكون: } ن = ٣٠ \text{ حدا}$$

ب إيجاد قيمة $د$

$$ع_٣ = ١ + (ن - ١) د$$

$$٨٧ = ١١ + ١٩ د$$

$$٧٦ = ١١ - ٨٧ = ١٩ د$$

$$٤ = د$$

ج تكوين المتتابعة: $ع_٣ = ١١ + ٤ = ١٥$ ، $ع_٢ = ١٥ + ٤ = ١٩$ ، $ع_١ = ١٩ + ٤ = ٢٣$

المتتابعة الحسابية هي (١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ، ٨٧)

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها

أ $ع_١ = ٢٣$ ، $ع_٢ = ٨٦$ ، $ع_٣ = ٥٤٥$ ب $ع_١ = ١٧$ ، $ع_٢ = ٩٥$ ، $ع_٣ = ٥٨٥$ **مثال**٥ **الربط بالاستثمار:** أودع كريم في أول يناير عام ٢٠١٥ مبلغ ١٢٠ جنيهاً في صندوق توفير البريد، وفي أول كل

شهر بعد ذلك يزيد ما يودعه بمقدار ١٥ جنيهاً عن الشهر السابق.

أ أوجد المبلغ الذي أودعه في أول شهر ديسمبر من نفس العام.

ب أوجد مجموع ما أودعه كريم ابتداءً من أول يناير وحتى نهاية ديسمبر من نفس العام.

الحلالمبالغ الشهرية التي أودعها كريم تمثل متتابعة حسابية حدها الأول $أ = ١٢٠$ ، وأساسها $د = ١٥$ ، المدة الزمنيةمن أول يناير عام ٢٠١٥ وحتى نهاية ديسمبر عام ٢٠١٥ تكون فيها $ن = ١٢$ أ بالتعويض عن: $أ = ١٢٠$ ، $د = ١٥$ ، $ن = ١٢$ في القانون: $ع_٣ = ١ + (ن - ١) د$ فتكون $ع_٣ = ١٢٠ + ١١ \times ١٥ = ٢٨٥$ جنيهاً.ب بالتعويض عن: $أ = ١٢٠$ ، $د = ١٥$ ، $ن = ١٢$ في القانون: $ع_٣ = ١ + (ن - ١) د$ ج $١٢ \times \frac{١٢}{٣} = (١٢ \times ١١ + ١٢٠ \times ٢) = ٢٤٣٠$ جنيهاً.

فكر: هل يمكنك إيجاد جملة ما أودعه كريم خلال العام باستخدام قانون مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول والأخير وعدد الحدود؟ وضح ذلك لإيجاد المجموع.

٦ حاول أن تحل

٥ راتب سنوي: بدأ كريم العمل براتب سنوي قدره ١٩٢٠٠ جنيه، فإذا كان يحصل على علاوة سنوية مقدارها ٤٨٠ جنيهًا، فكم يكون مجموع ما يحصل عليه من رواتب في نهاية السنة العاشرة؟

تمارين ١ - ٣

أكمل ما يأتي:

- ١ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ٢٠ تساوي
- ٢ مجموع أول ١٠ أعداد زوجية في مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي
- ٣ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التي هي أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ تساوي
- ٤ مجموع الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠، ٥٠ تساوي
- ٥ مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ١٨ هو
- ٦ $\sum_{k=1}^n (1 + k) = \dots$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ٧ قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{r=1}^x (1 + r)$ يساوي:

أ ٢٥ ب ٣٠ ج ٣٥ د ٢٤
- ٨ صيغة المتسلسلة: $٤ + ٩ + ١٤ + \dots + ٥٨ - ١$ باستخدام رمز التجميع هي:

أ $\sum_{r=1}^n (1 - r)$ ب $\sum_{r=1}^n (1 - r)$ ج $\sum_{r=1}^n (1 + r)$ د $\sum_{r=1}^n (1 + r)$
- ٩ صيغة المتسلسلة: $٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢$ باستخدام رمز التجميع هي:

أ $\sum_{r=1}^x (٢ + r)$ ب $\sum_{r=1}^x (٣ + r)$ ج $\sum_{r=1}^x (١ + r)$ د $\sum_{r=1}^x (٤ + r)$

اكتشف الخطأ

- ١٠ مجموع حدود المتتابعة الحسابية $(-١٢، -٨، -٤، \dots، ١٢)$ يعطى عددًا صحيحًا موجبًا.
- ١١ مجموع الستة حدود الأولى فقط من المتتابعة الحسابية $(٢٤، ١٦، ٨، \dots، -٢٤)$ يساوي صفرًا.

أجب عن الأسئلة الآتية

- ١٢ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية $(١٤، ١٨، ٢٢، \dots)$
- ١٣ أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى لمتتابعة حسابية حدها الأول ٤ وحدها الخامس عشر ٢٦.
- ١٤ أوجد مجموع الأعداد الزوجية من ٢ إلى ٤٠.
- ١٥ أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى للمتسلسلة الحسابية $(٦ + ٤ + ٢ + \dots)$.

- ١٦ أوجد مجموع ٣٠ حداً الأولى من المتتابعة (ع) حيث $ع = (٣ + ٢)$.
- ١٧ أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢، ٥، ٨، ...، ٨٠).
- ١٨ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (١٦، ٢٠، ٢٤، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها مساوياً ٤٥٦.
- ١٩ كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة (-١٦، -١٤، -١٢، ...) ابتداءً من الحد الأول؛ لكي يكون مجموعها صفراً.
- ٢٠ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع.
- ٢١ **إدخال:** يدخر زياد من عمله اليومي ١٥ جنيهاً، فإذا كان يدخر في كل يوم مبلغاً يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. أوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوماً.
- ٢٢ **المسرح المدرسي:** مسرح مدرسي يتسع لـ ١٦ صفًا، فإذا كان الصف الأول يحتوي على ١٦ مقعدًا، وكل صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد. كم عدد المقاعد بهذا المسرح؟
- ٢٣ **الربط بالفداء:** يمتلك كريم محللاً تجارياً للسلع الغذائية، ويقوم برص ٧٨ علبة من علب التونة في صفوف بحيث يضع في الصف السفلي ١٢ علبة، والصف الذي يليه ١١ علبة، والصف الذي يليه ١٠ علب، وهكذا حتى الصف الأخير الذي يضع فيه علبة واحدة. أوجد عدد هذه الصفوف.
- ٢٤ **قرض:** اقترض رجل مبلغًا من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على ٨ أقساط، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنية، وكل قسط تالي يزيد عن القسط السابق له مباشرة ٢٠٠ جنية، فما قيمة القرض.
- ٢٥ **صيانة:** أسندت إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها، وحددت موعدًا لتسليم المبنى وكان من بين شروط التعاقد أنه في حالة التأخير عن تسليم المبنى أن يدفع ١٠٠٠ جنية غرامة عن اليوم الأول، وتزداد ١٠٠ جنية عن كل يوم تالي له، فإذا تأخر المقاول عن التسليم لمدة ٦ أيام، فكم يكون إجمالي المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير؟

نشاط



- الربط بالرياضة:** يستعد «زياد» لسباق المسافات الطويلة فقرر أن يتدرب على الجري مسافة ٤ كيلومترات في اليوم الأول، ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحدًا يوميًا.
- ١ أوجد المسافة التي يقطعها «زياد» في اليوم السابع.
- ٢ أوجد مجموع المسافات التي يقطعها «زياد» في الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).
- ٣ إذا استمر زياد في التدريب على هذا النمط دون انقطاع، فما عدد الأيام التي يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا؟

@ معلومات إثرائية



قم بزيارة المواقع الآتية:

المتتابعة الهندسية

Geometric sequence

نشاط



- (١) ارسم على قطعة من الورق المقوى مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية.
- (٢) قص المثلث إلى مثلثين قائمى الزاوية وكل منهما متساوي الساقين .
- (٣) كرر نفس العمل كما فى الشكل التالى وأوجد عدد المثلثات الناتجة فى كل مرة .



(٤) أجب عن الأسئلة الآتية :

- أ هل عدد المثلثات الصغرى الناتجة فى الشكل تكون متتابعة حسابية؟ فسر إجابتك.
- ب هل توجد علاقة ما تربط أعداد المتتابعة الناتجة؟ وما هذه العلاقة .
- ج هل بإمكانك إيجاد عدد المثلثات الناتجة من تكرار نفس النمط السابق فى الشكلين الخامس والسادس؟

نستنتج من النشاط السابق أن :

المتتابعة الناتجة من الأشكال السابقة هي (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) وهى ليست متتابعة حسابية لأن $ع_{ن+١} - ع_{ن} \neq$ مقداراً ثابتاً، ولكننا نلاحظ أنه إذا قسم أى حد من الحدود على الحد السابق له مباشرة يعطى مقداراً ثابتاً (هو العدد ٢) وتسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية .

تسمى المتتابعة (ع_ن) حيث $ع_{ن} \neq ٠$ متتابعة هندسية

إذا كان $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}} = \frac{١+ع_{ن}}{ع_{ن}}$ مقدار ثابت لكل ن \exists ص_٠ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (س).

مثال

١ بين أيّاً من المتتابعات (ع_ن) الآتية هندسية، وأوجد أساس كل منها :

- أ $ع_{ن} = ٢ \times ٣$
- ب $ع_{ن} = ٤$ ن^٢
- ج المتتابعة (ع_ن) حيث : $ع_{١} = ١٢$ ، $ع_{٢} = \frac{١}{٤} \times ع_{١}$ (حيث ن < ١)

سوف تتعلم

- تعريف المتتابعة الهندسية
- التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية
- الحد النونى للمتتابعة الهندسية .
- تعيين المتتابعة الهندسية .
- الأوساط الهندسية
- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددتين

المصطلحات الأساسية

- متتابعة هندسية
- Geometric Sequence
- حد نونى nth Term
- متتابعة تزايدية
- Increasing Sequence
- متتابعة تناقصية
- Decreasing Sequence
- متتابعة متناوبة الإشارة
- Alternating signal Sequence
- وسط هندسى Geometrical Mean

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific calculator
- برامج رسومية

الحل

$$\text{أ} \cdot \frac{1+n}{n} = \frac{1+n \times 2}{n \times 2} = \frac{1+n \times 2}{n \times 2} = 3 = 1+n-1 \quad (\text{مقدار ثابت})$$

∴ المتتابة هندسية وأساسها $r = 3$

$$\text{ب} \cdot \frac{1+n}{n} = \frac{1+n}{n} = \frac{1+n}{n} \quad (\text{ليس مقداراً ثابتاً}) \quad \therefore \text{المتتابة ليست هندسية}$$

$$\text{ج} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{n-1} \quad (\text{حيث } n < 1)$$

$$\therefore \text{المتتابة هندسية وأساسها } r = \frac{1}{4} \quad (\text{مقدار ثابت}) \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{n-1}$$

٤ حاول أن تحل

١ بين أيًا من المتتابعات الآتية هندسية وأوجد أساسها في حال كونها هندسية :

$$\text{أ} \cdot (3, 6, 12, 24, 48, 96) \quad (\text{ن.ع}) \quad \text{ب} \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}\right) \quad (\text{ن.ع})$$

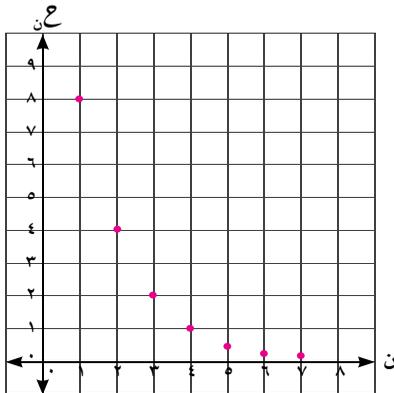
$$\text{ج} \cdot (2 \times 5) \quad (\text{ن.ع}) \quad \text{د} \cdot (3(1+n))^2 \quad (\text{ن.ع})$$

التمثيل البياني للمتتابة الهندسية : Graphical representation of geometrical sequence

مثال

٢ أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابة الهندسية (٨، ٤، ٢، ...) ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً.

الحل



أساس المتتابة $= \frac{1}{2}$ ، وبالتالي الحدود الأربعة التالية هي:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

المجال هو $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

المدى هو $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

ونلاحظ من الشكل البياني أن:

◀ حدود المتتابة متناقصة حيث $0 < r < 1$

◀ التمثيل البياني للمتتابة الهندسية يتبع الدالة الأسية.

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد الحدود الأربعة التالية للمتتابة الهندسية $(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots)$ ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً.

Finding the n^{th} term of a geometrical sequence

إيجاد الحد النوني للمتتابعة الهندسية:

من تعريف (١) يمكن استنتاج الحد النوني للمتتابعة الهندسية (ع_ن) التي حدها الأول وأساسها r كالآتي:

$$ع_1 = 1, \quad ع_2 = r, \quad ع_3 = r^2, \quad ع_4 = r^3$$

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النوني لهذه المتتابعة هو: $ع_n = r^{n-1}$

مثال

٣ في المتتابعة الهندسية (٢، ٤، ٨،) أوجد:

أولاً: الحد الخامس . ثانياً: رتبة الحد الذي قيمته ٥١٢.

الحل

$$\therefore 1 = 2, \quad r = \frac{4}{2} = 2, \quad ع_n = 1 \times (2)^{n-1}$$

$$\therefore ع_5 = r^4 = 2^4 = 16 \times 2 = 32 \text{ أى أن قيمة الحد الخامس } 32$$

$$\therefore ع_n = 1 \times r^{n-1} \quad \therefore 512 = 2 \times 2^{n-1} \text{ وبقسمة الطرفين على } 2$$

$$\therefore 2^8 = 2^{n-1} \quad \therefore 8 = n - 1 \quad \therefore n = 9$$

أى أن الحد الذي قيمته ٥١٢ هو الحد التاسع

٩ حاول أن تحل

٣ أثبت أن المتتابعة (ع_ن) حيث $ع_n = 2 \times 3^{n-1}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع.

تعيين المتتابعة الهندسية: Identifying the geometrical sequence

يمكن تعيين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول والأساس.

مثال

٤ (ع_ن) متتابعة هندسية، فإذا كان $ع_2 = 40$ ، $ع_7 = 320$ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$$\therefore ع_2 = r^2 = 40 \quad \therefore ع_7 = r^6 = 320$$

$$\therefore ع_7 = r^6 = 320 \quad \therefore ع_2 = r^2 = 40$$

وبقسمة طرفي المعادلتين (١)، (٢)

$$\therefore \frac{ع_7}{ع_2} = \frac{r^6}{r^2} \quad (\text{حيث } r \neq 0) \quad \therefore \frac{320}{40} = r^4$$

$$\text{ومنها } r = 2$$

وبالتعويض في المعادلة (١)

$$\therefore 40 = r^2 = 2^2 \times 10 \quad \text{أى أن } 10 = r^2$$

وبقسمة الطرفين على ٨ فإن $10 = 8 + 2$

∴ المتتابعة هي (٥، ١٠، ٢٠،)

تعبير شفهي:

ماذا تتوقع إذا كانت قوة الأساس r عددًا زوجيًا؟ فسر إجابتك.

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة متابعة هندسية:

لكتابة المتابعة الهندسية التي فيها $u = 5$ ، $r = 2$ مثلاً نتبع الآتي:

نكتب قيمة u (العدد 5) ثم نضغط المفتاح [=] ثم نضغط على المفتاح \times ثم نضع قيمة r (العدد 2) ثم نضغط المفتاح [=] فتعطي الحد الثاني للمتابعة وبتكرار الضغط على المفتاح [=] تعطى الحدود التالية وهكذا....

٤ حاول أن تحل

٤ (ع.ن) متابعة هندسية فيها $u = 12$ ، $r = 384$. أوجد هذه المتابعة

٥ متابعة هندسية حدودها موجبة، حدها الثاني يساوي 6، حدها العاشر يساوي 1036. أوجد المتابعة.

مثال**الربط بالتعليم**

٥ إذا كان معدل زيادة طلاب الصف الثاني الثانوي في إحدى الإدارات التعليمية هو 4% سنوياً من السنة السابقة لها مباشرة، فإذا كان عدد الطلاب حالياً 2400 طالب، فكم سيكون عددهم بعد 6 سنوات؟

الحل

تذكر أن

$$0,04 = \frac{4}{100} = 4\%$$

∴ عدد الطلاب حالياً = 2400

∴ عدد الطلاب في السنة الثانية = $2400 + 4\% \times 2400$

$$= 2400(1 + 0,04)$$

$$= 2400(1,04)$$

عدد الطلاب في السنة الثالثة = $2400(1,04) + 4\% \times 2400(1,04)$

$$= 2400(1,04)(1 + 0,04) = 2400(1,04)^2 \text{ وهكذا ...}$$

أى أن أعداد الطلاب تُكون متابعة هندسية (2400، 2400(1,04)، 2400(1,04)²، ...)

$$u = 2400، r = 1,04، n = 6$$

وبالتعويض في قانون الحد النوني للمتابعة الهندسية $u \times r^{n-1}$

$$\text{ع.ن} = (2400) \times (1,04)^5 = 2919,966966$$

أى أن عدد الطلاب بعد 6 سنوات يساوي تقريباً 2920 طالباً.

٤ حاول أن تحل**الربط باللياقة البدنية:**

٦ يمارس كمال رياضة المشى سيراً على الأقدام؛ لتجديد لياقته البدنية وإنقاص وزنه الزائد، فإذا قطع في اليوم

الأول مسافة 50 متراً، وكان يقطع في كل يوم تال ضعف المسافة التي يقطعها في اليوم السابق مباشرة.

أ) اكتب متابعة المسافات التي يقطعها يومياً. ب) أوجد المسافة التي يقطعها في اليوم السابع.

الأوساط الهندسية : Geometric Means

الأوساط الهندسية كما في الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متابعة هندسية

ويستخدم أساس المتابعة الهندسية؛ لإيجاد هذه الأوساط.

أضف إلى معلوماتك

يعرف الوسط الهندسي في الإحصاء لمجموعة من القيم الحقيقية الموجبة a_1, a_2, \dots, a_n ، a_1 بأنه الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم أي أن:
 الوسط الهندسي (GM) = $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

تعريف ٢
 إذا كانت a, b ، ج ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن b تعرف بالوسط الهندسي بين العددين a, b ، ج حيث: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ أي أنه $b^2 = ac$ فتكون $b = \pm \sqrt{ac}$

إيجاد الأوساط الهندسية :

مثال

٦ أدخل ٥ أوساط هندسية بين ٤ ، ٢٩١٦

الحل

أولاً: نوجد عدد حدود المتتابعة

يوجد خمسة أوساط بين الحدين الأول والأخير في المتتابعة الهندسية؛ لذا فإن عدد حدود المتتابعة

$$n = 5 + 2 = 7$$

ثانياً: نوجد قيمة r

الحد النوني للمتتابعة الحسابية: $a_n = ar^{n-1}$

بالتعويض عن: $a = 4$ ، $a_n = 2916$ ، $n = 7$

$$2916 = 4 \times r^{7-1} \quad \text{أي أن: } 729 = r^6$$

بقسمة الطرفين على ٤: $r^6 = 729$ أي أن: $r = \sqrt[6]{729} = 3$ ومنها $r = \pm 3$

ثالثاً: نستخدم قيمة r لإيجاد الأوساط الهندسية المطلوبة:

$$4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916 \quad \text{أو} \quad 4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916$$

$3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times$

$$4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916 \quad \text{أو} \quad 4, 12, 36, 108, 324, 972, 2916$$

$3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times, 3 \times$

الأوساط المطلوبة هي: ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢ أو ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ٩٧٢

٦ حاول أن تحل

٧ أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{1}{2}$ ، ٣٢

تفكير ناقذ :

ماذا تتوقع أن تكون العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي لعددين حقيقيين موجبين متساويين؟

بالتعويض عن $r = 2$ ، $5 = a$.
وبالتعويض عن $r = \frac{1}{3}$ ، $160 = a$.
العددان هما 160 ، 5

٩ حاول أن تحل

٩ إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين 2 ، 1458 وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هي 1 : 27 فأوجد عدد تلك الأوساط.

تمارين 1 - 4

حدد المتتابعات الهندسية فيما يلي، ثم أوجد أساسها في حال كونها هندسية:

١ (1 ، 4 ، 9 ، 16 ،)
٢ (243 ، 81 ، 27 ، 9 ،)

٣ ($\frac{1}{128}$ ، $\frac{1}{64}$ ، $\frac{1}{32}$ ، $\frac{1}{16}$ ، ...)
٤ ($\frac{1}{2^3}$)

٥ (1 - ، 3 - ، 9 - ، 27 - ،)
٦ (2^{n-1})

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية إذا علم أن :

٧ $a = 2$ ، $r = 4$ ٨ $a = -4$ ، $r = 2$ ٩ $a = 1$ ، $r = \frac{1}{3}$ ١٠ $a = -128$ ، $r = \frac{1}{3}$

أكمل ما يأتي

١١ الحد السابع من المتتابعة الهندسية (64 ، 32 ، 16 ،) يساوي

١٢ الحد السادس من المتتابعة الهندسية ($\frac{1}{343}$ ، $\frac{1}{81}$ ، $\frac{1}{27}$ ،) هو

١٣ الحد الخامس من المتتابعة (ع) حيث $2 = 3 \times 2^{n-1}$ يساوي

١٤ الحد النوني للمتتابعة الهندسية (3 ، -6 ، 12 ،) هو

١٥ الوسط الهندسي للعددين 4 ، 16 هو

١٦ إذا كان الوسط الهندسي للعددين 9 ، ص هو 15 فإن ص تساوي

١٧ إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة حدود موجبة ومنتالية من متتابعة هندسية فإن ب =

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١٨ الحد الخامس في المتتابعة الهندسية (8 ، 6 ، $\frac{9}{4}$ ،) هو :

أ $\frac{27}{8}$ ب $\frac{27}{16}$ ج $\frac{9}{4}$ د $\frac{81}{32}$

١٩ جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة :

أ (3 ، -6 ، 12 ، -24 ،) ب (-2 ، 4 ، 10 ، 16 ،)

ج ($\frac{3}{4}$ ، 1 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{9}$) د ($\frac{3}{1}$ ، 6 ، $\frac{112}{3}$ ، ...) حيث $a < 0$ ، $b < 0$

٢٠ المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هي :

أ (ع) = (4^n) لكل $n \leq 1$ ب (ع) = ($\frac{1}{4} \times 2^n$) لكل $n \leq 2$

$$ج) (ع_n) = (١ - ٢^n) \text{ لكل } n \leq ١$$

٢١) إذا كانت أ، ب، ج ثلاثة حدود موجبة ومنتالية من متتابعة هندسية فإن :

$$أ) ا ج = ب^2 \quad ب) ا ج = ٢ ب \quad ج) ب = \frac{ا + ج}{٢} \quad د) ب^2 = ا + ج$$

اكتشف الخطأ:

- ٢٢) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التي تقع على استقامة واحدة.
- ٢٣) تسمى المتتابعة (ع_n) هندسية إذا كان $\frac{ع_n}{ع_{n+1}}$ يساوى مقداراً ثابتاً يعرف بأساس المتتابعة (لكل $n \leq ١$).
- ٢٤) الأوساط الهندسية هي الحدود الواقعة بين حدين متتاليين من متتابعة هندسية، ويمكن إيجادها متى علم عدد الأوساط.
- ٢٥) الوسط الحسابي لعددتين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

أجب عن الأسئلة الآتية :

- ٢٦) إذا كانت (ع_n) متتابعة حيث $ع_n = ٥ \times ٢^n$. أثبت أنها متتابعة هندسية، ثم اكتب حدودها الثلاثة الأولى.
- ٢٧) في المتتابعة الهندسية $(\frac{١}{٨}, -\frac{١}{٤}, \frac{١}{٢}, ١, \dots)$ أوجد :
- أ) حدها العاشر ب) رتبة الحد الذي قيمته = - ١٠٢٤.
- ٢٨) بين أن المتتابعة (ع_n) هندسية حيث $ع_n = \frac{٣}{٨}(٢)^n$ ثم أوجد حدها الثامن، رتبة الحد الذي قيمته ٧٦٨.
- ٢٩) متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤. أوجد هذه المتتابعة.
- ٣٠) متتابعة هندسية حدها الأول = ٩ وحدها السادس = ٢٨٨. أوجد هذه المتتابعة.
- ٣١) أوجد المتتابعة الهندسية (ع_n) التي فيها $ع_٣ = ١٢$ ، $ع_٨ = ٣٨٤$.
- ٣٢) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثالث = ١٨، حدها السادس = ٤٨٦.
- ٣٣) أوجد المتتابعة الهندسية (ع_n) التي فيها $ع_٣ = ١٠$ ، $ع_٦ = ١٦٠$.
- ٣٤) أوجد الوسط الهندسي بين ١٦، ٤٩.
- ٣٥) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي ٥ ووسطهما الهندسي ٣.
- ٣٦) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسي الموجب، يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣.
- ٣٧) أدخل أربعة أوساط هندسية بين ٢، ٦٤.
- ٣٨) أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{٨}{٣٧}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$.
- ٣٩) إذا كان الوسط الهندسي للعددين ٢، س هو ٨ فما قيمة س؟
- ٤٠) عدنان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسي ٣، فما العدنان؟
- ٤١) **الربط بالبيئة:** يصب الماء في خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة، فإذا صب في اليوم الأول ١٢ لتراً

فبعد كم يوماً يصب فيه ١٥٣٦ لترًا؟

٤٢ **الربط بالسكان:** يزداد عدد السكان في إحدى المدن بمعدل ثابت ٣ % كل سنة . كم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد ٥ سنوات، إذا علم أن عدد السكان الحالي هو ٦٠٠٠٠٠ نسمة؟

٤٣ **الربط بالتجارة:** سيارة ثمنها عند شرائها ١٢٠ ألف جنيه ، فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًا بنسبة ١٢ % من السنة السابقة لها مباشرة، فكم تكون قيمة السيارة بعد ٥ سنوات؟

٤٤ **الربط بالدخل:** موظف راتبه الشهري ١٢٠٠ جنيه، ويحصل على علاوة سنوية بنسبة ٦ % زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة، كم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات؟

نشاط



الزيادة السكانية

إذا كان عدد السكان في مدينة ما هو ٨٠٠٠٠ نسمة، وعلم أن معدل تزايد السكان هذه المدينة في كل عام هو ٣ % عن العام السابق له مباشرة .



