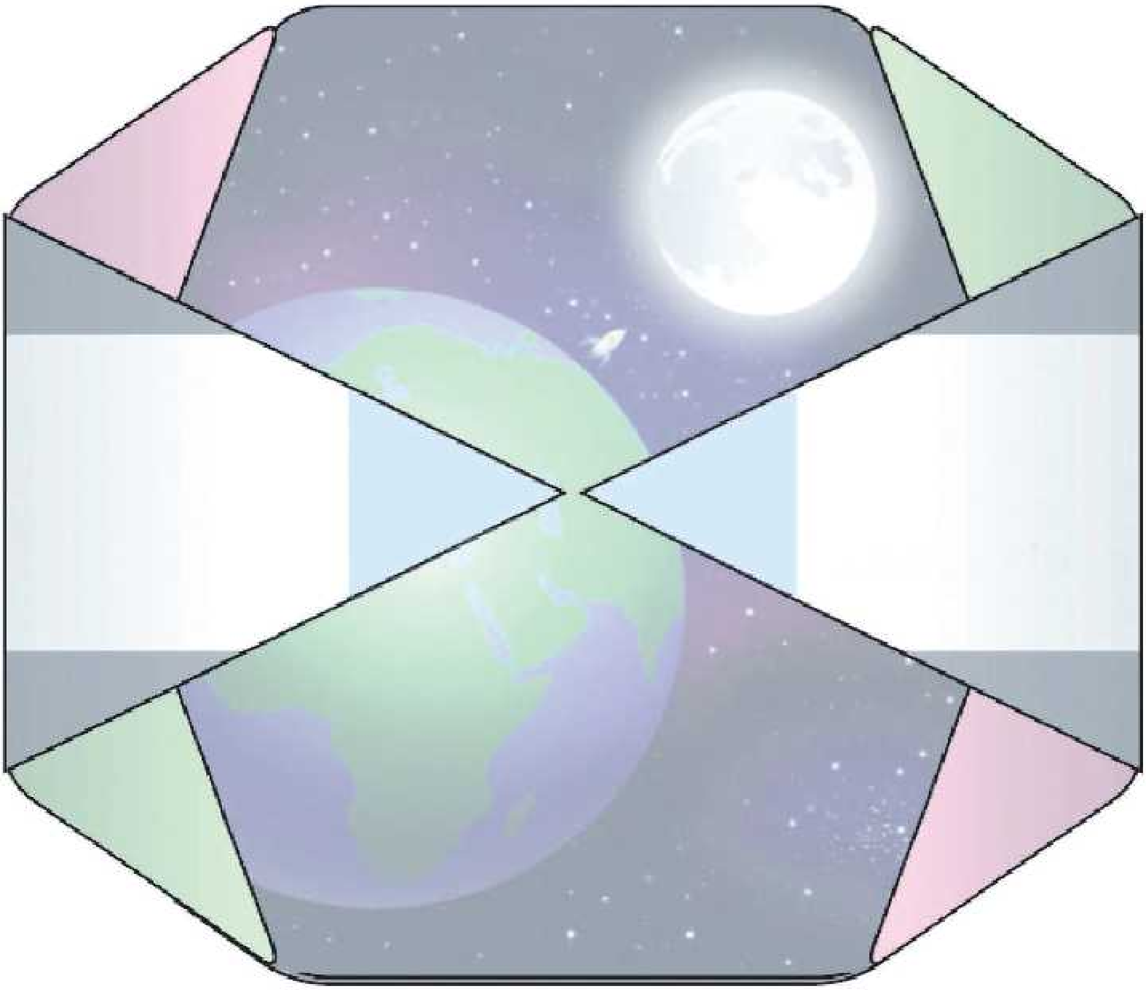
3

MATHÉMATIQUES

Troisième préparatoire

Livre de l'élève

Deuxième semestre



Sommaire

Algèbre

Unité 1: Equations

Unité 2: Fonctions rationnelles et opérations

Probabilité

Unité 3: Probabilité

Géométrie plane

Unité 4: Géométrie plane

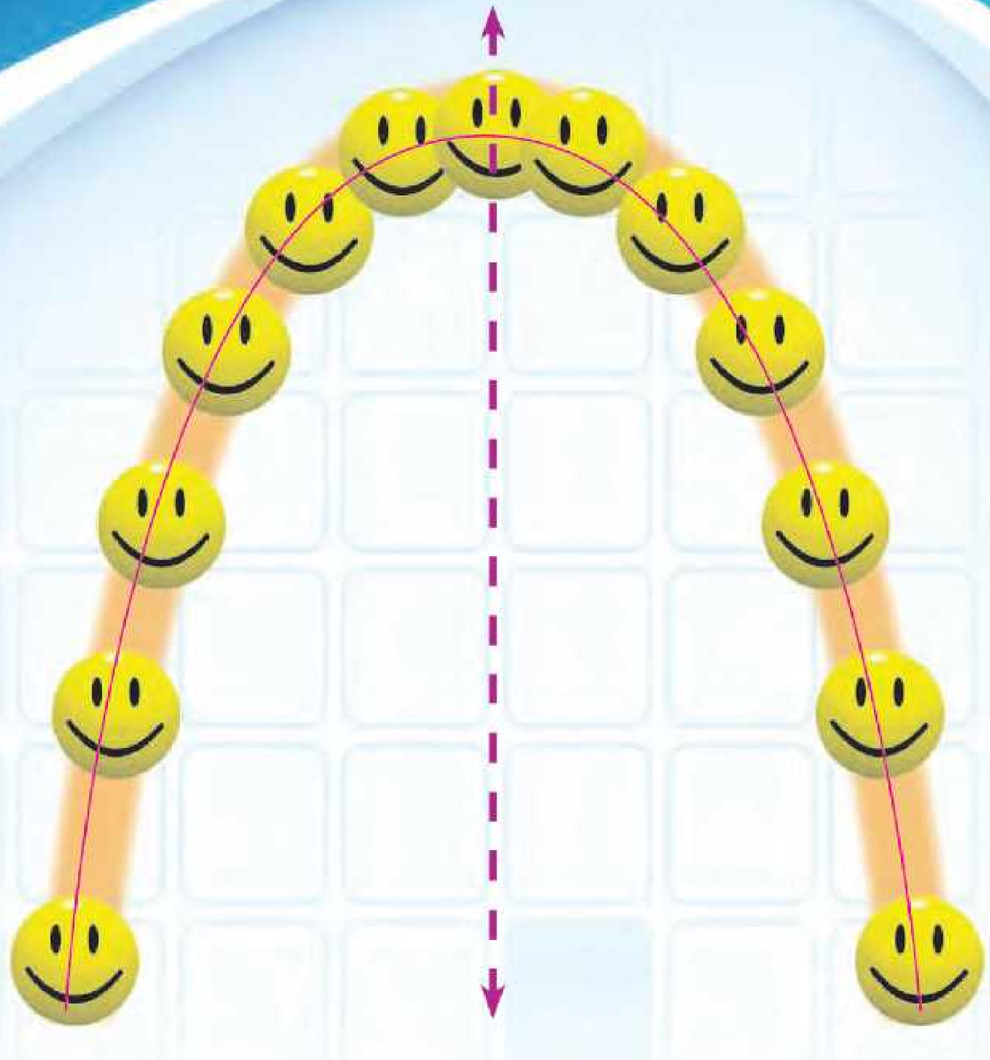
Unité 5:

Algèbre

Unité (1)

Equations

Fonctions rationnelles et opérations



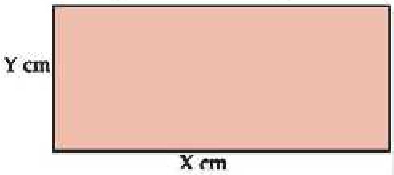
Un joueur a lancé un ballon qui a suivi le trajet indiqué par la figure ci-dessus.

Cette courbe représente une fonction, que tu étudieras, appelée une fonction du second degré.

1-1 Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues algébriquement et graphiquement

Réfléchis et discute

Si le périmètre d'un rectangle est égal à 30 cm, quelles sont les valeurs possibles de sa longueur et de sa largeur.Si la longueur du rectangle = x cm et la largeur du rectangle = y cm



Alors: la longueur + la largeur = $\frac{1}{2}$ du périmètre

$\therefore\ x + y = 15$

- Cette équation est appelée une équation du premier degré à deux inconnues.
- Résoudre cette équation consiste à trouver un couple de nombres réels vérifiant cette équation.
- Le couple (-5 ,20) peut-il être une solution de l'équation précédente? Tu pourras répondre à cette question après l'exposition suivante
- Nous pouvons résoudre l'équation en la mettant sous l'une des deux formes suivantes:

(1) $y = 15 - x$ (2) $x = 15 - y$

En attribuant une valeur quelconque à l'une des deux variables, on obtient la valeur de l'autre variable.

Si $x \in R$ on obtient des solutions dans $R \times R$ d'où, une équation du premier degré a une infinité de solutions dont une solution est sous la forme d'un couple (x , y) où x et la première composante et y est la seconde composante.

Pour $x = 8 \therefore y = 15 - 8 = 7 \therefore (8 , 7)$ est une solution de l'équation

Pour $x = 9{,}5 \therefore y = 15 - 9{,}5 = 5{,}5 \therefore (9{,}5 , 5{,}5)$ est une solution de l'équation

Pour $x = 4\sqrt{7} \therefore y = 15 - 4\sqrt{7}$

$\therefore (4\sqrt{7} , 15 - 4\sqrt{7})$ est une solution de l'équation

Apprendre

☆ Comment résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Expressions de base

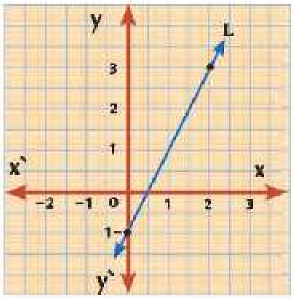
☆ Équation du premier degré.
☆ Résolution algébrique.
☆ Résolution graphique
☆ Ensemble de définition.
☆ Ensemble-solution.

(1) Résolution d'équations du premier degré à deux inconnues graphiquement :

Exemples

(1) Trouve l'ensemble-solution de l'équation $2x - y = 1$

Solution



On écrit l'équation sous la forme y = 2x - 1

Pour x = 0 ∴ y = -1 ∴ (0, -1) est une solution de l'équation

Pour x = 2 ∴ y = 3 ∴ (2, 3) est une solution de l'équation

On trace la droite L passant par les deux points représentant les deux couples (0 , -1) et (2 , 3).

Tout point appartenant à la droite L est une solution de l'équation

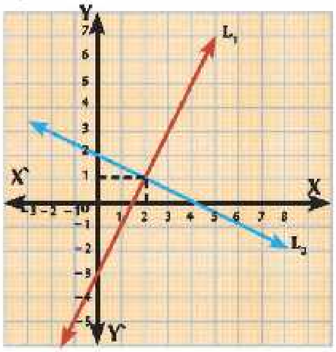
Donc, l'équation 2x – y = 1 admet une infinité de solutions.

Cite quatre autres solutions de cette équation .

2 Trouve graphiquement l'ensemble-solution du système des deux équations :

L_1 : y = 2x - 3 et L_2 : x + 2y = 4

Solution



Dans l'équation y = 2x - 3

Pour X= 0 ∴ y = -3 ∴ (0, -3) est une solution de l'équation

Pour X = 4 ∴ y = 5 ∴ (4, 5) est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_1ireprésente la première équation. On écrit l'équation x + 2y = 4 sous la forme x = 4 – 2y (1)

Pour y = 0	∴ x = 4	∴ (4 , 0) est une solution de l'équation
Pour y = 1	∴ x = 2	∴ (2 , 1) est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_2représente la deuxième équation (2)

D'après la figure, $L_1 \cap L_2$ est le point a (2 , 1)

∴ L'ensemble-solution du système des deux équations est {(2 , 1)}

Pour t'entraîner :

Trouve graphiquement l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

1. 2x + y = 0   x + 2y = 3
2. y = 3x - 1   x - y + 1 = 0

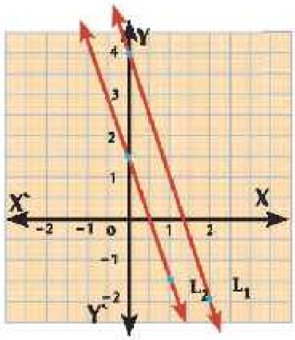
Exemple 3

Trouve graphiquement l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

(1) $3x + y = 4$ (1) , $2y + 6x = 3$ (2)

(2) $3x + 2y = 6$ (1) , $y = 3 - \frac{3}{2}x$ (2)

Solution



(1) On écrit l'équation (1) sous la forme $y = 4 - 3x$

Pour $x = 0$ $\therefore$ $y = 4$, $(0, 4)$ est une solution de l'équation

Pour $x = 2$ $\therefore$ $y = -2$, $(2, -2)$ est une solution de l'équation

L_1 Dans la figure ci-contre, la droite représente l'équation (1)

On écrit l'équation (2) sous la forme $y = \frac{3 - 6x}{2}$

Pour $x = 0$ $\therefore$ $y = \frac{3}{2}$ d'où $(0, \frac{3}{2})$ est une solution de l'équation

Pour $x = 1$ $\therefore$ $y = \frac{-3}{2}$ d'où $(1, \frac{-3}{2})$ est une solution de l'équation

Dans la figure ci-contre, la droite L_2 représente l'équation (2)

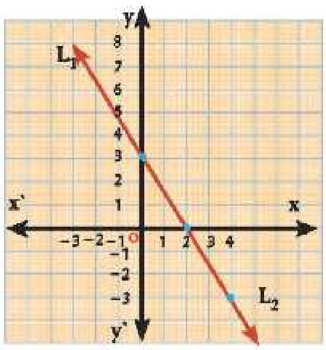
$\because$ $L_1 \cap L_2 = \phi$ $\therefore$ Il n'y a aucune solution commune aux deux équations.

Si $L_1 // L_2$ il n'y a aucune solution aux deux équations (1) et (2)

D'après la géométrie analytique:

La pente de la droite $L_1 = \frac{-3}{1} = -3$ et la pente de la droite $L_2 = \frac{-6}{2} = -3$ $\therefore$ $L_1 // L_2$

(2)



On écrit l'équation (2) sous la forme $2y = 6 - 3X$

Donc $3X + 2Y = 6$ qui est la même forme que l'équation (1) La figure ci-contre montre la représentation graphique des deux équations par deux droites confondues.

On dit que: Les deux équations (1) et (2) admettent une infinité de solutions et l'ensemble- solution est $\{(x, y): y = 3 - \frac{3}{2}x\}$

Pour t'entraîner :

Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

1. $3x + y = 5$, $y + 3x = 8$
2. $2x + y = 4$, $8 - 2y = 4x$

(2) Résolution d'équations du premier degré à deux inconnues algébriquement .

Nous pouvons résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en se débarrassant de l'une des deux variables pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue. La résolution de cette équation permet de trouver la valeur de cette inconnue. En remplaçant cette inconnue par sa valeur dans l'une des deux équations on obtient la valeur de l'autre inconnue.

Exemple 4

Trouve l'ensemble-solution du système des deux équations :

$2x - y = 3$ (1) et $x + 2y = 4$ (2)

Solution **(Méthode de l'élimination)**

De l'équation (1) on a $y = 2x - 3$

En remplaçant y par cette valeur dans l'équation (2) on obtient $\therefore\ x + 2(2x - 3) = 4$

D'où : $x + 4x - 6 = 4$ $\therefore\ 5x = 10$ $\therefore\ x = 2$

En remplaçant x par 2 en (1) $\therefore\ y = 2 \times 2 - 3$ $\therefore\ y = 1$

$\therefore$ L'ensemble-solution du système des deux équations est = {(2, 1)}

Pour t'entraîner **(Méthode de l'élimination)**

On élimine l'une des deux variables dans les deux équations (par addition ou par soustraction) pour obtenir une troisième équation à une seule variable. En résolvant l'équation obtenue, on trouve la valeur de cette variable

$2x - y = 3$ (1) et $x + 2y = 4$ (2)

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par 2 $\therefore\ 4x - 2y = 6$ (3)

De (2) et (3) par addition $\therefore\ 5x = 10$ $\therefore\ x = 2$

Pa substitution dans (1) $\therefore\ 2 \times 2 - y = 3$ $\therefore\ y = 1$

$\therefore$ L'ensemble-solution du système des deux équations est = {(2, 1)}.

Pour t'entraîner :

1. Trouve l'ensemble-solution de chacun des systèmes d'équations suivants :

   A. $3x + 4y = 24$, $x - 2y + 2 = 0$ et B. $3x + 2y = 4$, $x - 3y = 5$

2. Quel est le nombre de solutions de chacune des systèmes d'équations suivants :

   A. $7x + 4y = 6$, $5x - 2y = 14$

   B. $3x + 4y = -4$, $5x - 2y = 15$

   C. $9x + 6y = 24$, $3x + 2y = 8$

Exemple 5

Trouve la valeur de a et de b sachant que (3 , -1) est une solution du système des deux équations.

$a x + b y - 5 = 0$ et $3 a x + b y = 17$

Solution

$\because$ (3, -1) est une solution des deux équations

$\therefore$ (3, -1) est une solution de l'équation $a x + b y - 5 = 0$

$\therefore$ $3 a - b - 5 = 0$ **d'où** $3a - b = 5$ (1)

, (3, -1) est une solution de l'équations $3 a x + b y = 17$

$\therefore$ $9 a - b = 17$ (2)

En retranchant les deux membres de l'équation (1) des deux membres de l'équation (2), on obtient: $6 a = 12$ $\therefore$ $a = 2$

En remplaçant a par 2 dans l'équation (1)

$3 \times 2 - b = 5$ $\therefore$ $b = 1$

Exemple 6

Un nombre est formé de deux chiffres dont la somme est 11. Si on intervertit les deux chiffres, le nombre obtenu dépasse le nombre initial de 27. Quel est le nombre initial?

Solution

Soit x le chiffre des unités du nombre initial et y son chiffre des dizaines.

$\therefore$ $x + y = 11$ .... (1)

	Chiffre des unités	Chiffre des dizaines	Valeur du nombre
Nombre initial	x	y	$x + 10 y$
Nombre obtenu en intervertissant les deux chiffres	y	x	$y + 10 x$

Le nombre obtenu en intervertissant les deux chiffres – le nombre initial = 27

$\therefore$ $(y + 10 x) - (x + 10 y) = 27$ $\therefore$ $y + 10 x - x - 10 y = 27$

$\therefore$ $9 x - 9 y = 27$ **En divisant les deux membres par 9** $\therefore$ $x - y = 3$ .... (2)

En additionnant les deux équations (1) et (2)

$\therefore$ $2x = 14$ $\therefore$ $x = 7$ En remplaçant x par 7 dans l'équation .... (1)

$\therefore$ $7 + y = 11$ $\therefore$ $y = 4$ $\therefore$ Le nombre initial est 47

1-2 Résolution d'une équation du second degré à une inconnue graphiquement et algébriquement

Apprendre

- Comment résoudre une équation du deuxième degré à une inconnue graphiquement et algébriquement

Expressions de base:

- Résolution graphique
- Résolution algébrique
- L'ensemble-solution

Réfléchis et discute

Nous avons déjà représenté graphiquement la fonction du second degré f telle que:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$

L'équation correspondante à cette fonction est $f(x) = 0$ ou

$ax^2 + b\,x + c = 0$

Nous avons déjà étudié comment résoudre cette équation par la factorisation.

Par exemple, pour résoudre l'équation: $x^2 - 4x + 3 = 0$

on factorise le membre de gauche de l'équation qui prend la forme:

(x - ....) (x .... 1) = 0

$\therefore$ x - .... = 0 ou (x- 1) = 0

$\therefore$ x = ... ou x = ...

$\therefore$ L'ensemble-solution est { .... , ... }

(1) Résolution graphique:

Pour résoudre l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ graphiquement, on suit les étapes suivantes:

- On trace la courbe représentative de la fonction $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où $a \neq 0$
- On détermine l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe de la fonction avec l'axe des abscisses. Cet ensemble est l'ensemble-solution.

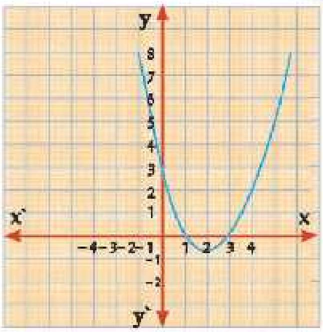
Exemple 1

Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 4\,x +$ dans l'intervalle [- 1, 5]

Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation $x^2 - 4\,x + 3 = 0$

Al-Alam Commercial Press ACP

Solution



On détermine quelques couples (x, y) appartenant au graphe de f, ayant pour première composante $x \in [-1, 5]$

$f(-1) = 8$, $f(0) = 3$, $f(1) = 0$,

$f(2) = -1$, $f(3) = 0$, $f(4) = 3$, $f(5) = 8$

On présente les couples obtenus dans un tableau comme suit:

x	5	4	3	2	1	0	-1
y = f(x)	8	3	0	-1	0	3	8

Dans un repère cartésien, on trace les points qui représentent ces couples puis on trace la courbe passant par ces points. Du graphique, on trouve que la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux deux points (3 , 0) et (1 , 0).

Les deux nombres 1 et 3 sont appelés les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Donc, l'ensemble-solution est {1 , 3}

Pour t'entraîner :

1. Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dans l'intervalle [-4, 2] Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation: $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. Trace la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = -x^2 + 6x - 11$ dans l'intervalle [0, 6] Du graphique, trouve l'ensemble-solution de l'équation: $x^2 - 6x + 11 = 0$

(2) Résolution algébrique en utilisant la formule:

Réfléchis et discute

Résoudre l'équation $x^2 - 6x + 7 = 0$ en t'inspirant de la méthode que tu utilises pour compléter un carré parfait.

Complète : $\because$ $x^2 - 6x + 9 + 7 - 9 = 0$

$\therefore$ (x - .... $)^2 - 2 = 0$ (x - ....$)^2 = 2$

x - .... = $\sqrt{2}$ ou x .... = - $\sqrt{2}$

x = ... + $\sqrt{2}$ ou x = ... - $\sqrt{2}$

$\therefore$ x = ...! $\sqrt{2}$

Nous pouvons résoudre l'équation du second degré : $a x^2 + b x + c = 0$ où $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $a \neq 0$ en utilisant la formule.

$$x = \frac{-b \pm (\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$$ où $a \neq 0$ et a, b et c sont des nombres réels

Exemples

2 Trouve l'ensemble-solution de l'équation $3x^2 = 5x - 1$ en approchant le résultat à deux décimales près.

Solution

$\because\ 3x^2 = 5x - 1 \qquad \therefore\ 3x^2 - 5x + 1 = 0$

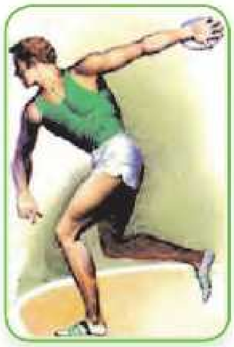
$\therefore\ a = 3, b = -5, c = 1$

$$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm 3.61}{6}$$

Soit $x = \frac{5 + 3.61}{6} = 1.44$ ou $x = \frac{5 - 3.61}{6} = 0.23$

$\therefore$ L'ensemble-solution est: $\{1.44, 0.23\}$

3 Lors d'un concours du lancer du disque, le trajet pris par le disque d'un joueur suivait la relation: $y = -0.043x^2 + 4.9x + 13$ où x représente la distance parcourue horizontalement en mètres et y représente la hauteur en mètres atteinte par rapport au sol. Trouve à un centième près, la distance horizontale parcourue par le disque à partir du point du lancement pour atteindre le sol.



Solution

$\because\ a = -0.043$, $B = 4.9$, $c = 13$

$$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(4.9) \pm \sqrt{(4.9)^2 - 4 \times (-0.043) \times 13}}{2 \times (-0.043)}$$

$$= \frac{(-4.9) \pm \sqrt{26.246}}{-0.086} = \frac{-4.9 \pm 5.123}{-0.086}$$

Soit $x = \frac{-4.9 + 5.123}{-0.086} = -2.59$ (refusée) Pourquoi ?

ou $x = \frac{-4.9 - 5.123}{-0.086} = 116.5465116$ mètres

$\therefore$ La distance parcourue horizontalement 116.55 mètres

1-3

Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré

Préliminaire :

On sait que $2x - y = 3$ est une équation du premier degré à deux inconnues tandis que les équations: $x^2 + y = 5$ et $x y = 2$ sont des équations du second degré à deux inconnues. Pourquoi ?

On va résoudre deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré. On utilise la méthode de la substitution dans la résolution comme le montrent les exemples suivants.

Calcul mental: Si $x + y = 10$ et $x^2 - y^2 = 40$ trouve $x - y$.

A apprendre

- ☆ Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré et l'autre du second degré

Expressions de base

- ☆ Équation du premier degré
- ☆ Équation du second degré
- ☆ Ensemble-solution

Exemples

1 Résous algébriquement le système des deux équations:

$y + 2x + 1 = 0$ et $4x^2 + y^2 - 3xy = 1$

Solution

De l'équation: $y = -(2x + 1)$

Par substitution dans la deuxième équation.

$\therefore\ 4x^2 + [-(2x + 1)]^2 - 3x[-(2x + 1)] = 1$

$\therefore\ 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 6x^2 + 3x - 1 = 0$

$\therefore\ 14x^2 + 7x = 0$ $\qquad \therefore\ 7x(2x + 1) = 0$

$\therefore\ x = 0$ ou $2x + 1 = 0$ $\qquad$ d'où $x = \frac{-1}{2}$

En substituant x dans la première équation:

Pour $x = 0$ $\qquad \therefore\ y = -(0 + 1) = -1,$

Pour $x = \frac{-1}{2}$ $\qquad \therefore\ y = -(2 \times \frac{-1}{2} + 1) = 0$

$\therefore$ L'ensemble-solution est: $\{(0, -1), (\frac{-1}{2}, 0)\}$

2 Le périmètre d'un rectangle est 14 cm et son aire est 12 cm^2. Trouve ses deux dimensions.

Solution

Soient x et y les dimensions du rectangle.

$\because$ Le périmètre d'un rectangle = 2 (longueur + largeur)

$\therefore$ $14 = 2(x + y)$ ..... **En divisant les deux membres de l'équation par 2**

$\therefore$ $x + y = 7$ d'où = $y = 7 - x$ .... (1)

$\because$ L'aire d'un rectangle = **longueur × largeur** $\therefore$ $x y = 12$ .... (2)

En substituant x de l'équation (1) dans l'équation (2)

$\therefore$ $x(7 - x) = 12$ $7x - x^2 = 12$

$\therefore$ $x^2 - 7x + 12 = 0$ $(x - 3)(x - 4) = 0$

$\therefore$ $x = 3$ ou $x = 4$ En substituant x dans l'équation (1)

Pour: $x = 3$ $\therefore$ $y = 7 - 3 = 4$,

Pour: $x = 4$ $\therefore$ $y = 7 - 4 = 3$ Les dimensions du rectangle sont 3 cm et 4 cm.

Unité (2):
Fonctions rationnelles et opérations
Ensembles des zéros d'une fonction polynôme

2-1

A apprendre:

☆ Comment trouver l'ensemble des zéros d'une fonction polynôme

Expressions de base :

☆ fonction polynôme
☆ ensemble des zéros d'une fonction

Réfléchis et discute :

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ est une fonction polynôme de troisième degré en x, trouve f(0) , f(1) et f(2). **Que remarques-tu ?**

On remarque que : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$

Pour cela, on appelle les nombres 0 , 1 et 2 les zéros de la fonction f.

D'une manière générale

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynôme en x, alors l'ensemble des valeurs de x qui rendent $f(x) = 0$ est appelé l'ensemble des zéros de la fonction f. Cet ensemble est noté Z(f).

Donc, Z(f) est l'ensemble-solution de l'équation $f(x) = 0$

D'une manière générale, pour déterminer les zéros d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = 0$ pour trouver l'ensemble des valeurs de x.

Exemples:

Trouve Z(f) pour chacune des fonctions polynômes suivantes :

1. $f_1(x) = 2x - 4$
2. $f_2(x) = x^2 - 9$
3. $f_3(x) = 5$
4. $f_4(x) = 0$
5. $f_5(x) = x^2 + 4$
6. $f_6(x) = x^6 - 32x$
7. $f_7(x) = x^2 + x + 1$

Solution

1. $f_1(x) = 2x - 4$ On pose $f_1(x) =$ zero $\therefore 2x - 4 = 0$

D'où $2x = 4$ $\therefore x = 2$ $\therefore z(f_1) = \{2\}$.

2 $f_2(x) = x^2 - 9$

On pose $f_2(x) = zero$ $\therefore$ $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ $\therefore$ $x = \pm 3$ $\therefore$ $z(f_2) = \{-3 , 3\}$.

3 $f_3(x) = 5$

$\therefore$ Il n'y a aucun nombre réel qui rend $f_3(x) = 0$ $\therefore$ $z(f_3)$ est ϕ

4 $f_4(x) = 0$

$\therefore$ Tous les nombres réels $\mathbb{R}$ sont des zéros de la fonction $\therefore$ $z(f_4) = \mathbb{R}$

5 On pose $x^2 + 4 = 0$

$\therefore$ $x^2 = -4$ $\therefore$ $x = \pm \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ $\therefore$ $z(f_5)$ est ϕ

6 On pose $x^6 - 32x = 0$

$\therefore$ $x(x^5 - 32) = 0$ $\therefore$ $x = 0$, $x^5 = 32$

$x^5 = 2^5$ $\therefore$ $x = 2$ $\therefore$ $z(f_6) = \{0 , 2\}$

7 On pose $x^2 + x + 1 = 0$

Dans la mesure où la factorisation de l'expression x2 + x + 1 est difficile, on utilise la formule pour résoudre l'équation du second degré.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{où} \quad a = 1 , b = 1 , c = 1$$

$$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$\therefore$ Il n'y a pas de solutions réelles des l'équation d'où $z(f_7) = \phi$

Pour t'entraîner :

1 **Trouve l'ensemble des zéros de chacune des fonctions polynômes suivantes :**

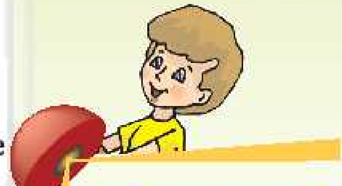
a $f(x) = x^3 - 4x^2$ **b** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **c** $f(x) = x^2 - 2x - 1$

d $f(x) = x^4 - x^2$ **e** $f(x) = x^2 - x + 1$ **f** $f(x) = x^2 - 2$

Al-Alson Commercial Press ACP

2-2

Fonction rationnelle



A apprendre

- ☆ La notion d'une fonction rationnelle

Expressions de base

- ☆ Une fonction polynôme.
- ☆ L'ensemble de définition d'une fraction rationnelle
- ☆ L'ensemble de définition commun à deux fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

On a étudié qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a , $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x + 3$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 4$.

1. *Trouve* l'ensemble de définition de f et g.
2. Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **peux-tu trouver l'ensemble de définition de h en connaissant les ensembles des definition de f et g ?**

De ce qui précède, on déduit que :

h est appelée fonction rationnelle où $h(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4}$

Dans ce cas, l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$ privé des valeurs de x qui rendent la fraction rationnelle indéfinie (c'est l'ensemble des zéros du dénominateur).

Donc: **l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$ - {-2 , 2}**

Si f et g sont deux fonctions polynômes et si Z(g) est l'ensemble des zéros de g, alors la fonction h telle que

$h : \mathbb{R} - z\ (g) \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est appelée une fonction rationnelle réelle ou plus simplement une fonction rationnelle.

On remarque que : **l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle = $\mathbb{R}$ – l'ensemble des zéros du dénominateur.**

Pour t'entraîner :

1 **Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions rationnelles suivantes puis** *calcule* **g (0), g (2), g (-2):**

a) $g(x) = \frac{x+3}{4}$ b) $g(x) = \frac{x-2}{2x}$ c) $g(x) = \frac{1}{x+2}$

d) $g(x) = \frac{x^2+9}{x^2-16}$ e) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}$ f) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

2 **Si l'ensemble de définition de la fonction g :** $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - ax + 9}$ est $\mathbb{R} - \{3\}$ *trouve* la valeur de a.

L'ensemble *de définition commun de deux ou plusieurs fractions rationnelles :*

L'ensemble de définition commun de deux ou plusieurs fractions rationnelles est l'ensemble des nombres réels qui rendent les fractions définies simultanément.

Exemple

Si g_1 et g_2 sont deux fractions rationnelles telles que :

$g_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $g_2(x) = \frac{3}{x^2-4}$ *trouve* l'ensemble de définition commun de g_1 , g_2

Solution

Soient D_1 l'ensemble de définition de g_1 et D_2 l'ensemble de définition de g.

$\therefore$ $D_1 = \mathbb{R} - \{1\}$, $D_2 = \mathbb{R} - \{-2 , 2\}$ et l'ensemble de définition commun aux deux fractions g_1, $g_2 = D_1 \cap D_2$

où $D_1 \cap D_2 = \{(\mathbb{R} - \{1\}\} \cap \{\mathbb{R} - \{-2 , 2\}\} = \mathbb{R} - \{-2 , 1 , 2\}$

Pour toute valeur de la variable x appartenant a'l'ensemble de définition commun, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont définies (existent).

Si g_1 et g_2 sont deux fractions rationnelles et si :
L'ensemble de définition de $g_1 = \mathbb{R} - Z_1$ (où Z_1 l'ensemble des zéros de g_1)
l'ensemble de définition de $g_2 = \mathbb{R} - Z_2$ (où Z_2 l'ensemble des zéros de g_2)
alors, l'ensemble de définition commun aux deux fractions rationnelles $g_1(x)$ et $g_2(x) = \mathbb{R} - (Z_1 , \cup Z_2)$
$= \mathbb{R}$ – l'ensemble des zéros des dénominateurs des deux fractions
Généralement, l'ensemble de définition commun de plusieurs fractions rationnelles
$= \mathbb{R}$ – l'ensemble des zéros des dénominateurs de ces fractions

Pour t'entraîner :

Trouve l'ensemble de définition commun dans chacun des cas suivants :

1. $n_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $n_2(x) = \dfrac{2}{x+1}$
2. $n_1(x) = \dfrac{3}{x^2 - x}$, $n_2(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-1}$
3. $n_1(x) = \dfrac{3}{x-2}$, $n_2(x) \dfrac{5}{x+2}$, $n_3(x) = \dfrac{x}{x^3 - 4x}$
4. $n_1(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, $n_2(x) = \dfrac{3x}{x^2-x}$, $n_3(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-2}$

2-3

Egalité de deux fractions rationnelles

Apprendre

- ☆ La notion d'égalité de deux fractions rationnelles.
- ☆ Conditions d'égalité de deux fractions rationnelles.

Expressions de base

- ☆ Simplification des fractions rationnelles.
- ☆ Égalité de deux fractions rationnelles.

Simplification des fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

Soit g une fraction rationnelle telle que : $g(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

Complète ce qui suit :

1. l'ensemble de définition de g = ...
2. Le facteur commun entre le numérateur et le dénominateur après avoir factorisé complètement chacun d'eux est ....≠zèro Ce facteur commun est différent de zéro car x ne peut pas être égale à ....
3. La fraction rationnelle dans la forme la plus simple après avoir éliminé le facteur commun = ...
4. Est-ce que l'ensemble de définition de la fraction change après l'avoir simplifié?

De ce qui précède, on déduit que:

Mettre une fraction rationnelle sous la forme la plus simple est appelé simplification de la fraction rationnelle.
Pour simplifier une fraction rationnelle, on suit les étapes suivantes:

1. *On factorise complètement le numérateur et le dénominateur de la fraction.*
2. *On détermine l'ensemble de définition de la fraction rationnelle avant d'éliminer les facteurs communs du numérateur et du dénominateur.*
3. *On élimine les facteurs communs du numérateur et du dénominateur pour obtenir la fraction sous la forme la plus simple.*

Définition: On dit qu'une fraction rationnelle est sous la forme la plus simple s'il n' y a aucun facteur commun entre le numérateur et le dénominateur de la fraction.

Exemple 1

Si $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ mets g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g.

Solution

$\because$ $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{x^4 - 13x^2 + 36} = \dfrac{x(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 4)(x^2 - 9)} = \dfrac{x(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$

$\therefore$ L'ensemble de définition de g(x) = $\mathbb{Z}$ - {-3 , -2 , 2 , 3}.

$\therefore$ Pour simplifier la fraction, on élimine (x + 3) , (x - 2) du numérateur et du dénominateur.

$\therefore$ $g(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$

Egalité de deux fractions rationnelles:

Réfléchis et discute :

Mets **sous la forme la plus simple les deux fractions rationnelles $g_1(x)$ et $g_2(x)$ en déterminant l'ensemble de définition de chaque fraction dans chacun des cas suivants:**

1. $g_1(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ et $g_2(x) = \dfrac{2}{2x-6}$
2. $g_1(x) = \dfrac{2x}{2x+4}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$

Est-ce que $g_1 = g_2$ dans chaque cas? Explique ta réponse.

De ce qui précède, on remarque que:

1. $g_1(x) = \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$ **et l'ensemble de définition de** $g_1 = \mathbb{R} - \{-3 , 3\}$

   $g_2(x) = \dfrac{2}{2(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$ **et l'ensemble de définition de** $g_2 = \mathbb{R} - \{-3\}$

   Donc : g_1 et g_2 ont la même forme la plus simple mais l'ensemble de définition de $g_1 \neq$ l'ensemble de définition de g_2

2. $g_1(x) = \dfrac{2x}{2(x+2)} = \dfrac{x}{x+2}$ **et l'ensemble de définition de** $g_1 = \mathbb{R} - \{-2\}$

   $g_2(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x}{x+2}$ **et l'ensemble de définition de** $g_2 = \mathbb{R} - \{-2\}$

Donc g_1 et g_2 ont la même forme la plus simple et le domaine de définition de , **l'ensemble de définition de** g_1 = **l'ensemble de définition de** g_2

De ce qui précède, on déduit que :

On dit que deux fonctions g_1 et g_2 sont égales (c'est-à-dire $g_1 = g_2$) si les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois:
l'ensemble de définition de g_1 = l'ensemble de définition de g_2
$g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant à leur ensemble de définition commun.

Exemples

2 **Si** $g_1(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2}$ et $g_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x}$ **démontre que :** $g_1 = g_2$

Solution

$\because$ $g_1(x) = \frac{x^2}{x^3 - x^2} = \frac{x^2}{x^2(x-1)}$ $\therefore$ $g_1(x) = \frac{1}{x-1}$

et l'ensemble de définition $g_1 = \mathbb{R} - \{0 , 1\}$ (1)

$\because$ $g_2(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 - x} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{x(x^3 - 1)} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)}$

$\therefore$ $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$

et l'ensemble de définition $n_2 = \mathbb{R} - \{0 , 1\}$ (2)

De (1) **et** (2)

$\because$ L'ensemble de définition de g_1 = l'ensemble de définition de g_2 , $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0 , 1\}$

$\therefore$ $g_1 = g_2$

3 **Si** $g_1(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$, $g_2(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^3 - 9x}$

Démontre que $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant à leur ensemble de définition commun puis trouve cet ensemble.

Solution

$\because$ $g_1(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3}$

et l'ensemble de définition de $g_1 = \mathbb{Z} - \{-3 , 2\}$ (1)

$\because\ n_2(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^3 - 9x} = \frac{x(x-3)(x+2)}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x+2}{x+3}$

et l'ensemble de définition de $g_2 = \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$ (2)

De (1) et (2)

On remarque que : $g_1(x)$, $g_2(x)$ ont la même forme la plus simple $\frac{x+2}{x+3}$.

mais l'ensemble de définition de $g_1 \neq$ l'ensemble de définition de g_2.

Nous pouvons dire que : $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout x appartenant a'l'ensemble de définition commun des deux fonctions g_1, g_2 qui est $\mathbb{R} - \{-3, 0, 2, 3\}$.

Pour t'entraîner :

Complète ce qui suit :

1. La forme la plus simple de la fraction g telle que $g(x) = \frac{4x^2 - 2x}{2x}$ où $x \neq 0$ est ....

2. L'ensemble de définition commun aux deux fonctions g_1, g_2 où $g_1(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, $g_2(x) = \frac{1}{x+1}$ est ....

3. Si $g_1(x) = \frac{1+a}{x-2}$, $g_2(x) = \frac{4}{x-2}$ et $g_1(x) = g_2(x)$ alors a = ...

4. Si la forme la plus simple de la fraction $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - a}$ est $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ alors a = ...

5. Si $g_1(x) = \frac{-7}{x+2}$, $g_2(x) = \frac{x}{x-k}$ si l'ensemble de définition commun aux deux fonctions g_1, g_2 est $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$ alors k = ...

2-4

Opérations sur les fractions rationnelles

A apprendre

☆ Comment effectuer les opérations (+ , - , × , ÷) sur les fractions rationnelles

Expressions de base

☆ Opposé d'une fraction rationnelle.

☆ Inverse d'une fraction rationnelle.

(1) Addition et soustraction des fractions rationnelles :

Réfléchis et discute :

1 **Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont deux nombres rationnels, trouve la valeur de:**

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$

2 **Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux nombres rationnels, trouve la valeur de:**

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

De ce qui précède, on peut additionner ou soustraire deux fractions rationnelles ayant le même dénominateur ou deux dénominateurs différents comme suit:

Si $x \in$ a'l'ensemble de définition commun des deux fonctions g_1, g_2 tel que:

1 $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \frac{f_3(x)}{f_2(x)}$

(deux fractions ayant le même dénominateur)

Donc: $g_1(x) + g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x) + f_3(x)}{f_2(x)}$,

$g_1(x) - g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{-f_3(x)}{f_2(x)}$

2 $g_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \frac{f_3(x)}{f_4(x)}$

(deux fractions ayant des dénominateurs différents)

Donc: $g_1(x) + g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{f_3(x)}{f_4(x)}$

$= \frac{f_1(x) \times f_4(x) + f_3(x) \times f_2(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$,

$g_1(x) - g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{f_1(x) \times f_4(x) - f_3(x) \times f_2(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$

Exemples

1 **Si** $g_1(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x}$ **et** $g_2(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4}$

Trove **$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ en déterminant l'ensemble de définition de g.**

Solution

$\because$ $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$\therefore$ $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x} + \dfrac{x+2}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x(x+2)} + \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)}$

Le domaine de définition de $g = R - \{-2 , 0 , 2\}$

$\therefore$ $g(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}$

2 *Mets:* **$g(x)$ dans la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g où :**

$g(x) = \dfrac{3x-4}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{2x+6}{x^2 + x - 6}$

Solution

$\because$ $g(x) = \dfrac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{2(x+3)}{(x-2)(x+3)}$

L'ensemble de définition de $g = R - \{-3 , 2 , 3\}$

$\therefore$ $g(x) = \dfrac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{2}{x-2}$

$\because$ Le PPCM des dénominateurs = $(x-3)(x-2)$ on multiplie les deux membres de la deuxième fraction par $(x-3)$

$\therefore$ $g(x) = \dfrac{3x-4}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{3x-4+2x-6}{(x-2)(x-3)}$

$= \dfrac{5x-10}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{5(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{5}{x-3}$

3 *Mets* **g(x) dans la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g où:**

$g(x) = \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{2x - 4x^2}$, puis trouve g(0) et g(-1) si cela est possible.

Solution

$\because\ g(x) = \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{-4x^2 + 2x}$

$= \frac{12}{12x^2 - 3} + \frac{2}{-(4x^2 - 2x)}$ *(ranger dans l'ordre décroissant selon les puissances de x)*

$= \frac{12}{3(4x^2 - 1)} - \frac{2}{2x(2x - 1)} \quad = \frac{4}{(2x + 1)(2x - 1)} - \frac{1}{x(2x - 1)}$ *(Factorisation)*

L'ensemble de définition de g $= \mathbb{R} - \{\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

Le PPCM des dénominateurs $= x(2x + 1)(2x - 1)$

$\therefore\ g(x) = \frac{4x}{x(2x + 1)(2x - 1)} - \frac{2x + 1}{x(2x + 1)(2x - 1)}$

$\therefore\ g(x) = \frac{4x - (2x + 1)}{x(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{4x - 2x - 1}{x(2x + 1)(2x - 1)}$

$= \frac{2x - 1}{x(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{1}{x(2x + 1)}$

g(0) n'existe pas car le zéro n'appartient pas a'l'ensemble de définiton de

$g(-1) = \frac{1}{-1 \times (-2 + 1)} = \frac{1}{-1 \times -1} = 1$

Pour t'entraîner :

Mets **g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g dans chacun de cas suivants:**

1 $g(x) = \frac{x - 2}{x} + \frac{3 + x}{2x}$

2 $g(x) = \frac{2x}{x + 2} + \frac{4}{x + 2}$

3 $g(x) = \frac{2}{x + 3} + \frac{x + 3}{x^2 + 3x}$

4 $g(x) = \frac{x}{x - 4} - \frac{x + 4}{x^2 - 16}$

5 $g(x) = \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x - 1}$

6 $g(x) = \frac{5}{x - 3} + \frac{4}{3 - x}$

7 $g(x) = \frac{x^2}{x - 1} + \frac{x}{1 - x}$

8 $g(x) = \frac{x}{x - 2} - \frac{x}{x + 2}$

9 $g(x) = \frac{x + 3}{2x} - \frac{x}{2x - 1}$

10 $g(x) = \frac{3}{x + 1} + \frac{2x + 1}{1 - x^2}$

(2) Multiplication et division des fractions rationnelles

Réfléchis et discute :

Pour toute fraction rationnelle g (x) ≠ 0, il existe un inverse. Cet inverse est noté $\frac{1}{n(x)}$.

Si $g(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$ **, alors** $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{x+5}{x+2}$

L'ensemble de définition de g = R - {-5}, et l'ensemble de définition de $\frac{1}{g}$ = R-{-2, -5} on a

$$g(x) \times \frac{1}{g(x)} = 1$$

De ce qui précède, nous pouvons effectuer la multiplication et la division de deux fractions comme suit:

Si g_1 et g_2 sont deux fonctions telles que:

$g_1(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *et* $g_2(x) = \dfrac{f_3(x)}{f_4(x)}$ *alors :*

1. $g_1(x) \times g_2(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \dfrac{f_3(x)}{f_4(x)} = \dfrac{f_1(x) \times f_3(x)}{f_2(x) \times f_4(x)}$

   où x appartient a l'ensemble de définition commun des deux fractions rationnelles g_1 , g_2 qui est $\mathbb{R} - (Z(f_2) \cup Z(f_4))$

2. $g_1(x) : g_2(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \div \dfrac{f_3(x)}{f_4(x)} = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \dfrac{f_4(x)}{f_3(x)}$

   ou $g_1 : g_2$ appartient a l'ensemble de définition commun des deux fractions rationnelles g_1 , g_2 , g_2^{-1} qui est $\mathbb{R} - \big(Z(f_2) \cup Z(f_3) \cup Z(f_4)\big)$

Exemples

4. **Si** $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x-2} \times \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$

   trouve **g(x) sous la forme la plus simple en déterminant son ensemble de définition puis trouve g(0) et g(-1) si cela est possible**

Solution

$$g(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)} \times \frac{(x+5)(x-2)}{(3x+1)(x+5)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+1)(3x+1)(x+5)} = \frac{1}{3x+1}$$ *(la forme la plus simple)*

Le domaine de définition de $g = \mathbb{R} - \{-5 , -1 , -\frac{1}{3} , 2\}$ et $g(0) = 1$,

$g(-1)$ n'existe pas car -1 n'appartient pas a' l'ensemble de définition de g .

5 **Si** $g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x} : \frac{3x^2 + 6x - 45}{4x^2 - 9}$

trouve **g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g**

Solution

$\because\ g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x} : \frac{3(x^2 + 2x - 15)}{4x^2 - 9}$ $\therefore\ g(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x(2x + 3)} : \frac{3(x + 5)(x - 3)}{(2x + 3)(2x - 3)}$

L'ensemble de définition de $g = \mathbb{R} - \{0 , -\frac{3}{2} , \frac{3}{2} , -5 , 3\}$

$\therefore\ g(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x(2x + 3)} \times \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{3(x + 5)(x - 3)}$

$= \frac{(x + 3)(x - 3)(2x + 3)(2x - 3)}{3x(2x + 3)(x + 5)(x - 3)} = \frac{(x + 3)(2x - 3)}{3x(x + 5)}$

Pour t'entraîner :

(3) Mets g(x) sous la forme la plus simple en déterminant l'ensemble de définition de g dans chacun de cas suivants:

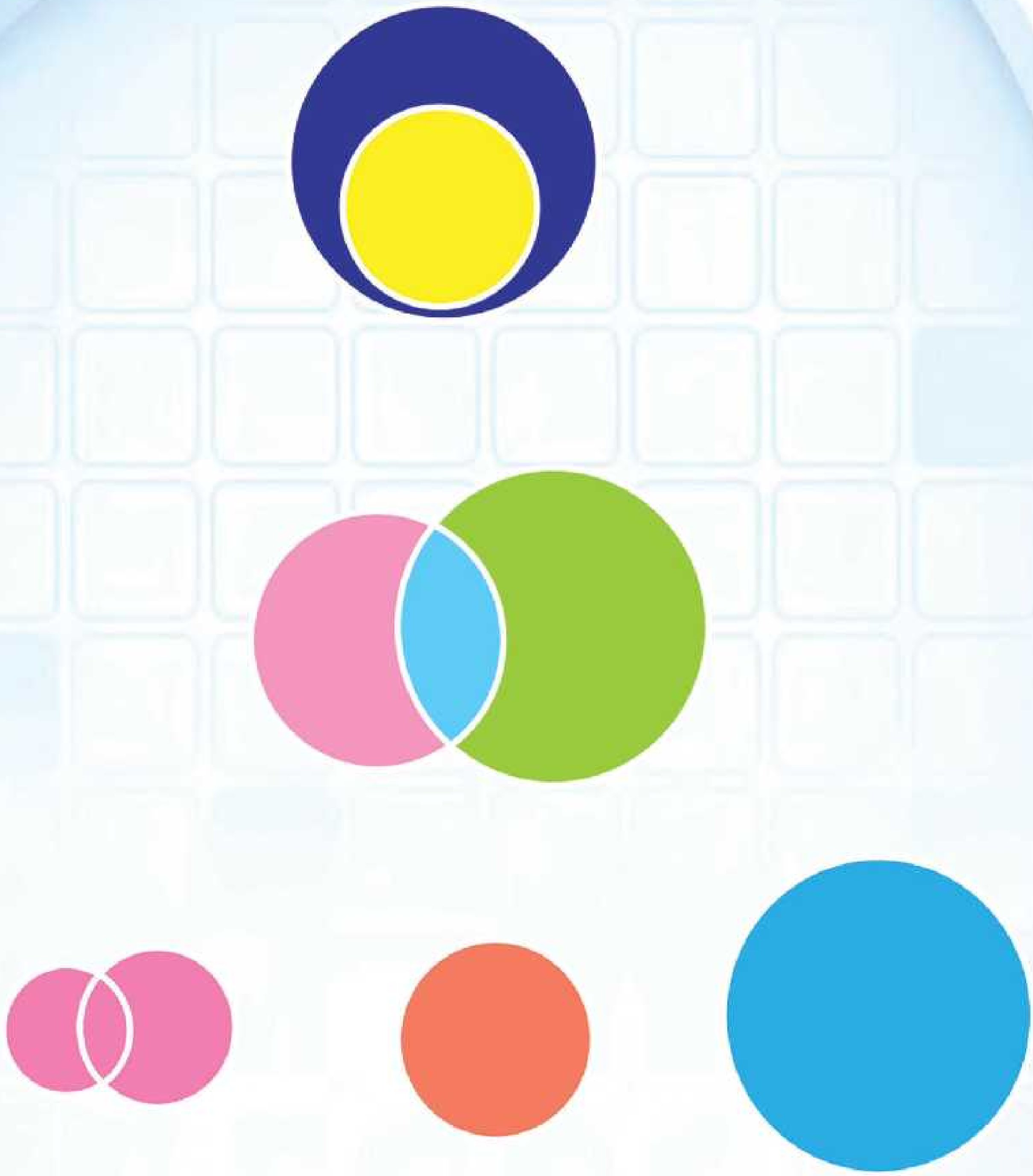
1 $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x} \times \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$

2 $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} \times \frac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

3 $g(x) = \frac{3x - 15}{x + 3} : \frac{5x - 25}{4x + 12}$

4 $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} : \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Unité 3: Probabilité



3-1

Opérations sur les événements

A apprendre:

- ☆ Effectuer des opérations sur les événements (intersection – union).

Expressions de base:

- ☆ intersection
- ☆ union
- ☆ deux événements incompatibles.
- ☆ corde
- ☆ diamètre d'un cercle
- ☆ Diagramme de Venn

Réfléchis et discute

Si on jette au hasard un dé non pipé une seule fois et on observe le nombre apparent sur la face supérieure du dé, alors :

1. L'espace des éventualités = {...., ..., ..., ..., ..., ...}.
2. L'événement « obtenir le nombre 7 » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = ...
3. L'événement « obtenir le nombre inférieur à 9 » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = ...
4. L'événement « obtenir le nombre premier » = ... et cet événement est appelé .... et sa probabilité = $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Si A est un événement d'un espace des éventualités E ($A \subset E$), alors

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$$

où card(A): représente le nombre d'éléments de A, card(E) représente le nombre d'éléments de l'espace des éventualités E et P(A) représente la probabilité d'obtenir l'événement A.

On remarque qu'on : peut écrire la probabilité sous la forme d'une fraction ou d'un pourcentage comme suit :

Evénement impossible	Rarement	Parfois	Souvent	Evénement certain
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0%	25%	50%	75%	100%

Pour t'entraîner :

1. La figure ci-contre représente une roue tournante divisée en 8 secteurs identiques et coloriés. Trouve la probabilité que
La flèche s'arrête sur la couleur : ....:
   - A) blanche.
   - B) blanche ou rouge.
   - C) bleue.

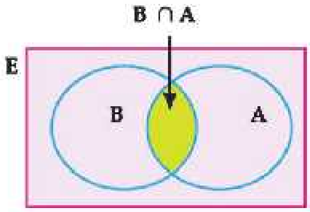
2 **La figure ci-contre représente une roue tournante divisée en 8 secteurs identiques et coloriés. Trouve la probabilité que :**

- **A** la flèche s'arrête sur la couleur verte.
- **B** la flèche s'arrête sur la couleur jaune.
- **C** la flèche s'arrête sur la couleur bleue.

Opérations sur les événements :

Puisque les événements sont des sous-ensembles de l'espace des éventualités (E), donc les opérations sur les événements sont les mêmes que sur les sur les ensembles comme l'union et l'intersection. En considérant l'espace des éventualités (E) comme l'ensemble référentiel, on peut exprimer les événements et les opérations sur eux par des diagrammes de Venn comme suit :

[1] L'intersection :

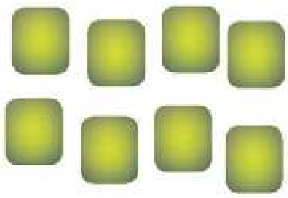


Soient A et B deux événements d'un l'espace des éventualités (E). L'intersection des deux événements A et B, noté A ∩ B signifie la réalisation des deux événements à la fois.

Notons que : On dit qu'un événement est réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de l'ensemble exprimant cet événement.

Exemple

On dispose de 8 cartes identiques numérotées de 1 à 8 . On mélange ces cartes puis on tire une carte au hasard.



1 Ecris l'espace des éventualités.

2 Ecris les événements suivants.

- **A** L'événement A : « La carte tirée porte un nombre pair ».
- **B** L'événement B : « La carte tirée porte un nombre premier ».
- **C** L'événement C : « La carte tirée porte un nombre divisible par 4 ».

3 Utilise le diagramme de Venn pour calculer la probabilité des événements suivants :

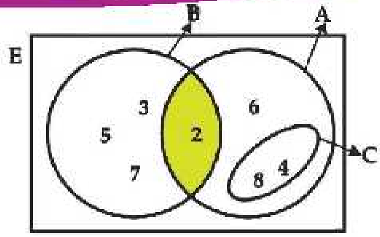
- **A** La réalisation des deux événements A et B ensemble.
- **B** La réalisation des deux événements A et C ensemble.
- **C** La réalisation des deux événements B et C ensemble.