- أوجد عدد السكان بعد عام واحد.
- أوجد عدد السكان بعد عامين.
- اكتب المتتابعة الهندسية الممثلة لسكان هذه المدينة .
- كم يكون عدد السكان في نهاية العام العاشر؟
- استخدم برنامج أكسيل (Excel) لتمثيل هذه البيانات في نهاية خمسة أعوام .
- بالاستعانة بالشبكة الدولية للمعلومات، اكتب بحثًا عن الزيادة المطردة في عدد السكان في مصر، ومدى تأثيرها على الدخل القومي، والحلول المقترحة لمعالجة هذه المشكلة السكانية.

معلومات إثرائية @



قم بزيارة المواقع الآتية:

Geometric Series



سوف تتعلم

- مجموع المتسلسلة الهندسية .
- استخدام رمز التجميع .
- المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية .
- تحويل الكسر العشري الدائري إلى عدد نسبي .



المصطلحات الأساسية

- متسلسلة هندسية Geometric Series
- متسلسلة هندسية غير منتهية
- Infinite Geometric Series



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية Graphical programs

سبق أن تعلمت أن المتسلسلة هي مجموع حدود متتابعة، وتعلمت كيفية إيجاد مجموعة المتسلسلة الحسابية ، والآن هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية التالية:
 $90 + 280 + 800 + \dots + 1869880$ لاحظ أنه من الصعوبة إيجاد مثل هذا المجموع بالطريقة التقليدية ، لذلك هناك حاجة إلى صيغة قانون لإيجاده بصورة سهلة وسريعة، وهذا ما سوف نتعرف عليه الآن.

مجموع المتسلسلة الهندسية : The sum of geometric series

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتابعة الهندسية وضع بينها إشارة الجمع (+) ويرمز لمجموع حدًا منها بالرمز جـ.

مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية

Sum of first n terms of an geometric sequence

أولاً : إيجاد مجموع ن حدا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت $1 + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ متسلسلة هندسية حدها الأول a ، أساسها r فإنه يمكن إيجاد المجموع جن لهذه المتسلسلة كما يلي :

$$جـ = 1 + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1) \dots$$

وبضرب الطرفين في r فإن :

$$r جـ = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (2) \dots$$

وبطرح المعادلتين يكون :

$$جـ - r جـ = 1 - ar^n \text{ أي أن :}$$

$$جـ(1 - r) = (1 - ar^n)$$

وبقسمة الطرفين على $(1 - r)$ بشرط أن $r \neq 1$.

$$جـ = \frac{(1 - ar^n)}{1 - r} , r \neq 1$$

مثال

١ أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها : $a = 3$ ، $r = 2$ ، $n = 8$

الحل

$$\frac{(1-r^n)}{r-1} = \text{مجموع المتتابعة الهندسية: جن} \\ \text{بالتعويض عن: } r=3, n=8 \\ \text{ج} = \frac{(3^8-1)}{3-1} = 255 \times 3 = 765$$

٩ حاول أن تحل

١ أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين اللتين فيهما:

أ) $r=4, n=6$ ب) $r=\frac{1}{4}, n=10$

ثانياً: إيجاد مجموع n حداً من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأخير

نعلم أن: جن $\frac{1-r^n}{r-1} = \dots (1)$

وأن: $l = Ar^{n-1}$ وبضرب الطرفين في r فتكون $Ar^n = \dots (2)$

وبالتعويض من (2) في (1) فإن: $جن = \frac{l-r}{r-1}, r \neq 1$

مثال

٢ أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية: $1 + 3 + 9 + \dots + 6561$

الحل

صيغة مجموع المتتابعة الهندسية: جن $\frac{l-r}{r-1}$

بالتعويض عن: $r=3, l=6561$

ج = $\frac{6561-1}{3-1} = \frac{19682}{2} = 9841$

٩ حاول أن تحل

٢ أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها: $r=\frac{1}{3}, l=28, A=2048$

استخدام رمز التجميع

مثال

٣ أوجد: $\sum_{r=0}^{12} 3(2)^{1-r}$

الحل

حيث أن المقدار داخل رمز المجموع على الصورة الأسية فهو يمثل متتابعة هندسية

ع = $1 = 1 + 0 - 12 = n, r=2, A=48 = 1 - 0 = (2)^3 = 1 - 0$

مجموع المتسلسلة الهندسية: جن $\frac{(1-r^n)}{r-1}$

بالتعويض عن: $r=2, n=13, A=48$

ج = $\frac{(2^{13}-1)48}{2-1} = 48 \times 255 = 12240$

فكر:

هل يمكنك إيجاد المجموع في المثال السابق بمعلومية l ، r ، n ؟ فسر إجابتك.

٦ حاول أن تحل

٢ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

$$\text{أ) } \sum_{v=1}^{16} \frac{1}{8^v} \quad \text{ب) } \sum_{r=3}^{11} 16 \left(\frac{1}{4}\right)^{r-1}$$

مثال تكوين المتتابعة الهندسية: Forming the geometric sequence

٤ أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ١، مجموع حدودها ٣٦٤.

الحل

$$\therefore 1 = a, 243 = l, 364 = \text{مجموع} \quad , \quad \text{مجموع} = \frac{l-a}{r-1}$$

$$\therefore \frac{r-243}{r-1} = 364 \quad \therefore 364 = (r-1) 364 = r - 243$$

$$\therefore 364 - 364 = r - 243 = r - 364 \therefore 243 - 364 = r - r$$

$$\therefore 363 = r \quad \text{وبقسمة الطرفين على } 363 \therefore r = \frac{1}{3}$$

المتتابعة الهندسية هي (٢٤٣، ٨١، ٢٧،)

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢٤٣ وحدها الأخير ١، مجموع حدودها ٣٦٤.

مثال

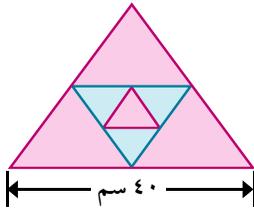
الربط بالهندسة:

٥ يبين الشكل المقابل مثلث متساوي أضلاع، طول ضلعه الخارجي يساوي ضعف

طول ضلع المثلث الداخلي الذي تنصف رؤوسه أضلاع هذا المثلث، فإذا استمر هذا

النمط نحو الداخل، فأوجد مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى في هذا النمط.

الحل



تذكر أن

محيط المثلث المتساوي
الأضلاع = ٣ × طول ضلعه

$$\text{محيط المثلث الأكبر} = 40 \times 3 = 120$$

$$\text{محيط المثلث الأصغر التالي} = 20 \times 3 = 60$$

$$\text{محيط المثلث التالي للمثلث الأصغر} = 10 \times 3 = 30$$

أي أن النمط هو: ١٢٠، ٦٠، ٣٠، إلى ١٠ حدود

مجموع المحيطات = ١٢٠ + ٦٠ + ٣٠ + ... وهي مجموع متسلسلة هندسية

$$\text{مجموع المتسلسلة الهندسية: } \text{مجموع} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{بالتعويض عن: } a = 120, r = \frac{1}{2}, n = 10$$

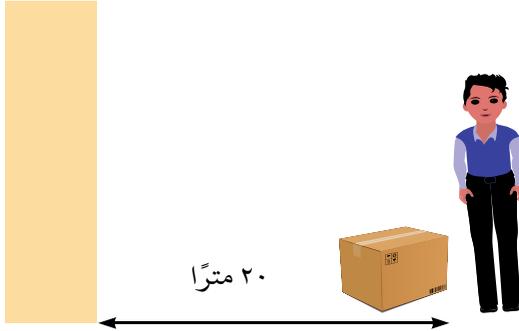
$$\text{وبالتبسيط واستخدام الآلة الحاسبة} \quad \text{ج.} = \frac{120 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 239 \frac{49}{64}$$

٤ حاول أن تحل

٥ الربط بالأدبياء: إذا تضاعفت زراعة البكتريا كل يوم (في إحدى عينات البحوث الطبية)، فكم يكون عدد البكتريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها في اليوم الأول ٨٠٠.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series

فكر و ناقش

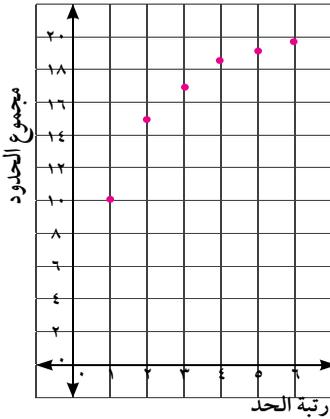


أراد زيد نقل صندوق في اتجاه حائط يبعد عنه مسافة ٢٠ متر على عدة مراحل بحيث تبلغ المسافة التي ينقل إليها الصندوق تساوي نصف المسافة المتبقية بعد كل مرحلة فهل يستطيع زيد أن يصل إلى الحائط؟

يمكنك الإجابة على ذلك من خلال دراستك المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

تعريف المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي التي لها عدد لانهائي من الحدود، وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًا فإنها تكون متقاربة؛ لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي، أما إن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة.

في بند فكر وناقش مجموع المسافات التي يقطعها زيد تعطى بالمتسلسلة:



١٠ + ٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ... وكلما زاد عدد حدودها فإن مجموعها يقترب من ٢٠ مترًا، وهو المجموع الفعلي لها، وبالتالي يمكن اعتبار أن زيد يصل إلى الحائط عندما يزداد عدد حدود المتتابعة إلى ما لانهاية، والشكل الموضح يبين التمثيل البياني للمجموع S_n لذلك فإن المتسلسلة التقاربية تقترب المجموع من عدد حقيقي حيث $|r| > 1$ وتكون غير تقاربية إذا لم يقترب المجموع من عدد حقيقي حيث $|r| \leq 1$

مثال المتسلسلات التقاربية وغير التقاربية

٦ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها؟ فسر إجابتك.

- أ) + ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ +
ب) + ٥٤ + ٣٦ + ٢٤ +

الحل

أ) نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $r = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$ فالمتسلسلة يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها

لأن: $1 > \frac{3}{5} > -1$

ب) نوجد أساس المتسلسلة الهندسية $r = \frac{36}{3} = \frac{3}{4}$ فالمتسلسلة لا يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها لأن: $\frac{3}{4} < 1$

٤ حاول أن تحل

٦ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها؟ فسر إجابتك

أ) $..... + 63 + 21 + 7$ ب) $..... + \frac{9}{3} + \frac{27}{4} + \frac{81}{8}$

The sum of the infinite geometric series

مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

علمنا أن مجموع n حداً من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة $\frac{(r^n - 1)|}{r - 1}$ وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن r^n يقترب من الصفر عندما تكون $1 > r > -1$

ويصبح المجموع: $\frac{1}{r - 1} = \infty$

تفكير ناقذ:

هل يمكنك إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانتهائية عندما $|r| \leq 1$ ؟ فسر إجابتك.

تعبير شفهي:

هل يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية في بند (فكر وناقش)؟ فسر إجابتك.

مثال

٧ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

أ) $..... + \frac{9}{3} + \frac{27}{4} + \frac{81}{8}$ ب) $..... + \frac{25}{24} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$

الحل

أ) نوجد أساس المتتابعة الهندسية: $r = \frac{27}{4} \div \frac{9}{3} = \frac{81}{8} \times \frac{3}{27} = \frac{3}{4}$ $1 > \frac{3}{4} > -1$ ∴ يوجد للمتسلسلة مجموع

∴ $1 = \frac{81}{8} = r$ ، وبالتعويض في صيغة المجموع $\frac{1}{r - 1} = \frac{1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{4}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{4}{-\frac{1}{4}} = -16$

∴ $\frac{243}{8} = \frac{\frac{81}{8}}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{\frac{81}{8}}{-\frac{1}{4}} = -16 \times \frac{81}{8} = -162$

ب) نوجد أساس المتتابعة الهندسية: $r = \frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$ $1 < \frac{15}{8}$ ∴

المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع

٤ حاول أن تحل

٧ أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

أ) $..... - 12 + 24 - 48 + 96$ ب) $..... + \frac{7}{5} + \frac{21}{10} + \frac{63}{20}$

Use the summation notation

استخدام رمز التجميع

مثال

٨ أوجد $\sum_{r=1}^{\infty} 42 \left(\frac{7}{V}\right)^{r-1}$

الحل

مجموع المتتابعة الهندسية: $\frac{1}{r-1} =$ جـ
 بالتعويض عن: $42 = 1$ ، $r = \frac{7}{V}$: جـ $= \frac{42}{\frac{7}{V}-1} = 294$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد: $\sum_{r=1}^{\infty} 56 \left(\frac{3}{4}\right)^{r-1}$

تطبيقات على المتتابعات

يمكن استخدام المتتابعات في دراسة بعض المشكلات الحياتية التي تتعلق بالإنسان من حيث مصادر الدخل والتغيرات التي تحدث له من تكاثر، ووفاة، وهجرة، والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال

٩ الربط بالدخل: يمثل الجدول التالي الدخل الشهري لأحد العمال في نهاية خمسة أعوام متتالية مقدراً بالجنيه المصري، علماً بأن هذا الدخل يخضع لمتتابعة هندسية.

الخامس	الرابع	الثالث	الثاني	الأول	العام
.....	٦٤٨	٤٣٢	٢٨٨	الدخل الشهري بالجنيه

أ أوجد أساس المتتابعة الهندسية.

ب أوجد الدخل الشهري لهذا العامل خلال كل من العامين الرابع والخامس.

ج أوجد بالجنيه المصري جملة ما يستحقه هذا العامل خلال هذه المدة.

د أوجد المتوسط الشهري لدخل هذا العامل خلال تلك المدة.

الحل

أ: المتتابعة هندسية \therefore الأساس (س) = $\frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}} = \frac{432}{288} = \frac{3}{2}$

ب الدخل الشهري خلال العام الرابع = $س \times r = 3 \times 648 = 962$ جنيهاً ،

الدخل الشهري خلال العام الخامس = $س \times r^2 = 3 \times 962 = 1458$ جنيهاً

ج جملة ما يستحقه العامل = $12(288 + 432 + 648 + \dots + 1458)$ (إلى ٥ حدود)

\therefore جن = $\frac{(1 - r^n)}{r - 1} = \frac{[1 - (\frac{3}{2})^{12}]}{\frac{3}{2} - 1} = 12 \times 288 \times \frac{[1 - (\frac{3}{2})^{12}]}{\frac{3}{2} - 1} = 45076$ جنيهاً



ويستخدم ترتيب مفاتيح الآلة الحاسبة على النحو التالي :

$$\rightarrow (3 \div 2) \times 5 - 1 = \times 1 2 \times$$

$$2 8 8 = \div (3 \div 2 - 1) =$$

$$٥) \text{ المتوسط الشهري لدخل العامل} = \frac{\text{جملة الدخل}}{\text{عدد الشهور}} = \frac{٤٥٥٧٦}{١٢ \times ٥} = ٧٥٩,٦ \text{ جنيه}$$

تفكير ناقد :

هل يمكنك إيجاد المتوسط الشهري لدخل العامل، وذلك بقسمة (٢٨٨ + ٤٣٢ + ٦٤٨ + ... إلى ٥ حدود) على ٥ سنوات؟ فسر إجابتك .

٤ حاول أن تحل

الربط بالفيزياء : تم درج كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى، فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترًا ثم بدأت تقطع ٦٠٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة . أوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف .

تمارين ١ - ٥

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١) مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التى فيها $1 = r$ ، $r = 2$ يساوى :
 أ) ٣٢ ب) ٣١ ج) ٣٠ د) ٢٩
- ٢) مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة (٤ ، ٢ ، ١ ،) هو :
 أ) ٨ ب) ١٢ ج) ١٦ د) ٢٠
- ٣) إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ هو ٤ فإن حدها الأول يساوى :
 أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤
- ٤) إذا كان مجموع عدد غير منتهٍ من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى :
 أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{3}{4}$
- ٥) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى مالانهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى :
 أ) ٠,٥ ب) ٠,٣٣٣ ج) ٠,٢٥ د) ٠,٦٦٦

اكتشف الخطأ :

- ٦) يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لانهاية عندما تكون $|r| \geq 1$
- ٧) مجموع ن حدا الأولى من حدود متتابعة هندسية فيها $|r| > 1$ أكبر من مجموع عدد غير منته من حدودها .
- ٨) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ،) أكبر من ضعف حدها الأول .

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٩٠ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية :
- أ (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، إلى ٦ حدود)
- ب (١٢٥ ، ٢٥ ، ٥ ، إلى ٦ حدود)
- ج (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ، ٧٦٨)
- ٩١ أى من المتتابعات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن :
- أ (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ...)
- ب (٣ ، -٦ ، ١٢ ، ...)
- ج ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$ ، ...)
- د (2×10^{-1})
- ٩٢ أوجد مجموع عدد غير منته من حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية :
- أ (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ،)
- ب ($\frac{81}{16}$ ، $\frac{27}{8}$ ، $\frac{9}{4}$ ،)
- ج (٢ ، $\sqrt[3]{8}$ ، ١ ،)
- د ($(\frac{2}{3})^{-n}$)
- هـ ($(\frac{2}{3})^{-n}$)
- ٩٣ أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤
- ٩٤ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموعها ١٠٩٣ وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣
- ٩٥ أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية (ع) = $(1 - 3^{-n})$ ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر.
- ٩٦ فى المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ،) أوجد أقل عدد من الحدود التي يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود أكبر من ١٠٠٠
- ٩٧ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع عدد غير منته من حدودها يساوى ٤٨ ، حدها الثانى يساوى ١٢.
- ٩٨ كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ،) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١.
- ٩٩ أثبت أن المتتابعة (ع) = (10×2^{-n}) هى متتابعة هندسية وأوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ٢٥٥٥.
- ١٠٠ (ع) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $u_6 = 6$ ، $u_3 = 3$ ، $u_9 = 9$. أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها .
- ١٠١ متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها = ٤٥ ، حدها السادس يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٩٠ . أوجد هذه المتتابعة .

- ٢١ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منتهية = ١٨، الحد الرابع منها = $\frac{17}{3}$. فما مجموعها؟
- ٢٢ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع حديها الأول والثاني = ١٦، مجموع عدد لانهائي من حدودها = ٢٥
- ٢٣ متتابعة هندسية غير منتهية، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، مجموع حديها الأول والثاني = ٩، أوجد هذه المتتابعة .
- ٢٤ متتابعة هندسية غير منتهية، وأى حد فيها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية، إذا كان حدها الرابع = ٣. أوجد هذه المتتابعة.
- ٢٥ **الربط بالدخل:** بدأ شخص العمل في مصنع بمرتب سنوي قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٠,٦% من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه في السنة السابعة، ومجموع ما يحصل عليه في السنوات السبع الأولى .
- ٢٦ **الربط بالدخل:** بدأ موظف براتب سنوي ٣٦٠٠ جنيه ويزداد هذا المرتب كل سنة بمعدل $\frac{1}{3}$ عما كان عليه في السنة السابقة، فكم يصبح مرتبه بعد ١١ سنة، وما مجموع المبالغ التي يتقاضاها خلال هذه المدة؟
- ٢٧ **الربط بالدخل:** استطاع كريم أن يوفر ١٥٠ جنيهًا في السنة عندما كان عمره ٦ سنوات، وكان في كل سنة تالية يوفر ضعف ما يوفره في السنة السابقة فإذا كان عمر كريم الآن ١٠ سنوات، وأراد شراء حاسب آلي بمبلغ ٥٠٠٠ جنيه، فهل مجموع ما وفره كريم خلال هذه المدة يكفي لشراء الحاسب؟ فسر إجابتك .
- ٢٨ **تفكير ابداعى:** إذا كونت أ، ب، ج متتابعة هندسية فأثبت أن: $\frac{2^a}{3^b} = \frac{2^b + 2^c}{2^c + 2^b}$
- ٢٩ **الربط بالرياضة:** سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ٣٦ مترًا، وفي كل مرة تصطدم بالأرض ترتفع $\frac{3}{4}$ المسافة التي سقطت منها. أوجد:
- أ المسافة التي سقطت منها الكرة عندما اصطدمت بالأرض للمرة السادسة .
- ب مجموع المسافات التي تكون الكرة قد قطعها منذ لحظة سقوطها حتى اللحظة التي اصطدمت فيها بالأرض للمرة السادسة .
- ج مجموع المسافات التي تكون الكرة قد قطعها منذ لحظة سقوطها؛ حتى تسكن.

ملخص الوحدة

المتتابعة: هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة \mathbb{N}^+ أو مجموعة جزئية منها ومدادها مجموعة من الأعداد الحقيقية \mathbb{R} مع ملاحظة الآتي :

◀ حدود المتتابعة هي صور عناصر مجالها .

◀ الرمز (u_n) يعبر عن المتتابعة بينما الرمز u_n يعبر عن حدها النوني .

◀ تخضع المتتابعة لترتيب عناصرها ويمكن حصر هذه العناصر .

◀ تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً وتكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته .

◀ تمثل المتتابعة بيانياً على أنها دالة وذلك من خلال تمثيل الأزواج المرتبة بنقاط منفصلة في المستوى الإحداثي .

المتسلسلة: هي عملية جمع حدود المتتابعة ، ويستخدم رمز التجميع " \sum " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة .

◀ **المتسلسلة المنتهية :** تحتوي على عدد محدود من العناصر وتكتب بالصورة $\sum_{r=1}^n (u_r)$

◀ **المتسلسلة غير المنتهية :** لا يمكن حصر عدد حدودها وتكتب بالصورة $\sum_{r=1}^{\infty} (u_r)$

المتتابعة الحسابية: هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة، ويرمز له عادة بالرمز (s) حيث $u_n = u_{n-1} + s$ لكل $n \geq 2$.

◀ يمكن تكوين المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (u_1) وأساسها (s) .