Solution

1 E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} , card (E) = 8

2 **A** A = {2, 4, 6, 8} **B** B = {2, 3, 5, 7} **C** C = {4, 8}

3 En utilisant le diagramme de Venn ci-contre, on trouve que :



A l'événement « La réalisation des deux événements A et B ensemble » signifie $A \cap B$ où :

$A \cap B = \{2\}$. C'est un ensemble qui contient un seul élément.

$\therefore$ card $(A \cap B) = 1$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et B ensemble $= P(A \cap B)$

$$= \frac{\text{card } (A \cap B)}{\text{card } (E)} = \frac{1}{8}$$

B l'événement « La réalisation des deux événements A et C ensemble » signifie $A \cap C$ où :

$A \cap C = \{4, 8\}$ $\therefore$ card $(A \cap C) = 2$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et C ensemble $= P(A \cap B)$

$$= \frac{\text{card } (A \cap C)}{\text{card } (E)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

C l'événement « La réalisation des deux événements B et C ensemble » signifie $B \cap C$ où :

$B \cap C = \phi$ (car B et C sont deux ensembles disjoints) $\therefore$ card $(B \cap C) = 0$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux B et C ensemble $= P(B \cap C)$

$$= \frac{\text{card } (B \cap C)}{\text{card } (E)} = \frac{0}{8} = 0$$

Remarque que : les deux événements B et C ne peuvent pas être réalisés simultanément. On dit que B et C sont deux événements incompatibles.

Les événements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \phi$

On dit que plusieurs événements sont incompatibles s'ils sont incompatibles deux à deux

Pour t'entraîner : On jette un dé une seule fois :

1 Ecris l'espace de éventualités.

2 Ecris les événements suivants :

a A : « obtenir un nombre pair ». b B : « obtenir un nombre impair ».

c C : « obtenir un nombre premier et pair ».

3 Calcule les probabilités suivantes :

a « La réalisation de A et B ensemble ». b « La réalisation de A et C ensemble ».

[2] *Union*

Soient A et B deux événements d'un l'espace des éventualités (E). La réunion des deux événements A et B, notée $A \cup B$, signifie la réalisation de A ou de B ou A et B à la fois. C'est donc l'événement de la réalisation d'au moins l'un des deux événements.

Exemple

1 On dispose de 9 cartes identiques numérotées de 1 à 9 . On mélange ces cartes puis on tire une carte au hasard.

(1) Ecris l'espace des éventualités.

(2) Ecris les événements suivants :

A L'événement A : « La carte tirée porte un nombre pair ».

B L'événement B : « La carte tirée porte un nombre divisible par 3 ».

C L'événement C : « La carte tirée porte un nombre premier plus grand que 5 ».

(3) Utilise le diagramme de Venn pour calculer la probabilité des événements suivants :

a La réalisation de A ou B

b La réalisation A ou C

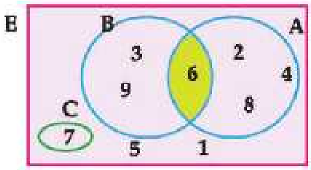
c Calcule $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

Solution

(1) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, card (S) = 9

(2) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, card (A) = 4 , $B = \{3, 6, 9\}$, card (B) = 3 , $C = \{7\}$, card (C) = 1

(3) **In the venn diagram opposite :**



A l'événement « La réalisation de A ou B » signifie $A \cup B$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, card $(A \cup B) = 6$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation de A ou B ensemble $= P(A \cup B)$

$$= \frac{\text{card}(A \cup B)}{\text{card}(E)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

B l'événement « La réalisation A ou C » signifie $A \cup C$ où :

$A \cup C = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, card $(A \cup C) = 5$

$\therefore$ La probabilité de la réalisation des deux événements A et C ensemble $= P(A \cup C)$

$$= \frac{\text{card}(A \cup C)}{\text{card}(E)} = \frac{5}{9}$$

C $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)} = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(E)} = \frac{3}{9}$

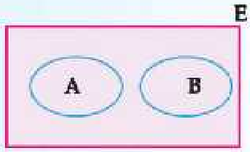
$A \cap B = \{6\}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(S)} = \frac{1}{9}$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ (1)

, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ (2)

De (1), et (2) on obtient $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

Remarque : De la figure ci-contre, A et B sont deux événements incompatibles de l'espace des éventualités E. Donc :.



1. $A \cap B = \phi$
2. $P(A \cap B) = \dfrac{\text{card } \phi}{\text{card }(E)} = \dfrac{0}{\text{card }(E)} = \text{Zéro}$

On remarque que les deux événements A et C sont incompatibles.

Donc $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ mais $(A \cap C) = \text{zéro}$

$\therefore\ P(A \cup C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \text{zéro}$

$= \frac{5}{9}$ comme nous l'avons déjà trouvé

Donc si A et C sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

Pour t'entraîner :

1. Si A et B sont deux événements d'un l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire, complète :

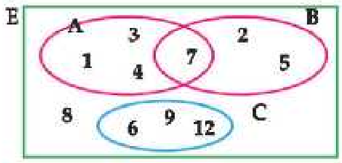
   A $P(A) = 0{,}2$
   $P(B) = 0{,}6$
   $P(A \cap B) = 0{,}3$
   $P(A \cup B) = ...$

   B $P(A) = 0{,}55$
   $P(B) = \frac{3}{10}$
   $P(A \cap B) = ...$
   $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$

   C $P(A) = ...$
   $P(B) = \frac{1}{4}$
   $P(A \cap B) = \text{zéro}$
   $P(A \cup B) = 0{,}9$

2. En utilisant le diagramme de Venn ci-contre, trouve :

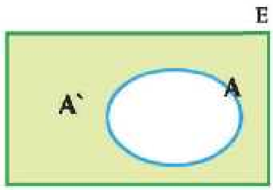
   A $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$
   B $P(A \cap C)$ et $P(A \cup C)$
   C $P(B \cap C)$ et $P(B \cup C)$



3-2

Evénement complémentaire et différence de deux événements

Réfléchis et discute



Dans le diagramme de Venn ci-contre :

Si E est l'ensemble référentiel et, $A \subset E$,

alors le complémentaire de l'ensemble A est A`

Complète :

1. $A \cup A`$ = ......... et $A \cap A`$ = ...
2. Si E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} A = {2, 4, 6} then: A` = {............}.

Par exemple, on tire au hasard une boule d'une boîte qui contient 7 boules identiques numérotées de 1 à 7 et on observe le nombre inscrit sur cette boule A = {2, 4, 6}

L'événement A' : « la boule tirée porte un nombre impair »

où A'= {1, 3, 5, 7} est un événement complémentaire à l'événement A.

Evénement complémentaire :

L'événement complémentaire à l'événement A est A'. C'est la non réalisation de l'événement A.

Donc : Si $A \subset E$, alors A'est l'événement complémentaire à l'événement A.

On a $A \cup A' = E$, $A \cap A' = \phi$

un événement et son événement complémentaire sont incompatibles.

Soit E l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire, $A \subset E$, A' est l'événement complémentaire de A et E = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }. Complète le tableau suivant et note tes remarques.

Complète le tableau suivant et note tes remarques

événement A	événement A'	P (A)	P (A')	P (A) + P (A')
{2, 4, 6}				
	{3, 6}			
{5}				
{1, 2, 3, 4, 5, 6}				

A apprendre :

- La notion de l'événement complémentaire.
- La notion de la différence de deux événements.

Expressions de base :

- événement complémentaire
- différence de deux événements

Du tableau précédent, on remarque que $P(A) + P(A') = 1$ **donc:** $P(A') = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(A')$

Remarque : $P(A) + P(A' = P(S) = 1$

Exemple

1 Dans une classe, il y a 40 élèves parmi lesquels, 18 élèves lisent le journal Al Akhbar, 15 élèves lisent le journal Al Ahram et 8 élèves lisent les deux journaux. On choisit au hasard un élève de la classe. Calcule la probabilité que l'élève choisi :

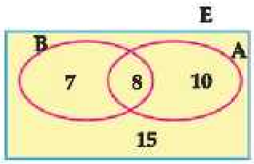
A lise le journal Al Akhbar.

B ne lise pas le journal Al Akhbar.

C lise le journal Al Ahram.

D lise les deux journaux.

Solution



Soient A l'événement : « lire le journal Al Akhbar » et B l'événement : « lire le journal Al Ahram »

Donc $A \cap B$ Rreprésente l'événement « lire les deux journaux »

card (E) = 40 , card (A) = 18 , card (B) = 15 , card $(A \cap B) = 8$

A Pour l'événement A : « lire le journal Al Akhbar », on a $= \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(S)} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

B L'événement : « ne pas lire le journal Al Akhbar » est un événement complémentaire à l'événement A. C'est donc l'événement A'.

$$\therefore \; P(A') = \frac{\text{Card } A'}{\text{Card }(E)} = \frac{15+7}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

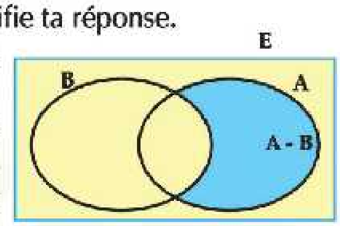
Autre solution $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$

C Pour l'événement B : « lire le journal Al Ahram », on a $P(B) = \frac{\text{Card }(B)}{\text{Card }(E)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

D event $A \cap B$ représente l'événement « lire les deux journaux »r

$$\therefore \; P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

Réfléchis : Est-ce que l'événement « lire le journal Al Akhbar » a le même sens que l'événement « lire seulement le journal Al Akhbar » ? Justifie ta réponse.



On remarque que : l'événement « lire le journal Al Akhbar » est représenté dans le diagramme de Venn par l'ensemble A tandis que l'événement « lire seulement le journal Al Akhbar » signifie la lecture du journal Al Akhbar et ne pas lire d'autres journaux. Cet événement est représenté par l'ensemble A – B qui se lit **« A différence B ».**

Différence de deux événements :

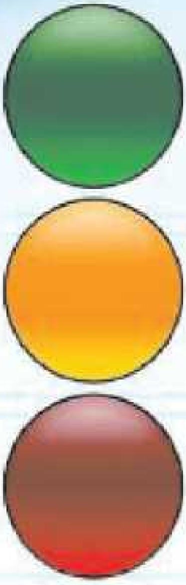
Soient A et B deux événements d'un espace des éventualités E. $A - B$ est l'événement de la réalisation de A et la non réalisation de B. Donc c'est l'événement de la réalisation de A seulement.
On remarque que : $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

Pour t'entraîner : **Dans l'exemple précédent, trouve :**

1. la probabilité que l'élève lise le journal Al Akhbar seulement.
2. la probabilité que l'élève lise le journal Al Ahram seulement.
3. la probabilité que l'élève lise le journal Al Akhbar seulement ou Al Ahram seulement.

Géométrie plane

Unité (4): Le cercle



Les conducteurs de voitures doivent bien connaître le code de la route et distinguer les différents signes.

En t'aidant des différentes ressources d'informations (Les offices de la gestion du trafic – la bibliothèque – l'internet – .....) fais une recherche sur le code de la route et la signalisation routière.

4-1

Définitions et notions de base

Réfléchis et discute :

Youssef a exécuté le programme **Google Earth**, sur son ordinateur pour étudier la géographie de l'Egypte. Youssef a noté la présence de certains espaces verts circulaires près des zones désertiques. Il a posé des questions à son père concernant ces zones.

Son père lui a dit : Tu sais qu'une goute d'eau est source de vie. Pour cela, on rationalise la consommation de l'eau en irriguant la terre par la méthode de l'irrigation sur pivot central (irrigation par arrosage). Dans cette méthode, les roues de la machine tournent autour d'un point fixe en traçant des cercles

1. Comment peux-tu tracer le cercle central d'un terrain de football ?
2. Quel rôle peux-tu jouer pour rationnaliser la consommation de l'eau ?

Le cercle est un ensemble de points du plan qui se trouvent à une distance fixe d'un point fixe du plan. Le point fixe est appelé « le centre du cercle » et la distance fixe est appelée « le rayon du cercle ».

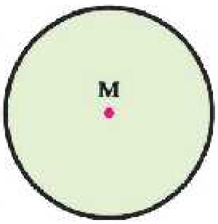
A apprendre

- Les notions de base concernant le cercle
- La notion de l'axe de symétrie d'un cercle

Expressions de base :

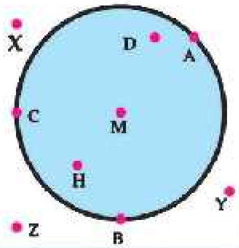
- cercle
- surface d'un cercle
- rayon d'un cercle
- corde
- diamètre d'un cercle
- axe de symétrie d'un cercle

Habituellement, on appelle un cercle par son centre. Dire « un cercle M » signifie que le cercle a pour centre M comme dans la figure ci-contre.



Un cercle dans le plan partage les points du plan en trois ensembles de points comme dans la figure ci-contre. Ces trois ensembles sont :

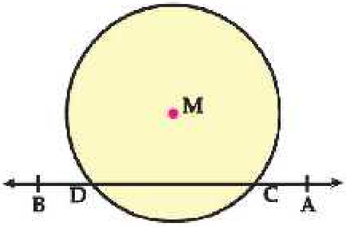
1. L'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle comme les points M, D, H, ...
2. L'ensemble des points du cercle comme les points A, B, C, ...
3. L'ensemble des points situés à l'extérieur du cercle comme les points X, Y, Z, ...



La surface d'un cercle : **L'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle, L'ensemble des points du cercle.**

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre, complète :



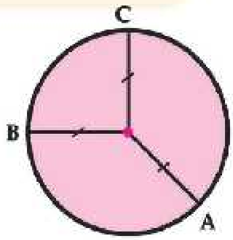
1. $\overleftrightarrow{AB} \cap$ le cercle M = ...
2. $\overleftrightarrow{AB} \cap$ la surface du cercle M = ...
3. M $\notin$ au cercle M mais M $\in$ ....

Le rayon d'un cercle : c'est un segment ayant pour extrémités le centre du cercle et un point du cercle

Dans la figure ci-contre, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ sont des rayons du cercle M où

MA = MB = MC = la longueur du rayon du cercle (r)

Si les rayons de deux cercles ont la même longueur, les deux cercles sont superposables

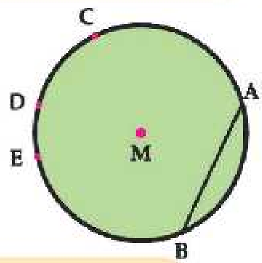


Une corde d'un cercle : c'est **un segment ayant pour extrémités deux points du cercle**

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

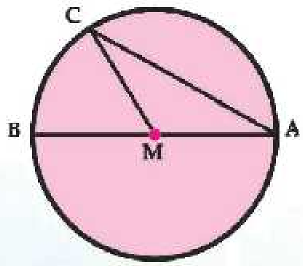
Trace toutes les cordes du cercle ayant pour extrémités deux des points A, B, C, D et E.



Un diamètre d'un cercle : **c'est une corde qui passe par le centre du cercle**

Pour t'entraîner :

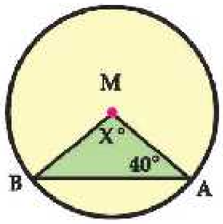
1. Dans la figure précédente, laquelle des cordes est un diamètre du cercle M ?
2. Quel est le nombre de diamètres d'un cercle ?
3. Pour démontrer qu'un diamètre d'un cercle est la plus longue corde, complète :
   Dans le triangle A M C : AM + MC > ....
   Dans le cercle M : CM = BM (rayons)
   Donc AM + ... > .... $\therefore$ AB > ....



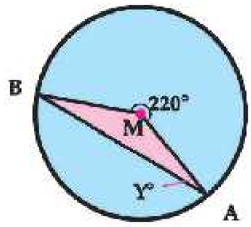
Commercial Press ACP

4 Si la longueur du rayon d'un cercle = r, alors la longueur d'un diamètre du cercle = ..., le périmètre du cercle = ... et l'aire du cercle = ...

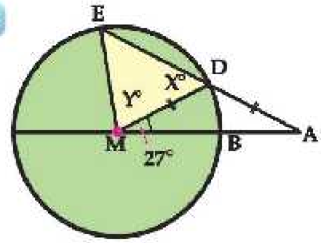
5 **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole désignant la mesure de l'angle :**

a


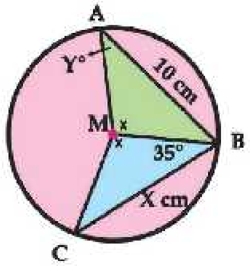
X = ...

b


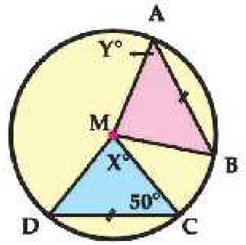
Y = ...

c


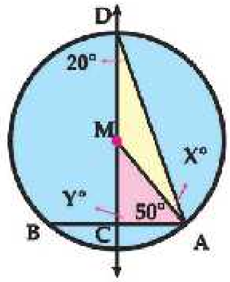
X = ...,
Y = ...

d


X = ...,
Y = ...

e


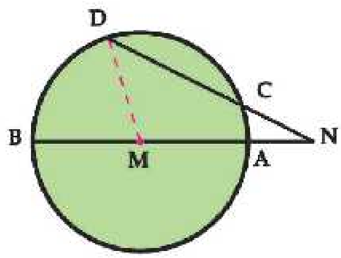
X = ...,
Y = ...

f


X = ...,
Y = ...

Exemple 1

Dans la figure ci-contre : $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M. $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{DC} = \{N\}$. ***Démontre que :*** NB > ND.



Solution

On trace le rayon $\overline{MD}$, Dans le triangle N M D : M N + M D > N D

∵ M B = M D (rayons)

∴ M N + M B > N D

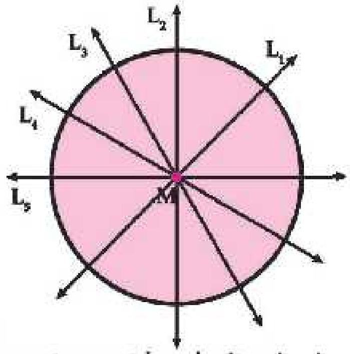
∴ N B > N D **(ce qu'il fallait démontrer)**

Pour t'entraîner :

Dans l'exemple précédent, démontre que N C > N A.

Symétrie dans un cercle :

Activité 1



1. A l'aide d'un compas, trace un cercle M sur un papier calque.
2. Trace une droite L_1 passant par le centre du cercle qui le coupe en deux arcs.
3. Plie le papier le long de la droite L_1. Que remarques-tu ?
4. Trace une autre droite L_2 passant par le centre du cercle, puis plie le papier le long de cette droite. Répète la dernière étape en traçant les droites L_3, L_4, …… . Que remarques-tu dans chaque cas ?

De l'activité précédente, on déduit que :

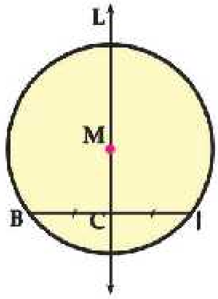
> ***Toute droite passant par le centre d'un cercle est un axe de symétrie du cercle.***

Réfléchis : Quel est le nombre d'axes de symétries d'un cercle ?

Activité 2

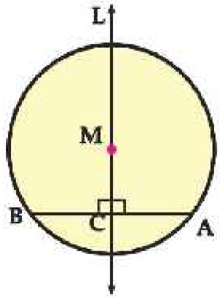
Observe chacune des figures suivantes (utilise les données de chaque figure). Que conclues-tu ?

1



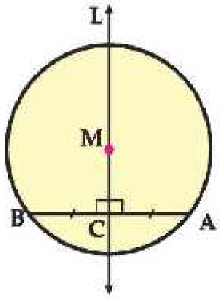
Conclusion :................

2



Conclusion :................

3



Conclusion :................

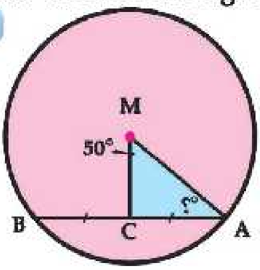
Résultats importants

De 1	La droite passant par le centre d'un cercle et par le milieu d'une corde est perpendiculaire à cette corde.
De 2	La droite passant par le centre d'un cercle et perpendiculaire à une corde passe par le milieu de cette corde.
De 3	La droite passant par le milieu d'une corde d'un cercle et perpendiculaire à cette corde, passe par le centre du cercle.

Pour t'entraîner :

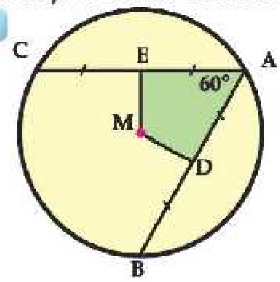
1 **Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle. Complète :**

A



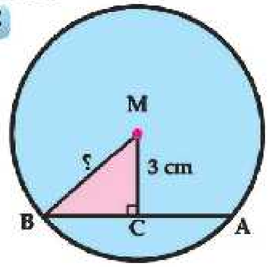
m (∠ M A C) = ...

B



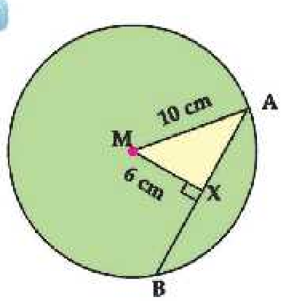
m (∠ D M E) = ...

C



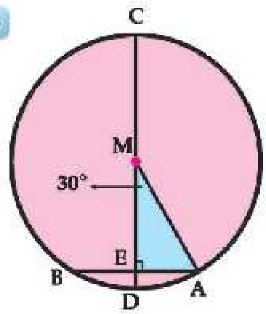
Si A B = 8 cm,
alors M B = ...

D



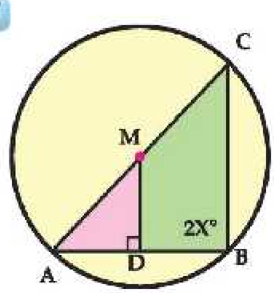
A B = ...

E



Si A B = 10 cm,
alors C D = ...

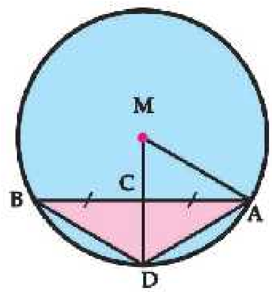
F



X = ...

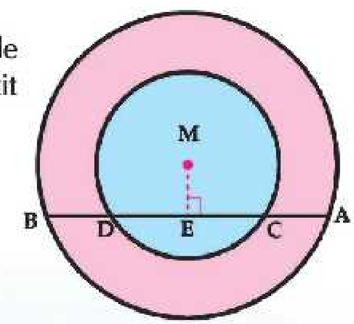
2 **Dans la figure ci-contre :** M est un cercle de 13 cm de longueur de rayon, $\overline{AB}$ est une corde de longueur 24 cm, C est le milieu de $\overline{AB}$ et $\overrightarrow{MC}$ ∩ le cercle M = {D}.

Calcule l'aire du triangle ADB.



Exemple 2

La figure ci-contre représente deux cercles concentriques de centre M, $\overline{AB}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en C et D. Démontre que AC = BD.



Solution

Hypothèses : $\overline{AB}$ ∩ le petit cercle = {C, D}

Conclusion : A C = B D

Construction : On trace $\overline{ME} \perp \overline{AB}$ qui le coupe en E.

Démonstration : **Dans le grand cercle** $\overleftrightarrow{ME} \perp \overline{AB}$ $\therefore$ $EA = EB$ **(1) (Corollaire)**

Dans le petit cercle $\overleftrightarrow{ME} \perp \overline{CD}$ $\therefore$ $EC = ED$ **(2) (Corollaire)**

De (1) et (2) :

$EA - EC = EB - ED$ $\therefore$ $AC = BD$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

Pour t'entraîner :

Dans les figures ci-contre, cite tous les segments ayant des longueurs égales. Justifie ta réponse.

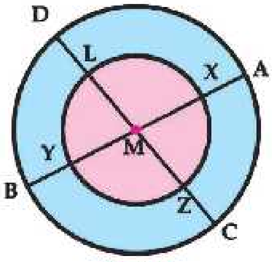


fig (2)

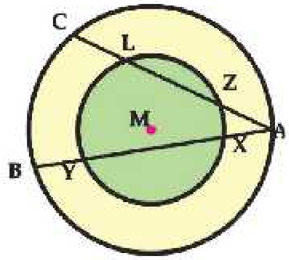
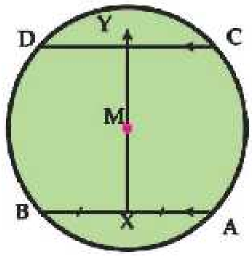


fig (1)

Exemple 3

Dans la figure M est un cercle, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ et X est le milieu de $\overline{AB}$.

On trace $\overrightarrow{XM}$ qui coupe $\overline{CD}$ en Y. ***Démontre que :*** Y est le milieu de $\overline{CD}$



Solution

Hypothèses : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AX = BX$

Conclusion : $CY = DY$

Démonstration : $\because$ X est le milieu de $\overline{AB}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$

$\because$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overleftrightarrow{XY}$ est une sécante $\therefore$ $m(\angle DYX) = m(\angle AXY) = 90°$ alternes internes

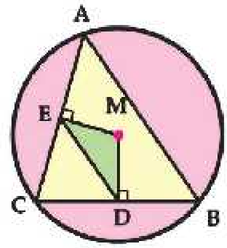
$\therefore$ $\overleftrightarrow{MY} \perp \overline{CD}$ $\therefore$ Y est le milieu de $\overline{CD}$. (Ce qu´il fallcit démontrer)

Pour t'entraîner :

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes parallèles d'un cercle M, AB = 12 cm et CD = 16 cm. Trouve la distance entre ces deux cordes sachant que la longueur de rayon du cercle M est 10 cm. Y a-t-il d'autres réponses ? Explique ta réponse.

Réfléchis : Si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes d'un cercle où AB > CD, laquelle des deux cordes est la plus proche du centre du cercle ? Explique ta réponse.

Exemple 4



Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle inscrit dans un cercle de centre M, $\overline{MD} \perp \overline{BC}$, $\overline{ME} \perp \overline{AC}$.

Démontre que : 1) $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$

2) Le périmètre du Δ C D E $= \frac{1}{2}$ Le périmètre du Δ A B C

Solution

Hypothèses : $\overline{MD} \perp \overline{BC}$ et $\overline{ME} \perp \overline{AC}$

Conclusion : 1) $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$

2) Le périmètre du Δ C D E $= \frac{1}{2}$ Le périmètre du Δ A B C

Démonstration :

1) $\because$ $\overline{MD} \perp \overline{BC}$ $\therefore$ D est le milieu de $\overline{BC}$ **(1)**

$\because$ $\overline{ME} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ E est le milieu de $\overline{AC}$ **(2)**

Dans le Δ A B C, D est le milieu de $\overline{BC}$ et E est le milieu de $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ **(ce qu'il fallait démontrer)**

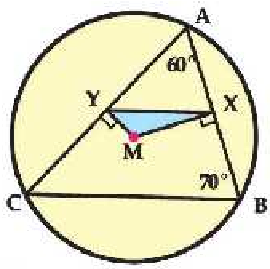
$DE = \frac{1}{2} AB$ **(3)**

2) **De (1), (2), (3) :**

$\therefore$ Le périmètre du Δ C D E $= CD + CE + ED = \frac{1}{2} CB + \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} AB$

$= \frac{1}{2} (CB + AC + AB) = \frac{1}{2}$ le périmètre du Δ A B C

Pour t'entraîner :



Dans la figure ci-contre : M est un cercle, $\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{AC}$, m ($\angle$ A) = 60°, m ($\angle$ B) = 70°.

Trouve les mesures des angles du triangle MXY.

4-2 Positions relatives d'un point et d'une droite par rapport à un cercle.