◀ العلاقة بين n ، u_n هي $u_n = u_1 + (n-1)s$ ، ب ثابتان ، s أساس المتتابعة وهذه علاقة خطية تمثل بيانياً بمجموعة من النقاط .

◀ تكون المتتابعة تزايدية إذا كان $s > 0$ ، وتكون تناقصية إذا كانت $s < 0$.

◀ الحد النوني للمتتابعة الحسابية (u_n) التي حدها الأول u_1 وأساسها s يعطى بالعلاقة : $u_n = u_1 + (n-1)s$

◀ ولإيجاد الحد الأخير (u_n) له يكون : $u_n = u_1 + (n-1)s$

◀ إذا كانت u_1 ، u_2 ، u_3 ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن u_2 تعرف بالوسط الحسابي بين العددين u_1 ، u_3 حيث $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$

◀ يمكن إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين ، ويكون عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + 2

◀ مجموع n حداً الأولى من متسلسلة حسابية :

أولاً : بمعلومية حدها الأول والأساس : $S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)s]$

ثانيًا : بمعلومية حدها الأول والأخير : $\frac{n}{r} = (A+L)$

المتتابة الهندسية: تسمى المتتابة (ع_n) حيث $r \neq 0$. متتابة هندسية إذا كان $\frac{ع_{n+1}}{ع_n} =$ مقدار ثابت لكل ن

\exists ص+ ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابة ويرمز له بالرمز (ر)

◀ تمثيل المتتابة الهندسية يتبع الدالة الأسية من خلال أزواج مرتبة بنقاط منفصلة في المستوى الإحداثي.

◀ الحد النوني للمتتابة الهندسية (ع_n) التي حدها الأول أ وأساسها ر يعطى بالعلاقة $ع_n = أ \times ر^{n-1}$

◀ إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة حدود متتالية من متتابة هندسية فإن ب تعرف بالوسط الهندسي بين العددين

$$أ ، ج حيث ب = \sqrt{أ \times ج} .$$

◀ مجموع ن حدا الأولى من متسلسلة هندسية :

$$\text{أولاً : بمعلومية حدها الأول والأساس : } ج_n = \frac{أ(ر^n - 1)}{ر - 1} ، ر \neq 1$$

$$\text{ثانيًا : بمعلومية حدها الأول والأخير : } ج_n = \frac{أ - ل}{ر - 1} ، ر \neq 1$$

◀ المتسلسلة الهندسية غير المنتهية : لها عدد لانتهائي من الحدود .

◀ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية : $ج_\infty = \frac{أ}{1 - ر}$ ، $ر \neq 1$ حيث $|ر| < 1$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

اختبار تراكمي

مقارنات: بين أوجه الشبه والخلاف بين كل من:

١ المتتابعات والمتسلسلات.

٢ الحد النوني للمتتابعة الحسابية، والحد النوني للمتتابعة الهندسية.

٣ مجموع المتسلسلة الحسابية، ومجموع المتسلسلة الهندسية.

أسئلة ذات إجابات قصيرة :

٤ أوجد قيمة الحد الأول (١) في كل من:

أ المتتابعة الحسابية التي فيها: $u = 3$ ، $u_7 = 32$ ب المتتابعة الهندسية التي فيها: $r = \frac{1}{3}$ ، $u_6 = \frac{1}{16}$

ج المتسلسلة الحسابية التي فيها: $u = 6$ ، $u_{12} = 216$ د المتسلسلة الهندسية التي فيها: $r = 2$ ، $u_8 = 256$

أسئلة ذات إجابات متعددة:

٥ اكتب ثلاث متتابعات بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة ليست حسابية أو هندسية وتبدأ كل منها كالاتي: ٢، ٦، ...

٦ اكتب ثلاث متتابعات هندسية الحد الأول لكل منها ١٦ بحيث تكون الأولى تزايدية والثانية تناقصية والثالثة ثابتة، ثم أوجد مجموع إحدى هذه المتتابعات إلى ما لانهاية.

٧ اكتب المتسلسلة الهندسية $64 + 32 + 16 + \dots$ بطريقتين مختلفتين باستخدام رمز المجموع.

٨ **تبرير:** متى يكون للمتسلسلة الهندسية اللانهائية مجموع، ومتى لا يكون لها مجموع؟ وضح تبريرك.

تطبيقات حياتية:

٩ **قرض:** اقترض تاجر مبلغاً من المال، واتفق على أن يقوم بسداده على النحو التالي، القسط الأول ٥٠٠٠ جنيه، وكل قسط تالي يزيد عن القسط الأول بمقدار ٥٠٠ جنيه، فإذا كان عدد الأقساط ١٠ فما قيمة القرض؟

١٠ **دخل:** إذا كان الدخل السنوي لإحدى المؤسسات ٨٤٠٠٠٠ جنيه، ويزداد سنوياً بمقدار ٤٨٠٠٠ جنيه، فبعد كم سنة يصبح دخلها ١٤٦٤٠٠٠ جنيه.

١١ **تجارة:** اشترى رجل جهازاً كهربائياً ودفع من ثمنه مقدماً ٨٠٠ جنيه، واتفق مع البائع على سداد باقى المبلغ على أقساط شهرية لمدة عامين يبدأ القسط الأول بمبلغ ١٠٠ جنيه، ويزداد كل قسط بعد ذلك بمبلغ ١٠ جنيهات. أوجد المبلغ الكلي الذى سيدفعه الرجل ثمناً للجهاز.

أسئلة ذات إجابات طويلة:

- ١٢) إذا كانت (١٥)، (٣ ك + ٢)، (٤ ك - ٥)، متتابعة حسابية فأوجد قيمة ك .
- ١٣) أوجد المتتابعة الحسابية التي مجموع حديها الخامس والعاشر يساوي ٢٠ ، حدها السابع يساوي ثلاثة أمثال حدها الرابع.
- ١٤) متتابعة حسابية حدها العشرين يساوي ٤١ ، يزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة . أوجد هذه المتتابعة.
- ١٥) (ع) متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٥$ ، $ع_٧ = \frac{٧}{٣٧}$ ، أوجد هذه المتتابعة.
- ١٦) متتابعة حسابية فيها $ع_{١٢} = ٣٨$ ، $ع_{٣٥} = ٢٤٥$. أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى منها.
- ١٧) متتابعة حسابية فيها مجموع الحدين التاسع عشر والعشرين يساوي ١٤٤ ، مجموع الحدين العشرين والحادي والعشرين يساوي ١٥٢ أوجد:
- أ) الحد العشرين.
- ب) عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول؛ ليكون المجموع ٧٢٠

الوحدة الثانية

التباديل والتوافيق *Permutations, combinations*

مقدمة الوحدة

العد من المهارات الأساسية في الرياضيات ، فكثيرًا ما تواجهنا مسائل نحتاج في حلها إلى إجراء عمليات عد بطرق مختلفة ، ومن خلال هذه الوحدة سوف نتعرف على إستراتيجيات مختلفة للعد، ومنها مبدأ العد الأساسي، ومن أهم تطبيقاته: التباديل التي تستخدم في معرفة عدد الطرق التي يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة. التوافيق: وهي الاختيار دون مراعاة الترتيب. ولقد كان للعلماء العظام عمر الخيام وإسحاق نيوتن، وبسكال الدور الأكبر في هذا المجال الذي مازال ساريًا حتى اليوم.

مخرجات تعلم الوحدة

في نهاية الوحدة، وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- ✚ يتعرف مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- ✚ يتعرف مقدمة عن كل من التباديل والتوافيق والعلاقة بينها.
- ✚ يستخدم الحاسوب في حساب كل من التباديل والتوافيق.

المصطلحات الأساسية

Order	ترتيب	Tree Diagram	شجرة بيانية	مبدأ العد الأساسي
Committee	لجنة	Factorial	مضروب	Fundamental Counting Principle
Subset	مجموعة جزئية	Permutations	تباديل	مبدأ العد المشروط
		Combinations	توافيق	Conditional Principle of Counting
		Elements	عناصر	عملية

الأدوات والوسائل

Scientific Calculator	آلة حاسبة علمية
Graphical Computer Programs	برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): مبدأ العد .
- الدرس (٢ - ٢): مضروب العدد - التباديل.
- الدرس (٢ - ٣): التوافيق.

مخطط تنظيمي للوحدة



مبدأ العد

Fundamental Principle of Counting

قميص أ قميص ب



بنطلون ع

بنطلون ص

بنطلون س

فكر و ناقش

إذا طلب منك ارتداء قميص وبنطلون من بين ٢ قميص و ٣ بنطلون. فكم عدد طرق الاختيار؟

مثال

١ كم عدد طرق اختيار طالب من بين ثلاثة طلاب (أشرف - محمد - حسن) وطالبة من بين طالبتين (سمر - منى).

الحل

في هذا المثال نجد من السهل معرفة عدد طرق الاختيار فمثلاً يمكننا اختيار أشرف، سمر أو أشرف، منى أو محمد، منى أو حسن، سمر... إلخ وسوف نعبر عن ذلك بالمخطط البياني التالي، ويسمى بمخطط الشجرة البيانية.

الطلاب	الطالبات	الاختيار
أشرف	سمر	أشرف، سمر
	منى	أشرف، منى
محمد	سمر	محمد، سمر
	منى	محمد، منى
حسن	سمر	حسن، سمر
	منى	حسن، منى

عدد طرق اختيار طالب من ثلاثة طلاب = ٣ طرق
عدد طرق اختيار طالبة من طالبتان = ٢ طريقة
∴ عدد طرق الاختيار = ٢ × ٣ = ٦ طرق

٤ حاول أن تحل

١ في بند فكر وناقش كم عدد طرق الاختيار الممكنة؟

مثال

٢ كم عدد مكون من ثلاثة أرقام، بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢، ٤، ٩} ورقم المئات من العناصر {١، ٥}؟

سوف تتعلم

- مفهوم مبدأ العد وتطبيقات بسيطة عليه.
- مبدأ العد الأساسى.
- مبدأ العد المشروط.

المصطلحات الأساسية

- مبدأ العد الأساسى
- Fundamental Counting Principle
- عملية
- شجرة بيانية
- Tree Diagram

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- Scientific Calculator
- حاسب آلى مزود ببرامج رسومية.

الحل

العدد	خانة المئات	خانة العشرات	خانة الآحاد
١٢٣	١	٢	٣
٥٢٣	٥	٤	٣
١٤٣	١	٩	٣
٥٤٣	٥	٢	٣
١٩٣	١	٤	٣
٥٩٣	٥	٩	٣
١٢٧	١	٢	٧
٥٢٧	٥	٤	٧
١٤٧	١	٩	٧
٥٤٧	٥	٢	٧
١٩٧	١	٤	٧
٥٩٧	٥	٩	٧

من الشجرة البيانية نجد أن:

عدد طرق اختيار رقم الآحاد \times عدد طرق اختيار رقم العشرات \times عدد طرق اختيار رقم المئات = $2 \times 3 \times 2 = 12$ طريقة
الأمثلة السابقة توضح التعريف الآتي:

تعلم

Fundamental Counting Principle

مبدأ العدد الأساسي

تعريف: إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوي m طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثانٍ n طريقة، وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث p طريقة وهكذا.... فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $m \times n \times p \times \dots \times m$

مثال

٣ كم عدد الاختيارات التي يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبد، دجاج، سمك) ومشروبًا واحدًا من المشروبات (برتقال، ليمون، مانجو).

الحل

عدد طرق اختيار الوجبة = ٣ طرق، عدد طرق اختيار المشروب = ٣ طرق
عدد طرق الاختيار = $3 \times 3 = 9$ طرق.

٤ حاول أن تحل

٦ مطعم يقدم ٦ أنواع من الفطائر، ٤ أنواع من السلطات، ٣ أنواع من المشروبات. كم عدد الوجبات التي يمكن أن يقدمها يوميًا على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من كل من الفطائر والسلطات والمشروبات؟

مثال

Conditional Principle of Counting

(مبدأ عد مشروط)

٤ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠، ١، ٢، ٣، ٤}؟

الحل

نبدأ بخانة المئات المشروطة (لا يمكن استخدام الصفر جهة اليسار)

عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = 4

عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات = 4

عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآحاد = 3

∴ عدد الطرق الكلية = $4 \times 4 \times 3 = 48$ طريقة

الخانة	الآحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	3	4	4

٦ حاول أن تحل

٢ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٧}، بحيث يكون رقم العشرات زوجياً.

تمارين ٢ - ٢

اختر الأجوبة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١ عدد طرق جلوس 4 طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي:

- أ 1 ب 4 + 4 ج 4 × 4 د 1 × 2 × 3 × 4

٢ عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٥} يساوي:

- أ 2 × 3 ب 2 × 4 ج 3 × 3 د 4 × 3

٣ عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢، ٣، ٤، ٦، ٨} تساوي:

- أ 3 × 6 × 8 ب 3 × 3 × 4 ج 2 × 3 × 4 د 1 × 3 × 2

٤ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٥}

٥ كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٢، ٣، ٤، ٦، ٨} بحيث يكون رقم الآحاد ٦؟

٦ تبدأ لوحات ترخيص السيارات في إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

٧ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢، ٥، ٨، ٩} بحيث تكون أصغر من ٩٠٠؟

٨ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول في إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار، أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول.



سوف تتعلم

- مضروب العدد
- التباديل



المصطلحات الأساسية

- مضروب العدد
- Factorial of a Number
- Permutatins
- التباديل
- التباديل الجزئية
- Sub-Permutatins



الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية

فكر و ناقش



استعن بما درسته في الدرس السابق للإجابة عن الأسئلة الآتية:
 (١) كم تكون عدد طرق جلوس أربعة طلاب علي ثلاثة مقاعد في صف؟
 (٢) كم عدد طرق وقوف خمسة متسابقين على حافة حمام سباحة استعدادًا للقفز؟

تعلم



تعريف

المضروب: مضروب العدد الصحيح الموجب n يكتب على الصورة $n!$ ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n حيث:
 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

لاحظ أن:

$$\begin{aligned} \leftarrow \text{عندما } n = 0 \text{ فإن } n! = 1 & \leftarrow \text{عندما } n = 1 \text{ فإن } n! = 1 \\ \leftarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 & \leftarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \end{aligned}$$

وبوجه عام فإن: $n! = (n-1)! \times n$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$

مثال

١ أوجد $\frac{n!}{8!}$ (أ) إذا كان $n! = 120$ فما قيمة n (ب)

الحل

أ $\frac{n!}{8!} = 9 \times 10 = \frac{9 \times 10}{8!} = \frac{n!}{8!} = 90$

ب $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ لذلك فإن $n = 5$

٢ حاول أن تحل

١ أوجد: (أ) $\frac{15!}{12!}$ (ب) $\frac{9!}{7!} + \frac{7!}{5!}$

مثال

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة: $30 = \frac{n!}{2-n!}$

الحل ◀

$$\therefore n = 6 \quad \therefore n(1-n) = 6 \times 5 \quad \therefore n = \frac{n(1-n)}{2-n} = \frac{30}{2-n}$$

٩ حاول أن تحل

٢ إذا كان $\frac{1}{n} + \frac{2}{1+n} = \frac{56}{2+n}$ فأوجد قيمة n

تفكير ناقد: إذا كان $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ فما قيمة n ؟

التباديل Permutations

مثال تمهيدي: من مجموعة الأرقام {٢، ٣، ٥} كم عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة منها؟ الأعداد هي: ٥٣٢، ٣٥٢، ٥٢٣، ٣٢٥، ٢٣٥، ٢٥٣. يسمى كل عدد من هذه الأعداد تبديله للأرقام. وعددها $3 \times 2 \times 1 = 6$ وتكتب $3!$ وتقرأ (٣ لام ٣). والجدول التالي يوضح ذلك:

المئات	العشرات	الآحاد
٣	٢	١

لذلك فإن التبديله لعدد من الأشياء هي وضعها في ترتيب معين.

يرمز لعدد تباديل n من العناصر المتميزة مأخوذة ر في كل مرة بالرمز $n!$ حيث:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (2-n)(1-n) \text{ حيث } n \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 0$$

$$1! = 1$$

تفكير ناقد

فمثلاً:

$$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040 \quad 6! = \frac{7!}{7} = 720 \quad 3! = \frac{6!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6$$

نستنتج مما سبق أن:

$$n! = \frac{n!}{n-r} = \frac{n!}{n-r} \text{ حيث } n \geq r, n \in \mathbb{N}, n \geq 0$$

مثال

٢ أوجد قيمة كل من:

- أ $7!$ ب $6!$ ج $4!$

الحل ◀

أ $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$
 ب $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$
 ج $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ماذا تلاحظ من العبارتين ب، ج؟

استخدام الحاسبة

يرمز للتباديل بالحاسبة العلمية بالرمز $n!$ ونستخدم فيها المفاتيح \times Shift لحساب قيمة $n!$ بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح $=$ 2 \times Shift 5 الجواب = 20

٢٤ حاول أن تحل

٣ احسب قيمة كل من: أ ${}^n P_r + {}^n P_s$ ب $\frac{{}^n P_r}{{}^n P_s}$

مثال

٤ أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد في صف واحد.

الحل

لدينا ٧ مقاعد يراد اختيار خمسة منها في كل مرة

∴ عدد الطرق = ${}^7 P_5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

استخدام الآلة الحاسبة: = 5 (npr) × 7 (SHIFT)

٢٥ حاول أن تحل

٤ كم يبلغ عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية.

مثال (الترتيب في دائرة)

٥ بكم طريقة يمكن ترتيب ٤ أشخاص في أربعة مقاعد على شكل دائرة

الحل

في هذه الحالة يجلس الشخص الأول بطريقة واحدة ، أما الشخص الثاني فيجلس بطرق عددها ٣ الشخص الثالث يجلس بطرق عددها ٢ والأخير يجلس بطريقة وحيدة.

عدد طرق ترتيبهم = $3 \times 2 \times 1 = 6$

تفكير ناقد: هل يمكنك استنتاج عدد طرق ترتيب ٥ من الأشخاص في دائرة؟

٢٦ حاول أن تحل

٥ بكم طريقة يمكن ترتيب ٩ أشخاص في تسعة مقاعد على شكل دائرة.

مثال

٦ إذا كان ${}^n P_r = 840$ فأوجد قيمة r

الحل

نبدأ بقسمة العدد ٨٤٠ على ٧ ثم بقسمة ناتج القسمة على ٦ ثم نقسم ناتج القسمة على ٥

وهكذا حتى نصل إلى العدد ١

∴ العدد ${}^n P_r = 840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4$

∴ ${}^n P_r = 4$ ∴ $r = 4$ ∴ ${}^n P_r = 4$ ∴ $r = 4$

٢٧ حاول أن تحل

٦ إذا كان ${}^n P_r = 504$ فأوجد قيمة r

تفكير ناقد: (١) أوجد قيمة r كلاً من: ${}^n P_r$ ، ${}^n P_s$ ماذا تلاحظ؟

٧	٨٤٠
٦	١٢٠
٥	٢٠
٤	٤
١	١

تمارين ٢ - ٢

اختر الأجوبة الصحيحة من بين الإجابات من (١) إلى (٧):

١) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة
 أ) ٢ ب) ٢٣ ج) ٦٦ د) ١٣٢

٢) إذا كان $ل = ٦٠$ فإن ر تساوى
 أ) ٤ ب) ٣ ج) ٢ د) ٥

٣) إذا كانت $ل = ١٢٠$ فإن قيمة ن:
 أ) ٦ ب) ٥ ج) ٤ د) ٣

٤) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى
 أ) ٤ ب) ٩ ج) ١٠ د) ٢٤

٥) عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوى
 أ) ٤٨ ب) ٣٠ ج) ١٢ د) ٤

٦) عدد طرق ترتيب ٧ أطفال في دائرة يساوى
 أ) ١ ب) ٧ ج) ٧٢٠ د) ٥٠٤٠

٧) رقم تليفون يتكون من ٨ منازل
 جـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣، ٤، ٥، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد، كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة.

أ) ٤٩٩٩٩٩٩ ب) ٤٠٠٠٠٠٠ ج) ٤٩٩٩٩٩٩٩ د) ١٠٠٠٠٠٠٠

٨) بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة - فراخ - كبدة) ومشروبين (عصير - مياه غازية) (مثل ذلك بمخطط الشجرة البيانية).

٩) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤؟

١٠) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤؟

١١) كم عددًا زوجيًا مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤؟

١٢) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و٤ سيدات؟



١٣ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاث أحجام (صغير ، متوسط ، كبير) وخمس نكهات (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاته). كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحدة من الآيس كريم؟

١٤ من مجموعة الحروف { أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و } أوجد

أ عدد طرق اختيار حرف واحد

ب عدد طرق اختيار حرفين مختلفين

١٥ أوجد قيمة كل من:

أ $5 \div 7$

د $3^2 \times 3^3$

ج $2^3 \times 2^0$

و $2^7 + 2^7$

ب $3^3 - 2^3$

هـ $2^8 + 2^8$

١٦ أوجد قيمة n التي تحقق كل من:

أ $24 = \frac{n}{2}$

ج $2730 = n!$

ب $42 = \frac{1+n}{1-n}$

د $50 = 2^m + 2^m + 2^m$

١٧ أوجد قيمة n إذا كان:

أ $210 = n^2$

ب $12 = \frac{1-2n}{n}$

١٨ إذا كان $n! = 14 \times n^{n-1}$ فأوجد قيمة n .

١٩ أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص.

٢٠ من بين ثمانية طلاب، بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للأشتراك في فرق كرة القدم وكرة السلة وكرة الطائرة على الترتيب.

٢١ أثبت أن: $2^{m+n} = \frac{2^m + 2^n}{2}$

نشاط

١- إذا كانت $S = \{2, 3, 5, 7, 9\}$

أ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

ب كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

ج كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

د كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

هـ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم أحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام؟

التوافيق

Combinations



تمهيد

يراد اختيار ناديين من بين مجموعة مكونة من أربعة أندية { أ ، ب ج ، د } في إحدى مباريات كرة القدم ، فإن كل التبديلات الممكنة هي:

{ أ ، ب } ، { أ ، ج } ، { أ ، د } ، { ب ، أ } ، { ب ، ج } ، { ب ، د } ، { ج ، أ } ، { ج ، ب } ، { ج ، د } .

نلاحظ من البيان السابق أن الاختيار { أ ، ب } يختلف عن الاختيار { ب ، أ } وهكذا... فإذا أردنا الاختيار مما سبق دون مراعاة للترتيب فإن جميع الاختيارات الممكنة هي: { أ ، ب } ، { أ ، ج } ، { أ ، د } ، { ب ، ج } ، { ب ، د } ، { ج ، د } .
ويسمى كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقاً "

التوافيق Combinations

تعريف عدد التوافيق المكونة كل منها من r من الأشياء والمختارة من بين n من العناصر في نفس الوقت هو ${}^n C_r$ حيث $r \geq 0$ ، $r \leq n$ ، $r \geq 0$ ، $n \geq 0$ ، $n \neq 0$.

في التمهيد السابق نجد أن:

يرمز لعدد توافيق 4 عناصر مأخوذة منها 2 في كل مرة بالرمز ${}^4 C_2$ وتقرأ (4 قاف 2) أو بالرمز $\binom{4}{2}$ وتقرأ (4 فوق 2)

ونلاحظ في هذا التمهيد أن عدد طرق الاختيار = 6 طرق .

$${}^4 C_2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال

١ أوجد ناتج كل من

أ ${}^5 C_2$

ب ${}^7 C_3$ (ماذا تلاحظ)

الحل

ب ${}^7 C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$

أ ${}^5 C_2 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$

سوف تتعلم

- مفهوم التوافيق وتطبيقات بسيطة عليها.
- مثلث باسكال.

المصطلحات الأساسية

Combinations	توافيق
Elements	عناصر
Order	ترتيب
Committee	لجنة
Subset	مجموعة جزئية

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - حاسب آلي

أضف إلى معلوماتك

يمكن أن تكتب التوافيق على

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نلاحظ أن: $ق٧ = ق٢ + ق٥$ (لاحظ أن: $٧ = ٢ + ٥$)

$$ق٧ = ق٢ + ق٥$$

$$ق٧ = ق٢ + ق٥$$

٢٤ حاول أن تحل

١ أوجد قيمة $ق١٧$: $ق١٧$ بدون استخدام الحاسبة.