A apprendre

- déterminer la position d'un point par rapport à un cercle
- déterminer la position d'une droite par rapport à un cercle
- déterminer la relation entre la tangente et le rayon d'un cercle
- déterminer la position d'un cercle par rapport à un autre cercle
- relation entre la droite des centres de deux cercles, la corde commune et la tangente commune

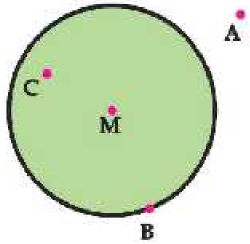
Expressions de base :

- un point à l'extérieur du cercle
- un point du cercle
- un point à l'intérieur du cercle
- deux cercles disjoints
- deux cercles sécants
- deux cercles tangents
- tangente commune
- droite des centres
- corde commune

[1] Position d'un point par rapport à un cercle :

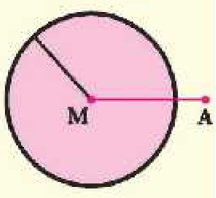
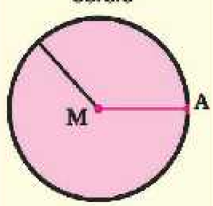
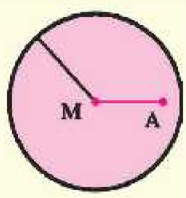
Réfléchis et discute :

Dans la figure ci-contre, le cercle M partage les points du plan en trois ensembles de points.



1. Comment peut-on déterminer la position des points A, B et C par rapport au cercle ?
2. Quelle relation existe-il entre (MA , r), (MB , r) et (MC , r) ?

Si M est un cercle de longueur de rayon r et si A est un point du plan du cercle, alors :

1 A est situé à l'extérieur du cercle	2 A est situé sur le cercle	3 A est situé à l'intérieur du cercle
		
Dans ce cas, $MA > r$ La réciproque est vraie.	Dans ce cas, $MA = r$ La réciproque est vraie.	Dans ce cas, $MA < r$ La réciproque est vraie.

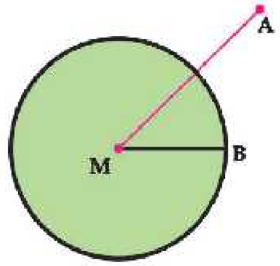
Pour t'entraîner :

Soit M un cercle de longueur de rayon 4 cm. A est un point du plan du cercle. Complète :

1. *Si* $MA = 4$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
2. *Si* $MA = 2\sqrt{3}$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
3. *Si* $MA = 3\sqrt{2}$ cm, alors A est situé .... cercle M car ....
   ....
4. *Si* $MA = 0$, alors A est situé .... cercle M et il est représenté par ....

Exemple 1

Soit M un cercle de longueur de rayon 5 cm. A est point du plan du cercle, MA = (2x - 3) centimètres. Trouve les valeurs de x sachant que A est situé à l'extérieur du cercle.



Solution

$\because$ le point A est situé à l'extérieur du cercle $\therefore$ MA > 5 d'où 2X - 3 > 5 2X > 8 $\therefore$ X > 4

Pour t'entraîner :

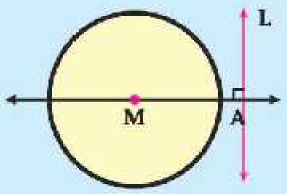
Dans l'exemple précédent, trouve les valeurs de x dans chacun des cas suivants :

1. MA = 2x + 1 et A est un point du cercle.
2. MA = 8x – 27 et A est un point à l'intérieur du cercle.

[2] Position d'une droite par rapport à un cercle :

Soit M un cercle de rayon de longueur r. Si L est une droite du plan tel que $\overleftrightarrow{MA}$ = L où $\overleftrightarrow{MA} \cap L = \{A\}$, alors

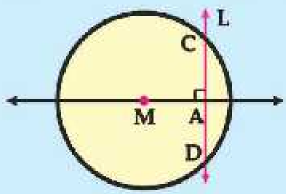
1 La droite L est extérieure au cercle M.
$L \cap$ le cercle $M = \phi$



Dans ce cas : MA > r

La réciproque est vraie

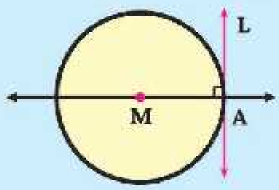
2 La droite L coupe le cercle M
$L \cap$ le cercle $M = \{C, D\}$



Dans ce cas : MA < r

La réciproque est vraie.

3 La droite L est tangente au cercle M
$L \cap$ le cercle = {A}



Dans ce cas : MA = r

La réciproque est vraie.

Réfléchis : Dans chacun des cas précédents, trouve $L \cap$ la surface du cercle M

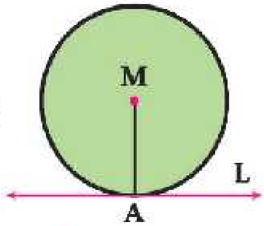
Pour t'entraîner :

Soit M un cercle de rayon de longueur 7 cm. Si $\overline{MA} \perp L$ où $A \in L$. Complète:

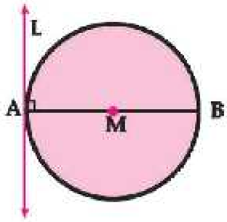
1. *Si* MA = $4\sqrt{3}$ cm, alors la droite L ....
2. *Si* MA = $3\sqrt{7}$ cm, alors la droite L ....
3. *Si* 2 MA - 5 = 9, alors la droite L ....
4. *Si* la droite L coupe le cercle M et MA = 3x -5, alors $x \in$ ....
5. *Si* la droite L est une tangente au cercle M et MA = $x^2 - 2$, alors $x \in$ ....

Règles importantes :

1 La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle qui passe par le point de contact.



2 La droite perpendiculaire à un diamètre d'un cercle en l'une de ses extrémités est une tangente au cercle.



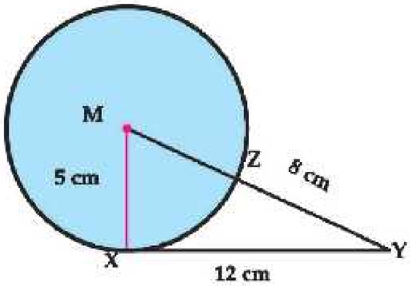
Réfléchis

1 **Combien de tangentes peut-on tracer au cercle M ?**
a) d'un point donné du cercle.
b) d'un point donné à l'extérieur du cercle.

2 Quelle relation existe-il entre les deux tangentes tracées aux deux extrémités d'un diamètre d'un cercle ?

Exemple 2

Dans la figure ci-contre, M est un cercle de longueur de rayon 5 cm, XY = 12 cm, $\overline{MY} \cap$ le cercle M = {Z} et ZY = 8 cm.



Démontre que : $\overleftrightarrow{XY}$ est une tangente au cercle M au point X.

Solution

$\because$ $\overline{MY} \cap$ le cercle M = {Z} $\therefore$ MY = M Z + ZY

$\because$ M Z = M X = 5 cm (rayons) $\therefore$ MY = 5 + 8 = 13 cm

$\because$ $(MY)^2 = (13)^2 = 169$, $(MX)^2 = (5)^2 = 25$, $(XY)^2 = (12)^2 = 144$

$\therefore$ $(MX)^2 + (XY)^2 = 25 + 144 = 169 = (MY)^2$

$\therefore$ $m(\angle MXY) = 90°$ **(réciproque du théorème de Pythagore)**

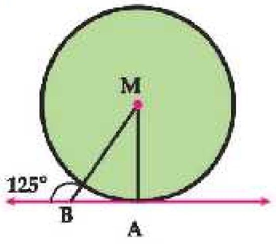
$\because$ $\overleftrightarrow{XY} \perp \overline{MX}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{XY}$ est une tangente au cercle au point X. **(ce qu'il fallait démontrer)**

Pour t'entraîner :

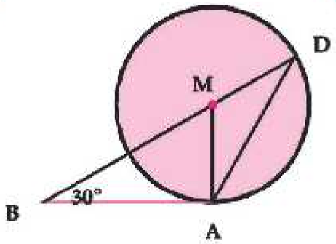
1 Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle **et** $\overleftrightarrow{AB}$ **, une tangente. Complète :**

A



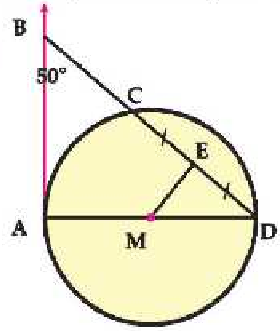
m (∠ A M B) = ...

B



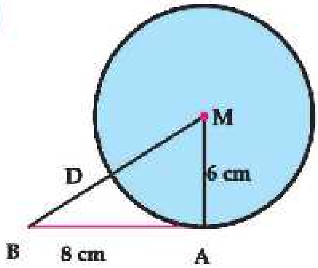
m (∠ A D B) = ...

C



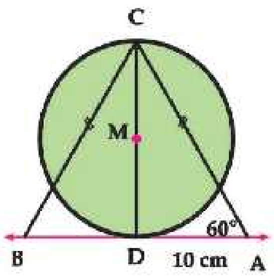
m (∠ A M E) = ...

D



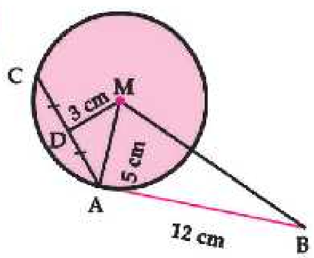
D B = ... cm

E



Le périmètre du Δ A B C = ... cm

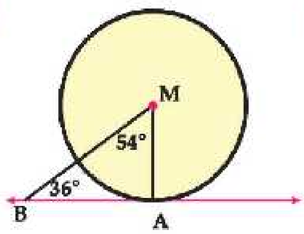
F



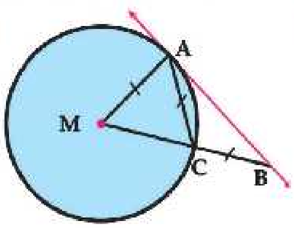
Le périmètre de la figure A B M D = ... cm

2 **Dans chacune des figures suivantes, explique pourquoi** $\overleftrightarrow{AB}$ **est une tangente au cercle M :**

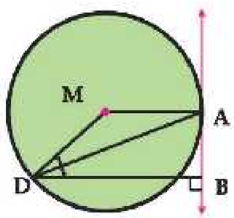
A



B

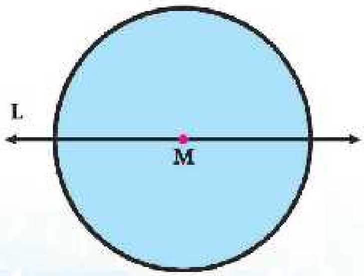


C



[3] Position d'un cercle par rapport à un autre cercle :

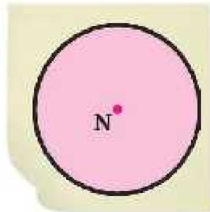
Activité :



1 Trace un cercle de centre M et de rayon de longueur convenable = r_1 cm.

2 Trace un axe de symétrie L du cercle M comme le montre la figure ci-contre.

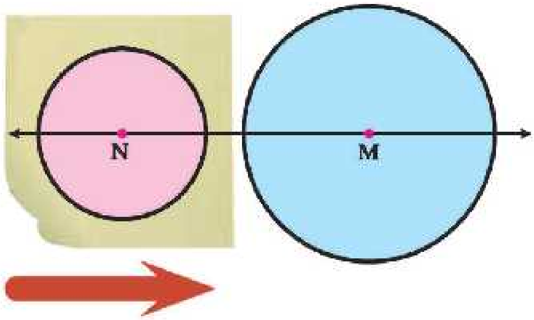
3 Sur un papier calque : Trace un cercle de centre N et de longueur de rayon convenable = r_2 cm où $r_2 < r_1$.



4 Pose le papier calque de sorte que le point N appartient à la droite L

On remarque que : L = $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{MN}$ est appelée la droite des centres des deux cercles M et N. $\overleftrightarrow{MN}$ est aussi un axe de symétrie de la figure composée des deux cercles.

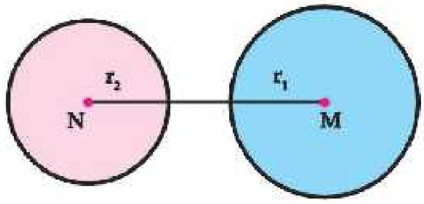
5 Déplace le papier calque vers le cercle en gardant le point N sur la droite L pour voir des positions différentes de l'un des deux cercles par rapport à l'autre. Mesure la longueur de $\overline{MN}$ dans chaque cas.
Quelle est la relation entre la longueur de $\overline{MN}$ **(la distance entre les centre des deux cercle M et N)**, $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ dans chaque position



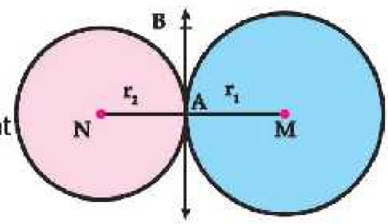
Pour t'entraîner :

Soient M et N deux cercles d'un même plan de longueurs de rayons respectives r_1 et r_2 où $r_1 > r_2$. Complète :

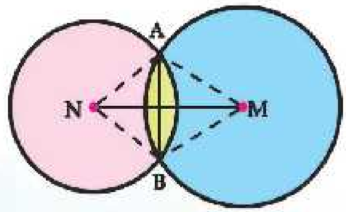
1 Si $MN > r_1 + r_2$, alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont disjoints extérieurement.



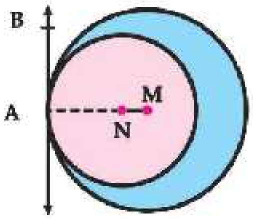
2 Si $MN = r_1 + r_2$, alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont tangents extérieurement



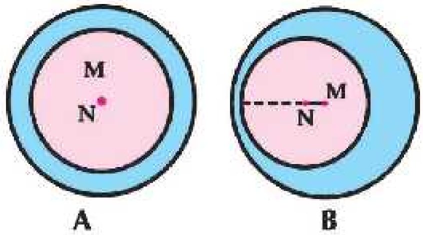
3 Si $r_1 - r_2 < MN < r_1 + r_2$,
alors M ∩ N = ...,
La surface de M ∩ la surface de N = la surface de la région Verte. Dans ce cas, les deux cercles sont sécants.



4. Si $MN = r_1 - r_2$, alors $M \cap N =$ .... ,
La surface de $M \cap$ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont tangents intérieurement



5. Si $MN < r_1 - r_2$,alors $M \cap N =$ ....,
La surface de $M \cap$ la surface de N = ...
Dans ce cas, les deux cercles sont disjoints intérieurement comme dans la figure ....
Si MN = 0, les deux cercles sont concentriques comme dans la figure ....



Résultats :

1. La droite des centres de deux cercles tangents passe par le point de contact et est perpendiculaire à la tangente commune.
2. La droite des centres de deux cercles sécants est perpendiculaire à la corde commune et passe par son milieu.

Exemple 3

Soient M et N deux cercles de longueurs de rayons respectives 9 cm et 4 cm. Détermine la position de chaque cercle par rapport à l'autre dans chacun des cas suivants :

A MN = 13 cm B M N = 5 cm C M N = 3 cm
D M N = zéro E M N = 10 cm F M N = 15 cm

Solution

$\because$ $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 4$ cm $\therefore$ $r_1 + r_2 = 13$ cm et $r_1 - r_2 = 5$ cm

A M N = 13 cm $\therefore$ $MN = r_1 + r_2$ $\therefore$ les deux cercles sont tangents extérieurement.

B M N = 5 cm $\therefore$ $MN = r_1 -$ $\therefore$ les deux cercles sont tangents intérieurement.

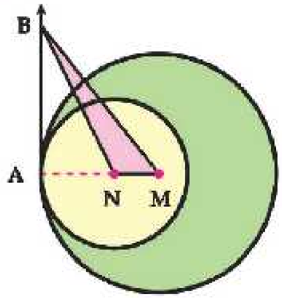
C M N = 3 cm $\therefore$ $MN < r_1 - r_2$, $MN \neq 0$ $\therefore$ les deux cercles sont disjoints intérieurement

D M N = 0 $\therefore$ les deux cercles sont concentriques

E M N = 10 cm $\therefore$ $r_1 - r_2 < MN < r_1 + r_2$ $\therefore$ les deux cercles sont sécants

F M N = 15 cm $\therefore$ $MN > r_1 + r_2$ $\therefore$ les deux cercles sont disjoints extérieurement.

Exemple 4



Soient M et N deux cercles tangents intérieurement en A, de longueurs de rayons respectives 10 cm et 6 cm, $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune en A. Si l'aire du triangle B M N = 24 cm^2, ***trouve*** la longueur de $\overline{AB}$.

Solution

$\because$ Les deux cercles sont tangents intérieurement en A

$\therefore$ A $\in \overleftrightarrow{MN}$ et $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Donc AB est la longueur de la hauteur du triangle BMN correspondant à la base $\overline{MN}$

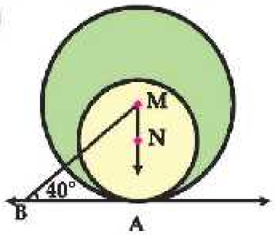
où M N = 10 - 6 = 4 cm (Pourquoi ?)

L'aire du Δ B M N = $\frac{1}{2} \times$ M N $\times$ A B $\quad \therefore\ 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times$ A B $\quad \therefore$ A B = 12 cm

Pour t'entraîner :

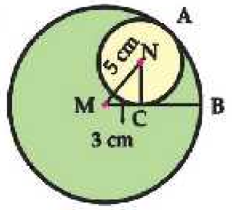
Dans chacune des figures suivantes, les deux cercles sont tangents. A l'aide des données de chaque figure, complète :

1



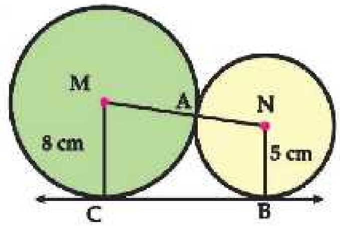
m ($\angle$ B M N) = ...°

2



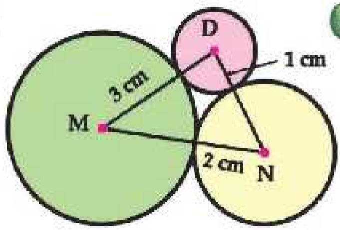
B C = ... cm

3



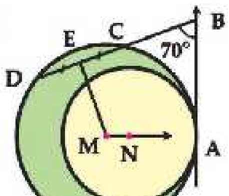
B C = ... cm

4



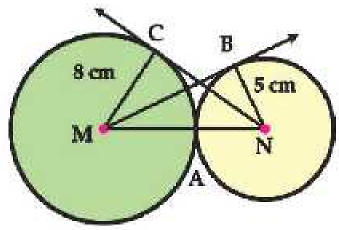
m ($\angle$M D N) = ... °

5



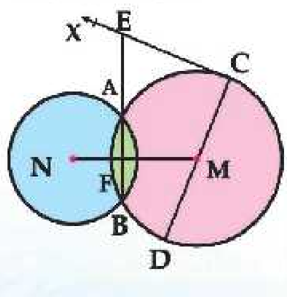
m ($\angle$ E M N) = ...°

6



M B = ... cm,
N C = ... cm

Exemple 5



M et N sont deux cercles sécants en A et B, $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle M. $\overrightarrow{CX}$ est tangente au cercle M en C. $\overrightarrow{CX} \cap \overrightarrow{BA}$ = {E}, $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB}$ = {F}. ***Démontre que :*** m($\angle$ DMN) = m($\angle$ CEB).

Solution

Hypothèses : Le cercle M ∩ le cercle N = {A, B}, $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle, $\overrightarrow{CX}$ est une tangente au cercle M.

Conclusion : Démontre que : m (∠ D M N) = m (∠ C E B).

Démonstration : ∵ La droite des centres de deux cercles sécants est perpendiculaire à la corde commune.

∴ $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ i.e m(∠ A F M) = 90°

∵ $\overline{CD}$ est un diamètre du cercle M et $\overrightarrow{CX}$ est une tangente au cercle M en C

∴ $\overrightarrow{CX} \perp \overline{CD}$ d'où m (∠ E C D) = 90°

∴ m (∠ C E F) + m(∠ C M F) = 360° - (90° + 90°) = 180° **(Pourquoi ?)**

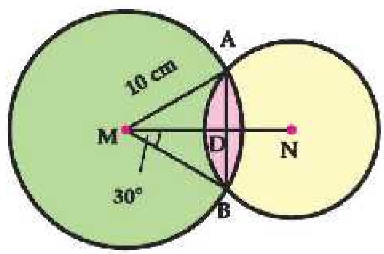
∵ m (∠ D M F) + m (∠ C M F) = 180°

∴ m (∠ D M N) = m (∠ C E F) **(Ce qu'il fallait démontrer)**

Pour t'entraîner :

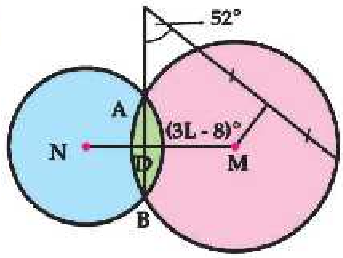
1 Dans chacune des figures suivantes, M et N sont deux cercles sécants en A et B. Complète :

A



A B = ... cm

B



L = ...

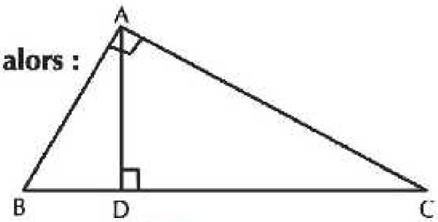
Remarque que :

Dans le triangle ABC rectangle en A, si on trace $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, alors :

$(A B)^2$ = B D × B C *(théorème d'Euclide)*

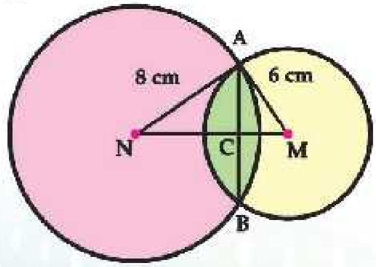
, $(A D)^2$ = D B × D C *(corollaire)*

, A D × B C = A B × A C *Pourquoi ?*



2 Dans la figure ci-contre : M et N sont deux cercles sécants en A et B, $\overline{MN} \cap \overline{AB}$ = {C}, A M = 6 cm. A N = 8 cm et $\overline{MA} \perp \overline{AN}$.

Trouve la longueur de $\overline{AB}$.



4-3

Détermination d'un cercle

A apprendre

- ☆ Comment tracer un cercle passant par un point donné.
- ☆ Comment tracer un cercle passant par deux points donnés.
- ☆ Comment tracer un cercle passant par trois points donnés.

Expressions de base :

- ☆ Cercle circonscrit à un triangle

Réfléchis et discute

- Pourquoi utilise-t-on le compas pour tracer un cercle ?
- Quel est l'axe de symétrie d'un segment ?
- Est-ce que le centre d'un cercle appartient toujours à la médiatrice d'une corde quelconque ?
- Comment peut-on dessiner (déterminer) un cercle dans un plan ?

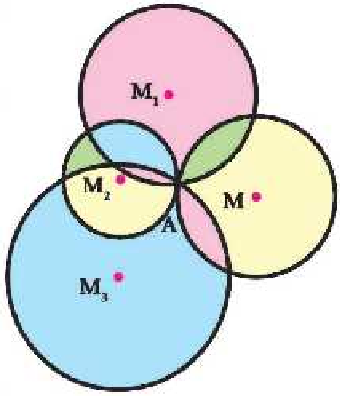
Nous pouvons dessiner (déterminer) un cercle dans des conditions données en connaissant :

1. le centre du cercle.
2. la longueur de son rayon.

[1]: Tracer un cercle passant par un point donné :

Hypothèses : A est un point donné d'un plan.

Conclusion : Tracer un cercle passant par A.



Construction :

1. Choisis un point M du plan .
2. Mets la pointe sèche du compas en M avec un écartement équivalent à MA puis trace le cercle M. Tu trouves que le cercle M passe par le point A.
3. Mets la pointe sèche du compas en un autre point M_1 avec un écartement équivalent à MA puis trace le cercle M_1. Tu trouves que le cercle M passe par le point A.
4. Répète le travail précédent en choisissant d'autres points.

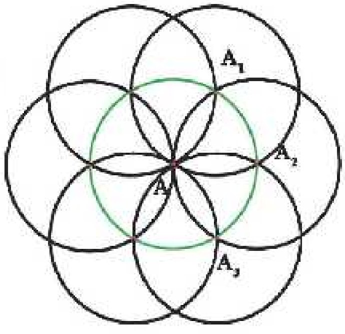
Remarque que : Pour tout point choisi comme centre du cercle, on peut tracer un seul cercle passant par A.

Al-Ahram Commercial Press ACP

✍ Combien y a-t-il de points dans un plan ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par le point A ?

✍ Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, où se trouvent leurs centres ?

De ce qui précède, on déduit que :



1. On peut tracer une infinité de cercles passant par un point donné comme A.
2. Si les rayons de ces cercles sont de même longueur, leurs centres appartiennent à un même cercle de centre A, superposable à ces cercles.

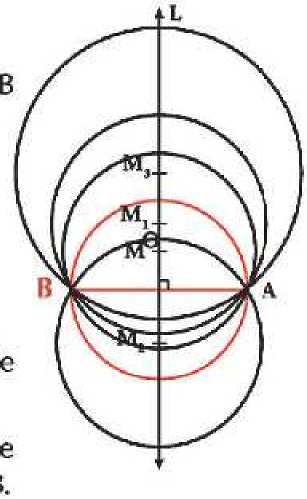
Pour t'entraîner :

Soit L une droite du plan. A est un point du plan où $A \in L$. En utilisant les instruments de la géométrie, trace un cercle passant par A de longueur de rayon 2 cm. Combien de cercles peux-tu tracer ? (N'efface pas les arcs).

[2] *Tracer un cercle passant par deux points donnés :*

Hypothèses : A et B sont deux points donnés d'un plan.

Conclusion : Tracer un cercle M passant par les deux points A et B ($\overline{AB}$ est une corde du cercle M).



Construction :

1. Trace un segment $\overline{AB}$.
2. Trace la droite L, médiatrice de $\overline{AB}$ où $L \cap \overline{AB} = \{F\}$
   (Le centre du cercle appartient à la médiatrice de la corde $\overline{AB}$).
3. D'un point quelconque M de la droite L, trace un cercle de centre M et de rayon MA. Ce cercle passera par le point B.
4. D'un autre point quelconque M_1 de la droite L, trace un cercle de centre M_1 et de rayon MA_1, Ce cercle passera aussi par le point B.
5. Répète le travail précédent en choisissant d'autres points et observe la figure obtenue :

*Remarque que : **Pour tout point choisi comme centre du cercle, on peut tracer un seul cercle passant par les deux points A et B***

✍ Quel est le nombre de points de la droite L ? Quel est le nombre de cercles qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?

✍ Quelle est la longueur du rayon du plus petit cercle qu'on peut tracer passant par les deux points A et B ?

✍ Deux cercles différents peuvent-ils se couper en plus de deux points ?

De ce qui précède, on déduit que :

1. On peut tracer une infinité de cercles passant par deux points donnés comme A et B.
2. La longueur du rayon du plus petit cercle qu'on peut tracer passant par les deux points A et B est égale à $\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$.
3. Deux cercle différents ne peuvent pas se couper en plus que deux points.

Pour t'entraîner :

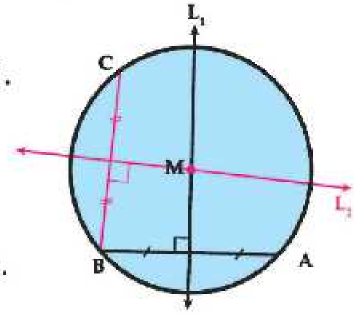
Utilise les instruments géométriques pour tracer un segment $\overline{AB}$ de longueur 4 cm. Sur une même figure, trace :

1. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 5 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?
2. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 2 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?
3. un cercle passant par les deux points A et B de longueur de diamètre 3 cm. Quel est le nombre de cercles possibles dans ce cas ?

[3] Tracer un cercle passant par trois points donnés :

Hypothèses : **A, B et C sont sont trois points donnés d'un plan.**

Conclusion : Tracer un cercle M passant par les trois points A, B et C.