استخدم الحاسبة

نشاط

يمكن استخدام المفاتيح \div (SHIFT) من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافيق $({}^nC_r)$

١ باستخدام الحاسبة أوجد قيمة $ق٧ + ق٢$

الحل

بالضغط على المفاتيح بالتتابع \rightarrow 5 (SHIFT) \div 4 $+$ 7 (SHIFT) \div 2 $=$ الناتج = ٢٦

مثال

٢ إذا كان: $ق٢٨ = ق٣٨ - ق٤٧$

الحل

$$ق٢٨ = ق٣٨ - ق٤٧$$

أما: $ق٢ = ق٣٨ - ق٤٧$ أي أن: $ق٢ = ق٣٨ - ق٤٧$

وهي أكبر من قيمة $ق٢$ ، لذلك هي ترفض

$$أو: $ق٢ + ق٣٨ = ق٤٧$ $ق٣٠ = ق٣٨ - ق٤٧$ $ق٣٠ = ق٣٨ - ق٤٧$ $ق٣٠ = ق٣٨ - ق٤٧$$$

٢٤ حاول أن تحل

٢ إذا كانت $ق٢٨ = ق٣٨ - ق٤٧$ ، فأوجد قيمة $ق٢$.

مثال

٣ بكم طريقة يمكن اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص.

الحل

حيث إن الاختيار لا يعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقاً.

$$عدد الاختيارات = ق٩ = \frac{٩!}{٤!}$$

٢٤ حاول أن تحل

٣ اشترك ٧ أشخاص في مسابقة للشطرنج، بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين. أوجد عدد مباريات المسابقة.

مثال  مبدأ عد

٤ بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و ٥ سيدات.

الحل 

عدد طرق اختيار رجلين من ٧ رجال = ${}^7C_2 = ٢١$

عدد طرق اختيار سيدة من ٥ سيدات = ${}^5C_1 = ٥$

وطبقاً لمبدأ العد فإن عدد طرق تكوين اللجنة = $٥ \times ٢١ = ١٠٥$ طريقة

تفكير ناقد: بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال و ٣ سيدات من بين ٦ رجال و ٥ سيدات؟

٦ حاول أن تحل

٤ فصل دراسي به ١٠ طلاب، ٨ طالبات. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب

وطالبتين من هذا الصف؟

كما نلاحظ أن:

كل صف يبدأ بالواحد لأن ${}^1C_1 = ١$ ، وينتهي بالواحد لأن ${}^1C_1 = ١$

كل عدد في أى صف باستثناء الصف الأول يساوى مجموع العددين الموجودين أعلاه فى الصف الذى يعلوه مباشرة.

كفى الصف الثالث نجد: ١، ٢+١، ١+٢، ١

وفى الصف الرابع نجد: ١، ٣+١، ٣+٣، ١+٣، ١ وهكذا.

ك يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت زوجية)

ك وتماثل حول العددين الذين يتوسطان الصف (إذا كانت فردية)

ك وهذا مايطابق العلاقة السابقة ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

تطبيق على النشاط:

أثبت أن: ${}^1C_0 + {}^1C_1 + {}^2C_0 + {}^2C_1 + {}^2C_2 + {}^3C_0 + {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3 = ٢^٣$

تمارين ٢ - ٣  

اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات

١ عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى.....

أ ١٥ ب ١٠ ج ٢٠ د ٣٥

٢ عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة يساوى.....

أ ٣٠ ب ١٥ ج ٢٤ د ١٠

٣ عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء يساوى.....

أ ١٥ ب ٨ ج ٦٠ د ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٤ احسب قيمة 3P_1 ، ${}^{11}P_3$ ، ${}^{100}P_1$.
- ٥ إذا كان ${}^nP_3 = 120$ أوجد قيمة nP_9 .
- ٦ إذا كان ${}^{n+1}P_2 = \frac{5}{3} {}^nP_2$ فأوجد قيمة n .
- ٧ إذا كان ${}^nP_3 = \frac{1}{30} n$ فأوجد قيمة n .
- ٨ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية؟
- ٩ يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف؟
- ١٠ اكتب بدلالة التباديل كل من:

٥ ${}^{س}P_٣$

ج ٥P_١

ب ${}^{١٩}P_١$

أ ٨P_١

١١ اكتب مستخدمًا الصورة nP_r كل مما يأتي:

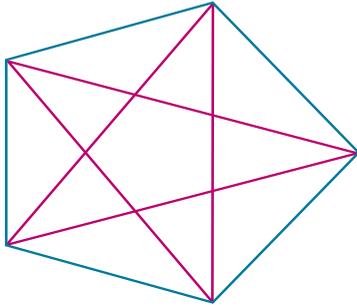
٥ $\frac{{}^٨P_١}{١}$

ج $\frac{{}^{١٠}P_١}{٤}$

ب $\frac{{}^٩P_٣}{٣}$

أ $\frac{{}^٨P_١}{٢}$

نشاط



سبق أن درست أن قطر الشكل الهندسي هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين وعلمت أن:
عدد أقطار المثلث = صفر
عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢
عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥
فهل يمكنك إيجاد عدد أقطار الأشكال الآتية:

- ١ الشكل السداسي ، الشكل الثماني ، شكل هندسي ذو عشرة أضلاع.
- ٢ هل يمكنك استخدام التوافق لكتابة قاعدة توجد من خلالها عدد أقطار أي شكل هندسي؟ ابحث ذلك مع معلمك ومن خلال الشبكة الدولية للمعلومات.

ملخص الوحدة

مبدأ العد الأساسي: إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوي n طريقة، وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوي m طريقة فإن عدد طرق إجراء العمل الأول والعمل الثاني = $m \times n$ طريقة.

التباديل: إذا كانت s مجموعة عدد عناصرها n فإن كل ترتيب لبعض أو كل عناصر هذه المجموعة يسمى تبديلاً. لتكن s مجموعة عدد عناصرها n ، فإن كل ترتيب عدد عناصره r يمكن تكوينه من المجموعة s يسمى تبديلاً، حيث $0 \leq r \leq n$ ، ويرمز لعدد التباديل الجزئية المكونة من r عنصر المأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز ${}^n P_r$ (وتقرأ n لام r)

$${}^n P_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \text{ حيث } 0 \leq r \leq n$$

نظرية: عدد التباديل الممكنة من مجموعة عدد عناصرها n يساوي $n!$ (ويعرّف $n!$ بـ $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$) ويرمز لحاصل الضرب السابق بالرمز $n!$ (ويقرأ مضروب n)

التوافيق: إذا كانت s مجموعة عدد عناصرها n ، فإن كل اختيار عدد عناصره r حيث $(0 \leq r \leq n)$ يمكن أخذه من عناصر المجموعة s دون مراعاة للترتيب يسمى توفيقاً.

ويرمز لعدد التوفيقات المكونة من r عنصر المأخوذة من n عنصر بالرمز ${}^n C_r$ (ويقرأ n قاف r)

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

١ عدد طرق تكوين عدد أولي مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣، ٤، ٥ هو.....
 أ) ٦ ب) ٣ ج) ١ د) ٥ صفر

٢ عدد طرق تكوين العدد ٥٤٧٦ من الأعداد ٤، ٥، ٦، ٧ هو.....
 أ) ٢٤ ب) ١٦ ج) ١ د) ٥ صفر

٣ عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٥ أرقام غير الصفر هو.....
 أ) $3 \times 4 \times 5$ ب) $3 + 4 + 5$ ج) $5 \times 5 \times 5$ د) $1 \times 2 \times 3$

٤ إذا استخدمت حروف كلمة سلم في كتابة كلمة من ثلاثة حروف مختلفة فإن عدد الكلمات الناتجة يساوي.....
 أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ١

الوحدة الثالثة

التفاضل والتكامل

Calculus

مقدمة الوحدة

مما لاشك فيه أن علم التفاضل والتكامل من العلوم الحديثة التي تستخدم في فروع معرفية عديدة، وفي سياقات علمية متنوعة مثل الهندسة والفيزياء والطب والاقتصاد والجغرافيا فيهتم علم التفاضل بدراسة التغيرات والفروق (الكميات المتغيرة) من خلال حسابات تتضمن متوسطات ومعدلات التغير فتلاحظ مقارنة التغير بمعدل ينسب إليه كمعدل التغير في درجات الحرارة - السعر - السرعة - الإنتاج ... كذلك دراسة سلوك الدوال مثل دوال التكاليف والربح في الاقتصاد؛ لتعظيم الربح أو دراسة أثر تناول عقار معين في خفض مدة العلاج أو دراسة مخططات حزام الزلازل عند التخطيط لإنشاءات عمرانية وحساب معدلات الإجهاد وغيرها، أما حساب التكامل فهو يبحث في إيجاد الكمية بمعلومية معدل تغيرها، ويستخدم لحساب المساحة تحت المنحنى، ومقدار الشغل الناتج عن تأثير قوة متغيرة، ويتضمن التفاضل والتكامل حساب عمليات مع كميات متناهية في الصغر خلافاً لعلم الجبر.

وأخيراً فإن سعينا لفهم دقائق هذه المادة سيساعد في حل الكثير من المشكلات المتداخلة مع كثير من العلوم الدقيقة، التي بها تبني النهضة العلمية والحضارية التي نرجوها لبلدنا.

مخرجات تعلم الوحدة:

بعد دراسة هذه الوحدة. وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يعرف مفهوم دالة التغير، ومتوسط التغير، ومعدل التغير.
- يستنتج المشتقة الأولى للدالة.
- يعرف التفسير الهندسي للمشتقة الأولى (ميل المماس).
- يحدد بعض قواعد الاشتقاق (التفاضل).
- مشتقة الدالة الثابتة.
- مشتقة الدالة: د(س) = سⁿ
- مشتقة الدالة د : د(س) = س
- مشتقة الدالة: د(س) = أ سⁿ
- مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما
- مشتقة حاصل ضرب دالتين.
- مشتقة خارج قسمة دالتين.
- مشتقة دالة الدالة - قاعدة السلسلة.
- مشتقة الدالة ح = د(س) = د(س)
- يستخدم المشتقات في تطبيقات هندسية مثل إيجاد معادلة المماس لمنحنى عند نقطة عليه.
- يعرف مفهوم التكامل - المشتقة العكسية.
- يعرف قواعد التكامل الآتية:
 - أ سⁿ د س = سⁿ⁺¹ / (n+1) ، ن ≠ -1
 - أ د(س) د س = أ د(س) د س، حيث أ ثابت
 - أ د(س) ± ب د(س) = [أ ± ب] د(س) د س
 - أ د(س) د س = سⁿ / (n+1) ، (أ س + ب) د(س) ، ن ≠ -1

المصطلحات الأساسية

First Derivative	المشتقة الأولى	Variation	التغير
Product	حاصل الضرب	Average Rate of Change	متوسط التغير
Quotient	خارج القسمة	Rate of Change	معدل التغير
Antiderivative	مشتقة عكسية	Differentiation	الاشتقاق
Integration	تكامل	Differentiable Function	دالة قابلة للاشتقاق

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسب آلي - برامج رسومية.

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): معدل التغير.

الدرس (٣ - ٢): الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٣): قواعد الاشتقاق.

الدرس (٣ - ٤): التكامل

مخطط تنظيمي للوحدة



معدل التغير

Rate of Change

فكر و ناقش



لماذا تترك مسافات بين قضبان السكك الحديدية أو فواصل الكبارى المعدنية؟
إذا ارتفعت درجة حرارة من ٣٠° إلى ٤٢° في فترة ما أو انخفضت من ٤٨° إلى ٢٢° في فترة أخرى - احسب التغير في درجات الحرارة لكل فترة ... ماذا تلاحظ؟
إذا كان طول أحد القضبان ل متراً وتغيرت درجة حرارته من s_1 إلى s_2 نقول إن تغيراً حدث في درجة الحرارة ويكون:
التغير في $s =$ قيمة s عند نهاية التغير - قيمة s عند بداية التغير
هل يتغير طول هذا القضيب تبعاً لتغير درجة حرارته؟

Function of Variation

دالة التغير

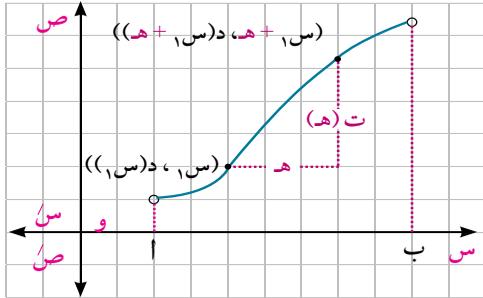
تعلم



إذا كانت $d: [a, b]$ ← c حيث $v = d(s)$ فإن أى تغير في قيمة s من s_1 إلى s_2 في مجال d يقابله تغير في قيمة v من $d(s_1)$ إلى $d(s_2)$ وعليه فإن:

مقدار التغير في $s = \Delta s$ (ويقرأ دلتا s) = $s_2 - s_1$ ،

مقدار التغير في $v = \Delta v = d(s_2) - d(s_1)$



وباعتبار $(s_1, d(s_1))$ نقطة على منحنى الدالة d ، فإن لكل تغير في إحداثيها السيني من s_1 إلى $s_2 = s_1 + د$ بحيث $s_1 + د \in [a, b]$ ، $د \neq 0$ يحدث تغير مناظر في إحداثيها الصادي يتعين بالعلاقة:

$$ت(د) = d(s_1 + د) - d(s_1)$$

وتسمى الدالة $ت$ بدالة التغير في d عند $s = s_1$

ملاحظة:

كلا الرمز Δs أو $د$ يمثلان التغير في s

سوف تتعلم

- مفهوم دالة التغير.
- مفهوم متوسط التغير.
- مفهوم معدل التغير.

المصطلحات الأساسية

دالة التغير

Function of Variation

متوسط التغير

Average of Change

معدل التغير

Rate of Change

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية

مثال

١ إذا كانت د(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢

وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + هـ فأوجد دالة التغير ت، ثم احسب مقدار التغير في د عندما

$$\text{أ) هـ} = ٣, ٠ \quad \text{ب) هـ} = ١, ٠$$

الحل

٠: د(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢، س تتغير من ٢ إلى ٢ + هـ٠: س_١ = ٢، د(٢) = ٢ - ٢ + ٤ × ٣ = ١٢، ويكون:

$$\begin{aligned} \text{د(٢ + هـ)} &= (٢ + هـ)٣ + ٢(٢ + هـ) - ٢ = ٢ - (٢ + هـ) + ١٢ + ١٢ = ٢ - هـ + ٢ + ٢٣ + ٤ - هـ + ٢ - هـ \\ &= ١٢ + ٣ - هـ + ١٣ = ١٢ + ٣ - هـ \end{aligned}$$

ت(هـ) = د(٢ + هـ) - د(٢)

$$= (١٢ + ٣ - هـ + ١٣) - (١٢ + ٣) = ١٢ + ٣ - هـ + ١٣ - ١٢ - ٣ = ٣ - هـ$$

$$\text{أ) عندما هـ} = ٣, ٠ \quad \text{ب) عندما هـ} = ١, ٠$$

$$\text{ت(٠, ٣)} = (٠, ٣)٣ + ٢(٠, ٣) - ٢ = ٠, ٣ \times ١٣ + ٢(٠, ٣) - ٢ = ١٣ + ٦ - ٢ = ١٧$$

$$\text{ت(٠, ١)} = (٠, ١)٣ + ٢(٠, ١) - ٢ = ٠, ١ \times ١٣ + ٢(٠, ١) - ٢ = ١, ٣ - ٢ = -٠, ٧$$

٤ حاول أن تحل

١ إذا كانت د(س) = ٢س - ١ + س فأوجد دالة التغير ت عندما س = ٣ ثم احسب:

$$\text{أ) ت(٠, ٢)} \quad \text{ب) ت(٠, ٣)}$$

تعلم دالة متوسط التغير Function of Average of Change

بقسمة دالة التغير ت على هـ حيث هـ ≠ ٠ نحصل على دالة جديدة م تسمى دالة متوسط التغير في د عند س = س_١ حيث:

$$\text{م(هـ)} = \frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د(س}_١\text{ + هـ)} - \text{د(س}_١\text{)}}{\text{هـ}} \quad \text{أو} \quad \frac{\Delta \text{د(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د(س}_١\text{ + هـ)} - \text{د(س}_١\text{)}}{\text{س}_١\text{ + هـ} - \text{س}_١}$$

مثال

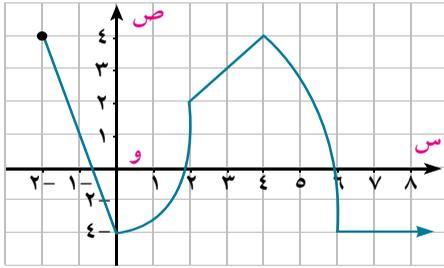
٢ إذا كانت د: [٠, ∞) ← ع حيث د(س) = ٢س + ١ فأوجد:

$$\text{أ) دالة متوسط التغير في د عند س = ٢ ثم احسب م(٠, ٣)}$$

$$\text{ب) متوسط التغير في د عندما تتغير س من ٣ إلى ٤}$$

الحل

$$\text{أ) د(س}_١\text{)} = \text{د(٢)} = ١ + ٢(٢) = ٥, \quad \text{د(س}_١\text{ + هـ)} = \text{د(٢ + هـ)} = ١ + ٢(٢ + هـ)$$



تفكير ناقد:

يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة $د$ حيث $ص = د(س)$. حدد الفترات التي يكون فيها متوسط التغير في $د$ ثابتاً، وفسر إجابتك.

تعلم



Function of Rate of Change

دالة معدل التغير

إذا كانت $د: [أ، ب] \leftarrow ع$ حيث $ص = د(س)$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $هـ$ $\in [أ، ب]$ فإن:

دالة معدل التغير في $د$ عند $س_١$ = $نِها$ $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

٤ أوجد دالة معدل التغير في $د$ عندما $س = ١$ لكل مما يأتي ثم أوجد هذا المعدل عند قيم $س$ المعطاة

ب) $د(س) = \frac{٢}{١-س}$ ، $س = ٣$

أ) $د(س) = ٣س^٢ + ٢$ ، $س = ٢$

الحل

∴ عندما $س = ١$ فإن $د(س) = ٣س^٢ + ٢$ ،

∴ $د(س) = ٣س^٢ + ٢$

$$د(س) = ٣(س + ١) + ٢ = ٣س + ٥$$

دالة معدل التغير في $د$ = $نِها$ $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= نِها \frac{٣س_٢ + ٥ - (٣س_١ + ٥)}{س_٢ - س_١} = نِها \frac{٣(س_٢ - س_١)}{س_٢ - س_١} = ٣$$

عند $س = ٢$ ∴ $س_١ = ٢$ ويكون معدل التغير في $د = ٣ = ٣ \times ١ = ٣$

ب) ∴ $د(س) = \frac{٢}{١-س}$ ∴ عندما $س = ١$ فإن:

$$د(س) = \frac{٢}{١-س} - \frac{٢}{١-(س+١)} = \frac{٢}{١-س} - \frac{٢}{-س} = \frac{٢}{١-س} + \frac{٢}{س}$$

$$= \frac{٢س + ٢(١-س)}{س(١-س)} = \frac{٢س + ٢ - ٢س}{س(١-س)} = \frac{٢}{س(١-س)}$$

دالة معدل التغير في $د$ = $نِها$ $\frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= نِها \frac{٢}{س_٢(١-س_٢)} - \frac{٢}{س_١(١-س_١)} = \frac{٢}{س_٢(١-س_٢)} - \frac{٢}{س_١(١-س_١)}$$

عند $س = ٣$ ∴ $س_١ = ٣$ ويكون معدل التغير في $د = \frac{٢}{٣(١-٣)} = -\frac{١}{٣}$

٦ حاول أن تحل

٤ أوجد دالة متوسط التغير في $د$ حيث $د(س) = \frac{٣}{٢-س}$ عندما تتغير $س$ من $س_١$ إلى $س_٢$ ثم استنتج معدل

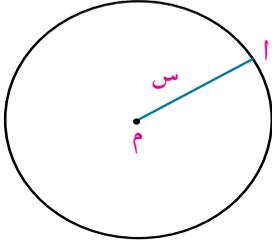
التغير في $د$ عند $س = ٥$

مثال

٥ تطبيقات حياتية: سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية تتسع بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائري . أوجد معدل التغير في مساحة سطحها بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ٣,٥ سم ($\frac{22}{7} = \pi$)

الحل

نمذجة المشكلة:



بفرض أن طول نصف قطر الموجه = س سم
 ∴ مساحة الصفيحة = πr^2
 ويكون $r = d(س)$
 عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2 + هـ$

$$\begin{aligned} \text{فإن دالة معدل التغير في } r &= \frac{d(س_2) - d(س_1)}{هـ} \text{ نها} \\ &= \frac{\pi(س_2)^2 - \pi(س_1)^2}{هـ} \text{ نها} \\ \pi &= \frac{\pi(س_2^2 - (س_1)^2)}{هـ} \text{ نها} \\ \text{عندما } س_1 = س_2 = 3,5 & \text{ ∴ معدل التغير في } r = 22 = 3,5 \times \frac{22}{7} \times 2 \end{aligned}$$

٦ حاول أن تحل

٥ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها، احسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٤ سم، ثم احسب معدل التغير في مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم.

تمارين (٣-١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١ إذا كان متوسط التغير في $d = 2, 4$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣, ٢ فإن التغير في د يساوى
 أ ٠, ٣٢ ب ٠, ٤٨ ج ٣, ٦ د ٧, ٢
- ٢ إذا كان متوسط التغير في $d = 5$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤، $d(2) = 6$ فإن $d(4)$ تساوى
 أ - ٤ ب ٧ ج ٨ د ١٦
- ٣ متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى
 أ ١٢٥ ب ٣٤٣ ج ٢١٨ د ١٠٩
- ٤ متوسط تغير الدالة د حيث $d(س) = س^2 + ٣س + ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى
 أ ١ ب ٣ ج ٧ د ٩

أجب عن مايتى:

٥ إذا كانت د(س) = س^٢ + ٢س - ١ أوجد التغير فى د عندما

أ) تتغير س من ٢ إلى ١, ٢ ب) س = -٢, هـ = ١

٦ أوجد دالة معدل التغير فى د عندما س = ١ ثم استنتج معدل تغير د عند قيم س_١ المبينة فيمايلى:

أ) د(س) = ٢س^٢, س_١ = ٢ ب) د(س) = $\frac{١+س}{١-س}$, س_١ = ٠

٧ الربط بالمساحات: صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨سم.

٨ الربط بالحجوم: كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي فأوجد معدل التغير فى حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧سم.

٩ اكتشاف الخطأ: صفيحة على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه تتمدد بالتسخين بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها وبنفس النسبة بين أبعادها، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة لعرضها عندما يكون العرض ١٠سم.

الحل الثاني

نفرض الطول س، العرض $\frac{١}{٣}$ س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^٢

معدل التغير = $\frac{نها(د(س+هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

= $\frac{نها(د(س+\frac{١}{٣}هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

= $\frac{نها(د(س+\frac{١}{٣}هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

عندما س = ١٠سم

معدل التغير = ١٠

الحل الأول

نفرض العرض س، الطول ٢س

المساحة = الطول × العرض ∴ د(س) = ٢س^٢

معدل التغير = $\frac{نها(د(س+هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

= $\frac{نها(د(س+هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

= $\frac{نها(د(س+هـ)) - نها(د(س))}{هـ}$

عندما س = ١٠سم

معدل التغير = ٤٠

الربط بالزراعة:

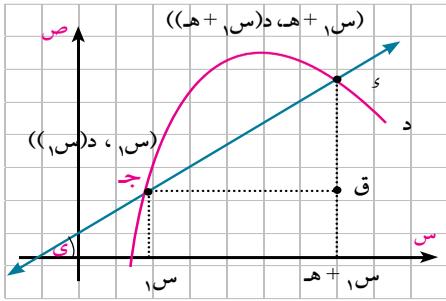
١٠ إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلو جرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد

الكيلو جرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقاً للعلاقة ص = $\frac{٤٢}{١+س}$

احسب متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢.