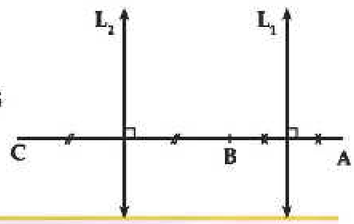


Construction :

1. Trace la droite L_1 médiatrice de $\overline{AB}$. Donc $M \in L_1$.
2. Trace la droite L_2 médiatrice de $\overline{BC}$. Donc $M \in L_2$.
3. Si $L_1 \cap L_2 = \{M\}$. Trace un cercle de centre M et de rayon MA. Ce cercle passera par les deux points A et B.
4. Si $L_1 \cap L_2 = \phi$, peux-tu déterminer la position du point M ? Explique ta réponse.

Remarque que :

Si A, B, et C sont trois points alignés, alors $L_1 // L_2$ et $L_1 \cap L_2 = \phi$
Dans ce cas, on ne peut pas tracer un cercle passant par les trois points A, B et C.



De ce qui précède, on déduit que :

Par trois points non alignés passe un et un seul cercle.

Pour t'entraîner :

Utilise les instruments géométriques pour tracer un triangle ABC tel que AB = 4 cm, BC = 5 cm et CA = 6 cm, puis trace le cercle passant par les points A, B et C. Quelle est la nature de ce triangle par rapport à ses angles ? Où se trouve le centre du cercle par rapport au triangle ?

Résultats

Résultat (1)

Le cercle passant par les sommets d'un triangle est appelé «un cercle circonscrit au triangle .

On dit qu'un triangle est inscrit dans un cercle si les sommets du triangle sont situés sur le cercle.

Résultat (2)

Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un seul point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle

4-4 Relation entre les cordes d'un cercle et son centre

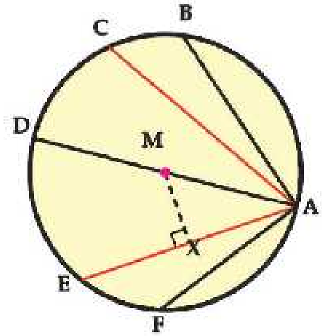
A apprendre

- ☆ Déduire la relation entre les cordes d'un cercle et son centre
- ☆ Résoudre des problèmes sur la relation entre les cordes d'un cercle et son centre

Expressions de base :

- ☆ des cordes de même longueur
- ☆ cercles superposables

Réfléchis et discute



Dans la figure ci-contre :

A est un point du cercle M. On trace les cordes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ et $\overline{AF}$.

1. Quelle est la relation entre la longueur d'une corde et la distance entre cette corde et le centre du cercle.
2. Si deux cordes sont de même longueur, que peux-tu déduire ?
3. Si des cordes sont équidistantes du centre du cercle, à quoi peux-tu t'attendre ?

Remarque que :

Dans le cercle M de longueur de rayon r, la distance de la corde $\overline{AE}$, au centre du cercle est MX où X est le milieu de $\overline{AE}$

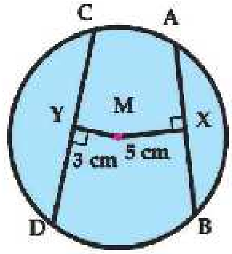
On a : $(MX)^2 + (AX)^2 = (AM)^2 = r^2$ **(constante)**

Donc :

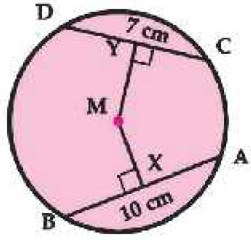
La corde la plus proche du centre a la plus grande longueur et réciproquement.

Pour t'entraîner :

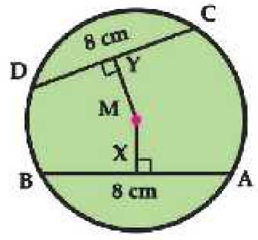
1. **Complète en utilisant les signes (> , < ou =) :**



A B .... C D



M X .... MY



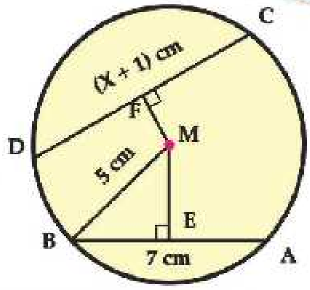
M X .... MY

Al-Ahram Commercial Press ACP

2 **Dans la figure ci-contre, M F < M E.** *Complète* :

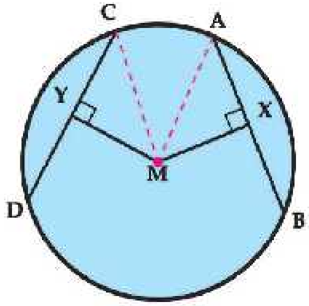
$\because$ M F < M E
$\therefore$ X + 1 > ....
$\because$ $\overline{CD}$ est une corde du cercle M
$\therefore$ X $\leqslant$.........
Donc: X $\in$ ....

$\therefore$ C D > ....
X > ....
$\therefore$ C D $\leqslant$ ....
d'où .... < X $\leqslant$ ....



Théorème

Dans un cercle, les cordes ayant la même longueur sont équidistantes du centre du cercle.



Hypothèses : A B = C D, $\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{CD}$

Conclusion : Démontre que M X = MY.

Construction: On trace $\overline{MA}$, $\overline{MC}$.

Démonstration : $\because$ $\overline{MX} \perp \overline{AB}$ $\quad\therefore$ $AX = \frac{1}{2} AB$.

$\because$ $\overline{MY} \perp \overline{CD}$ $\quad\therefore$ $CY = \frac{1}{2} CD$.

$\because$ A B = C D $\therefore$ A X = CY.

$\because$ Dans les deux triangles AXM et CYM, on a :

$$\begin{cases} AM = CM \\ m(\angle AXM) = m(\angle CYM) = 90° \\ AX = CY \quad \text{(démontré)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\Delta AXM \equiv \Delta CYM$ d'où : M X = MY **(Ce qu'il fallait démontrer)**

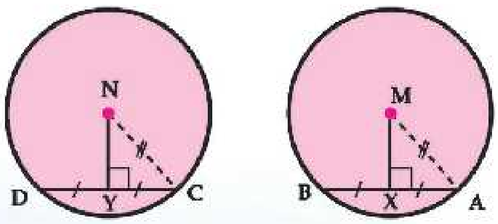
Corollaire

Dans les cercles superposables, les cordes ayant la même longueur sont équidistantes de leurs centres

Dans la figure ci-contre :

Les deux cercles M et N sont superposables, AB = CD,

$\overline{MX} \perp \overline{AB}$, $\overline{NY} \perp \overline{CD}$. Démontre que M X = NY.



Pour t'entraîner :

Observe chaque figure puis complète :

A *Si :*

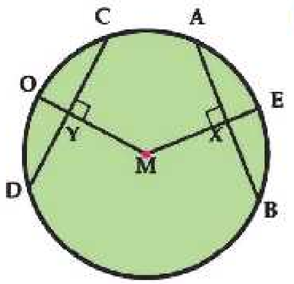
$AB = CD$,

alors :

$MX = \ldots\ldots\ldots$

$\because$ $ME = \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ $EX = \ldots\ldots\ldots$



B *Si :*

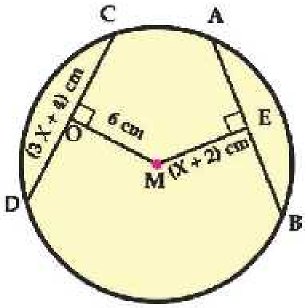
$AB = CD$,

alors :

$ME = \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ $X = \ldots\ldots\ldots$ cm,

$CD = \ldots\ldots\ldots$ cm



C *Si :*

$AB = CD$,

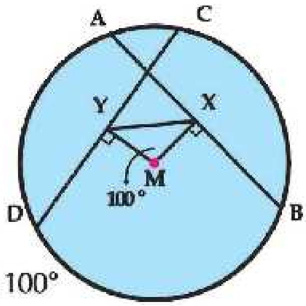
alors :

$MX = \ldots\ldots\ldots$

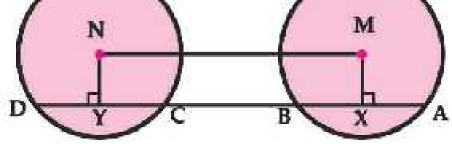
Dans $\Delta\, MXY$:

$\because$ $m(\angle XMY) = 100°$

$\therefore$ $m(\angle MXY) = \ldots\ldots\ldots°$



D

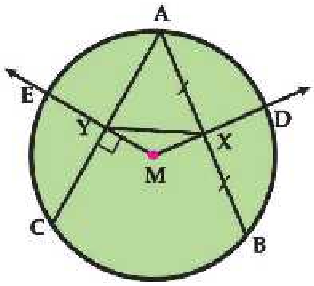


Si : M et N sont deux cercles superposables et $AB = CD$,

alors : $MX = \ldots\ldots\ldots\ldots$

et la figure MXYN ....

Exemple 1



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux cordes de même longueur dans un cercle M, X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overrightarrow{MX}$ coupe le cercle en D. $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ qui le coupe en Y et qui coupe le cercle en E.

Démontre que : [1]: $XD = YE$.

[2]: $m(\angle YXB) = m(\angle XYC)$

Hypothèses : $AB = AC$, X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$

Conclusion : Démontre que :

[1]: $XD = YE$ [2]: $m(\angle YXB) = m(\angle XYC)$

Démonstration : $\because$ X est le milieu de $\overline{AB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$.

$\because$ $AB = AC$, $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ $MX = MY$

$\because$ $MD = ME = r$

$\therefore$ $MD - MX = ME - MY$ $\therefore$ $XD = YE$ **(Ce qu'il fallait démontrer en 1)**

Dans le $\Delta\, MXY$ $\because$ $MX = MY$ $\therefore$ $m(\angle YXM) = m(\angle XYM)$ (1)

$\because$ $\overrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$, $\overrightarrow{MY} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ $m(\angle MXB) = m(\angle MYC) = 90°$ (2)

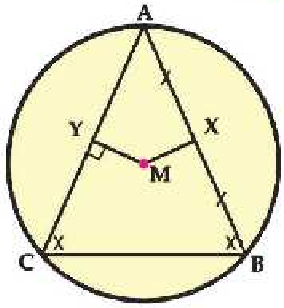
De (1) et (2) on a $m(\angle YXB) = m(\angle XYC)$ **(Ce qu'il fallait démontrer en 2)**

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle inscrit dans un cercle M tel que :

m ($\angle$ B) = m ($\angle$ C), X est le milieu de $\overline{AB}$, $\overline{MY} \perp \overline{AC}$.

Démontre que : M X = MY



Réciproque du théorème

Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les cordes équidistantes du centre sont de même longueur.

Pour t'entraîner :

Observe chaque figure, puis complète :

1

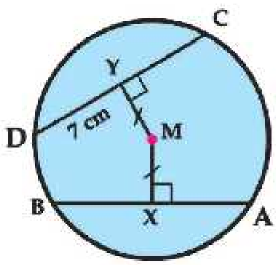
Si :

M X = MY et

Y D = 7 cm,

alors :

A B = ... cm



2

Si :

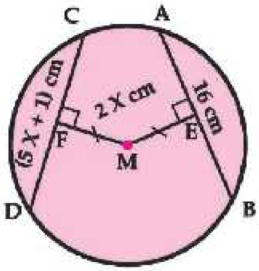
M E = M F,

alors :

C D = ...

∴ X = ...,

E M = ... cm , A M = ... cm



3

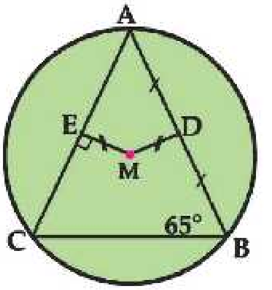
Si :

M D = M E et

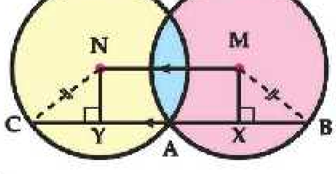
m ($\angle$ B) = 65°,

alors :

m ($\angle$ A) = ...°



4



∵ $\overleftrightarrow{MN}$ // $\overleftrightarrow{BC}$ ∴ M X = ...

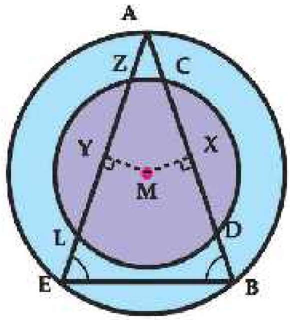
∵ Les deux cercles M et N ....,

A ∈ $\overline{BC}$ ∴ A B = ...

Examples

2 Soient deux cercles concentriques de centre M, $\overline{AB}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en C et D. $\overline{AE}$ est une corde du grand cercle qui coupe le petit cercle en Z et L

Si m($\angle$ABE) = m($\angle$AEB), ***démontre que :*** CD = ZL.



Solution

Hypothèses : m ($\angle$ A B E) = m ($\angle$ A E B)

Conclusion : Démontrer que C D = Z L

Construction: On trace $\overline{MX} \perp \overline{AB}$ et $\overline{MY} \perp \overline{AE}$

Démonstration : Dans le triangle ABC : $\because$ m($\angle$ A B E) =m ($\angle$ A E B) $\therefore$ A B = A E.

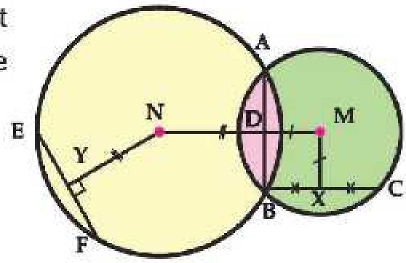
Dans le grand cercle, AB = AE. (démontré) $\therefore$ MX = MY (théorème)

$\because$ Dans le petit cercle MX = MY: (démontré)

$\therefore$ CD = ZL ((réciproque du théorème)) **(Ce qu'il fallait démontrer)**

3 **Dans la figure ci-contre :** les deux cercle M et N sont sécants en A et B, $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = {D}, X est le milieu de $\overline{BC}$, $\overline{NY} \perp \overline{EF}$,

M X = M D, NY = N D. ***Démontre que :*** B C = E F.



Solution

Hypothèses : X est le milieu de $\overline{BC}$, $\overline{NY} \perp \overline{EF}$, MX = MD et NY = ND.

Conclusion : Démontre que BC = EF.

Démonstration : $\because$ $\overleftrightarrow{MN}$ est la droite des centres des cercles et $\overline{AB}$ est une corde commune de deux cercles M et N.

$\therefore$ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

Dans le cercle M: $\because$ X est le milieu de $\overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$

$\because$ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$, $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, MX = MD

$\therefore$ BC = AB (réciproque du théorème) **(1)**

Dans le cercle N : $\because$ $\overline{NY} \perp \overline{EF}$, $\overline{ND} \perp \overline{AB}$ et NY = ND

$\therefore$ EF= AB (réciproque du théorème) **(2)**

De (1) et (2), on a : BC = EF

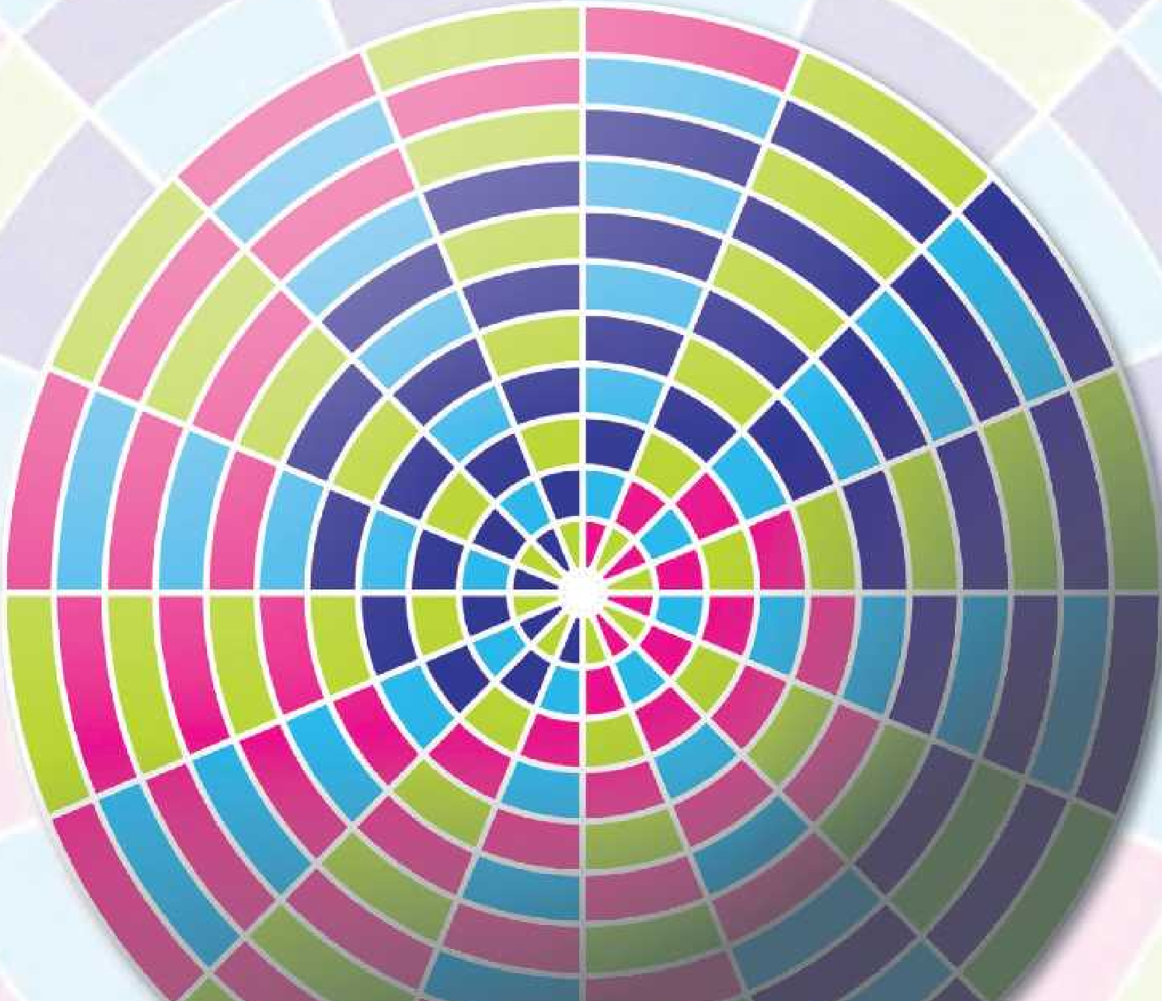
Réfléchis

Soient M et N deux cercles superposables et sécants en A et B.
La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est-elle la médiatrice de $\overline{MN}$?

Géométrie

Unité 5:

Les angles et les arcs dans le cercle



5-1

Angle au centre et mesure de l'arc

A apprendre :

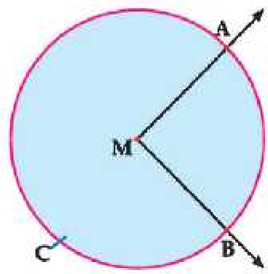
- ☆ La notion de la longueur d'un arc.
- ☆ La notion de la mesure d'un arc.
- ☆ Comment trouver la relation entre les cordes d'un cercle et ses arcs.

Expressions de base

- ☆ Angle au centre
- ☆ Angle inscrit
- ☆ Arc
- ☆ Deux arcs adjacents
- ☆ Mesure d'un arc
- ☆ Une corde
- ☆ Une tangente

Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre:



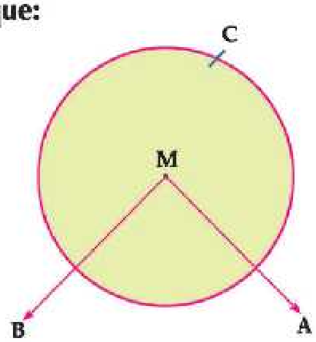
Les deux côtés de l'angle $\angle$ AMB partagent le cercle en deux arcs:

1. Le petit arc AB qu'on notera $\overset{\frown}{AB}$.
2. Le grand arc ACB qu'on notera $\overset{\frown}{ACB}$.

- ♦ Quelles sont les positions des points de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à l'angle $\angle$ AMB ?
- ♦ Quelles sont les positions des points de l'arc $\overset{\frown}{ACB}$ par rapport à l'angle rentrant $\angle$ AMB ?
- ♦ Si $\angle$ AMB est un angle plat, que remarqueras-tu?

Dans un cercle	**Un angle au centre est un angle ayant pour sommet le centre du cercle et dont les côtés portent deux rayons**

Dans la figure ci-contre, on remarque que:

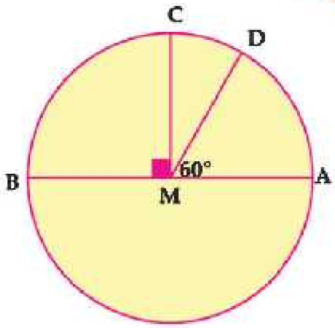


1. $\angle$AMB est un angle au centre qui intercepte $\overset{\frown}{AB}$ tandis que l'angle au centre rentrant $\angle$ AMB intercepte $\overset{\frown}{ACB}$.
2. Si l'angle $\angle$ AMB est un angle plat, ($\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M), alors $\overset{\frown}{AB}$ superpose $\overset{\frown}{ACB}$ à l'arc ACB et dans ce cas chacun des deux arcs est appelé «un demi cercle».

La mesure d'un arc	**d'un cercle est la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.**

Dans la figure ci-contre:

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, $\overline{MC} \perp \overline{AB}$ et m ($\angle$ AMD) = 60°



On remarque que :

1. m $\overset{\frown}{AD}$ = m ($\angle$ AMD) = 60°
2. m $\overset{\frown}{CB}$ = m ($\angle$ CMB) = 90°
3. m ($\overset{\frown}{DC}$) = m ($\angle$ DMC) = 30° *(Pourquoi ?)*
4. m $\overset{\frown}{AB}$ = m ($\angle$ AMB) = 180°

D'où La mesure d'un demi cercle = 180° et la mesure d'un cercle = 360°

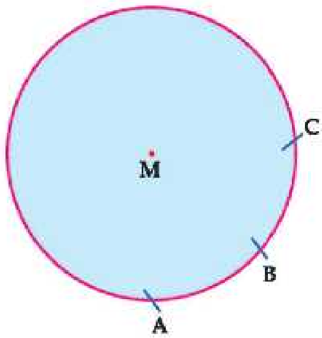
Deux arcs adjacents	**sont deux arcs ayant un et un seul point en commun.**

La figure ci-contre, montre les deux arcs adjacents $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$:

Dans ce cas :

m ($\overset{\frown}{AB}$) + m ($\overset{\frown}{BC}$) = m ($\overset{\frown}{ABC}$)

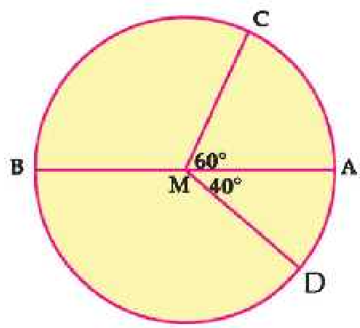
, m ($\overset{\frown}{AB}$) = m ($\overset{\frown}{ABC}$) - m ($\overset{\frown}{BC}$)



Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, m ($\angle$ AMC) = 60°, m ($\angle$ AMD)= 40° .



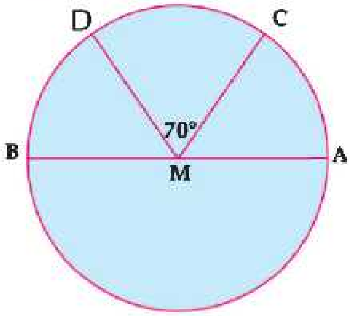
Complète :

1. m ($\overset{\frown}{AD}$) = ...° et m ($\overset{\frown}{AC}$) = ...°
2. m ($\overset{\frown}{CAD}$) = m ($\overset{\frown}{CA}$)+ ....

   = ... + ... = ...°
3. m ($\overset{\frown}{BC}$) = m ($\overset{\frown}{ACB}$) - m (   ) = 180° - .... = ...°

   (Pourquoi ?)
4. m ($\overset{\frown}{DCB}$) = mesure du cercle - m($\overset{\frown}{\quad}$) = ... - .... = ...°

Exemple (1)



Dans la figure ci-contre, m $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M, ($\angle$ CMD) = 70° et m $(\overset{\frown}{AC})$: m $(\overset{\frown}{DB})$ = 5 : 6 *, trouve* m $(\overset{\frown}{ACD})$.

Solution

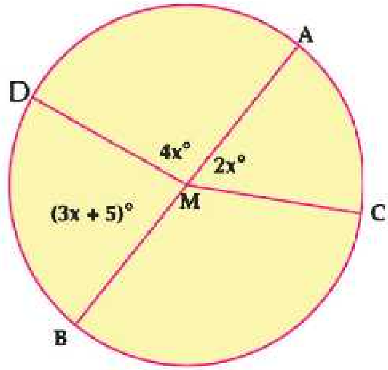
Soit m $(\overset{\frown}{AC}) = 5x$ $\quad\therefore$ m $(\overset{\frown}{DB}) = 6x$

$\because$ m $(\overset{\frown}{ADB})$ = m $(\overset{\frown}{AC})$ + m $(\overset{\frown}{CD})$ + m $(\overset{\frown}{DB})$ = 180°

$\therefore$ $5x + 70° + 6x = 180°$ $\quad 11x = 110°$ $\therefore$ $x = 10°$, m $(\overset{\frown}{AC})$ = 50°

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{ACD})$ = m $(\overset{\frown}{AC})$ + m $(\overset{\frown}{CD})$ = 50° + 70° = 120°

Pour t'entraîner :



Dans la figure ci-contre: $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M.

Obseve la figure puis complète:

1. x = ...
2. m $(\overset{\frown}{AC})$ = ...°
3. m $(\overset{\frown}{AD})$ = ...
4. m $(\overset{\frown}{BC})$ = ... °
5. m $(\overset{\frown}{CAD})$ = ...
6. m $(\overset{\frown}{CBD})$ = ...
7. m $(\overset{\frown}{ACD})$ = ...
8. m $(\overset{\frown}{ADC})$ = ...

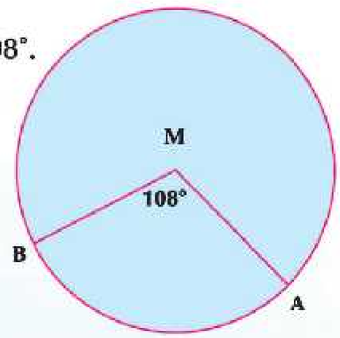
La longueur d'un arc	d'un cercle est une partie du périmètre du cercle qui est proportionnelle à la mesure de l'arc lui-même où Longueur de l'arc = $\dfrac{\text{Mesure de l'arc}}{\text{Mesure du cercle}}$ × le périmètre du cercle

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre :

M est un cercle de 5 cm de longueur de rayon et m $(\overset{\frown}{AB})$ = 108°.

Trouve: la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (prendre π = 3,14)



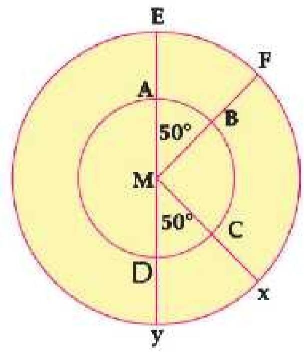
Solution

Longueur de l'arc = $\dfrac{\text{Mesure de l'arc}}{\text{Mesure du cercle}}$ × le périmètre du cercle

$= \dfrac{108}{360} \times 2 \times 3,14 \times 5 = 9,42$cm.