Differentiation

فكر و ناقش



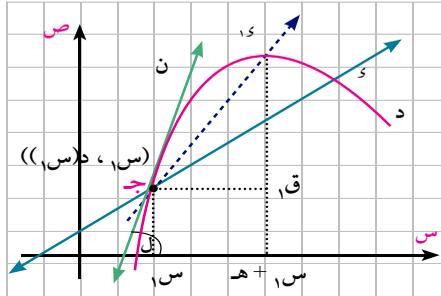
شكل (١)

١ يوضح شكل (١) منحنى د: [أ ، ب] حيث $ص = د(س)$ ، جـ قاطعاً له في النقطتين حـ (س١) ، د(س١) ، و (س١+هـ) ، د(س١+هـ). أوجد ميل القاطع جـ .

٢ باعتبار س متغير من س١ إلى س١+هـ قارن بين دالة متوسط التغير في د ، وميل القاطع جـ . هل العلاقة التالية صحيحة ؟

$$\text{ميل القاطع جـ} = \frac{د(س١+هـ) - د(س١)}{هـ} = \text{م} = \text{ميل القاطع جـ}$$

٣ إذا كانت النقطة جـ (س١, د(س١)) نقطة ثابتة على منحنى الدالة د ، وتحركت



شكل (٢)

النقطة و على المنحنى بحيث تقترب من النقطة جـ ليأخذ جـ الوضع جن ويصبح مماساً للمنحنى عند جـ . أي أن هـ ← صفر أوجد ميل المماس لمنحنى د عند جـ

للحظ أن :

$$\text{ميل المماس عند جـ} = \text{ظل} = \lim_{هـ \rightarrow 0} \frac{د(س١+هـ) - د(س١)}{هـ} \text{ إن وجدت}$$

أي أن :

ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث $ص = د(س)$ عند النقطة (س١, د(س١)) يساوي معدل التغير في د عند $س = س١$

سوف تتعلم

- المشتقة الأولى للدالة
- التفسير الهندسي للمشتقة الأولى (ميل المماس)

المصطلحات الأساسية

- المشتقة الأولى First Derivative
- ميل Slope
- مماس Tangent

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

مثال

١ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^٢ - ٥ عند النقطة أ(٢، ٧) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∴ د(٢) = ٣(٢)^٢ - ٥ = ٧ ∴ النقطة أ(٢، ٧) تنتمي إلى منحنى د
ميل المماس عند (س = ٢) = معدل التغير في د عند (س = ٢)

$$= \frac{د(٢) - د(٢+هـ)}{هـ} = \frac{٧ - ٥ - ٢(٢+هـ)}{هـ} = \frac{١٢ - ٣هـ - ٤}{هـ} = \frac{٨ - ٣هـ}{هـ}$$

$$= \frac{١٢ - ٣(٢+هـ)}{هـ} = \frac{١٢ - ٦ - ٣هـ}{هـ} = \frac{٦ - ٣هـ}{هـ}$$

ويكون ظل ل = ١٢ ∴ ل = ظا^{-١}(١٢) ≈ ٨٥.٦٤°

٤ حاول أن تحل

١ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = ٣س^٣ - ٤ عند النقطة أ(١، ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

The Derivative Function

الدالة المشتقة

تعلم

لكل قيمة للمتغير س في مجال د يناظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير في د وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضًا في المتغير س يطلق عليها "الدالة المشتقة" أو: المشتقة الأولى للدالة" أو "المعامل التفاضلي الأول"

تعريف

إذا كانت د: [أ، ب] ← ع، س [∃] أ، ب [فإن الدالة المشتقة د:]

$$د(س) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} \text{ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.}$$

رموز الدالة المشتقة:

إذا كانت ص = د(س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة د بأحد الرموز

صَ أو دَ وتقرأ "مشتقة ص" أو "مشتقة د"

وتقرأ "دال ص دال س" أو "مشتقة ص بالنسبة إلى س"

$$\frac{ص}{س}$$

لاحظ أن ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند النقطة (س_١، د(س_١)) هو د(س_١)

مثال

٢ أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث د(س) = س^٢ - س + ١ مستخدماً تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (٢، ٧)

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د(س)} &= \text{س}^2 - \text{س} + 1 \\ \therefore \text{د(س+هـ)} &= (\text{س+هـ})^2 - (\text{س+هـ}) + 1 = \text{س}^2 + 2\text{سهـ} + \text{هـ}^2 - \text{س} - \text{هـ} + 1 \\ \text{د(س+هـ)} - \text{د(س)} &= (\text{س}^2 + 2\text{سهـ} + \text{هـ}^2 - \text{س} - \text{هـ} + 1) - (\text{س}^2 - \text{س} + 1) \\ &= 2\text{سهـ} + \text{هـ}^2 - \text{هـ} \\ \therefore \text{د(س)} &= \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{2\text{سهـ} + \text{هـ}^2 - \text{هـ}}{\text{هـ}} \\ &= \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} (2\text{س} + \text{هـ} - 1) = 2\text{س} + \text{هـ} - 1 \\ \therefore \text{د(س)} &= 2\text{س} - 1 \end{aligned}$$

∴ النقطة (٢، ٧) تقع على منحنى د
ميل المماس عند النقطة (٢، ٧) = د'(٢) = ٢(٢) - ١ = ٣

٤ حاول أن تحل

٢ إذا كانت د(س) = ٣س^٢ + ٤س + ٧ فاجد مشتقة الدالة د مستخدماً تعريف المشتقة، ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (١، ٦)

Differentiability of a Function

قابلية الدالة للاشتقاق

تعلم

يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ تنتمي إلى مجال الدالة) إذا وفقط إذا كانت د'(أ) لها وجود حيث

$$\text{د'(أ)} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{\text{د(أ+هـ)} - \text{د(أ)}}{\text{هـ}}$$

مثال

٣ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د(س) = √(١-س) ثم أوجد د'(٥)

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{د(س)} &= \sqrt{1-\text{س}} \quad \therefore \text{مجال د} =]-\infty, 1] \\ \therefore \text{د(س+هـ)} &= \sqrt{1-\text{س+هـ}} \\ \text{د(س+هـ)} - \text{د(س)} &= \sqrt{1-\text{س+هـ}} - \sqrt{1-\text{س}} \\ \text{د(س)} &= \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\text{س+هـ}} - \sqrt{1-\text{س}}}{\text{هـ}} \\ &= \lim_{\text{هـ} \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\text{س+هـ}} - \sqrt{1-\text{س}}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\sqrt{1-\text{س+هـ}} + \sqrt{1-\text{س}}}{\sqrt{1-\text{س+هـ}} + \sqrt{1-\text{س}}} \end{aligned}$$

$$د(س) = \frac{(س+هـ) - (س-هـ)}{هـ \cdot (س+هـ + س-هـ)} = \frac{2هـ}{هـ(2س)} = \frac{1}{س}$$

$$د(س) = \frac{1}{س} \Rightarrow د(س) = \frac{1}{س^2} \Rightarrow د(س) = -\frac{2}{س^3}$$

لاحظ أن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ لعدم وجود النهاية

$$د(٥) = \frac{1}{٥} = \frac{1}{٥} = \frac{1}{٥}$$

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س+٥}$

تمارين (٢-٣)

١ أوجد الدالة المشتقة للدالة د في كل مما يأتي :

- أ د(س) = $٥س + ٢$ ب د(س) = $٣س^٢$
 ج د(س) = $٣س - ١$ د د(س) = $٢س + ٢س$

٢ أوجد المشتقة الأولى للدالة د في كل مما يأتي وعين قيم س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق:

- أ د(س) = $\frac{1}{س}$ ب د(س) = $\frac{1}{س+٣}$
 ج د(س) = $\frac{٣}{٥س-٢}$ د $\sqrt{س-٤}$

٣ أوجد مشتقة الدالة د حيث $د(س) = ٣س + ٤$ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(١-، ٣)$ الواقعة عليه.

٤ أوجد مشتقة الدالة د حيث $د(س) = ٣س + ١$ عند أي نقطة (س، ص) حيث أ، ب عددان حقيقيان.

٥ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = ٣س^٢ - ٨$ عند النقطة أ (٢، ٤) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٦ إذا كان $د(س) = ٣س^٢ + ١$ حيث أ و ب ثابتان أوجد :

- أ المشتقة الأولى للدالة د عند أي نقطة (س، ص).
 ب قيمتي أ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢، -٣) الواقعة عليه يساوي ١٢.

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

استكشف

- ١ - أوجد باستخدام تعريف المشتقة الأولى للدالة مشتقة كل من :
د(س) = س^٣ د(س) = س^٥
- ٢ - هل يمكنك اكتشاف مشتقة د(س) = س^٧ دون استخدام التعريف؟
- ٣ - هل يمكنك استنتاج قاعدة لمشتقة الدالة د حيث د(س) = س^ن؟

تعلم



Derivative of a Function

مشتقة الدالة

١ - مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت ص = جـ حيث: جـ \Rightarrow ع فإن: $\frac{ص}{ك} = ٠$
لاحظ أن:

ص = د(س) = جـ ، د(س + هـ) = جـ

$$\therefore \frac{ص}{ك} = د(س) = \frac{ص}{ك} = \frac{د(س) - د(س + هـ)}{هـ} = ٠$$

$$\therefore \frac{ص}{ك} = د(س) = \frac{ص}{ك} = \frac{جـ - جـ}{هـ} = ٠ \text{ (صفرًا) (هـ} \neq ٠ \text{)}$$

٢ - مشتقة الدالة د(س) = س^ن

إذا كانت ص = س^ن حيث: ن \Rightarrow ع فإن: $\frac{ص}{ك} = ن س^{ن-١}$

إذا كانت ص = س فإن: $\frac{ص}{ك} = ١$

إذا كانت ص = أس^ن حيث: ن، أ \Rightarrow ع فإن: $\frac{ص}{ك} = أن س^{ن-١}$

مثال

١ أوجد $\frac{ص}{ك}$ في كل مما يأتي:

أ ص = -٣ ب ص = س^٤ ج ص = ٥س

د ص = $\frac{٣}{س}$ هـ ص = $\sqrt[٣]{س}$

الحل

أ: ص = -٣ $\therefore \frac{ص}{ك} = ٠$ ب: ص = س^٤ $\therefore \frac{ص}{ك} = ٤ س^٣$

سوف تتعلم

- ◀ مشتقة الدالة الثابتة
- ◀ مشتقة د(س) = س^ن
- ◀ مشتقة د(س) = س
- ◀ مشتقة د(س) = أس^ن
- ◀ مشتقة مجموع دالتين والفرق بينهما
- ◀ مشتقة حاصل ضرب دالتين
- ◀ مشتقة خارج قسمة دالتين
- ◀ مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- ◀ مشتقة ص = د(س)^ن.

المصطلحات الأساسية

- ◀ المشتقة الأولى First Derivative
- ◀ حاصل ضرب Product
- ◀ خارج قسمة Quotient
- ◀ قاعدة السلسلة Chain Rule

الأدوات المستخدمة

- ◀ آلة حاسبة علمية.
- ◀ برامج رسومية للحاسب.

ج: $\frac{ص}{س} = ٥$ $\therefore \frac{ص}{س} = ٥$
 د: $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$ $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$
 هـ: $\frac{ص}{س} = \sqrt[٣]{٣}$ $\therefore \frac{ص}{س} = \sqrt[٣]{٣}$

٤ حاول أن تحل

١ أوجد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يأتي:

أ $ص = س^٧$ ب $ص = س^{١٠}$ ج $ص = س^{\frac{٢}{٣}}$ د $ص = س^{-٤}$
 هـ $ص = س^{-٢}$ و $ص = \frac{١}{س^٥}$ ز $ص = \sqrt[٩]{س}$ ح $ص = \sqrt[٧]{س}$
 ط $ص = س^٣$ ي $ص = س^{-٢}$ ك $ص = س^{\pi}$ ل $ص = س^{-٤}$

مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت ع، ق دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س، فإن ع ± ق تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ويكون $\frac{ص}{س} = (ع \pm ق) = \frac{ص}{س} \pm \frac{ص}{س}$ وبصفة عامة، فإن:

إذا كانت د_١، د_٢، د_٣، د_٤، د_٥، د_٦ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن:

$$\frac{ص}{س} = (د_١ \pm د_٢ \pm د_٣ \pm \dots \pm د_n) = \frac{ص}{س} \pm \frac{ص}{س} \pm \frac{ص}{س} \pm \dots \pm \frac{ص}{س}$$

مثال

٢ أوجد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يأتي:

أ $ص = س^٢ + س^٦ - س^٩$ ب $ص = \frac{س^٢ - \sqrt{س}}{س}$
 أ $\therefore \frac{ص}{س} = س^٢ + س^٦ - س^٩$ ب $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{س^٢ - \sqrt{س}}{س}$
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \pm \frac{ص}{س} \pm \frac{ص}{س} \pm \dots \pm \frac{ص}{س}$
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} - \frac{ص}{س} = ١ - \frac{ص}{س}$

الحل

٤ حاول أن تحل

٢ أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كان:

أ $ص = س^٣ + ٢$ ب $ص = س^٢ - ٢س + ٧$ ج $ص = س^٣ - س^٤ + ٦س^{\frac{٢}{٣}}$
 د $ص = ٧س^٤ - \frac{١}{س}$ هـ $ص = ٣س^٨ - ٢س^٥ + ٨$ و $ص = س^٥ + س^{\sqrt{س}} - ٤$

مشتقة حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $ع$ ، و $و$ دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير $س$ فإن الدالة $(ع \cdot و)$ تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة

$$\text{للمتغير } س \text{ ويكون: } \frac{د}{دس} (ع \cdot و) = \frac{د}{دس} ع + \frac{د}{دس} و \cdot ع$$

مثال

٣ أوجد $\frac{د}{دس}$ إذا كان $ص = (س^٢ + ١) (س^٣ + ٣)$ ثم أوجد $\frac{د}{دس}$ عندما $س = ١$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \frac{د}{دس} (س^٢ + ١) (س^٣ + ٣) &= \frac{د}{دس} س^٢ \times (س^٣ + ٣) + \frac{د}{دس} (س^٢ + ١) \times ٣ \\ &= ٢س + ٣س^٣ + ٣س^٢ + ٣س^٢ + ٣ = ٢س + ٦س^٢ + ٦س^٣ \\ \text{عند } س = ١ &= \frac{د}{دس} = ٢ + ٦ + ٦ = ١٤ \end{aligned}$$

٤ حاول أن تحل

٣ أوجد $\frac{د}{دس}$ إذا كان:

أ $ص = (س^٢ + ٣) (س^٣ - ١)$

ب $ص = (س + ٥)^٢$

ج $ص = \sqrt{س + ٤} (س + ٧)$ ثم أوجد $\frac{د}{دس}$ عندما $س = ١$

مشتقة خارج قسمة دالتين:

إذا كانت $ع$ ، و $و$ دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير $س$ وكانت $و(س) \neq ٠$

فإن الدالة $(\frac{ع}{و})$ تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير $س$ ويكون $\frac{د}{دس} (\frac{ع}{و}) = \frac{\frac{د}{دس} ع - \frac{ع}{دس} و}{و^٢}$

$$\text{أي } \frac{د}{دس} (\frac{ع}{و}) = \frac{\frac{د}{دس} ع - \frac{ع}{دس} و}{و^٢}$$

مثال

٤ أوجد $\frac{د}{دس}$ إذا كان $ص = \frac{س^٢ - ١}{س^٣ + ١}$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \frac{د}{دس} \frac{س^٢ - ١}{س^٣ + ١} &= \frac{\frac{د}{دس} (س^٢ - ١) - \frac{س^٢ - ١}{دس} (٣س^٢)}{(س^٣ + ١)^٢} \\ &= \frac{٢س - ٣س^٣ + ٣س^٢ - ٣س^٢ + ٣}{(س^٣ + ١)^٢} = \frac{٢س - ٣س^٣ + ٣}{(س^٣ + ١)^٢} \end{aligned}$$

٣ حاول أن تحل

٤ أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كان:

ج ص $\frac{1-2s^2}{s+5} =$

ب ص $\frac{5+s^2}{s^4-1} =$

أ ص $\frac{1-s^2}{1+s} =$

(Chain rule)

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

نظرية

إذا كانت $v = d(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x ، وكانت $w = r(s)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير s فإن $v = d(r(s))$ تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير s

$$\text{وتكون: } \frac{dw}{ds} \times \frac{ds}{dx} = \frac{dw}{dx}$$

لاحظ أن v دالة الدالة s

تعرف هذه النظرية بقاعدة السلسلة

مثال

٥ إذا كانت $v = (s^3 - 2s + 1)^\circ$ فأوجد $\frac{dv}{ds}$

الحل

$$\text{بفرض } v = s^3 - 2s + 1 \therefore \frac{dv}{ds} = 3s^2 - 2$$

v قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x (كثيرة حدود في x) ويكون $\frac{dv}{dx} = 3s^2 - 2$

w قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى s (كثيرة حدود في s) ويكون $\frac{dw}{ds} = 3s^2 - 2$

$$\therefore \text{بتطبيق قاعدة السلسلة } \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{ds} \times \frac{ds}{dx} = (3s^2 - 2) \times \frac{ds}{dx}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = (3s^2 - 2) \times \frac{ds}{dx}$$

٦ حاول أن تحل

٥ إذا كانت $v = (2s + 3)^\circ$ فأوجد $\frac{dv}{ds}$ مشتقة الدالة [د(س)]^ن

إذا كانت $v = [d(s)]^n$ حيث d قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى s ، n عدد حقيقي،

$$\text{فإن: } \frac{dv}{ds} = n [d(s)]^{n-1} \times d'(s)$$

مثال

٦ أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كان

ب ص $(\frac{1-s}{1+s})^0 =$

أ ص $10(1+s^3+s^2+s+1) =$

الحل

أ ص $10(1+s^3+s^2+s+1) =$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{10}{x} = \frac{10}{(1+s^3+s^2+s+1)} \times \frac{10}{(1+s^3+s^2+s+1)} = \frac{100}{(1+s^3+s^2+s+1)^2}$

$30 = (1+s^3+s^2+s+1)(1+s^2+s+1)$

ب ص $(\frac{1-s}{1+s})^0 =$ $\therefore \frac{y}{x} = \frac{10}{x} = \frac{10}{(1+s)} \times \frac{10}{(1+s)} = \frac{100}{(1+s)^2}$

$0 = \frac{1+s-1+s}{(1+s)^2} \times \frac{10}{(1+s)} =$

$\frac{10(1-s)}{(1+s)^2} = \frac{10}{(1+s)^2} \times \frac{10}{(1+s)} =$

٦ حاول أن تحل

٦ أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كانت أ ص $9(1+s^4-s^3-s^2+s+1) =$ ب ص $(\frac{5s^2}{2+s^2})^3 =$

مثال

٧ إذا كان $D(s) = \frac{1}{s^3} - 2s^2 + 5s - 4$ أوجد قيم s التي تجعل $D(s) = 2$

الحل

$D(s) = \frac{1}{s^3} - 2s^2 + 5s - 4 = 1 \times 5 + s^2 \times 2 - 2s^3 \times \frac{1}{s^3} =$

$5 + s^2 - 2s =$

عندما $D(s) = 2$ $\therefore 2 = 5 + s^2 - 2s$ ويكون $s^2 - 2s + 3 = 0$

$\therefore (s-1)(s-3) = 0$ $\therefore s=1$ أو $s=3$

٦ حاول أن تحل

٧ أوجد قيم s التي تجعل $D(s) = 7$ في كل مما يأتي:

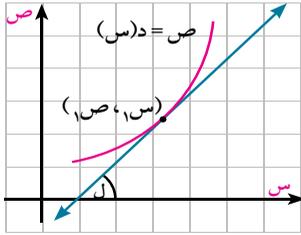
ب د $(s-5)^7 =$

أ د $(s-3)^5 - 5s + 2 =$

تفكير ناقد: أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كانت:

ص $= (s-1)(s+1)(s^2+1)(s^4+1)(s^8+1)(s^{16}+1)$

Geometric Applications on the Derivative



تطبيقات هندسية على المشتقة

في التفسير الهندسي للمشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ وجدنا أن ميل المماس m عند النقطة (s_1, y_1) يساوي المشتقة الأولى للدالة عند هذه النقطة .

أي أن $m = \frac{dy}{dx}$ عند النقطة (s_1, y_1) ويمكن كتابته على الصورة

$$m = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(s_1, y_1)}$$

وإذا كان α قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن:

$$m = \text{ظل } \alpha = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(s_1, y_1)}$$

لاحظ أن:

١ إذا كان m_1, m_2 ميلين مستقيمين معلومين α_1, α_2 فإن:

$$\begin{aligned} \alpha_1 // \alpha_2 & \text{ إذا فقط إذا كان } m_1 = m_2 \text{ (شرط التوازي)} \\ \alpha_1 \perp \alpha_2 & \text{ إذا فقط إذا كان } m_1 m_2 = -1 \text{ (شرط التعامد)} \end{aligned}$$

٢ يسمى ميل المماس عند أي نقطة على منحنى بميل المنحني عند هذه النقطة كما يسمى العمودي على المماس لمنحنى عند نقطة التماس بالعمودي للمنحنى عند هذه النقطة .

$$\therefore \text{ ميل العمودي عند النقطة } (s_1, y_1) = \frac{1}{\left[\frac{dy}{dx} \right]_{(s_1, y_1)}}$$

مثال

٨ أوجد كل من ميل المماس والعمودي للمنحنى $y = 2x^3 - 4x + 5$ عند النقطة $(-2, 3)$ الواقعة عليه.