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre: les deux cercles sont concentriques, la longueur du rayon du petit cercle est 7 cm et la longueur du rayon du grand cercle est 14 cm (prendre $\pi = \frac{22}{7}$)



Complète : Dans le petit cercle:

m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{.....})$ = ...°

La longueur de $\overset{\frown}{AB} = \frac{50}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times$ .... = ... cm

La longueur de $\overset{\frown}{CD}$ = ... × .... = ...cm

∴ $\overset{\frown}{AB}$ (superpose à / ne superpose pas à) $\overset{\frown}{CD}$

Dans le grand cercle:

m $(\overset{\frown}{EF})$ = m $(\overset{\frown}{.......})$ = ...° et la longueur de $\overset{\frown}{EF}$ = ... × .... = ... cm

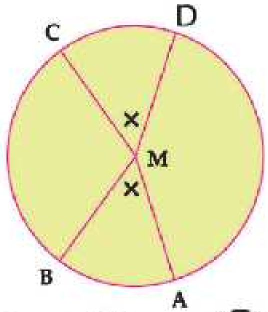
La longueur de $\overset{\frown}{XY}$ = ... × .... = ...cm

∴ $\overset{\frown}{EF}$ (superpose à / ne superpose pas à) $\overset{\frown}{XY}$

Est-ce que $\overset{\frown}{AB}$ superpose à $\overset{\frown}{EF}$? Que peux-tu déduire?

Résultats importants:

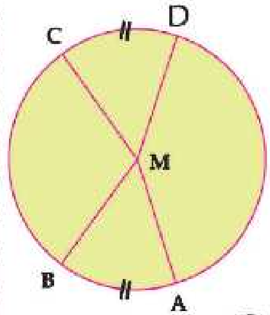
Résultat (1) *Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les arcs de mesure ont même longueur et réciproquement*



Dans le cercle M

Si: m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$

alors: la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = la longueur de $\overset{\frown}{CD}$

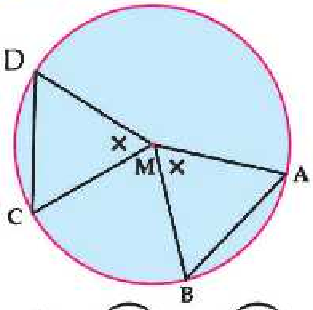


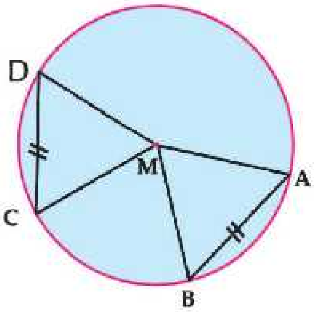
Réciproquement

Si : la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = la longueur de $\overset{\frown}{CD}$

alors : m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$

Résultat (2) *Dans un cercle (ou dans des cercles superposables), les arcs de mesure sous-tendent des cordes de même longueur et réciproquement.*





Si: m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$

alors : la longueur de $\overline{AB}$= la longueur de $\overline{CD}$

Si : AB = CD

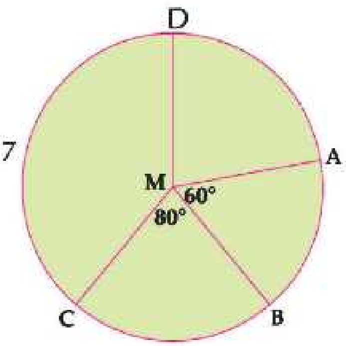
alors : m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{CD})$

Pour t'entraîner :

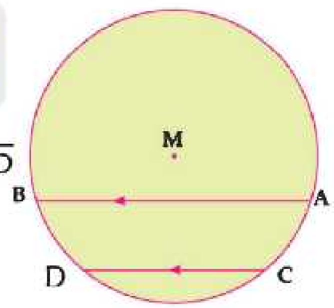
Dans la figure ci-contre:

m $(\overset{\frown}{AB})$ = 60° et m $(\overset{\frown}{BC})$ = 80° , m $(\overset{\frown}{AD})$: m $(\overset{\frown}{DC})$ = 4 : 7

1. Cite les arcs ayant la même mesure.
2. Cite les arcs ayant la même longueur.
3. Trace les cordes ayant la même longueur.



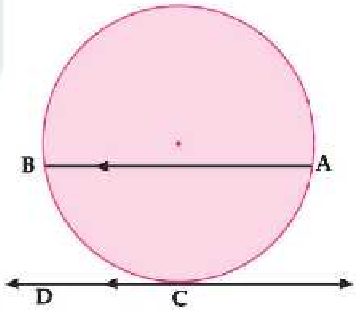
Résultat (3) *Dans un cercle, les arcs compris entre deux cordes parallèles ont même mesure*



Si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes dans le cercle M, telles que $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

alors m $(\overset{\frown}{AC})$ = m $(\overset{\frown}{BD})$.

Résultat (4) *Dans un cercle, les arcs compris entre une corde et une tangente qui lui est parallèle ont même mesure*



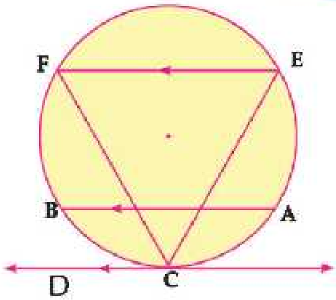
Si $\overline{AB}$ est une corde dans le cercle M et $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente telles que $\overline{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ **alors** m $(\overset{\frown}{AC})$ = m $(\overset{\frown}{BD})$.

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

M est un cercle, $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente au cercle en C , $\overline{AB}$ et $\overline{EF}$ sont deux cordes du cercle telles que $\overline{AB} // \overline{EF} // \overleftrightarrow{CD}$

Complète ce qui suit pour démontrer que CE = CF



Solution

$\because$ $\overline{AB} // \overline{EF}$ $\qquad$ $\therefore$ m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ (1)

$\because$ La tangente $\overleftrightarrow{CD} // \overline{AB}$ $\qquad$ $\therefore$ m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ (2)

De (1) et (2):

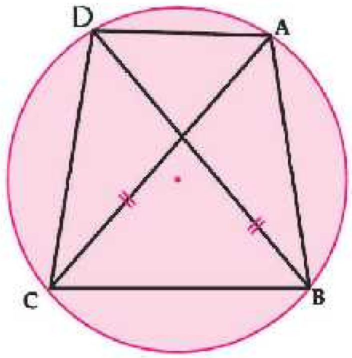
$\therefore$ m $(\overset{\frown}{EC})$ = m $(\overset{\frown}{\ldots\ldots})$ $\qquad$ $\therefore$ CE = ...

Exemple (3)

Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle tel que AC = BD, AB = (3x - 5) cm et CD = (x + 3) cm.

Trouve la longueur de $\overline{AB}$ en justifiant ta réponse.



Solution

Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle, AC = BD , AB = (3x - 5) cm et CD= (X + 3) cm

Conclusion : Trouver la longueur de $\overline{AB}$.

Démonstration : $\because$ AC = BD Hypothèse $\qquad$ $\therefore$ m $(\overset{\frown}{ABC})$ = m $(\overset{\frown}{BCD})$

$\therefore$ m $(\overset{\frown}{ABC})$ - m $(\overset{\frown}{BC})$ = m $(\overset{\frown}{BCD})$ - m $(\overset{\frown}{BC})$

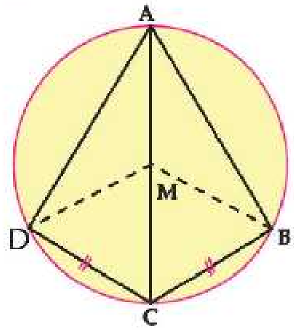
$\therefore$ m $(\overset{\frown}{AB})$ = m $(\overset{\frown}{DC})$ $\qquad$ $\therefore$ AB = CD

$\because$ AB = CD $\qquad$ $\therefore$ 3x - 5 = x + 3

2x = 8 $\qquad$ $\therefore$ x = 4

$\because$ AB = 3x - 5 $\qquad$ $\therefore$ AB = 3 × 4 - 5 = 7cm

Exemple (4)



Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère inscrit dans le cercle, $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle et CB = CD.

Démontre que $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AD})$

Solution

Hypothèses: $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle et CB = CD

Conclusion : $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AD})$

Démonstration : $\because$ CB = CD hypothèse $\therefore$ $m(\overset{\frown}{CB}) = m(\overset{\frown}{CD})$ (1)

$\because$ $\overline{AC}$ est un diamètre du cercle

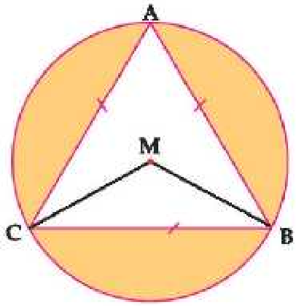
$\therefore$ $m(\overset{\frown}{AB}) = 180° - m(\overset{\frown}{CB})$, $m(\overset{\frown}{AD}) = 180° - m(\overset{\frown}{CD})$ (2)

De (1) et (2) on a $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{AD})$

5-2

Relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc

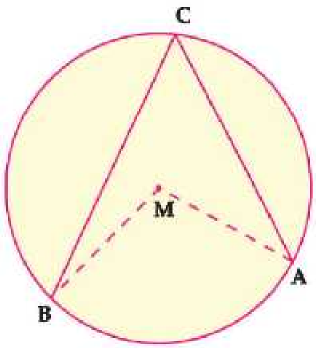
Réfléchis et discute



Dans la figure ci-contre :
le cercle M passe par les sommets du triangle équilatéral ABC.

- Quelle est la mesure de l'angle au centre ∠ BMC? **Justifie ta réponse.**
- Quel est le sommet de ∠ BAC?
  Est-ce que ce sommet appartient à l'ensemble des points du cercle M ?
- Quels sont les côtés de ∠ BAC ?
- Si ∠ BMC est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$, commet peux-tu décrire ∠ BAC ?
- Compare m(∠ BAC) et m (∠ BMC). **Que remarques-tu ?**

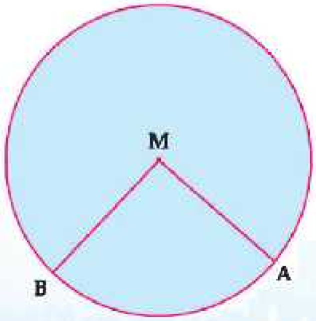
Un angle inscrit est un angle ayant pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle



Dans la figure ci-contre, observe que :

1. ∠ ACB est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
2. tout angle inscrit, il existe un seul angle au centre qui intercepte le même arc.

Réfléchis



Dans la figure ci-contre:

Quel est le nombre d'angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre ∠ AMB?

(Explique ta réponse à l'aide du dessin)

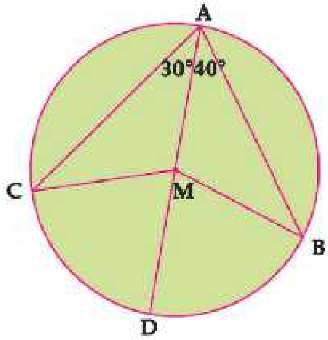
A apprendre :

☆ Comment déduire la relation entre un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc.

Expressions de base

☆ Angle au centre
☆ Angle inscrit

Activité **Dans la figure ci-contre :**



$\overline{AD}$ est un diamètre du cercle M. Observe la figure puis réponds aux questions suivantes:

1. Cite deux paires d'angles ayant la même mesure.
2. Si m (∠ BAD) = 40°, trouve m (∠ BMD) .
3. Si m (∠ CAD) = 30°, trouve m (∠ CMD) .
4. Compare m (∠ BAC) et m (∠ BMC). **Que peux-tu déduire?**

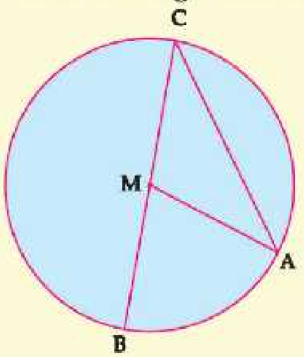
Théorème *Dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre s'ils interceptent le même arc.*

Hypothèses: ∠ ACB et un angle inscrit et ∠ AMB et un angle au centre qui interceptent le même arc.

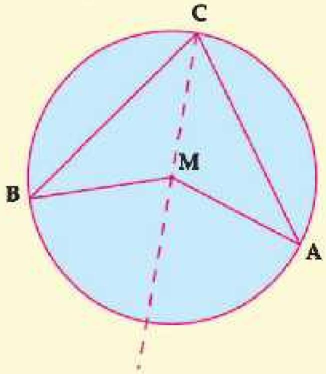
Conclusion : Démontrer que m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB).

Démonstration : **Pour démontrer le théorème, il y a trois cas à étudier .**

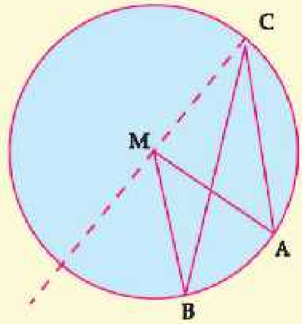
1. Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit.



2. Si M est un point à l'intérieur de l'angle inscrit



3. Si M est un point à l'extérieur de l'angle inscrit



Premier cas : Si M appartient à l'un des côtés de l'angle inscrit.

∵ ∠ AMB est un angle extérieur au triangle AMC

∴ m (∠ AMB) = m (∠ A) + m (∠ C) (1)

∵ AM = CM (rayons) ∴ m (∠ A) = m (∠ C) (2)

De (1) **et** (2) **on déduit que** m (∠ AMB = 2 m (∠ C)

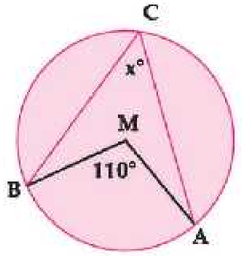
∴ m (∠ ACB) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB) *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Activité

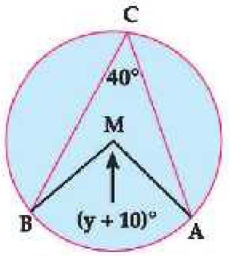
Démontre le théorème dans les deux autres cas puis garde le résultat dans ton portfolio.

Pour t'entraîner :

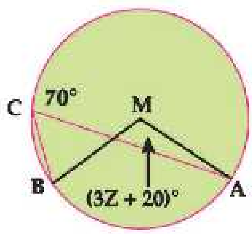
Dans chacune des figures suivantes, M est un cercle. Trouve la valeur du symbole utilisé comme mesure d'angle :

1


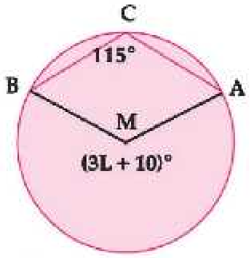
X = ...

2


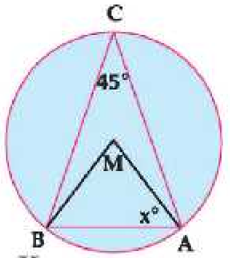
Y = ...

3


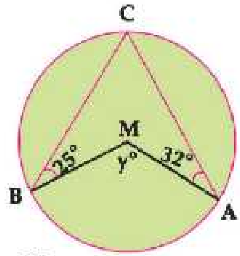
Z = ...

4


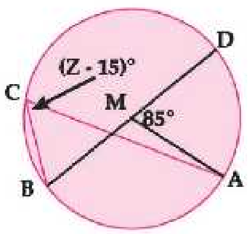
L = ...

5


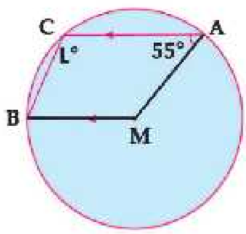
X = ...

6


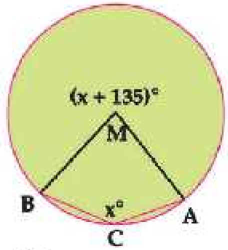
Y = ...

7


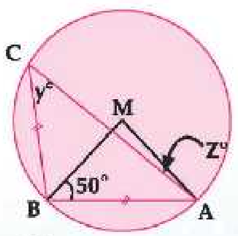
Z = ...

8


L = ...

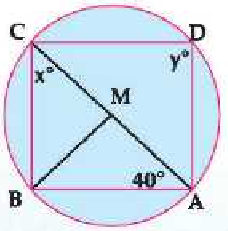
9


X = ...

10


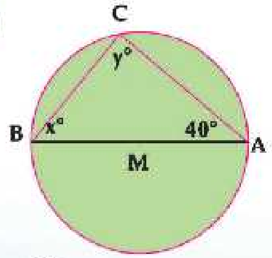
Y = ...

Z = ...

11


X = ...

Y = ...

12


X = ...

Y = ...

Exemple (1)

A est un point à l'extérieur d'un cercle M, $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B, $\overrightarrow{AM}$ coupe le cercle M en C et D respectivement et m(∠A) = 40°. *Trouve* m(∠BDC) en justifiant ta réponse.

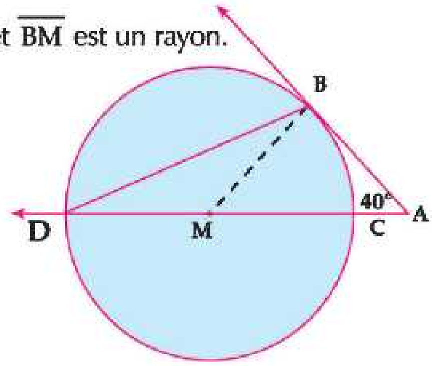
Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B, m(∠A) = 40° ,$\overrightarrow{AM}$ coupe le cercle M en C et D.

Conclusion : m (∠BDC)

Construction: On trace le rayon $\overline{BM}$.

Démonstration : ∵ $\overrightarrow{AB}$ est une tangente au cercle en B et $\overline{BM}$ est un rayon.



∴ m (∠ ABM) = 90°

Dans Δ ABM :

∵ m (∠A) = 40° , m(∠ABM) = 90°

∴ m (∠BMC) = 180° - (40° + 90°) = 50°

∵ ∠BDC est inscrit et ∠BMC est un angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.

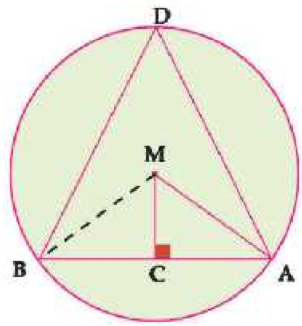
∴ m (∠BDC) = $\frac{1}{2}$ m (∠BMC)

∴ m (∠BDC) = $\frac{1}{2}$ × 50 = 25°   *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre, $\overline{AB}$ est une corde du cercle M, $\overline{MC} \perp \overline{AB}$.

Démontre que: m (∠AMC) = m (∠ADB)



Solution

On trace $\overline{BM}$, *Complète :* Dans le Δ MAB :

∵ MA= MB , $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

∴ m (∠ AMC) = m (∠ ....) = $\frac{1}{2}$ m (∠ ....)   (1)

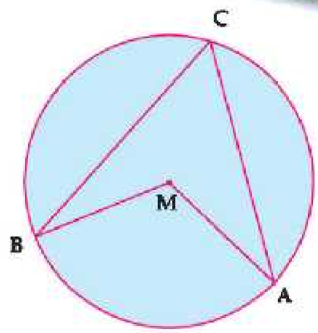
∵ ∠ADB est un angle inscrit et ∠ .... est un angle au centre qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{......}$

∴ m (∠ ....) = $\frac{1}{2}$ m (∠........)   (2)

De (1) et (2) on déduit que: m (∠AMC) = m (∠........) .

Al Ahram Commercial Press ACP

Résultat (1) *La mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc qui le sous-tend*

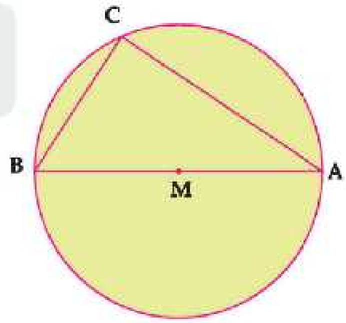


Dans la figure ci-contre :

$m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\angle AMB)$ et $m(\angle AMB) = \widehat{AB}$

$\therefore\; m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$

Résultat (2) *Un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est un angle droit.*



Donc: l'arc qui sous-tend l'angle inscrit est égal à un demi-cercle,

alors **alors:** $m(\angle C) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$

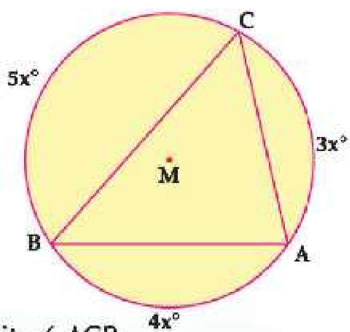
$\because\; m(\widehat{AB}) = 180°$ $\qquad\therefore\; m(\angle C) = 90°$

Think

- **Quelle est** la nature d'un angle inscrit qui intercepte un arc plus petit qu'un demi-cercle ? Pourquoi?
- **Quelle est** la nature d'un angle inscrit qui intercepte un arc plus grand qu'un demi-cercle ? Pourquoi?
- **Est-ce qu'** un angle inscrit doit intercepter un arc égal à un demi cercle? **Justifie te réponse.**

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre: ABC est un triangle inscrit dans un cercle M, $m(\widehat{AB}) : m(\widehat{BC}) : m(\widehat{AC}) = 4 : 5 : 3$. *Trouve* $m(\angle ACB)$:



Solution

Soient: $m(\widehat{AB}) = 4x°$, $m(\widehat{BC}) = 5x°$ et $m(\widehat{AC}) = 3x°$

$\therefore\; 4x + 5x + 3x = 360°$

$12x = 360°$ $\qquad\therefore\; x = 30°$

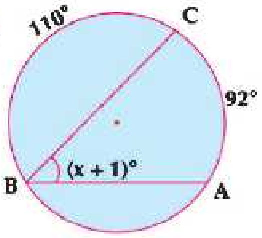
$\therefore\; m(\widehat{AB}) = 4 \times 30° = 120°$ et l'arc AB sous-tend l'angle inscrit $\angle ACB$.

$\because\; m(\angle ACB) = \frac{1}{2}\, m(\widehat{AB})$ $\;\therefore\; m(\angle ACB) = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ *Ce qu'il fallait démontrer.*

Pour t'entraîner :

Observe chacune des figures suivantes puis complète:

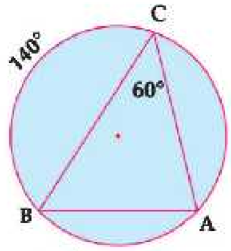
1



x = ...

m $(\overset{\frown}{AB})$ = ...

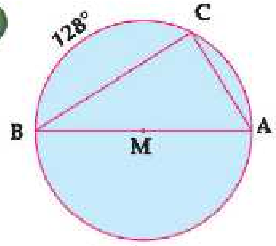
2



m (∠ A) = ...

m $(\overset{\frown}{AC})$ = ...

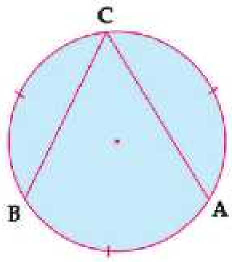
3



m (∠ C) = ...

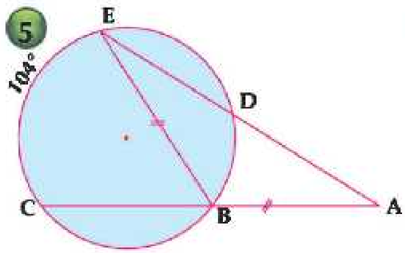
m (∠ B) = ...

4



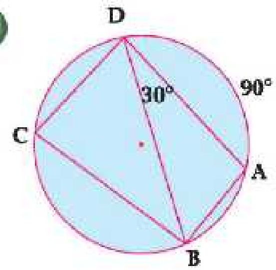
m (∠ C) = ...

5



m (∠ EAC) = ...

6



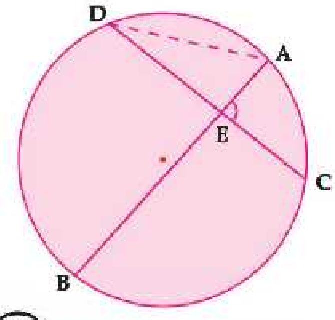
m (∠ DCB) = ...

Exemple (3)

Problème type (1)

Si deux cordes se coupent à l'intérieur d'un cercle, la mesure de l'angle qu'elles forment entre elles est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par cet angle.

Solution



Hypothèses: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

Conclusion: m (∠AEC) = $\frac{1}{2}$ [m $(\overset{\frown}{AC})$ + m $(\overset{\frown}{BD})$]

Construction: On trace $\overline{AD}$

Démonstration: ∵ ∠AEC est un angle extérieur au Δ AED .

∵ m (∠AEC) = m (∠D) + m (∠A) = $\frac{1}{2}$ m $(\overset{\frown}{AC})$ + $\frac{1}{2}$ m$(\overset{\frown}{BD})$

= $\frac{1}{2}$ [m $(\overset{\frown}{AC})$ + m $(\overset{\frown}{BD})$] .

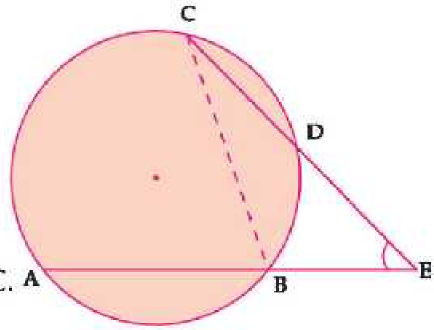
Ce qu'il fallait démontrer

Al-Alamn Commercial Press ACP

Exemple (4)

Problème type (2)

Si deux rayons portant deux cordes se coupent à l'extérieur d'un cercle, la mesure de l'angle qu'elles forment entre elles est égale à la demi-différence des mesures des arcs interceptés par cet angle.



Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{E\}$

Conclusion : $m(\angle E) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{BD})]$

Construction : On trace $\overline{BC}$.

Démonstration : $\because$ $\angle$ ABC est un angle extérieur au Δ BEC.

$\therefore$ $m(\angle ABC) = m(\angle E) + m(\angle BCD)$

$\therefore$ $m(\angle E) = m(\angle ABC) - m(\angle BCD)$

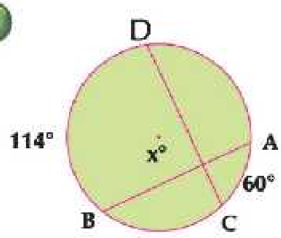
$= \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AC}) - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{BD})$

$= \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{BD})]$ *Ce qu'il fallait démontrer*

Pour t'entraîner :

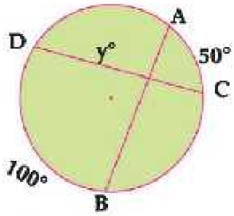
Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé comme mesure d'angle :

1



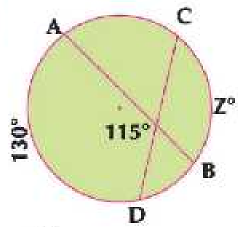
X = ...

2



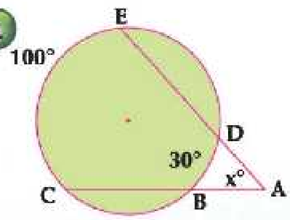
Y = ...

3



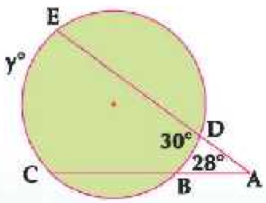
Z = ...

4



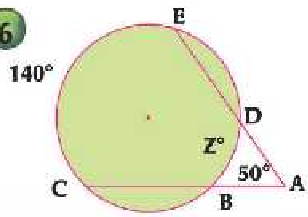
X = ...

5



Y = ...

6



Z = ...

Exemple (5) **Dans la figure ci-contre:**

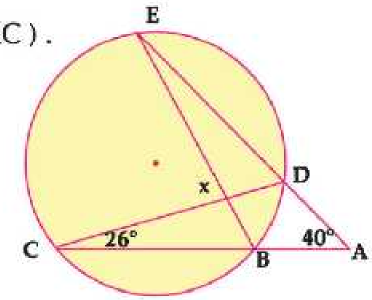
$\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$, m ($\angle$ A) = 40°, $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$ et m ($\angle$ BCD) = 26°

Trouve : **A** m ($\overset{\frown}{CE}$) **B** m ($\angle$ EXC) .

Solution

Hypothèses: $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$, m ($\angle$ A) = 40°, $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$, m ($\angle$ BCD) = 26°

Conclusion : **A** m ($\overset{\frown}{CE}$) **B** m ($\angle$ EXC) .