الحل

$$\therefore y = 2x^3 - 4x + 5$$

$$\therefore \text{ ميل المماس عند أي نقطة } = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 4$$

عند النقطة $(-2, 3)$

$$\text{ ميل المماس} = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(-2, 3)} = 6(-2)^2 - 4 = 20$$

$$\text{ ميل العمودي} = \frac{1}{\text{ميل المماس}} = \frac{1}{20}$$

٩ حاول أن تحل

٨ أوجد ميل كل من المماس والعمودي للمنحنيات الآتية عند النقط المبينة:

أ $y = 7x - 1$ عندما $s = 1$ ب $y = s + \frac{1}{s}$ عندما $s = 4$

ج $y = \frac{5}{3-s}$ عندما $s = 2$ د $y = (s^3 - 2)(s + 1)$ عندما $s = 1$

مثال

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = ٦ - ٢س + ٥$ والتي عندها :

- أ ميل المماس = ٢
 ب المماس يوازي محور السينات
 ج المماس عمودي على المستقيم $٤ص + ١س - ١ = ٠$ = صفر

الحل

$$\cdot \cdot \cdot \text{ص} = ٦ - ٢س + ٥$$

٠ ميل المماس عند أي نقطة $\frac{ص}{س} = ٢ - ٢س = ٢ - ٢س$

أ $\cdot \cdot \cdot \frac{ص}{س} = ٢ - ٢س = ٢ - ٢س$ أي أن $٨ = ٢س$ أي أن $٤ = س$

ويكون $ص = ٦ - ٢(٤) + ٥ = ٣$

ميل المماس = ٢ عند النقطة $(٤, ٣)$

ب $\cdot \cdot \cdot$ المماس // محور السينات

$\cdot \cdot \cdot \frac{ص}{س} = ٢ - ٢س = ٠$ أي أن $٣ = ٢س$ أي أن $١.٥ = س$

المماس يوازي محور السينات عند النقطة $(٣, ٤)$

تذكر أن



ميل المستقيم
 $٠ = ص + ١س + ج$
 يساوي $\frac{١}{ب}$

ج المماس عمودي على المستقيم $٤ص + ١س - ١ = ٠$ الذي ميله $\frac{١}{٤}$

ميل المماس $= ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

$\cdot \cdot \cdot$ $٤ = ٢ - ٢س$ أي أن $٥ = س$ أي أن $٠ = ص$

المماس يكون عمودياً على المستقيم $٤ص + ١س - ١ = ٠$ عند النقطة $(٥, ٠)$

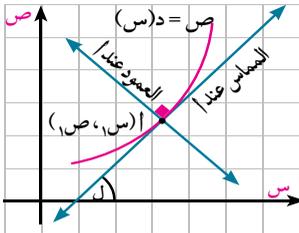
٩ حاول أن تحل

٩ أوجد النقط التي تقع على المنحنى $ص = ٣س - ٣س + ٢$ ويكون عندها المماس للمنحنى :

- أ موازياً لمحور السينات
 ب عمودي على المستقيم $٩ص + ٣س - ٣ = ٠$

تعلم

معادلة المماس لمنحنى Equation of the Tangent to a Curve



إذا كانت $(س١, ص١)$ نقطة تقع على منحنى الدالة $ص = د(س)$ ،
 م ميل المماس عند هذه النقطة فإن:
 معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س١, ص١)$ هي

$$ص - ص١ = م(س - س١)$$

ملاحظة: معادلة العمودي للمنحنى عند النقطة $(س١, ص١)$ هي :

$$ص - ص١ = \frac{١}{م}(س - س١)$$

مثال

١٠ أوجد معادلتا المماس والعمودي لمنحنى $ص = ٢س^٢ - ٥س + ١$ عند النقطة الواقعة عليه وإحداثيها السيني $٢ =$

الحل

∴ النقطة تقع على المنحنى ∴ فهي تحقق معادلته

عند $س = ٢$ فإن $ص = ٢(٢)^٢ - ٥(٢) + ١ = ١ - ١٠ = -٩$ ∴ النقطة هي $(٢، -٩)$

∴ $\frac{كص}{كس} = ٥ - ٤س = ٥ - ٨ = -٣$ ∴ $\frac{كص}{كس} = ٣ = ٥ - ٢ \times ٤ = ٣$

أى أن عند النقطة $(٢، -٩)$ ميل المماس $= ٣$ ويكون ميل العمودي $= \frac{١}{٣}$

∴ معادلة المماس هي ، معادلة العمودي هي

ص - $(-٩) = ٣(س - ٢)$ ص - $(-٩) = \frac{١}{٣}(س - ٢)$

ص + $٩ = ٣س - ٦$ ص + $٩ = \frac{١}{٣}س - \frac{٢}{٣}$

ص - $٣ = ٧ + ٣س$ ص + $٩ = ١ + ٣س$

٤ حاول أن تحل

١٠ أوجد معادلتا المماس والعمودي للمنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها:

أ ص = $٣س^٢ + ١س - ٢$ ، س = -٢ ب ص = $(٣س - ٥)^٧$ ، س = ٢

مثال

١١ إذا كان المنحنى $ص = أس^٣ + ب س^٢$ يمس المستقيم $ص = ٨س + ٥$ عند النقطة $(١-، ٣-)$ فأوجد قيمتي أ ، ب.

الحل

∴ النقطة $(١-، ٣-)$ تقع على المنحنى $ص = أس^٣ + ب س^٢$

∴ $٣- = أ(١-)^٣ + ب(١-)^٢$ أى $٣ = أ - ب$ (١)

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه $= \frac{كص}{كس} = ٣س + ٢س = ٢ + ٣س$

∴ المستقيم $ص = ٨س + ٥$ مماس للمنحنى عند النقطة $(١-، ٣-)$

∴ $\left[\frac{كص}{كس} \right]_{(١-، ٣-)} = \text{ميل المستقيم} = ٨$

∴ $٨ = ٢ + ٣(١-)$ أى $٨ = ٢ - ٣$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن:

أ = ٢ ، ب = $١-$

٤ حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = ٢س^٢ + أس + ب$ عند النقطة $(١، ٣)$

الواقعة عليه تساوى ٥

تمارين (٣-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) معدل تغير $s^3 + 4$ بالنسبة إلى s عندما $s = 2$ يساوي
 أ) ٤ ب) ٨ ج) $\frac{1}{4}$ د) ١٢
- ٢) ميل المماس للمنحنى $v = 3s^3 - s^2$ عند $s = 3$ يساوي
 أ) ٣ ب) صفر ج) $3 -$ د) ٦
- ٣) المماس للمنحنى $v = s^2 - 8s + 2$ يوازي محور السينات عند $s =$
 أ) $8 -$ ب) ٢ ج) ٤ د) صفر
- ٤) المستقيم $s + v = 5$ يمس المنحنى $v = 3s^2 + 5s + 1$ عند $s =$
 أ) ١ ب) ٥ ج) ٣ د) $1 -$

أكمل كلاً مما يأتي:

- ٥) $\frac{d}{ds} (s^2) =$
 ٦) $\frac{d}{ds} (s^3 + 1) =$
 ٧) $\frac{d}{ds} (s^2 - 4s + 1) =$
 ٨) $\frac{d}{ds} (s + \sqrt{s}) =$
 ٩) $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^3} \right) =$
 ١٠) $\frac{d}{ds} (5\pi) =$
 ١١) $\frac{d}{ds} (s^{\frac{1}{3}}) =$
 ١٢) $\frac{d}{ds} (s^2 + 3s + 2) =$
 ١٣) $\frac{d}{ds} (s^2 + 3s + 2) =$
 ١٤) $\frac{d}{ds} (\sqrt[3]{s} - \frac{5}{s} + \pi) =$

١٥) أوجد $\frac{dv}{ds}$ لكل من:

- أ) $v = 3s^0$ ب) $v = \frac{3}{4}s^8$ ج) $v = \frac{3}{2s^2}$ د) $v = \sqrt[3]{4}$
- هـ) $v = \sqrt[3]{s^0}$ و) $v = \frac{2}{\sqrt{s}}$ ز) $v = \frac{s^2}{\sqrt{s}}$ ح) $v = s\sqrt{s}$

أوجد المشتقة الأولى بالنسبة إلى s لكل مما يأتي.

- ١٦) $v = s^3 + 3s^2 - 5$ ١٧) $v = \frac{1}{3}s^4 - \frac{2}{3}s^3 + 7s - 9$
- ١٨) $v = 2s^2 + 3\sqrt{s}$ ١٩) $v = \frac{s^4 - 2s^3 + \sqrt{2}s}{s}$
- ٢٠) $v = s(s^2 - \sqrt{s})$ ٢١) $v = \frac{s^4 - s^2 + 3}{\sqrt{s}}$
- ٢٢) $v = (s^2 + 1)(s + 5)$ ٢٣) $v = (s^2 - 7)(s + 3)$

٢٥) $(\sqrt{s} - 2)(\sqrt{s} + 2) = \text{ص}$

٢٤) $(s + 2)(s^2 - 3s + 1) = \text{ص}$

٢٧) $\frac{s-2}{s+5} = \text{ص}$

٢٦) $\frac{s-5}{s+1} = \text{ص}$

٢٨) أوجد قيمة $\frac{y}{x}$ عند النقط المبينة في كل مما يأتي:

ب) $\text{ص} = (s^2 - 1)^{-4}$ عند $s = 1$

أ) $\text{ص} = (s^2 - 2)^7$ عند $s = 0$

٢٩) أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كان:

ب) $\text{ص} = (2s^2 - 3)^4$

أ) $\text{ص} = (s + 3)^7$

د) $\text{ص} = 3s^2 + 1$

ج) $\text{ص} = (s^3 + 1 - s)^0$

و) $\text{ص} = 2s^2 + 3s + 2 = \text{ع}$ ، $\text{ص} = 2\text{ع}$

هـ) $\text{ص} = \sqrt[3]{(2s^2 - 3s + 4)^2 + 7}$

٣٠) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $\text{ص} = s^2 + \frac{1}{s} - 1$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $s = 1$.

٣١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\text{ص} = s^3 - 6s^2 + 10s + 20$ والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات.

٣٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\text{ص} = s^3 - 9s^2 + 16s + 1$ والتي يكون ميل المنحنى عندها يساوى ٥

٣٣) أوجد معادلتا المماس والعمودى للمنحنى $\text{ص} = 3s^2 - 7s + 2$ عند النقط $(2, 0)$ الواقعة عليه.

٣٤) أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات التالية عند النقط الواقعة عليها والمبين احداثيها السيني أمام كل منها:

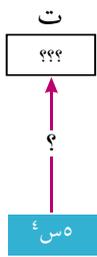
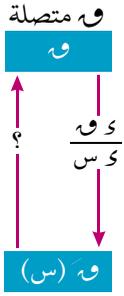
أ) $\text{ص} = (s + 3)^3$ ، $s = -1$ ب) $\text{ص} = \frac{3}{s-2}$ ، $s = 4$

ج) $\text{ص} = \sqrt{s+7}$ ، $s = 2$ د) $\text{ص} = (s-5)(s+5)$ ، $s = -3$

٣٥) أوجد قيمتي أ، ب إذا علم أن المستقيم $s = 5 - \text{ص} - 6 = 0$ يمس المنحنى $\text{ص} = s^3 + \text{ب} s$ عند النقطة $(1, -1)$

Integration

استكشف



من دراستك للاشتقاق تعلم أن:

مشتقة الدالة q حيث $q = (s)^3 + 2$ ، ث عدد حقيقي ثابت
هي $q' = (s)^3 = 3s^2$ أي أن $q' = \frac{dq}{ds} = 3s^2$
في هذه الحالة تسمى الدالة q بالدالة الأصلية للدالة q'
سوف نتناول في هذا الدرس عملية عكسية لعملية الاشتقاق بمعنى
أن إذا عَلِمْتَ المشتقة q' فكيف نحصل على الدالة الأصلية؟

لإيجاد دالة أصلية مشتقتها بالنسبة إلى s هي $5s^4$
نفرض $d(s) = 5s^4$

ولنبداً بطريقة عكسية لعملية الاشتقاق

$$n \text{ س } n^{-1} = 5s^4 \quad \therefore n = 1 - 4 = -3$$

$$\text{فيكون } t(s) = s^{-3} \text{ أو } s^{+3} \text{ أو } s^{-2}$$

تسمى الدالة t دالة المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية للدالة d

هل تستطيع اكتشاف المشتقة العكسية t للدالة d إذا كانت:

أ) $d(s) = 2s$ ب) $d(s) = 7s^6$

تعلم

Antiderivative

المشتقة العكسية

إذا كانت $v = s^2$

فإن المشتقة الأولى هي $v' = \frac{dv}{ds} = 2s$

أما استنتاج الدالة v من الدالة المشتقة $v' = \frac{dv}{ds}$ فتسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية.

فمثلاً s^2 هي مشتقة عكسية للدالة s^2 لاحظ أن s^2 لها العديد من المشتقات العكسية منها $s^2 + 1$ ، $s^2 + 2$ ، $s^2 - 3$ ، جميعها مشتقتها s^2 ولا تختلف إلا في الثابت $ث$.

$$\therefore \frac{dv}{ds} = (s^2 + ث) = 2s \text{ حيث } (ث) \text{ مقدار ثابت .}$$

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية للدالة
- التكامل الغير محدد
- تكامل بعض الدول الجبرية

المصطلحات الأساسية

- المشتقة العكسية
- Antiderivative
- تكامل
- Integration

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

تعريف

يقال إن الدالة T مشتقة عكسية للدالة D إذا كانت $T'(s) = D(s)$ لكل s في مجال D .

مثال

١ أثبت أن الدالة T حيث $T'(s) = \frac{1}{s^3}$ هي مشتقة عكسية للدالة D حيث $D(s) = 2s^3$.

الحل

نوجد مشتقة الدالة T فيكون $T'(s) = \frac{1}{s^3} \times 3s^2 = \frac{3}{s}$ $\therefore T'(s) = D(s)$ أي أن الدالة T مشتقة عكسية للدالة D .

٢ حاول أن تحل

١ بين أن الدالة T حيث $T'(s) = \frac{1}{s^6}$ هي مشتقة عكسية للدالة D حيث $D(s) = 3s^6$.

تفكير ناقد:

ما العلاقة بين T ، T' إذا كانت كل منهما مشتقة عكسية للدالة D ؟

Indefinite Integral

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة D تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز $\int D(s) ds$ [ويقرأ تكامل دالة s بالنسبة إلى s]

تعريف

إذا كان $T'(s) = D(s)$ فإن $\int D(s) ds = T(s) + C$ حيث C ثابت اختياري (ثابت التكامل).

للحظ أن:

$$\int \frac{1}{s^3} ds = \frac{1}{2} s^{-2} + C = \frac{1}{2} s^{-2} + C$$

$$\int \frac{1}{s^2} ds = -s^{-1} + C = -\frac{1}{s} + C$$

ولتعيين قيمة الثابت C يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل s وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

٢ تحقق من صحة كل ما يأتي:

أ $\int \frac{1}{s^8} ds = -\frac{1}{7} s^{-7} + C$ ب $\int \left(\frac{4}{s^3} + 7s^6 \right) ds = -\frac{4}{2} s^{-2} + \frac{7}{7} s^7 + C$

الحل

١. $\therefore \frac{y}{x} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$ $\therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$ $\therefore y = 2x$

٢. $\frac{y}{x} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ $\therefore \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ $\therefore y = x$

$\frac{4}{x} + \frac{7}{x} = \frac{11}{x}$ $\therefore \frac{4}{x} + \frac{7}{x} = \frac{11}{x}$

$\therefore \frac{4}{x} + \frac{7}{x} = \frac{11}{x}$ $\therefore \frac{4}{x} + \frac{7}{x} = \frac{11}{x}$

٦ حاول أن تحل

٢ تحقق من صحة كل مما يأتي:

ب) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ $\therefore \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

أ) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ $\therefore \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

مثال

٣ باستخدام التعريف المباشر للتكامل أوجد المشتقة العكسية للدالة د حيث:

أ) د(س) = ٥س^٤ ب) د(س) = ١٨س^٥ ج) د(س) = ٣-س^٤

الحل

أ) ت(س) = ٥س^٤ $\therefore \frac{d}{dx} 5x^4 = 20x^3$

ب) ت(س) = ١٨س^٥ $\therefore \frac{d}{dx} 18x^5 = 90x^4$

ج) ت(س) = ٣-س^٤ $\therefore \frac{d}{dx} (3-x^4) = -4x^3$

٦ حاول أن تحل

٣ باستخدام تعريف التكامل أوجد المشتقة العكسية لكل من: ٢٠س^٤، -٥س^٤

يتطلب إيجاد المشتقات العكسية للدوال باستخدام التعريف السابق كثيرًا من الوقت والجهد؛ لذلك تستخدم بعض الصور القياسية البسيطة للتكامل (قواعد التكامل) والتي تيسر عملية إيجاد المشتقات العكسية.

قاعدة (١):

أسن^١ و س^١ = $\frac{1}{1+n} x^{1+n}$ حيث ثابت، $n \neq -1$

مثال

أوجد:

د) $\frac{1}{x^3}$ $\therefore \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2}$

ج) $\frac{1}{x^2}$ $\therefore \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$

ب) $\frac{1}{x^3}$ $\therefore \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2}$

أ) $\frac{1}{x^2}$ $\therefore \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$

قاعدة (٣):

$$[d(س) \pm س] س = س د(س) \pm س س$$

مثال

٦ أوجد: أ) $س(٤س + ٣س^٢)$ و س

الحل

أ) $س(٤س + ٣س^٢)$

$س د(٤س + ٣س^٢) + (٤س + ٣س^٢) دس =$

$س د(٤س) + س د(٣س^٢) + (٤س + ٣س^٢) دس =$

$س \times ٤ + س \times ٦س + (٤س + ٣س^٢) دس =$

$٤س + ٦س^٢ + ٤س دس + ٣س^٢ دس =$

٦ حاول أن تحل

٦ أوجد:

أ) $س(٣س^٢ + ٢س - ١)$ و س

ج) $٢س(س + ٣)$ و س

قاعدة (٤):

$$[س(ب + س)^ن] س = س د(ب + س)^ن + (ب + س)^ن دس$$

تفكير ناقذ:

١- هل يمكنك التحقق من صحة العلاقة السابقة عن طريق تعريف المشتقة العكسية؟ وضح ذلك.

مثال

٧ أوجد:

أ) $س(٣ - ٢س)^٥$ و س

ب) $س(٧ - ٢س)^٣$ و س

ج) $س < \frac{٧}{٤ - ٣س}$ و س

الحل

$$أ) \text{ ل } (٢-٣)٠ \text{ و س } = \frac{١}{(١+٥)٣} (٢-٣)^{١+٥} \text{ ث} = \frac{١}{١٨} (٢-٣)^{٦} \text{ ث}$$

$$ب) \text{ ل } (٧-٢)^٣ \text{ و س } = \frac{١}{(١+٣)٢} (٧-٢)^{١+٣} \text{ ث} = \frac{١}{٤} (٧-٢)^٢ \text{ ث}$$

$$ج) \text{ ل } \frac{٧}{٤-٣\sqrt[٦]{٤}} \text{ و س } = ٧(٤-٣)^{\frac{١}{٦}} \text{ و س } = \frac{٧}{(١+\frac{١}{٦})٣} (٤-٣)^{١+\frac{١}{٦}} \text{ ث}$$

$$= \frac{١٤}{٣} = \frac{١}{٣} (٤-٣) \frac{٧}{(١+\frac{١}{٦})٣} \text{ ث}$$

٤ حاول أن تحل

$$٧) \text{ أوجد: } أ) \text{ ل } ٩(٣-٤)٢ \text{ و س } \quad ب) \text{ ل } \frac{١٥}{٦(٥-٣)} \text{ و س}$$

تمارين (٣-٤)

أوجد:

- ١) ل ٢ و س
- ٢) ل ٧ و س
- ٣) ل ٨ و س
- ٤) ل ٤-٣ و س
- ٥) ل ٩ و س
- ٦) ل ١٢ و س
- ٧) ل ٥ و س
- ٨) ل ٥ و س
- ٩) ل ٣-٧ و س
- ١٠) ل ٨ و س
- ١١) ل ٧ و س
- ١٢) ل ١٢ و س
- ١٣) ل (١+١) و س
- ١٤) ل (٥-٢) و س
- ١٥) ل (٦-٣) و س
- ١٦) ل (٣+٢) و س
- ١٧) ل (٧+٢) و س
- ١٨) ل (٢-١) و س
- ١٩) ل (٣+٣) و س
- ٢٠) ل (١-٤) و س
- ٢١) ل (١+١) و س
- ٢٢) ل (٢-٢) و س
- ٢٣) ل (٣+٢) و س
- ٢٤) ل (٢+٢) و س
- ٢٥) ل ٣ و س
- ٢٦) ل ٧ و س
- ٢٧) ل ١ و س
- ٢٨) ل ٢٧ و س
- ٢٩) ل ٨ و س
- ٣٠) ل ٦ و س
- ٣١) ل (٤+٣) و س
- ٣٢) ل (٧-٢) و س
- ٣٣) ل (٨-٣) و س
- ٣٤) ل (٣-٤) و س
- ٣٥) ل (٣-٢) و س
- ٣٦) ل ١٥ و س

ملخص الوحدة

دالة التغير - معدل التغير

◀ إذا كانت $v = d(s)$ وتغيرت s من s إلى $s + \Delta s$ فإن دالة التغير $\Delta d = d(s + \Delta s) - d(s)$

◀ دالة متوسط التغير $M = \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$

◀ دالة معدل التغير $M = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$

◀ يطلق على معدل التغير المشتقة الأولى للدالة ونرمز لها بالرمز $d'(s)$ حيث:

$d'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$ [ويرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز: $\frac{dy}{dx}$ أو v' أو $\frac{dv}{ds}$]

قابلية الاشتقاق:

◀ تكون $d(s)$ قابلة للاشتقاق عند $s = a$ إذا وفقط إذا كان: $d'(a) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(a + \Delta s) - d(a)}{\Delta s}$ لها وجود.

بعض قواعد الاشتقاق:

المشتقة الدالة $d'(s)$	الدالة $d(s)$
صفر	١- a حيث a ثابت
$n s^{n-1}$	٢- s^n حيث $n \in \mathbb{R}$
$a n s^{n-1}$	٣- $a s^n$ حيث a ثابت، $n \in \mathbb{R}$
$f'(s) \pm g'(s) \pm \dots \pm k'(s)$	٤- $f(s) \pm g(s) \pm \dots \pm k(s)$
$f'(s) \times g'(s) + f(s) \times g'(s)$	٥- $f(s) \cdot g(s)$ حيث f, g قابلتان للاشتقاق
$\frac{f'(s) \times g(s) - f(s) \times g'(s)}{(g(s))^2}$	٦- $\frac{f(s)}{g(s)}$ حيث f, g قابلتان للاشتقاق، $g(s) \neq 0$
$\frac{v}{u} = \frac{v'}{u} \times \frac{u}{u'}$	٧- إذا كانت $v = d(u)$ ، $u = f(s)$
$d'(f(s)) \times f'(s)$	إذا كانت $v = d(f(s))$

تطبيقات هندسية:

- ١- إذا كانت $v = d(s)$ فإن ميل المماس لمنحنى الدالة d عند أي نقطة عليه $= \frac{v}{s}$.
- ٢- إذا كانت (s_1, v_1) نقطة على منحنى الدالة $v = d(s)$ فإن معادلة المماس عند النقطة (s_1, v_1) هي:
 $v - v_1 = m(s - s_1)$ حيث $m = \left(\frac{v}{s}\right)$ ميل المماس عند النقطة (s_1, v_1) .
- و معادلة العمودي هي $v - v_1 = -\frac{1}{m}(s - s_1)$

المشتقة العكسية للدالة:

- ◀ يقال إن الدالة t مشتقة عكسية للدالة d إذا كانت $t'(s) = d(s)$ لكل s في مجال d .
- ◀ إذا كانت $t'(s) = d(s)$ فإن $d(s) = t'(s)$ حيث t ثابت اختياري (ثابت التكامل)

قواعد التكامل

- ١- $\int s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C$ حيث C ثابت، n عدد نسبي، $n \neq -1$
- ٢- $\int \frac{1}{s} ds = \ln|s| + C$ حيث C عدد حقيقي ثابت
- ٣- $\int [d(s) \pm c] ds = \int d(s) ds \pm cs + C$ حيث c ثابت و C ثابت
- ٤- $\int [a(s) \pm b(s)] ds = \int a(s) ds \pm \int b(s) ds + C$ حيث C ثابت، $n \neq -1$

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

اختبار تراكمي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان متوسط معدل التغير في $d = 3, 2$ عندما تتغير s من 7 إلى $2, 7$ فإن التغير في $d = \dots$

- أ - $6, 4$ ب - $6, 4$ ج - $1, 6$ د - $1, 6$

٢ $\frac{y}{s} = (3 - 2)s^2$

- أ - 12 ب - $\frac{1}{3}$ ج - 6 د - 2

٣ ميل المماس لمنحنى الدالة $v = (3 - s)^2$ عند $s = 2$ يساوي

- أ - 1 ب - $\frac{1}{12}$ ج - 5 د - 10

٤ $\frac{d}{ds} (3 - 2)s = \dots$

- أ - $2s$ ب - $s^3 - 3s$ ج - $\frac{1}{3}s^3 - 3s + 3$ د - $2s - 3 + 3$

أجب عن مايتى:

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

أ - $v = 3s^2 - 5s + 2$ ب - $v = (s^2 - 3s + 5)$

ج - $v = (s - 2)(s + 2)$ د - $v = \frac{s - 1}{s + 1}$

٦ أوجد $\frac{dv}{ds}$ في كل ممايتى:

أ - $v = 2e^3, e = 6 - 6$ ب - $v = 7e^3, e = \frac{s + 1}{s - 1}$

٧ أوجد :

ب) $\int (3 + 2^x) dx$

أ) $\int (5e^x - 3x^2 + 3) dx$

د) $\int \frac{8 - 3^x}{2 - x} dx$

ج) $\int (2 + 3^x) dx$

٨) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $v = (s - 2)(s + 1)$ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات.٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $v = s^3 - 6s^2 - 15s + 20$ والتي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات .١٠) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $v = s^2 + \frac{1}{s} - 1$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $s = 1$

الوحدة الرابعة

الاحتمال

Probability

مقدمة الوحدة

تمتد جذور علم الاحتمال إلى عصر النهضة من خلال دراسة العلماء لعلم الفلك وألعاب الحظ ومحاولات فهم وتحليل ظهور عناصر من بين مجموعة كبيرة من العناصر الأخرى والتي قام بها جيرولامو كاردانو (Gerolamo Cardano) في القرن السادس عشر، و بيير دي فيرما، (Pier de Fermat)، وبليز باسكال (Blaise Pascal) واللذان عاشا خلال القرن السابع عشر.

وفي سياق تطور علم الاحتمال وتقدمه، وإنطلاقاً من القرن التاسع عشر ظهرت تعاريف عدة للاحتمال، منها ما هو بسيط، ويعتمد على الإدراك الحسي، ومنها ما يعتمد على التجربة وفكرة التكرار النسبي للحدث المراد اختياره من خلال تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات تحت شروط ثابتة. فالاحتمال مقياس لإمكانية وقوع حادث (Event) معين

و انطلاقاً من القرن التاسع عشر اكتشفت نظرية الاحتمالات التي تعتبر المساعد الأكبر للعمل الإحصائي، ويعتبر العالم لبلاس (Laplace) أحد مؤسسيها، كذلك العالم أدولف كوتيليت (Adolph Quteelet) الذي قدم أول عمل احصائي بطريقة علمية سنة ١٨٥٣ وابتداءً من ذلك الوقت بدأ الإحصاء والاحتمال يبرز كعلم له فائدته، وقيمته الكبيرة في مختلف المجالات، كذلك في البحوث العلمية في كافة المجالات، بل تعدى ذلك إلى إعطاء حسابات صحيحة يعتمد عليها في التنبؤ في قضايا مستقبلية. وفي هذه الوحدة نتناول بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية في الاحتمال وكيفية حسابه.

مخرجات تعلم الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم التجربة العشوائية.
- يتعرف مفهوم فضاء العينة.
- يكتب فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية.
- يتعرف مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل.
- يتعرف مفهوم الأحداث المتنافية.
- يتعرف العمليات على الأحداث مثل (الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال).
- يتعرف مفهوم الاحتمال.
- يستخدم مسلمات الاحتمال في حساب احتمال وقوع حد.
- يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال.
- يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال.

المصطلحات الأساسية

Simple Event	حدث بسيط (أولي)	Statistics	إحصاء
Compound Event	حدث مركب	Probability	احتمال
Certain Event	حدث مؤكد	Random Experiment	تجربة عشوائية
Impossible Event	حدث مستحيل	Sample space	فضاء العينة - فضاء النواتج
Operation on the Events	العمليات على الأحداث	Coin	قطعة نقود
Mutually Exclusive Events	أحداث متنافية	Die	حجر نرد
		Event	حدث

الأدوات والوسائل

Scientific calculator	آلة حاسبة علمية
Graphical calculator	آلة حاسبة رسومية
Graphical programs	برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

الدرس (٤ - ١): حساب الاحتمال.

مخطط تنظيبي للوحدة



حساب الاحتمال

Calculating Probability

مقدمة :

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفي هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث في حساب إحتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

Basic terms and concepts

مصطلحات ومفاهيم أساسية

تعلم



التجربة العشوائية : Random Experiment

هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

مثال

١ بين أيًا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟

- إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.
- سحبت كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة (دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.
- إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوي.
- سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة في الحجم والوزن، الأولى بيضاء، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الحل

التجارب (أ)، (ج)، (د) هي تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.

بينما تجربة (ب) هي تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

٢ حاول أن تحل

١ بين أيًا من التجارب الآتية هي تجربة عشوائية :

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل .
- العمليات على الأحداث: الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال.
- الأحداث المتنافية .
- قانونا دي مورجان.
- مفهوم الاحتمال
- حساب الاحتمال
- مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

المصطلحات الأساسية

- تجربة عشوائية
- random experiment
- فضاء العينة
- sample space
- حدث
- event
- حدث بسيط
- simple event
- حدث مؤكد
- certain event
- حدث مستحيل
- impossible event
- أحداث متنافية
- mutually exclusive events
- الاحتمال
- probability
- مسلمات الاحتمال
- probability axioms

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة .

- أ إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.
 ب سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.
 ج سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.

تعلم



تعريف

Sample space (outcomes space)

فضاء العينة (فضاء النواتج) :

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)

- ملاحظة:
- يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف).
 - يكون فضاء العينة منتهياً إذا كان عدد عناصره محدوداً، أو غير منتهٍ إذا كان عدد عناصره غير محدود، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهي.

فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة :

أولاً: إلقاء قطعة نقود : Tossing a coin

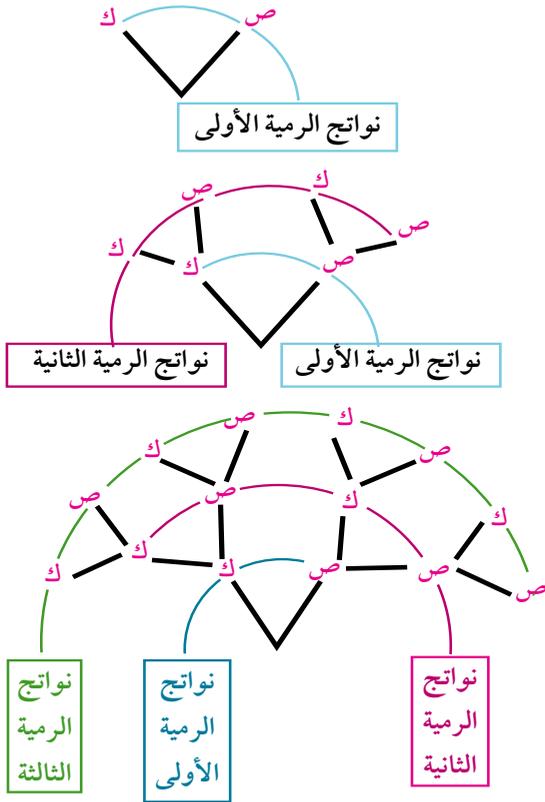
- ١- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف = {ص، ك} حيث ص ترمز للصورة، ك ترمز للكتابة ويكون: ن(ف) = ٢

- ٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو: ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)} ويكون: ن(ف) = ٢ × ٢ = ٤

- ٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو: ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)} ويكون: ن(ف) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨

لاحظ من الأمثلة السابقة

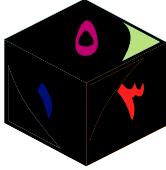
- ١- عند رمي قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن(ف) = ٢^م - ٢ (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟





٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتي نقود متمايزتين (مختلفتين في الشكل أو الحجم) معاً هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، ويكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب: (وجه القطعة الأولى، وجه القطعة الثانية).

Tossing a die



ثانياً: إلقاء حجر نرد:

١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي هو:

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ويكون: } n(F) = 6$$

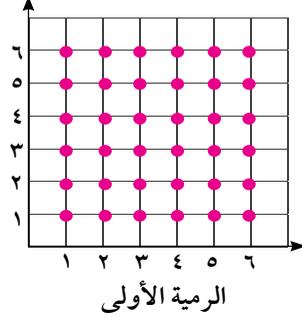
٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذي يظهر في كل مرة على الوجه العلوي هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول هو ناتج الرمية الأولى، ومسقطها الثاني هو ناتج الرمية الثانية أى أن:

$$F = \{(s, s), (s, 2), (s, 3), (s, 4), (s, 5), (s, 6), (2, s), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, s), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, s), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, s), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, s), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

ب) صورة هندسية:

أ) صورة جدولية:

الرمية الثانية



الرمية الأولى \ الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١, ١)	(١, ٢)	(١, ٣)	(١, ٤)	(١, ٥)	(١, ٦)
٢	(٢, ١)	(٢, ٢)	(٢, ٣)	(٢, ٤)	(٢, ٥)	(٢, ٦)
٣	(٣, ١)	(٣, ٢)	(٣, ٣)	(٣, ٤)	(٣, ٥)	(٣, ٦)
٤	(٤, ١)	(٤, ٢)	(٤, ٣)	(٤, ٤)	(٤, ٥)	(٤, ٦)
٥	(٥, ١)	(٥, ٢)	(٥, ٣)	(٥, ٤)	(٥, ٥)	(٥, ٦)
٦	(٦, ١)	(٦, ٢)	(٦, ٣)	(٦, ٤)	(٦, ٥)	(٦, ٦)

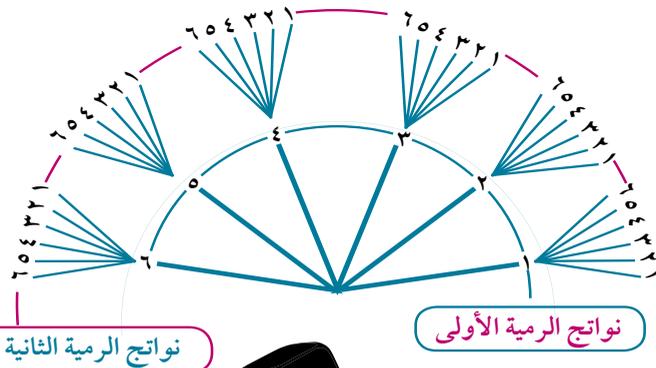
ج) الشجرة البيانية

لاحظ أن:

$$١- n(F) = 36 = 6 \times 6$$

$$٢- F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد متمايزين في آن واحد (معاً)، هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.



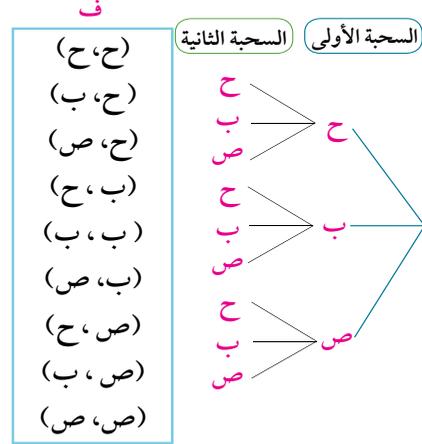
نواتج الرمية الثانية



مثال

٢ كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء. اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.

الحل



نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور في السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث $n = 3^2 = 9$

$f = \{(ح، ح)، (ح، ب)، (ح، ص)، (ب، ح)، (ب، ب)، (ب، ص)، (ص، ح)، (ص، ب)، (ص، ص)\}$

أضف إلى معلوماتك

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهذا يعني عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها في السحبة الثانية.

حاول أن تحل

٢ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة. اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.

تعلم

The event

الحدث

الحدث هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

The simple event

الحدث البسيط (الحدث الأولى)

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصراً واحداً فقط.

The certain event

الحدث المؤكد :

هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

The impossible event

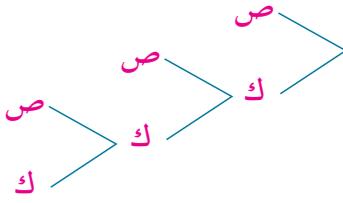
الحدث المستحيل

هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ وهو حدث مستحيل أى يقع في أى مرة تجرى فيها التجربة

مثال

- ٣ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .
اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:
أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"
ب "حدث ظهور صورة على الأقل"
ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"
د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل



- من الرسم نجد أن
ف = {ص، (ك، ص)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}
أ = {ص، (ك، ص)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}
ب = {ص، (ك، ص)، (ك، ك، ص)}
ج = {(ك، ك، ك)، (ك، ك، ص)}
د = { } = ϕ الحدث المستحيل

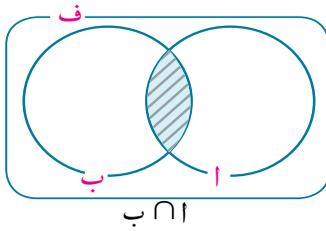
٤ حاول أن تحل

- ٣ عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.
اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:
أ "حدث ظهور صورة على الأقل"
ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"
ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"

Operation of the events

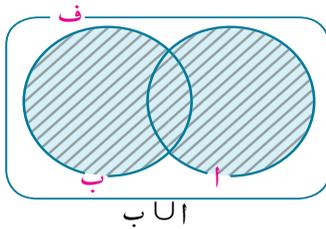
العمليات على الأحداث

تعلم



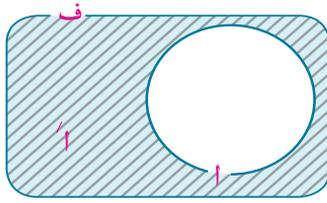
أولاً: التقاطع Intersection

تقاطع الحدثين أ، ب هو الحدث $A \cap B$ الذي يحوى كل عناصر فضاء العينة التي تنتمى إلى أ، ب معاً ويعنى وقوع أ أو ب (وقوع الحدثين معاً)



ثانياً: الاتحاد Union

اتحاد الحدثين أ، ب هو الحدث $A \cup B$ الذي يحوى كل عناصر فضاء العينة التي تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما معاً ويعنى وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)

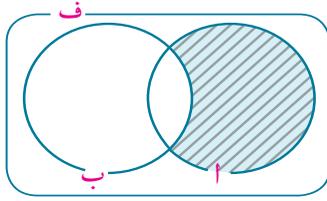


Completion

ثالثًا : الإكمال

الحدث A يسمى الحدث المكمل للحدث A ، لذلك A يحوى كل عناصر فضاء العينة التي لا تنتمى إلى الحدث A ، ويعنى **عدم وقوع الحدث A** .

$$\text{لاحظ : } A^c = A \cup \phi, A \cap A^c = \phi$$



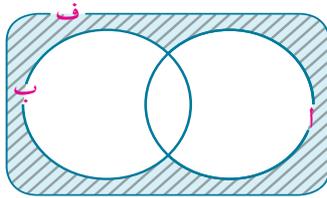
Difference

رابعًا : الفرق

الحدث $A - B$ يحوى كل عناصر الفضاء التي تنتمى إلى A ، ولا تنتمى إلى B وهى أيضًا نفس عناصر $A \cap B^c$

ويعنى **وقوع A وعدم وقوع B (وقوع A فقط)**

$$A - B = A \cap B^c = (A \cap B)^c$$



خامسًا : قانونا دي مورجان

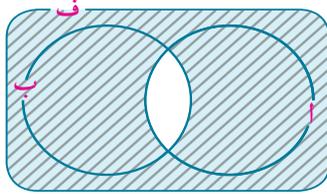
إذا كان A ، B حدثين من F فإن :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (\text{أولاً})$$

وتعنى حدث "عدم وقوع أى من الحدثين" أو "عدم وقوع A وعدم وقوع B "

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (\text{ثانيًا})$$

و تعنى حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر".



تعلم



Mutually exclusive events

الأحداث المتنافية

يقال لحدثين A ، B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر. فمثلاً: ١- إذا كان A "حدث النجاح فى امتحان ما"، B "حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

إذا كان A حدث ظهور عدد فردى

$$A = \{1, 3, 5\}$$

B حدث ظهور عدد زوجى

$$B = \{2, 4, 6\}$$

فإن $A \cap B = \phi$ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

تعريف < يقال: إن الحدثين A ، B متنافيان إذا كان $A \cap B = \phi$

< يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذاً فقط إذا كانت متنافية متنى متنى.

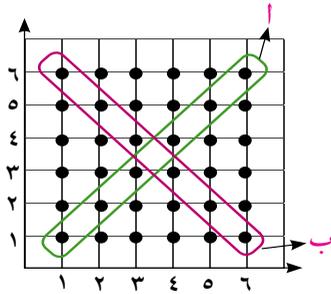
لاحظ :

- ١- إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن A ، B حدثان متنافيان.
- وإذا كانت A ، B ، C ثلاثة أحداث من F وكان: $A \cap B = \phi$ ، $B \cap C = \phi$ ، $A \cap C = \phi$ ، $A \cap B \cap C = \phi$ فإن: A ، B ، C أحداث متنافية والعكس صحيح.
- ٢- الأحداث البسيطة (الأولية) في أي تجربة عشوائية تكون متنافية.
- ٣- أي حدث A ومكمله A^c هما حدثان متنافيان.

مثال

- ٤) في تجربة إلقاء حجرى نرد متميزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها. أولاً: مثل فضاء العينة هندسياً واكتب كلاً من الحدثين الآتيين.
- الحدث A " ظهور نفس العدد على الوجهين " الحدث B " ظهور عددين مجموعهما ٧".
- ثانياً: هل الحدثان A ، B متنافيان؟ فسر إجابتك.

الحل



- أولاً: عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هي أزواج مرتبة عددها $6^2 = 36$
- الشكل المقابل هو التمثيل الهندسي لفضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما في الشكل.
- $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
- $B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
- ثانياً: $A \cap B = \{(3, 3)\}$ ، A ، B حدثان متنافيان

٦ حاول أن تحل

- ٤) في المثال السابق اكتب كلاً من الحدثين الآتيين:
- ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥ " حدث د " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر "
- هل الحدثان ج، د متنافيان؟ فسر إجابتك.

Propability

الاحتمال

تعلم

حساب الاحتمال :

إذا كان F فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانيات، فإن احتمال وقوع أي حدث $A \subset F$ يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث :

$$P(A) = \frac{\text{عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث } A}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}} = \frac{n(A)}{n(F)}$$

مثال

- ٥) سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر، الباقي باللون الأخضر، احسب احتمال الأحداث الآتية:
- أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.
- ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

الحل

$$\text{احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد جميع الكرات}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\text{احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء} + \text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$$= \frac{3+2}{10} = 0,5$$

- احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = ل (ج)
- = احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء = $\frac{5+2}{10} = 0,7$
- فكر:** هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

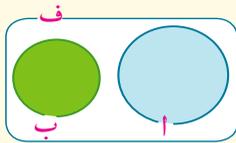
٤ حاول أن تحل

- ٥) في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية:
- د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.
- هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء.

تعلم

Axioms of probability

مسلمات الاحتمال



١- لكل حدث $A \cap B$ يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال الحدث $A \cap B$ ويرمز له بالرمز $P(A \cap B)$

$$0 \leq P(A \cap B) \leq 1$$

حيث:

$$P(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وكان A, B حدثين متنافيين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

من المسلمات السابقة نلاحظ:

المسلمة الأولى تعنى احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقي ينتمى للفترة $[0, 1]$

المسلمة الثانية تعنى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = 1
 يمكن تعميم المسلمة الثالثة إلى أى عدد محدود من الأحداث المتنافية
 $P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$
 حيث A, B, C, \dots ، أن أحداث متنافية

نتائج هامة

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

(3) $P(A \cap B) = P(A) - P(A \setminus B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال

٦ إذا كان A, B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :

$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ احسب :

- أ $P(A \cup B)$ ب $P(\bar{A})$ ج $P(A - B)$ د $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

الحل

أ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

ب $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

ج $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

د $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$

٦ حاول أن تحل

٦ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

- أ $P(B)$ ب $P(\bar{B})$ ج $P(A \cup B)$

مثال

٧ إذا كان A, B حدثين من فضاء تجربة عشوائية ف وكان $P(A) = \frac{5}{8}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A - B) = \frac{3}{8}$ فأوجد :

- أ $P(A \cap B)$ ب $P(A \cup B)$ ج $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ د $P(A \cup B)$

الحل

أ $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ب $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

ج $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$

فكر: هل يمكنك إيجاد $P(A \cup B)$ بطريقة أخرى؟ وضح ذلك

٤ حاول أن تحل

٧ في المثال السابق أوجد:

أ $P(A)$ ب $P(A \cup B)$ ج $P(A \cap B)$

مثال

٨ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف، وكان $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{8}$

، $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ فأوجد:

- أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.
ج احتمال وقوع الحدث B فقط. د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

الحل

$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ $P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{8}$ $P(B) = \frac{3}{8}$ $P(A) = \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{3}{8}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

أ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل $= P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

ب احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر $= P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

ج احتمال وقوع الحدث B فقط $= P(B) = \frac{3}{8}$

د احتمال وقوع أحد الحدثين فقط $= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

فكر: هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

٤ حاول أن تحل

٨ إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان $P(A) = 0.8$ ، $P(B) = 0.6$ ، $P(A \cup B) = 0.9$

فاحسب احتمال الأحداث الآتية:

- أ حدث "وقوع أحد الحدثين على الأقل" ب حدث "وقوع فقط"
ج حدث "وقوع أحد الحدثين فقط" د حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر"

مثال

٩ A ، B حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:

$P(B) = 0.3$ ، $P(A) = 0.7$ ، $P(A \cup B) = 0.72$ أوجد $P(A)$ ، $P(B)$

أولاً: إذا كان A ، B حدثين متنافيين.

ثانياً: إذا كان $A \cap B$

$$\therefore ل(ب-أ) = ل(ب) - ل(ب \cap أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١$$

ج حدث عدم نجاح الطالب في الامتحانين معاً = $(ب \cap أ)$ وهو حدث مكمل للحدث $(ب \cap أ)$

$$\therefore ل(ب \cap أ) = ١ - ل(ب-أ) = ١ - ٠,١ = ٠,٩$$

تطبيقات حياتية:

٤ حاول أن تحل

١١ للحصول على وظيفة في إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظري، والآخر عملي، إذا كان احتمال النجاح في الاختبار النظري ٠,٧٥ واحتمال نجاحه في الاختبار العملي ٠,٦ واحتمال النجاح في الاختبارين معاً ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :
 أ نجاحه في الاختبار النظري فقط .
 ب نجاحه في أحد الاختبارين على الأقل .

تفكير ناقد:

الربط بالرياضة: صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفي معه بأن احتمال فوز فريقه في مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه في مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه في المبارتين معاً ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال؟ فسر إجابتك.

مثال

١١ ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولو حظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة ، احسب احتمال:
 أولاً: أ حدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوي ٤"
 ثانياً: ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر"
 ثالثاً: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوي ٢"
 رابعاً: د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

الحل

$$ن(ف) = ٣٦$$

$$\text{أولاً: أ} = \{(١,١), (٢,١), (٣,١), (١,٢), (٢,٢), (١,٣)\} \therefore ن(أ) = ٦ \therefore ل(أ) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{ثانياً: ب} = \{(٢,١), (١,٢), (٤,٢), (٢,٤), (٦,٣), (٣,٦)\} \therefore ن(ب) = ٦ \therefore ل(ب) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{ثالثاً: ج} = \{(١,٣), (٣,١), (٤,٢), (٢,٤), (٥,٣), (٣,٥), (٦,٤), (٤,٦)\} \therefore ل(ج) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{رابعاً: د} \text{ حيث إنه لا يمكن أن يظهر عدداً مجموعهما أكبر من ١٢ ، } \therefore د = \phi \text{ ، ل(د) = صفر}$$

٤ حاول أن تحل

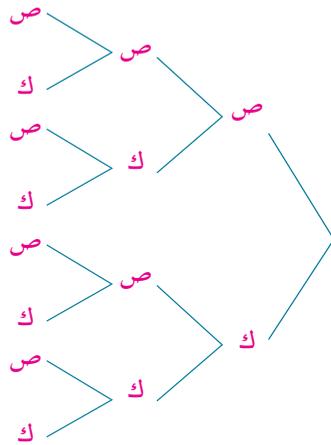
١٢ في المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانياً: ب حدث " العدد في الرمية الأولى فردي وفي الرمية الثانية زوجي "

مثال

١٢ ألقى قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحت تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية:



أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانياً: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثاً: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.

الحل

ف = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك) }

ن = 8 = (ف)

أولاً: ∴ أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .

∴ أ = { (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص) }

∴ ن(أ) = 3 ∴ ل(أ) = $\frac{3}{8}$

ثانياً: ∴ ب حدث ظهور صورتين على الأقل، أي إما صورتان أو ثلاث صور

∴ ب = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص) }

∴ ن(ب) = 4 ∴ ل(ب) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ثالثاً: ∴ ج حدث ظهور صورتين بالضبط

∴ ج = { (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص) } ∴ ن(ج) = 3 ∴ ل(ج) = $\frac{3}{8}$

٦ حاول أن تحل

١٣ في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية:

أولاً: أ حدث ظهور نفس الوجه في الرميات الثلاث ثانياً: ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثاً: ج حدث ظهور عدد فردي من الصور رابعاً: د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامساً: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوي نفس العدد من الكتابات.