Démonstration : $\because$ m ($\angle$ BCD) = 26°

$\therefore$ m ($\overset{\frown}{BD}$) = 2m ($\angle$ BCD) = 52°

$\because$ $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$

$\therefore$ m ($\angle$ A) = $\frac{1}{2}$ [m($\overset{\frown}{CE}$) - m ($\overset{\frown}{BD}$)]

$\therefore$ 40 = $\frac{1}{2}$ [m($\overset{\frown}{CE}$) - 52]

m($\overset{\frown}{CE}$) = 80 + 52 = 132 ° *(Ce qu'il fallait démontrer 1)*

$\because$ $\overline{DC} \cap \overline{BE} = \{X\}$ $\therefore$ m ($\angle$ EXC) = $\frac{1}{2}$ [m($\overset{\frown}{CE}$) + m ($\overset{\frown}{BD}$)]

m ($\angle$ EXC) = $\frac{1}{2}$ [132° + 52°] = $\frac{1}{2}$ × 184° = 92 °

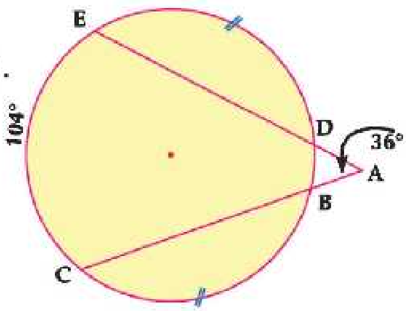
(Ce qu'il fallait démontrer 2)

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

m ($\angle$ A) = 36°, m (EC) = 104°, m ($\overset{\frown}{BC}$) = m ($\overset{\frown}{DE}$)

Trouve : **A** m ($\overset{\frown}{BD}$) **B** m ($\overset{\frown}{DE}$) .



Solution

Complète: $\because$ $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{ED} = \{A\}$

$\therefore$ m ($\angle$ A) = $\frac{1}{2}$ [.......................................]

$\therefore$ 36 = $\frac{1}{2}$ [.......................................]

$\therefore$ m ($\overset{\frown}{BD}$) = ... *(Ce qu'il fallait démontrer 1)*

$\because$ m ($\overset{\frown}{DE}$) +m ($\overset{\frown}{BC}$) = 360° - (......... + ...) = ...

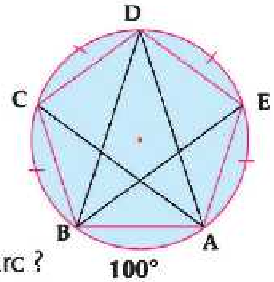
$\because$ m ($\overset{\frown}{DE}$) = m ($\overset{\frown}{BC}$) $\therefore$ 2 m ($\overset{\frown}{DE}$) =

$\therefore$ m ($\overset{\frown}{DE}$) = ... *(Ce qu'il fallait démontrer 2)*

Al-Ahram Commercial Press ACP

5-3 Les angles inscrits interceptant le même arc

Réfléchis et discute :



Dans la figure ci-contre, m $(\widehat{AB})$ = 100°

- **Est-ce que les angles inscrits** $\angle$AEB , $\angle$ADB et $\angle$ACB interceptent le même arc ?
- *Trouve* m ($\angle$AEB), m ($\angle$ADB) et m ($\angle$ACB).

  Que remarques-tu ?

- Est-ce que les angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure ? **Justifie ta réponse.**

A apprendre :

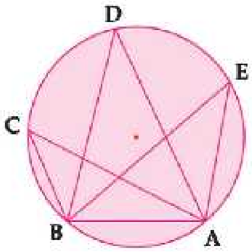
☆ Comment déduire la relation entre les angles inscrits interceptant des arcs de même mesure

Théorèmes 2

Les angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Hypothèses : $\angle$C, $\angle$D et $\angle$E sont des angles inscrits qui interceptent l'arc $\widehat{AB}$.

Conclusion: m ($\angle$C) = m ($\angle$D) = m ($\angle$E)



Démonstration :

$\because$ m ($\angle$C) = $\frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

, m($\angle$D) = $\frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

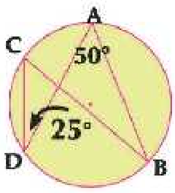
, m ($\angle$E) = $\frac{1}{2}$ m $(\widehat{AB})$

$\therefore$ m ($\angle$C) = m ($\angle$D) = m ($\angle$E)

Pour t'entraîner :

Observe chacune des figures suivantes puis complète :

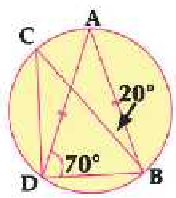
1



m ($\angle$C) = ... °

m ($\angle$ B) = ... °

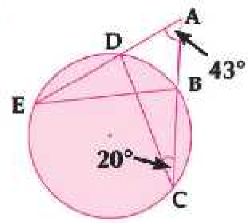
2



m ($\angle$C) = ... °

m ($\angle$ B D C) = ... °

3

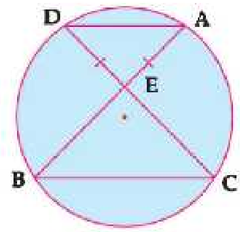


m ($\angle$ BED) = ...°

m ($\angle$ ABE) = ...°

Exemple (1)

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ et EA = ED

Démontre que EB = EC .

Solution

Dans le Δ AED ∵ EA = ED ∴ m ($\angle$D) = m ($\angle$A) (1)

∵ $\angle$ABC , $\angle$ADC sont deux angles inscrits qui interceptent $\overset{\frown}{AC}$ ∴ m ($\angle$B) = m ($\angle$D) (2)

∵ $\angle$DBC , $\angle$ DAB sont deux angles inscrits qui interceptent $\overset{\frown}{BD}$ ∴ m ($\angle$C) = m ($\angle$A) (3)

De (1), (2) **et** (3) **on déduit que** m ($\angle$B) = m ($\angle$C)

Dans le Δ EBC: ∵ m ($\angle$B) = m ($\angle$C) ∴ EB = EC *(Ce qu'il fallait démontrer.)*

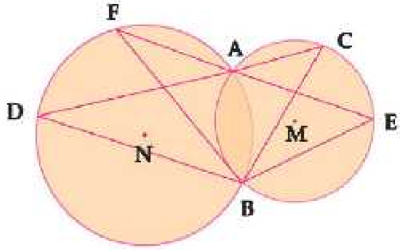
Al-Ahram Commercial Press ACP

Pour t'entraîner :

M et N sont deux cercles sécants en A et B.

$\overleftrightarrow{AC}$ coupe le cercle M en C et le cercle N en D, $\overleftrightarrow{AE}$ coupe le cercle M en E et le cercle N en F.

Démontre que : m ($\angle$EBC) = m ($\angle$FBD)

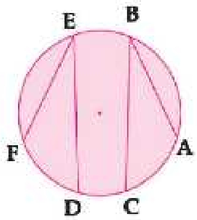


Résultat: *Dans un cercle (ou dans plusieurs cercles), les angles inscrits qui interceptent des arcs de même mesure ont même mesure*

On remarque que :

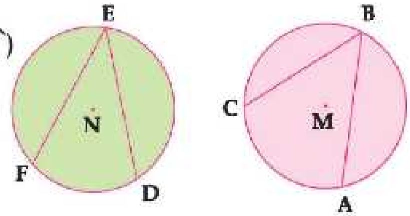
1. Dans le cercle M, si ($\overset{\frown}{AC}$) = m ($\overset{\frown}{DF}$)

   alors m ($\angle$B) = m ($\angle$E)



2. Si M et N sont deux cercles tels que m ($\overset{\frown}{AC}$) = m ($\overset{\frown}{DF}$)

   alors m($\angle$B) = m ($\angle$E)



3 **La réciproque du résultat précédent est vraie d'où :**

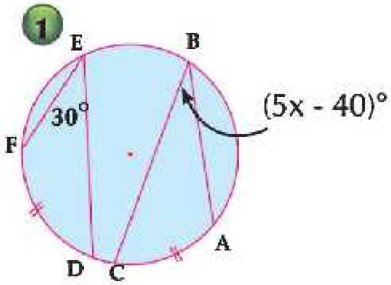
Dans un cercle (ou dans plusieurs cercles), les angles inscrits qui ont même mesure interceptent des arcs de même mesure..

Réfléchis :

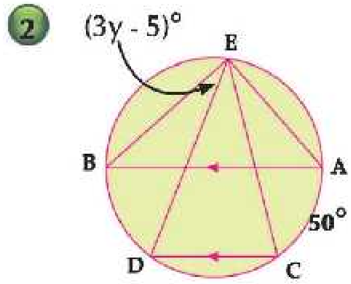
Si les arcs compris entre deux cordes qui ne se coupent pas à l'intérieur du cercle sont de même mesure, les deux cordes sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

Pour t'entraîner :

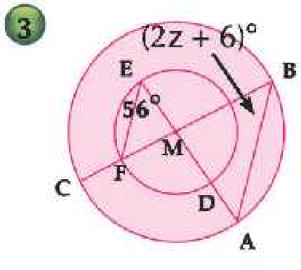
Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :



X = ...



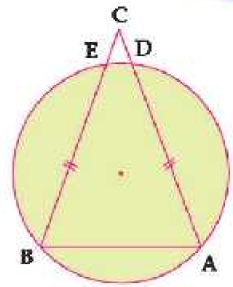
Y = ...



Z = ...

Al-Ahram Commercial Press ACP

Exemple (3)



Dans la figure ci-contre :

$\overline{AD}$ et $\overline{BE}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle, ,

$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE} = \{C\}$. **Démontre que** CD = CE .

Solution

Hypothèses : AD = BE

Conclusion : **Démontrer que** CD = CE

Démonstration : $\because$ AD = BE $\therefore$ m $(\widehat{AD})$ = m $(\widehat{BE})$

En ajoutant m $(\widehat{DE})$ aux deux membres, on déduit que : m $(\widehat{ADE})$ = m $(\widehat{BED})$

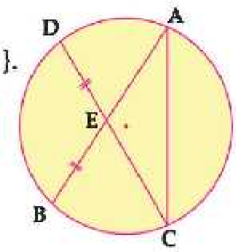
$\therefore$ m $(\angle B)$ = m $(\angle A)$ *(résultat)*

Dans le $\triangle$ ABC $\because$ m $(\angle A)$ = m $(\angle B)$ $\therefore$ A C = BC (1)

$\because$ AD = BE (2)

De (1) et (2) par soustraction, on déduit que CD = CE *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Pour t'entraîner :

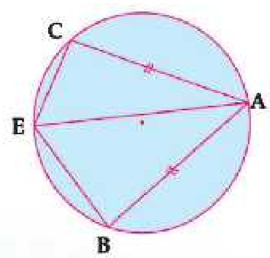


Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont deux cordes de même longueur dans le cercle , $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{ E \}$.

Démontre que le triangle ACE est isocèle.

Pour t'entraîner :



Dans la figure ci-contre :

A B = A C , E $\in \widehat{BC}$

Démontre que : m $(\angle AEB)$ = m $(\angle AEC)$

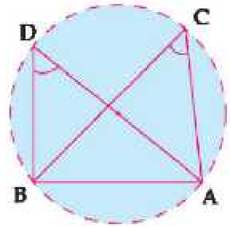
Réfléchis :

Quel est le nombre de bissectrices de $\angle$BEC? Justifie ta réponse.

Réciproque du théorème

Si deux angles de même mesure sont tracés sur une même base et si leurs sommets sont situés d'un même côté de cette base, alors ce sont deux angle inscrits dans un même cercle passant par les extrémités de la base commune.

Dans la figure ci-contre, on observe que :



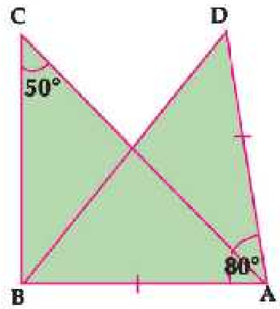
$\angle C$ et $\angle D$ sont tracés sur la base $\overline{AB}$, et d'un même côté de cette base et $m(\angle C) = m(\angle D)$

Donc, par les points A , B , C et D passe un seul cercle dont $\overline{AB}$ est une corde

Exemple (4)

Dans la figure ci-contre, $AB = AD$, $m(\angle A) = 80°$ et $m(\angle C) = 50°$

Démontre que par les points A, B, C et D passe un seul cercle .



Solution

Dans $\triangle ABD$ $\because AB = AD$, $m(\angle A) = 80°$

$\therefore m(\angle D) = m(\angle ABD) = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$

$\because m(\angle D) = m(\angle C) = 50°$

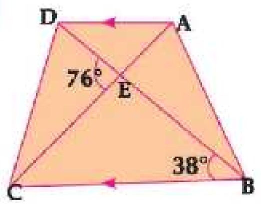
et ce sont deux angles tracés su la base $\overline{AB}$ et d'un même côté de cette base

$\therefore$ par les points A , B , C et D passe un seul cercle. *(Q.E.D.)*

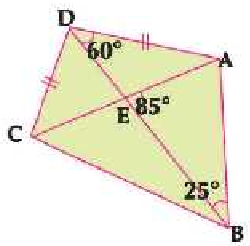
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, peut-on tracer un cercle passant par les points A , B , C et D ? Justifie ta réponse .

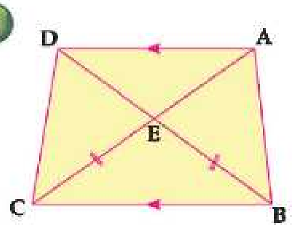
1



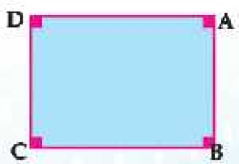
2



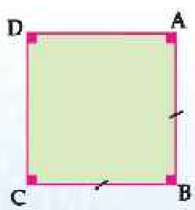
3



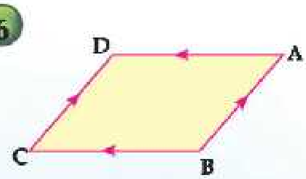
4



5



6



Al Adwaa Commercial Press ACP

5-4

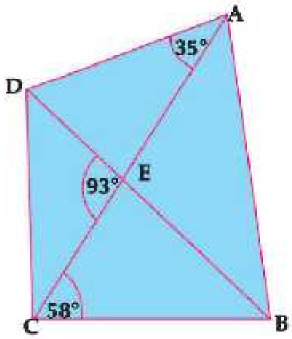
Quadrilatère inscriptible

Réfléchis et discute :

Dans la figure ci-contre

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en E,
m ($\angle$ ACB) = 58° et m($\angle$CAD) = 35°,
m ($\angle$CED) = 93°.

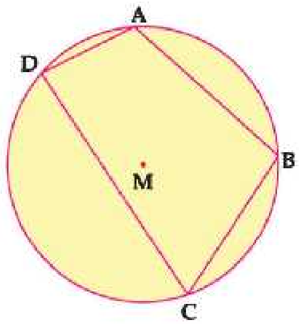
Peut-on tracer un cercle passant par les sommets du quadrilatère ABCD ? Justifie ta réponse.



Un quadrilatère inscriptible	est un quadrilatère dont les quatre sommets appartiennent à un seul cercle.

On remarque que :

1 **le quadrilatère ABCD** est inscriptible car ses sommets A, B, C et D appartiennent au cercle de centre M.

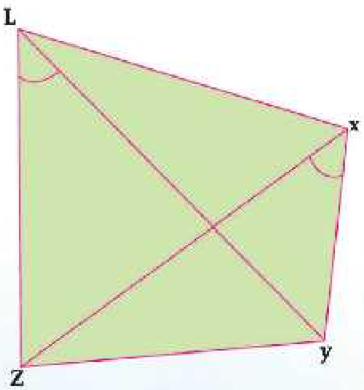


2 **le quadrilatère XYZT est inscriptible car :**

m ($\angle$YXZ) = m ($\angle$YLZ)

et ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{YZ}$ et d'un même côté d'où on peut tracer un cercle passant par les points X, Y, Z et T.

Donc, les sommets du quadrilatère XYZT appartiennent à un seul cercle .



A apprendre :

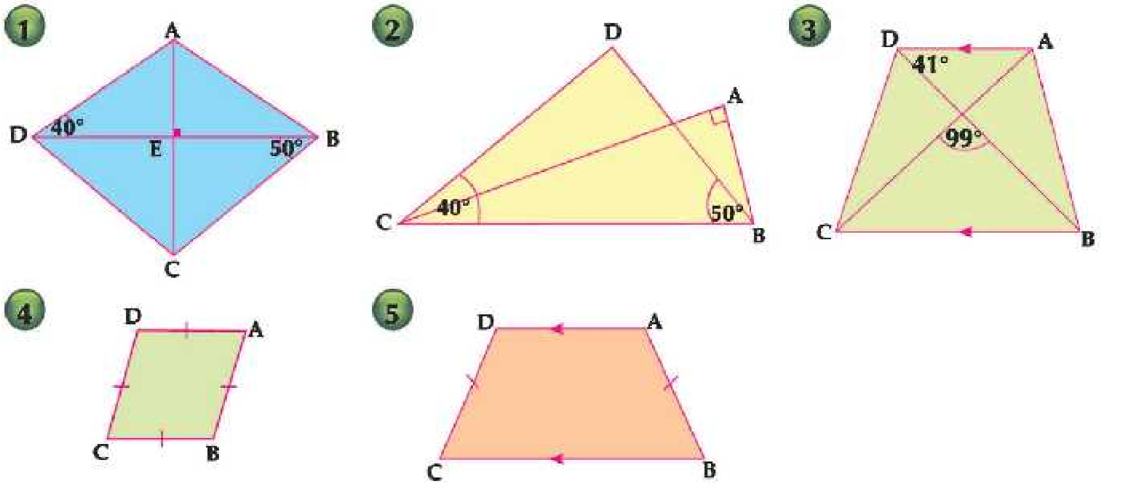
- ☆ La notion d'un quadrilatère inscriptible.
- ☆ Déterminer quand un quadrilatère est inscriptible.

Expressions de base:

- ☆ quadrilatère inscriptible

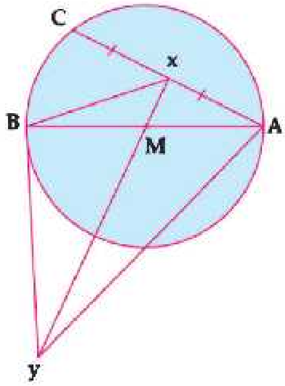
Pour t'entraîner :

Dans les figures suivantes, lesquelles sont des quadrilatères inscriptibles ? Justifie ta réponse :



Exemple (1)

Dans la figure ci-contre



$\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M, X est le milieu de $\overline{AC}$ et $\overrightarrow{XM}$ coupe la tangente au cercle qui passe par le point B en Y.

Démontre que le quadrilatère AXBY est inscriptible

Solution

Hypothèses : $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M, AX = CX et $\overrightarrow{BY}$ est une tangente au cercle en B.

Conclusion : Démontrer que le quadrilatère AXBY est inscriptible

Démonstration : $\because$ X est le milieu de $\overline{AC}$ $\therefore$ $\overline{MX} \perp \overline{AC}$, m ($\angle$ AXY) = 90°

$\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle M , et $\overrightarrow{BY}$ une tangent au cercle en B $\therefore$ $\overrightarrow{BY} \perp \overline{AB}$ et m ($\angle$ ABY) = 90°

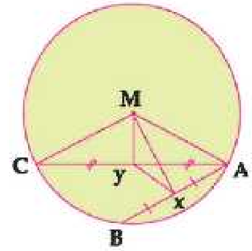
$\because$ m ($\angle$ AXY) = m ($\angle$ ABY) = 90°

et ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{AY}$ et d'un même côté .

$\therefore$ Le quadrilatère AXBY est inscriptible.

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :



M est le centre du cercle, X et Y sont les milieux de $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ respectivement.

Démontre que : (1) AXYM est inscriptible.

(2) m ($\angle$MXY) = m ($\angle$MCy)

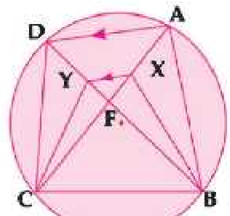
(3) $\overline{AM}$ est un diamètre du cercle passant par les points A, X, Y et M

Exemple (2)

ABCD est un quadrilatère inscriptible dont les diagonales se coupent en F. X ∈ $\overline{AF}$ tels que Y ∈ $\overline{DF}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overline{AD}$.

Démontre que : (1) Le quadrilatère BXYC est inscriptible. (2) m ($\angle$XBY) = m ($\angle$XCY)

Solution



Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscriptible, $\overline{XY}$ // $\overline{AD}$

Conclusion : **Démontrer que :** (1) Le quadrilatère BXYC est inscriptible

(2) m ($\angle$XBY) = m ($\angle$XCY)

Démonstration : ∵ $\overline{XY}$//$\overline{AD}$ ∴ m ($\angle$CAD) = m ($\angle$CXY) *Corresponding*

∵ m ($\angle$CAD) = m ($\angle$CBD) *deux angles inscrits interceptant l'arc* $\overset{\frown}{CD}$

∴ m ($\angle$CXY) = m ($\angle$CBY)

ce sont deux angles tracés sur la base $\overline{CY}$ et d'un même côté

∴ Le quadrilatère BXYC est inscriptible. *(Q.E.D 1)*

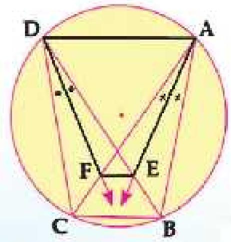
∵ Le quadrilatère BXYC est inscriptible. *(Proof)*

∴ m ($\angle$XBY) = m ($\angle$XCY)

(Ce qu'il fallait démontrer)

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :



ABCD est un quadrilatère tel que :

$\overrightarrow{AE}$ est une bissectrice de l'angle $\angle$BAC et $\overrightarrow{DF}$ est une bissectrice de l'angle $\angle$ BDC, **Démontre que :**

(1) AEFD est un quadrilatère inscriptible.

(2) $\overline{EF}$// $\overline{BC}$.

5-5 Propriétés d'un quadrilatère inscriptible

A apprendre:

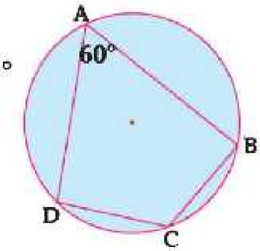
- ☆ Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.
- ☆ Comment résoudre des problèmes sur les Propriétés d'un quadrilatère inscriptible.

Expressions de base:

- ☆ quadrilatère inscriptible

Réfléchis et discute :

Dans la figure ci-contre :



Si m ($\angle$A) = 60°, alors m ($\overset{\frown}{BCD}$) = ...°

♦ m ($\overset{\frown}{BAD}$) = ...°

♦ m ($\angle$BCD) = ...°

♦ m ($\angle$B) = 80° alors m ($\angle$D) = ...

♦ Que remarques tu à propos de la somme de deux angles opposés dans un quadrilatère inscriptible ?

Théorème 3 *Dans un quadrilatère inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires.*

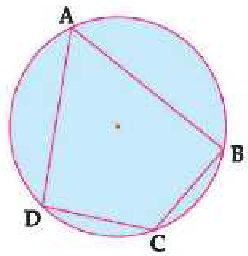
Hypothèses : ABCD est un quadrilatère inscriptible.

Conclusion : **Démontrer que :** (1) m ($\angle$A) + m ($\angle$C) = 180°

(2) m ($\angle$B) + m ($\angle$D) = 180°

Démonstration : $\because$ m ($\angle$A) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{BCD}$)

et m ($\angle$C) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{BAD}$)



$\therefore$ m ($\angle$A) + m ($\angle$C)

$= \frac{1}{2}$ [m ($\overset{\frown}{BCD}$) + m ($\overset{\frown}{BAD}$)]

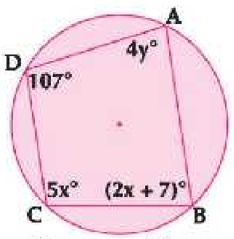
$= \frac{1}{2} \times 360° = 180°$

De même, m ($\angle$B) + m ($\angle$D) = 180°

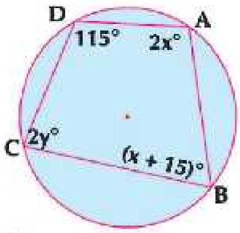
(Ce qu'il fallait démontrer.)

Al-Ahram Commercial Press ACP

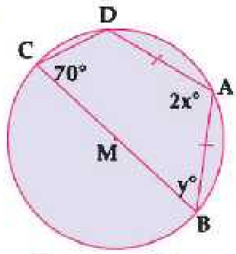
Pour t'entraîner : **Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :**

1


X = ... , Y = ...

2


X = ... , Y = ...

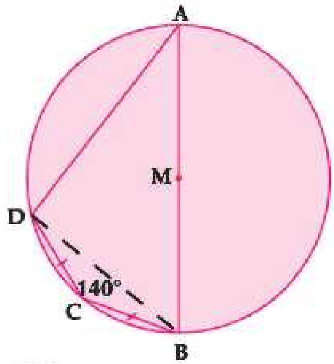
3


X = ... , Y = ...

Exemple (1)

ABCD est un quadrilatère inscrit dans un cercle M tel que $M \in \overline{AB}$, CB = CD , m $\angle$(BCD) = 140°

Trouve : (1) m ($\angle$A) (2) m ($\angle$D)



Solution

$\because$ ABCD est un quadrilatère inscriptible

$\therefore$ m ($\angle$A) + m ($\angle$C) = 180° *(théorème)*

$\therefore$ m ($\angle$A) = 180° - 140° = 40°

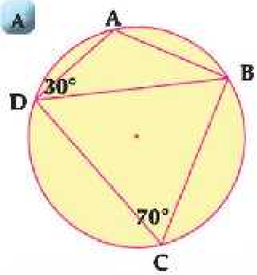
On trace $\overline{BD}$, dans le triangle $\triangle$ BCD $\because$ CB = CD

$\therefore$ m ($\angle$CDB) = m ($\angle$CBD) = $\frac{180° - 140°}{2}$ = 20°

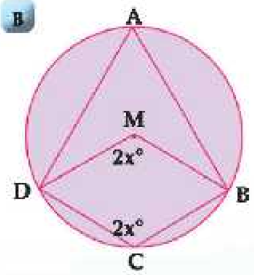
$\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M $\therefore$ m ($\angle$ADB) = 90°

$\therefore$ m ($\angle$ADC) = 90° + 20° = 110° *(Ce qu'il fallait démontrer)*

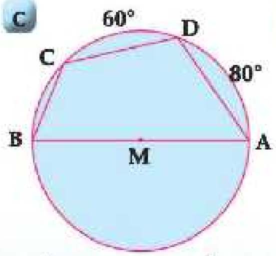
Pour t'entraîner : **A l'aide des données de chaque figure, trouve en justifiant :**

A


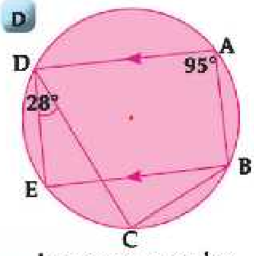
m ($\angle$ ABD)

B


m ($\angle$ A)

C


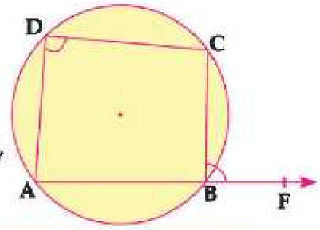
Les mesures des angles de la figure ABCD

D


Les mesures des angles de la figure ABCD

Corollaire: *La mesure d'un angle extérieur en un sommet d'un quadrilatère inscriptible est égale à la mesure de l'angle intérieur opposé à son adjacant.*

Dans la figure ci-contre



ABCD est un quadrilatère tel que $E \in \overrightarrow{AB}$, $E \notin \overline{AB}$

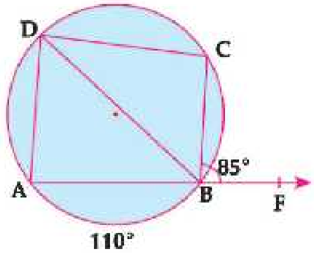
$\therefore$ $\angle$ EBCest un angle extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD,

et D est l'angle intérieur qui lui est opposé.

Donc: m ($\angle$ EBC) = m ($\angle$ D) *(Les suppléments d'un même angle ont même mesure)*

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre :



$E \in \overrightarrow{AB}$ et $E \notin \overline{AB}$, m $(\overset{\frown}{AB})$ = 110°, m ($\angle$ CBE) = 85°

Trouve m ($\angle$ BDC) .