مثال

١٣ الارتباط بالمجتمع: في أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة، وبياناتهم موضحة بالجدول التالي:

المجموع	يتحدث الفرنسية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث العربية	
١٢٠	٢٥	٤٥	٥٠	رجل
٨٠	٥	٣٠	٤٥	امراة
٢٠٠	٣٠	٧٥	٩٥	المجموع

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائياً فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

- أ امرأة تتحدث العربية.
- ب رجل يتحدث الإنجليزية.
- ج يتحدث العربية أو الفرنسية.
- د يتحدث العربية والإنجليزية.
- ه امرأة لا تتحدث الإنجليزية ولا يتحدث العربية.

الحل

- أ احتمال أن يكون المختار " امرأة تتحدث العربية " $= \frac{40}{100} = 0,4$
- ب احتمال أن يكون المختار " رجل يتحدث الإنجليزية " $= \frac{40}{100} = 0,4$
- ج احتمال أن يكون المختار " يتحدث العربية أو الفرنسية " $= \frac{30+40}{100} = 0,7$
- د احتمال أن يكون المختار " يتحدث العربية والإنجليزية " $= \phi = 0$
- ه احتمال أن يكون المختار " امرأة لا تتحدث الإنجليزية ولا يتحدث العربية " $= \frac{30}{100} = 0,3$

٤ حاول أن تحل

١٤ في المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- أ لا يتحدث الإنجليزية.
- ب يتحدث الألمانية.
- ج إمراة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية.
- د رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.

تمارين (٤ - ١)

١ يرغب طالب في شراء حقيبة ويمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بُنيًا، مثل فضاء العينة في هذا الموقف بالشجرة البيانية.

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

- أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلاً من الأحداث الآتية.
- ب «ظهور صورة وعدد فردي».
- ج «ظهور عدد أولى أكبر من ٢».
- د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».
- ه «الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجي».
- و «الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

٣ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي.

عين كلاً من الأحداث التالية:

- أ «ظهور عددين متساويين».
- ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣».
- د «الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

٤ من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب

ف وعين منها الأحداث الآتية:

- أ حدث أن يكون رقم الأحاد فرديًا.
- ب حدث أن يكون رقم العشرات فرديًا.
- ج حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًا.
- د حدث أن يكون رقم الأحاد أو رقم العشرات فرديًا.

- ٥) حقيبة بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :
- أ حدث " العدد المسجل زوجي وأكبر من ١٠ " ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢ "
- ج حدث " العدد المسجل فردى ويقبل القسمة على ٣ " د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ " هـ حدث " العدد المسجل أولى "
- و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة $٥ - ٣ \geq ١٧$ "
- ٦) سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ وإذا كان :
- أ حدث " العدد في السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد في السحبة الأولى " ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣ "
- اكتب كلاً من أ ، ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.
- ٧) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثل فضاء النواتج بشكل شجري، ثم عيّن الأحداث الآتية :
- أ حدث " ظهور كتابتين على الأقل " ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر "
- ج حدث " ظهور صورة في الرمية الأولى " د حدث " عدم ظهور صورة في الرميات الثلاث "
- ٨) أُلقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد، مثل فضاء العينة بشكل شجري ثم أوجد الأحداث الآتية :
- أ حدث " ظهور كتابة وعدد زوجي " ب حدث " ظهور صورة وعدد فردي "
- ج حدث " عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب " د حدث " وقوع الحدث فقط " هـ حدث " وقوع الحدث أو وقوع الحدث ب "
- اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :
- ٩) إذا أُلقي حجر منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردي أقل من ٥ هو:
- أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{١}{٣}$ ج $\frac{١}{٦}$ د $\frac{١}{٦}$
- ١٠) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، فإن احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الأولى وعدد أولى في الرمية الثانية هو :
- أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{١}{٦}$ ج $\frac{١}{٩}$ د $\frac{١}{٤}$
- ١١) إذا سحبت كرة عشوائياً من صندوق به ٣ كرات بيضاء، ٥ كرات حمراء، ٧ كرات خضراء فإن:
- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :
- أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٧}{١٥}$ د $\frac{١}{٣}$

١٢ يحتوي صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائياً، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًا هو :

- أ $\frac{1}{3}$ ب $\frac{7}{9}$ ج $\frac{1}{3}$ د $\frac{5}{9}$

١٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان $B \subset A$ ، $L(A) = 2$ ، $L(B) = 6$ ، فإن $L(A-B)$ يساوي:

- أ $0,6$ ب $0,3$ ج $0,4$ د $0,2$

١٤ ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولو حظ العدد على الوجه العلوي:

أ احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ "حدث ظهور عدد فردي." ب "حدث ظهور عدد أولي."
 ج "حدث ظهور عدد زوجي." د "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢."
 هـ "حدث ظهور عدد مكون من رقمين." و "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد."

ب احسب: $L(A \cup B)$ ، $L(A \cap B)$ ، $L(A \cup B)$ ، $L(A \cap B)$.

١٥ إذا كان $F = \{A, B, C, D\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد:

$L(A)$ ، $L(B)$ ، إذا كان $L(A) = 3$ ، $L(B) = 2$ ، $L(C) = 1$ ، $L(D) = \frac{5}{18}$

١٦ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:

$L(A \cup B) = 6, 0$ ، $L(A - B) = 25, 0$ أحسب $L(A)$ ، $L(B)$.

١٧ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $L(A) = \frac{1}{3}$ ، $L(B) = \frac{3}{8}$ ، $L(A \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد:

أ $L(A)$ ب $L(A \cup B)$ ج $L(A - B)$ د $L(A \cap B)$

١٨ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:

$L(A) = 4, 0$ ، $L(B) = 3$ ، $L(A \cap B) = 2, 0$ احسب احتمال:

أ وقوع فقط. ب وقوع أ أو ب. ج وقوع أ وعدم وقوع ب.

١٩ صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائياً. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

- أ حمراء. ب زرقاء أو صفراء. ج ليست زرقاء. د ليست حمراء ولا صفراء.

٢٠ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً ولو حظ العدد المدون عليها. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

- أ عددًا يقبل القسمة على ٣ ب عددًا يقبل القسمة على ٥
 ج عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥ د عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

- ٢١ أقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين. ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر. د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.
- ٢٢ في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذي يظهر على الوجه العلوي في كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- أ حدث ظهور العدد ٤ في الرمية الأولى. ب حدث مجموع العددين في الرميتين يساوي ٨
- ج حدث مجموع العددين في الرميتين أقل من أو يساوي ٥
- ٢٣ **الربط بالرياضة:** عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصاً شملهم استطلاع للرأي، وجد أن ٤٠ شخصاً، منهم يشجع نادي الهلال، و٢٨ شخصاً يشجع نادي النجمة، وأن ٨ أشخاص لا يشجعون أيّاً من الناديين. إذا اختير شخص عشوائياً من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعي:
- أ أحد الناديين على الأقل. ب الناديين معاً.
- ج نادي الهلال فقط. د أحد الناديين فقط.
- ٢٤ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولي، ب حدث ظهور عدد زوجي. احسب احتمال وقوع كلٍّ من الحدثين أ، ب ثم احسب احتمال كلٍّ من الأحداث الآتية:
- أ وقوع أحد الحدثين على الأقل ب وقوع الحدثين معاً
- ج وقوع ب فقط د وقوع أحد من الحدثين فقط
- ٢٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:
- أ مضاعفاً للعدد ٧ ب مربعاً كاملاً
- ج مضاعف للعدد ٧ ومربعاً كاملاً د ليس مربعاً كاملاً، وليس مضاعفاً للعدد ٧
- ٢٦ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل(ب) = $\frac{4}{9}$ ل(أ)، ل(أ-ب) = $\frac{1}{9}$ ، ل(ب∩أ) = $\frac{1}{9}$ ، أوجد: ل(أ)، ل(ب)، ل(أ∪ب)، ل(أ∪ب)
- ٢٧ كتب طارق ٧٥ خطاباً على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء، وكتب زياد ٢٥ خطاباً أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائياً مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب:
- أ بلا أخطاء. ب زياد هو الذي كتب الخطاب.
- ج زياد لم يخطئ في كتابته. د طارق قد أخطأ في كتابته.
- ٢٨ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف، ل(أ) = $\frac{1}{6}$ ، ل(ب) = $\frac{1}{8}$ ، ل(أ∪ب) = $\frac{1}{5}$ ، فاحسب ل(أ∩ب)

ملخص الوحدة

١ التجربة العشوائية: هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

٢ فضاء العينة (فضاء النواتج): فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له بالرمز Ω .

٣ الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

٤ الحدث بسيط (أولي): هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوي عنصرًا واحدًا فقط.

٥ الحدث المؤكد: هو الحدث الذي عناصره هي عناصر فضاء العينة Ω .

٦ الحدث المستحيل: هو الحدث الخالي من أي عنصر ويرمز له بالرمز \emptyset .

٧ العمليات على الأحداث: التقاطع - الاتحاد - الإكمال - الفرق.

٨ الأحداث المتنافية

يقال إن الحدثين A ، B متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

◀ يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت فقط إذا كانت متنافية متنى متنى.

٩ حساب الاحتمال

◀ إذا كان Ω فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما ، والأحداث الأولية التي تحويها متساوية الإمكانيات.

◀ فإن احتمال وقوع أي حدث $A \subset \Omega$ يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

١٠ مسلمات الاحتمال

◀ لكل حدث $A \subset \Omega$ يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال الحدث A يرمز له بالرمز $P(A)$ حيث: $0 \leq P(A) \leq 1$

◀ $P(\Omega) = 1$

◀ إذا كان $A \subset \Omega$ ، $B \subset \Omega$ وكان A ، B حدثين متنافيين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

١١ إذا كان $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ ، أن جميعها أحداث متنافية

فإن $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1$

١٢ $P(\emptyset) = 0$

١٢ إذا كان $A \subset \Omega$ حيث $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ فإن $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

١٣ لأي حدثين A ، B من فضاء نواتج تجربة عشوائية فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{أ} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{ب}$$

١٤ الأحداث بالصورة اللفظية وتمثيلها بشكل فن، واحتمالاتها:

احتمال وقوع الحدث	تمثيل الحدث بشكل فن	الحدث في صورة لفظية
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$		عدم وقوع الحدث أ
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$		وقوع أ و ب (وقوعهما معاً)
$P(\bar{A}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$		وقوع الحدث فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)
$P((\bar{A} \cup \bar{B})) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$		وقوع أحدهما فقط (وقوع فقط أ أو وقوع فقط ب فقط)
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$		عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$		عدم وقوع الحدثين معاً (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب) أو (وقوع أحدهما على الأكثر)
$P(\bar{A}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$		عدم وقوع فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)

اختبار تراكمه

أكمل ما يأتي:

- ١ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن فضاء النواتج $F = \dots$
- ٢ عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين متتاليتين، وملاحظة الوجه العلوي، فإن حدث ظهور صورة على الأكثر $= \dots$
- ٣ عند إلقاء حجر نرد منتظم ثم قطعة نقود وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما فإن حدث ظهور عدد أولي $= \dots$
- ٤ عند إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوي في كل مرة، فإن حدث "مجموع العددين الظاهرين يساوي ٥" $= \dots$
- ٥ عند سحب بطاقة من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الظاهر على البطاقة فإن حدث «العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣» $= \dots$
- ٦ عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتاليات وملاحظة تتابع الصور والكتابات، فإن حدث "ظهور صورتين بالضبط" $= \dots$
- ٧ إذا كان $A \cap B$ ف حيث F فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ فأوجد $P(A \cup B)$.
- ٨ صندوق به ٢٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت منه بطاقة واحدة عشوائياً، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة:
 - أ يقبل القسمة على ٦
 - ب أولياً أكبر من ١٠
 - ج من عوامل العدد ١٢
- ٩ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، $P(A \cup B) = 0,85$ ، $P(A) = 0,75$ ، $P(B) = 0,6$ أوجد:
 - أ $P(A \cap B)$
 - ب $P(A \cap B)$
 - ج $P(A \cup B)$
- ١٠ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، واحتمال حدث وقوع أحدهما على الأكثر يساوي $0,75$ ، احتمال حدث "وقوع أحدهما على الأقل" يساوي $0,6$ فأوجد احتمال الأحداث الآتية:
 - أ احتمال وقوعهما معاً.
 - ب وقوع أحد الحدثين فقط.
 - ج وقوع B أو عدم وقوع A .
- ١١ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإذا كان $P(A) = \frac{3}{5}$ و $P(A \cup B) = 0,45$ فأوجد $P(B)$ في الحالات الآتية:
 - أ A ، B حدثان متنافيان
 - ب $A \supset B$
 - ج $P(B) = 0,2$
- ١٢ **الربط بالسياحة:** فوج سياحي مكون من ١٩ سائحاً من روسيا، ١٧ سائحاً من إيطاليا، ١٤ سائحاً من فرنسا، اختير أحدهم عشوائياً، احسب احتمال أن يكون السائح:
 - أ من روسيا أو من فرنسا.
 - ب ليس من فرنسا.

ج من أوروبا. ٥ من هولندا.

- ١٣ **الربط بالبيئة المدرسية:** في احتفال المدرسة بتكريم أوائل طلابها، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨، واحتمال حضور مدير عام التعليم ٠,٩ واحتمال حضورهما معًا ٠,٧٥ أوجد:
- أ احتمال حضور المحافظ فقط. ب احتمال حضور أحدهما على الأقل. ج احتمال عدم حضورهما معًا.

- ١٤ أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ف. فإذا كان ل (أ) = ٠,٦، ل (ب) = ٠,٣، ل (أ ∪ ب) = ٠,٩، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:
- أ وقوع أ و ب ب وقوع أ وعدم وقوع ب ج وقوع أ فقط أو ب فقط

١٥ إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث ف = {أ، ب، ج}

$$\text{وكان } \frac{ل(أ)}{ل(ب)} = \frac{٧}{٣}، ل(ب) = ٢، ل(ب) = ٣ \text{ فأوجد } \frac{ل(ج)}{ل(ب)}$$

- ١٦ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:
- ل (أ) = ٠,٦، ل (ب) = ٠,٥، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فأوجد احتمال كل مما يأتي:
- أولاً: وقوع الحدثين أ، معًا ثانياً: وقوع حدث أ فقط ثالثاً: وقوع أحد الحدثين على الأقل رابعاً: وقوع أحد الحدثين فقط

- ١٧ تقدم لوظيفة بأحد البنوك ٥٠ شخصًا موزعين كما هو موضح بالجدول التالي، اختير أحد المتقدمين عشوائيًا، أوجد احتمال أن يكون الشخص المختار:

المجموع	مؤهلات متوسطة	مؤهلات عليا	الجنس
٣٠	١٤	١٦	ذكر
٢٠	٨	١٢	أنثى
٥٠	٢٢	٢٨	المجموع

أولاً: أنثى.

ثانياً: من ذوى المؤهلات المتوسطة.

ثالثاً: ذكر من المؤهلات العليا.

رابعاً: أنثى أو من ذوى المؤهلات العليا.

تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

الاختبارات العامة

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ قاعدة المتتابعة (2×1) ، (3×2) ، (4×3) ، (5×4) ، (6×5) هي
 أ $(1 - n)(1 + n)$ ب $n(1 + n)$ ج $2n(1 + n)$ د $(1 + n)(2 + n)$
- ٢ الوسط الحسابي للعددين ٨ ، ١٢ هو
 أ ٨ ب ١٢ ج ١٠ د ٢
- ٣ مجموع المتسلسلة $\sum_{r=1}^3 r^3 = \dots$
 أ ١ ب ٣ ج ٦ د ١٨
- ٤ $3^0 = \dots$
 أ ٥ ب ٣ ج ٦٠ د ١٥

السؤال الثاني:

- ١ أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة (١١ ، ٩ ، ٧ ، ...)
- ٢ في المتتابعة الحسابية (١٦ + ٤٠س ، ٥٠س - ٩ ، ... ، ٣س + ١٥ ، ٦ + ٥س) أوجد قيمة س ثم أوجد عدد حدود المتتابعة.

السؤال الثالث:

- ١ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $u_1 + u_2 = 48$ ، $u_3 + u_4 = 192$ اكتب هذه المتتابعة.
 أ اكتب هذه المتتابعة. ب أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.
- ٢ اكتب كلاً من المتسلسلات الآتية، ثم أوجد مجموع المفكوك، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة

$$\text{الحاسبة}$$

$$\text{أ } \sum_{r=2}^{\infty} r^2 - 1$$

$$\text{ب } \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{-1}$$

السؤال الرابع:

- ١ أوجد قيمة كل من:
 أ $5 - 3$ ب 5×2
- ٢ أوجد مجموعة حل من المعادلات الآتية:
 أ $12 = 9r + 3$ ب $1 = 8 - n$

السؤال الخامس:

- ١ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ وكانت النسبة بين الوسط الثاني إلى الوسط الأخير تساوي ٢ : ٧ فما عدد هذه الأوساط؟
- ٢ متتابعة هندسية حدها الثالث يساوي ٩ ، وحدها السادس يساوي ٢٤٣ أوجد المتتابعة ومجموع الثمانية حدود الأولى.

الاختبار الثاني

الجبر

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

- ١) الوسط الهندسي للعددين ٤، ١٦ هو
 أ) ٨ ب) ٨ ج) $٨ \pm$ د) ٤
- ٢) مجموع حدود المتتابعة (١، ٣، ٥، ...، ١٧، ١٩) هو
 أ) ٢٠ ب) ٥٠ ج) ١٠٠ د) ٣٠
- ٣) إذا كان الوسط الحسابي للعددين س، ١٦ هو ٣ فإن س تساوي
 أ) ١٠- ب) ٣ ج) ١٦ د) ٦
- ٤) إذا كان $١٠^\circ = r$ فإن $r =$
 أ) ٥ ب) ٣ ج) ١٠ د) ١

السؤال الثاني:

- ١) ادخل ثمانية أوساط حسابية بين العددين ٢، ٢٩ ثم أوجد مجموع تلك الأوساط.
 ٢) متتابعة هندسية موجبة غير منتهية مجموع حديها الأول والثاني ٣٦ ومربع حدها الثالث ٣٦ أوجد المتتابعة.
 ثم أوجد مجموعها ابتداء من الحد الأول.

السؤال الثالث:

- ١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وكان $r = ١٢$ ، $e = ٢$ أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها.
 ٢) أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الآتيتين:

أ) $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}$ ب) $\sum_{k=3}^9 k + ١$

السؤال الرابع:

- ١) أوجد قيمة كل من
 أ) $٥ - ٢$ ب) $\sum_{r=1}^3 r^2$
- ٢) ما عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ٥ أشخاص في صف واحد؟

السؤال الخامس:

- ١) (١، ٣٢٠، ب، ج، ٤٠، ...) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة أوجد قيم أ، ب، ج. ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدود هذه المتتابعة بدءاً من حدها الأول.
 ٢) أوجد عدد الحدود اللازم اخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١،) ابتداء من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع

الاختبار الثالث

التفاضل والتكامل والاحتمال

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- ١) متوسط تغير الدالة د(س) = س^٢ عندما تتغير س من ١ إلى ٢ يساوى
- أ) ٣- ب) ١ ج) ٤ د) ٣
- ٢) مشتقة الدالة د حيث د(س) = س^٢ - ٣ هي
- أ) ٢س ب) ٢س - ٣ ج) س^٢ د) ٣ - ٢س
- ٣) إذا كان أ، ب حدثان متنافيان فإن ل(أ ∩ ب) =
- أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) صفر د) ١
- ٤) ل^٣س^٢وس =
- أ) س^٢ + ٣ ب) س^٢ + ٣ ج) ٣س^٢ + ٣ د) س^٣

السؤال الثاني:

- ١) إذا كان د(س) = س^٢ + ١ فأوجد معدل التغير، ثم احسب قيمته عندما س = ١
- ٢) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٤، ٠، ل(ب) = ٣، ٠، فأوجد ل(أ ∪ ب)

السؤال الثالث:

- ١) إذا كان ص = (س^٢ + ١)(٣ + س^٢) فأوجد $\frac{ص}{س}$
- ٢) في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى. اكتب فضاء العينة ثم عين الأحداث الآتية مع ذكر عدد عناصر كل منها
- أ الحدث أ «ظهور عدد أولى».
- ب الحدث ب «ظهور عدد يقبل القسمة على ٦»
- ج الحدث ج «ظهور عدد يقبل القسمة على ٧»

السؤال الرابع:

- ١) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = س^٢ - ٢س عند النقطة (١، -١).
- ٢) أوجد:
- أ) ل (٣ + س^٢) س ب) ل $\frac{١ + س^٣}{١ + س}$ س

السؤال الخامس:

- ١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^٢ + ٢ والتى يكون عندها ميل المنحنى يساوى ٢
- ٢) أوجد كلاً من:
- أ) ل ٢ - ع ٢ ب) ل ((س - ١) + ٣) س

التفاضل والتكامل والاحتمال

الاختبار الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) معدل تغير الدالة $د$ حيث: $د(س) = س^2 - ١$ عند $س = ٢$ يساوى
 أ) ٤ ب) -٤ ج) ١- د) ١
- ٢) $س^2$ و $س$ =
 أ) $س - ١ + ن$ ب) $\frac{١}{س} -$ ج) $١ + \frac{١}{س}$ د) $س^3 + ث$
- ٣) يقال للحدثين $أ$ ، $ب$ انهما متنافيان إذا كان $ل(أ \cap ب) =$
 أ) صفر ب) ١ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $ل(أ)$
- ٤) ميل المماس للمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ عندما $س = ١$ تساوى
 أ) ١ ب) ١- ج) صفر د) غير معرف

السؤال الثاني:

- ١) إذا كان $د(س) = س^2 - س^٢$ فأوجد:
 أ) دالة التغير $ت(هـ)$ عند $س = ١$ ب) متوسط التغير في الدالة عندما تتغير $س$ من ١ إلى ١,١
- ٢) $أ$ ، $ب$ حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية، $ل$ دالة احتمال معرفة على $ف$ حيث:
 $ل(ب) = (١) = ٣$ ، $ل(أ \cup ب) = ٠,٧٢$ ، أوجد $ل(أ)$ ، $ل(ب)$ إذا كان:
 أ) $أ$ ، $ب$ حدثان متنافيان ب) $أ \supset ب$

السؤال الثالث:

- ١) أوجد إذا كان $ص = ٤س^٣ - ٥س^٢ + ٤س + ٩$ فأوجد $\frac{دص}{دس}$
- ٢) كيس يحتوي ٤ كرات بيضاء، ٥ كرات حمراء، ٣ كرات سوداء سحبت كرة واحدة عشوائياً، أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:
 أ) حمراء ب) ليست بيضاء ج) بيضاء أو سوداء

السؤال الرابع:

- ١) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^٣ + ٣س^٢ - ١$ والتي عندها المماس يوازي المحور السيني.
- ٢) أوجد التكاملات الآتية:
 أ) $\int (س - ٥)(س - ١) دس$ ب) $\int ٦(س - ٢) دس$

السؤال الخامس:

- ١) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $ص = (س - ١)(س + ١)$ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات.
- ٢) أوجد:
 أ) $\int \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} دس$ ب) $\int ٤(س - ٢) دس$

المواصفات الفنية :

($\frac{1}{8} \times 57 \times 82$) سم	مقاس الكتاب :
ألوان	طبع المتن :
ألوان	طبع الغلاف :
٧٠ جم أبيض	ورق المتن :
١٨٠ جم كوشيه أبيض مستورد	ورق الغلاف :
١٢٨ صفحة + ٤ للغلاف	عدد الصفحات :

رقم الإيداع : ٢٠١٨/٢٠٨٨٠

طبع بالهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية

طبعة ٢٠١٨ / ٢٠١٩

الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية

رئيس مجلس الإدارة

٥٠٠٦٤ س ٢٠١٧ - ١٢٥,٠٢٧

مهندس / عماد فوزى فرج محمد