Solution

$\because$ m $(\overset{\frown}{AB})$ = 110° et $\angle$ ADB est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$

$\therefore$ m ($\angle$ ADB) = $\frac{1}{2}$ m $(\overset{\frown}{AB})$ = 55° .

$\because$ $\angle$ CBE est un angle extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD

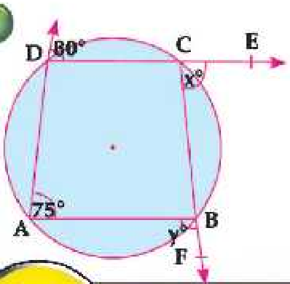
$\therefore$ m ($\angle$ CBE) = m ($\angle$ CDA) = 85° *(corollaire)*

$\therefore$ m ($\angle$ BDC) = 85° - 55° = 30° *(Ce qu'il fallait démontrer)*

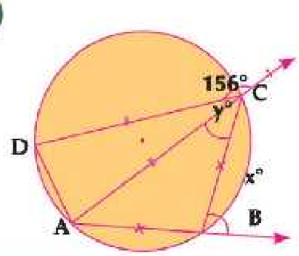
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

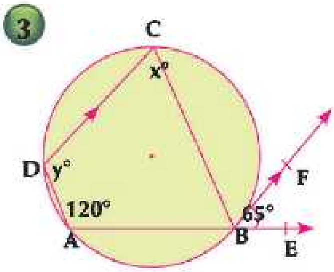
1



2



3



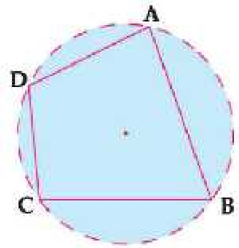
Réciproque du théorème 3 *Si deux angles opposés d'un quadrilatère sont supplémentaires, alors le quadrilatère est inscriptible.*

Dans la figure ci-contre :

Si m (∠ A) + m (∠ C) = 180°

ou m (∠ B+ m (∠ D) = 180°

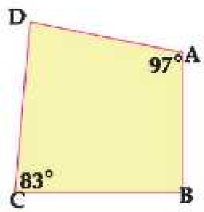
alors , le quadrilatère ABCD est inscriptible.



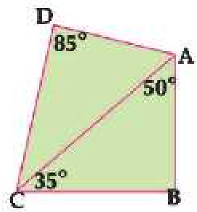
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, démontre que le quadrilatère ABCD est inscriptible :

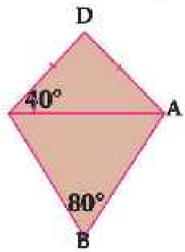
1



2



3



Résultat : *Dans un quadrilatère, si un angle extérieur en un de ses sommets et l'angle intérieur du sommet opposé ont même mesure, alors le quadrilatère est inscriptible.*

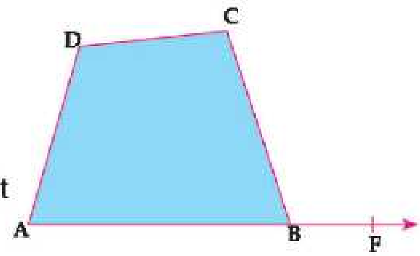
Dans la figure ci-contre :

ABCD est un quadrilatère tel que, E ∈ $\overrightarrow{AB}$, E ∉ $\overline{AB}$

∴ ∠ EBC est un angle extérieur au quadrilatère ABCD

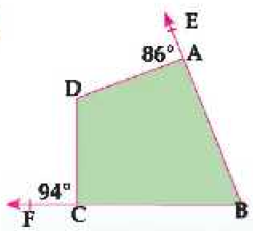
et ∠ D est l'angle intérieur du sommet opposé

Si m (∠ EBC) = m (∠ D) alors le quadrilatère ABCD est inscriptible

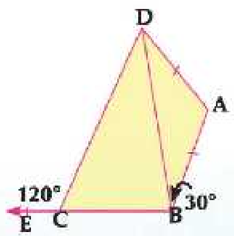


Pour t'entraîner : **Dans chacune des figures suivantes, démontre que le quadrilatère est inscriptible :**

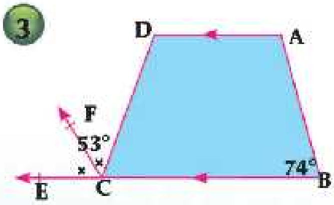
1



2



3



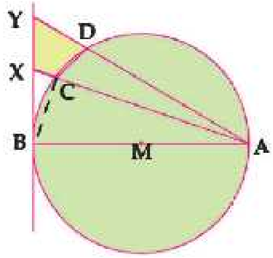
Exemple (3)

Dans la figure ci-contre :

$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M , $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$ sont deux cordes du cercle d'un même côté par rapport à $\overline{AB}$

Du point B, on trace une tangente au cercle qui coupe $\overrightarrow{AC}$ en X et $\overrightarrow{AD}$ en Y .

Démontre que XYDC est un quadrilatère inscriptible.



Solution

On trace $\overline{BC}$ $\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre

$\therefore$ m ($\angle$ACB) = 90° et l'angle $\angle$ ABC est un complément de l'angle $\angle$BAX (1)

$\because$ $\overline{AB}$ est un diamètre et $\overrightarrow{BY}$ une tangente au cercle en B.

$\therefore$ m ($\angle$ABX) = 90° et l'angle $\angle$AXB est un complément de l'angle $\angle$BAX (2)

De (1) et (2)

$\therefore$ **m ($\angle$ABC) = m ($\angle$AXB)**

$\because$ $\angle$ YDC est extérieur au quadrilatère inscriptible ABCD

$\therefore$ m ($\angle$YDC) = m ($\angle$ ABC) = m ($\angle$ AXB)

$\because$ $\angle$ AXB est extérieur au quadrilatère inscriptible XYDC et $\angle$YDC est l'angle intérieur qui lui est opposé .

$\therefore$ La figure XYDC est un quadrilatère inscriptible

Réfléchis :

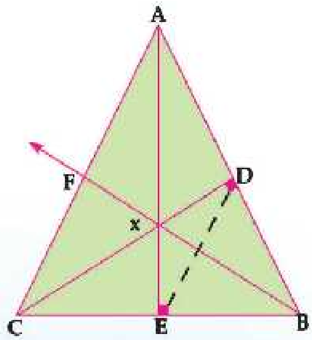
Sous quelles conditions un quadrilatère peut-il être inscriptible ? Cite tous les cas possibles

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre, démontre que :

Les droites passant par les sommets d'un triangle et perpendiculaires aux côté opposés à ces sommets sont concourantes

Quel est le nombre de quadrilatères inscriptibles dans la figure ci-contre ? Cite ces quadrilatères.



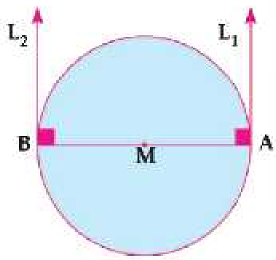
Al-Ahram Commercial Press ACP

Relation entre les tangentes d'un cercle

A apprendre :

- ☆ Comment déduire la relation entre deux segments tangentiels issus d'un même point à l'extérieur d'un cercle ?.
- ☆ La notion d'un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ Comment déduire la relation entre les tangentes communes à deux cercles disjoints.

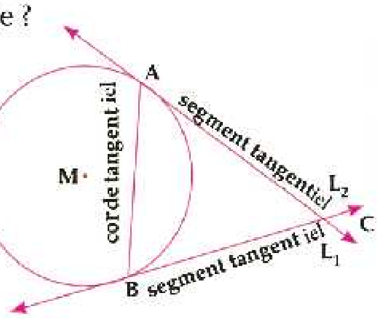
Réfléchis et discute



On sait que les tangentes passant par les deux extrémités d'un diamètre d'un cercle sont parallèles .

Quelle est la relation entre les deux tangentes passant par les deux extrémités d'une corde qui ne passe pas par le centre du cercle ?

Dans la figure ci-contre :

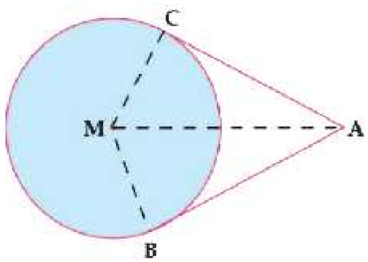


On remarque que :

si $\overline{AB}$ est une corde au cercle M, alors les deux tangentes L_1 et L_2 se coupent en un point C .

$\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ sont appelés « segments tangentiels » et $\overline{AB}$ est appelé « une corde qui passe par les deux points de contact ».

Théorème 4 : **Deux segments tangents à un cercle issus d'un même point ont même longueur.**



Hypothèses : A et un point à l'extérieur d'un cercle M, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C.

Conclusion :

Démontrer que : AB = AC

Construction : On trace $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ et $\overline{MA}$

Démonstration : $\because$ $\overline{AB}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

$\therefore$ m ($\angle$AMB) = 90°

$\because$ $\overline{AC}$ est un segment tangentiel dans le cercle M

$\therefore$ m ($\angle$ACM) = 90°

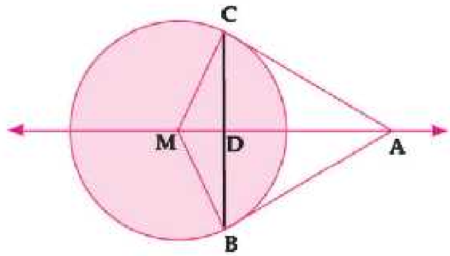
$\because$ Dans les deux triangles ABM et ACM, on a :

Expressions de base:

- ☆ la corde qui joint deux points de contact.
- ☆ un cercle inscrit dans un polygone.
- ☆ des tangentes communes

m($\angle$B) = m ($\angle$C) = 90°	*(résultat démontré)*
MB = MC	*(longueurs de rayons)*
$\overline{AB}$ est un côté commun .	$\therefore$ $\triangle$ ABM $\equiv$ $\triangle$ ACM
Donc : $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$	$\therefore$ AB = AC *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Réfléchis **Dans la figure ci-contre :**

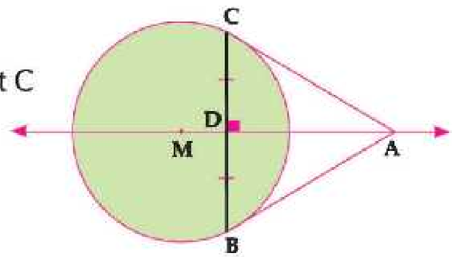


- Pourquoi $\overleftrightarrow{MA}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$?
- Pourquoi $\overrightarrow{AM}$ est la médiatrice de $\angle$BAC?
- Pourquoi $\overrightarrow{MA}$ est la médiatrice de $\angle$BMC?

Corollaires :

Corollaire 1 La droite passant par le centre d'un cercle et par le point d'intersection de deux tangentes au cercle est la médiatrice de la corde qui joint les points de contact de ces deux tangentes.

Dans la figure ci-contre :



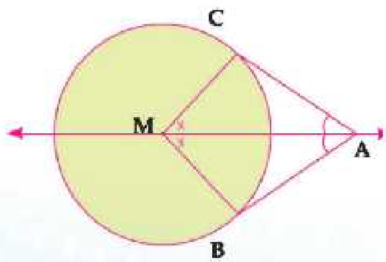
$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C

Alors : $\overleftrightarrow{AM}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$

Donc : $\overleftrightarrow{AM} \perp \overline{BC}$, et BD = CD

Corollaire 2 La droite passant par le centre d'un cercle et par le point d'intersection de deux tangentes au cercle est une bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes et est une bissectrice de l'angle formé par les deux rayons passant par les deux points de contact.

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle en B et C .

Alors : $\overrightarrow{AM}$ est une bissectrice de l'angle $\angle$A

$\therefore$ m ($\angle$BAM) = m ($\angle$CAM)

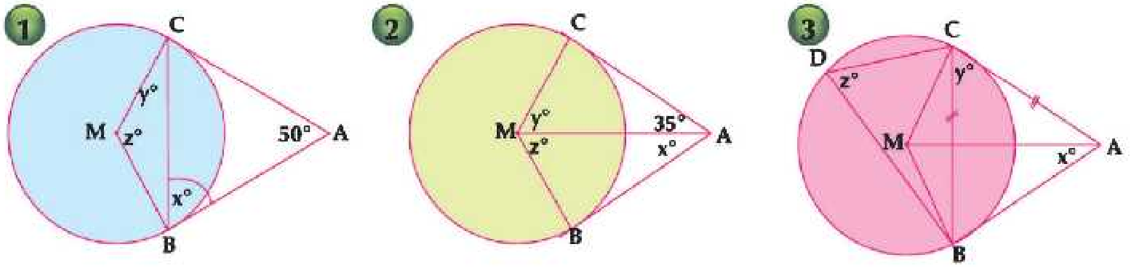
et $\overrightarrow{MA}$ est une bissectrice de l'angle $\angle$BMC

Donc : $\therefore$ m ($\angle$ AMB) = m ($\angle$ AMC)

Pour t'entraîner :

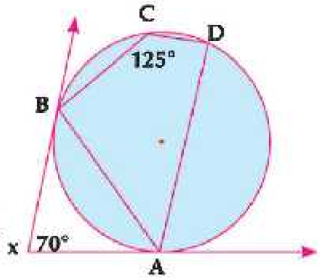
Dans chacune des figures suivantes, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M

Trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :



Exemple (1)

Dans la figure ci-contre :



$\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$ sont deux tangentes au cercle en A et B.

m (∠ AXB) = 70°, m (∠ DCB) = 125°

Démontre que : (1) $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice ∠ DAX . **(2)** $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$.

Solution

Hypothèses : $\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$ sont deux tangentes au cercle en A et B,
m (∠AXB) = 70° et m (∠ DCB) = 125° .

Conclusion : **(1)** $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice ∠DAX

(2) $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$.

Démonstration : ∵ $\overline{XA}$ et $\overline{XB}$ sont deux segments tangents. ∴ XA = XB

in △ XAB

∵ m (∠XAB) = m (∠XBA), m (∠X) = 70°

∴ m (∠XAB) = $\frac{180° - 70°}{2}$ = 55° (1)

∵ ABCD est un quadrilatère inscriptible et m (∠C) = 125°

∴ m (∠ DAB) = 180° - 125° = 55° (2)

De (1) et (2) on déduit que : m (∠XAB) = m (∠ DAB) = 55°

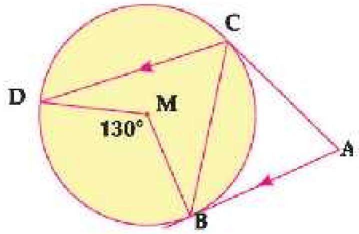
∴ $\overrightarrow{AB}$ est une bissectrice de ∠DAX

∵ m (∠XBA) = m (∠DAB) = 55° *et ils sont dans des positions alternes-internes*

∴ $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{XB}$ *(Ce qu'il fallait démontrer)*

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M,

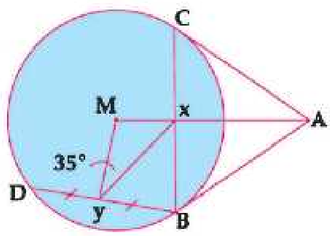
$\overline{AB} // \overline{CD}$, m ($\angle$BMD) = 130° .

1 **Démontre que :** $\overrightarrow{CB}$ est une bissectrice de l'angle $\angle$ ACD

2 *Trouve* m ($\angle$A) .

Exemple (2)

Dans la figure ci-contre :



$\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M en B et C.

$\overline{AM} \cap \overline{BC}$ = {X}, Y est le milieu de $\overline{BD}$

m ($\angle$XYM) = 35° .

A **Démontre que :** le quadrilatère XBYM est inscriptible .

B *Trouve* m ($\angle$A) .

Solution

$\because$ $\overline{AB}$, et $\overline{AC}$ sont deux segments tangents au cercle M en B et C

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AM}$ est la médiatrice de $\overline{BC}$, m($\angle$BXM) = 90° (1)

$\because$ Y est le milieu de $\overline{BD}$

$\therefore$ m ($\angle$BYM) = 90° (2)

De (1) **et** (2)

$\therefore$ La figure XBYM est un quadrilatère inscriptible.

On trace $\overline{BM}$

$\because$ Le quadrilatère XBYM est inscriptible et m ($\angle$XYM) = 35° .

$\therefore$ m ($\angle$XBM) = m ($\angle$XYM) = 35°

$\because$ $\overline{AB}$ est un segment tangent et $\overline{BM}$ est un rayon.

$\therefore$ m ($\angle$ ABM) = 90°

$\therefore$ m ($\angle$ ABC) = 90° - 35° = 55°

$\because$ AB = AC

$\therefore$ m ($\angle$ABC) = m ($\angle$ACB) = 55°

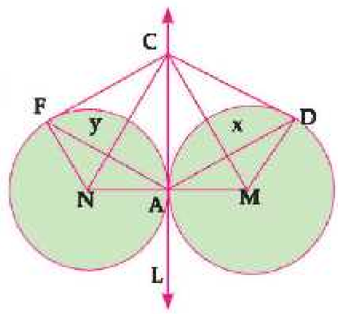
$\therefore$ m ($\angle$A) = 180° - (55° + 55°) = 70°

Al-Ahram Commercial Press ACP

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre :

M et N sont deux cercles tangents extérieurement en A. La droite L est une tangente commune aux deux cercles en A. C est un point de la droite L. Du point C, on trace deux tangentes aux deux cercle M et N qui les coupent aux points de contact D et E respectivement $\overline{CM} \cap \overline{DA} = \{X\}$ et $\overline{CN} \cap \overline{AE} = \{Y\}$



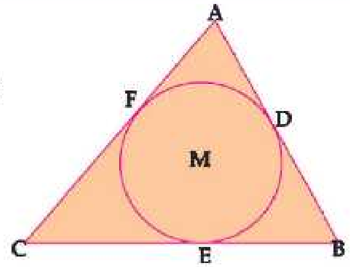
1. **Quel est le nombre de quadrilatères inscriptibles dans cette figure ?**
2. **Démontre que : CD = CA = CE, Donne une interprétation géométrique .**

Définition **Le cercle tangent aux côtés d'un polygone est appelé cercle inscrit dans le polygone.**

Dans la figure ci-contre :

M est un cercle inscrit au triangle ABC car le cercle est tangent aux côtés du triangle en D, E et F.

Donc : Le triangle ABC est circonscrit au cercle M.



Réfléchis **Est-ce que le centre du cercle inscrit dans un triangle quelconque est le point d'intersection des bissectrices des angles intérieurs du triangle ?**

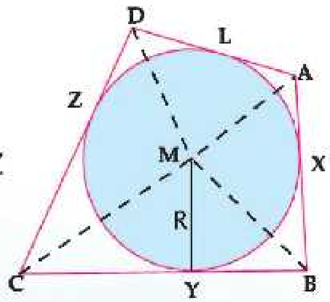
Exemple (3)

Dans la figure ci-contre :

M est un cercle inscrit dans un quadrilatère ABCD, de longueur de rayon 5 cm, AB = 9 cm et CD = 12 cm

Calcule le périmètre de la figure ABCD puis calcule son aire.

Solution



$\because$ Le cercle M est inscrit dans un quadrilatère ABCD

$\therefore$ le cercle est tangent aux côtés du quadrilatère ABCD en X, Y, Z et T

$\because$ $\overline{AX}$ et $\overline{AL}$ sont deux segments tangents au cercle

$\therefore$ AX = AL

$\because$ $\overline{BX}$ et $\overline{BY}$ sont deux segments tangents au cercle M $\qquad \therefore$ B X = BY

De même, on a , CZ= CY $\qquad \therefore$ DZ = DL

Par addition, on obtient : (AX + BX) + (CZ + DZ) = AL + BY + CY + DL

$\therefore$ AB + CD = AD+ BC = $\frac{1}{2}$ du périmètre de la figure ABCD

Périmètre de la figure = 2(9 + 12) = 42cm ,

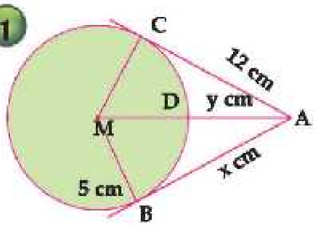
Aire de la figure ABCD $= \frac{1}{2} AB \times r + \frac{1}{2} BC \times r + \frac{1}{2} CD \times r + \frac{1}{2} AD \times r$

$= \frac{1}{2}$ du périmètre de la figure $\times r = \frac{1}{2} \times 42 \times 5 = 105 cm^2$

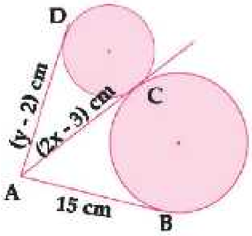
Pour t'entraîner :

A l'aide des données de chaque figure, trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

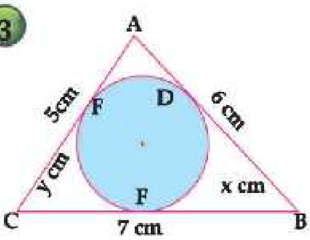
1



2

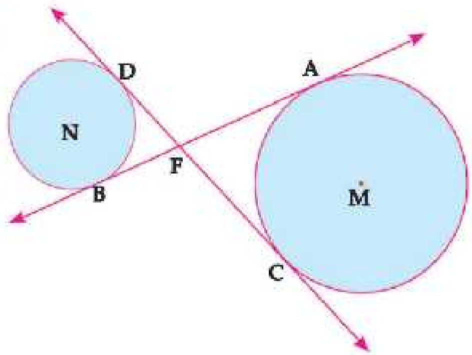


3



Tangentes communes à deux cercles disjoints :

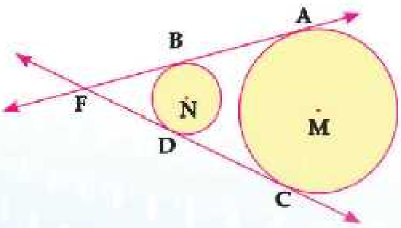
A La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est appelée « une tangente commune intérieure aux deux cercle M et N » car les deux cercles sont situés de part et d'autre par rapport à $\overleftrightarrow{AB}$, **De même** $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente commune intérieure aux deux cercles.



On remarque que : $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ = {E}

Dans la figure ci-contre, démontre que : AB = CD

B La droite $\overleftrightarrow{AB}$ est appelée « une tangente commune extérieure aux deux cercle M et N » car les deux cercles sont situés d'un même côté par rapport à, $\overleftrightarrow{AB}$, De même $\overleftrightarrow{CD}$ est une tangente commune extérieure aux deux cercles.

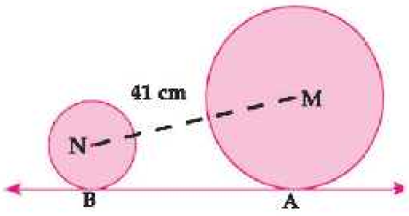


On remarque que : $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD}$ = {F}

Dans la figure ci-contre, démontre que AB = CD

Pour t'entraîner :

Dans la figure ci-contre : $\overleftrightarrow{AB}$ est une tangente commune extérieure aux deux cercle M et N en A et B respectivement et les rayons des deux cercles sont de longueurs respectives 17 cm et 8 cm. Si MN = 41 cm, trouve la longueur de $\overline{AB}$



5-7 Angles tangentiels

A apprendre:

- ☆ La notion d'un angle tangentiel
- ☆ Comment déduire la relation entre un angle tangentiel et un angle inscrit interceptant le même arc.
- ☆ La relation entre un angle tangentiel et un angle au centre interceptant le même arc.
- ☆ Comment résoudre des problèmes sur les angles tangentiels.

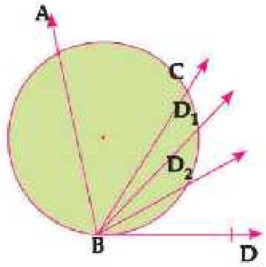
Expressions de base:

- ☆ angle tangentiel.
- ☆ angle inscrit.
- ☆ angle au centre.

Réfléchis et discute

Dans la figure ci-contre:

$\angle ABC$ est un angle inscrit de côtés $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ et d'arc $\overset{\frown}{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B. Imaginons la rotation de l'un des deux côtés de l'angle inscrit. Si par exemple, le côté $\overrightarrow{BC}$ tourne autour du point B en s'éloignant du côté $\overrightarrow{BA}$ pour prendre les positions $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{BC_2}$, ...



- Est-ce que la mesure de l'angle inscrit formé change selon les positions $\angle ABC_1$ et $\angle ABC_2$, ...
- **Est-ce que** m $(\overset{\frown}{AC_1})$ et m $(\overset{\frown}{AC_2})$, ... augmentent ?
- Si $\overrightarrow{BC}$ se confond avec la tangente $\overrightarrow{BD}$ que remarques-tu ?

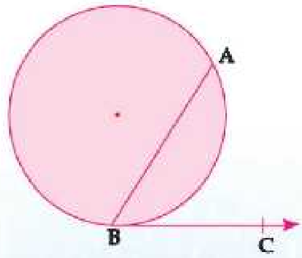
On remarque qu'on obtient l'angle inscrit de la plus grande mesure lorsque $\overrightarrow{BC}$ est sur le point de se confondre avec la tangente $\overrightarrow{BD}$ Dans ce cas, $\angle ABD$ est appelé « angle tangentiel ». C'est une position limite de l'angle inscrit. Par conséquence, on a :

$$m(\angle ABD) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{ACD})$$

L'angle tangentiel	**est un angle dont le sommet appartient à un cercle et dont un côté est tangent au cercle et l'autre côté coupe le cercle.**

On a :
la mesure d'un angle tangentiel est égale à la moitié de la mesure de l'arc intercepté .

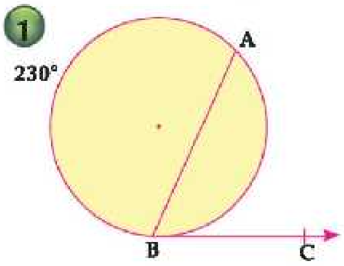
Donc : $m(\angle\ ABC) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{AB})$

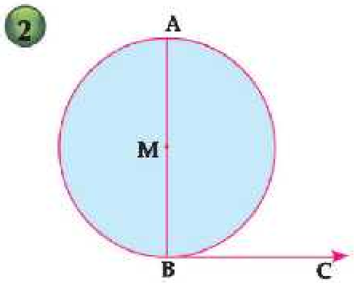


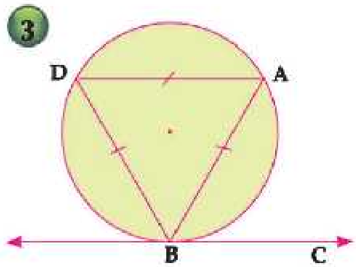
Al-Ahram Commercial Press ACP

Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, calcule m (∠ ABC) .





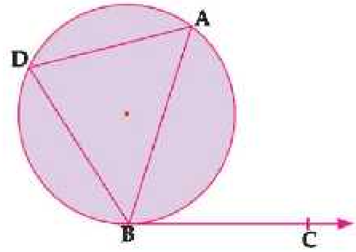


Théorème 5 Un angle tangentiel et un angle inscrit interceptant le même arc ont même mesure.

Hypothèses : ∠ ABC est un angle tangentiel et ∠ D est un angle inscrit qui interceptent l'arc AB.

Conclusion : **Démontrer que :** m (∠ ABC) = m (∠ D)

Démonstration : ∵ ∠ ABC est un angle tangentiel



∴ m (∠ ABC) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{AB}$) (1)

∵ ∠ D est un angle inscrit

∴ m (∠ D) = $\frac{1}{2}$ m ($\overset{\frown}{AB}$) (2)

De (1) et (2) on déduit que :

m (∠ ABC) = m (∠ C)

Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire La mesure d'un angle tangentiel est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

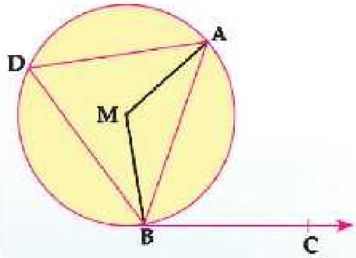
Dans la figure ci-contre :

$\overrightarrow{BC}$ est une tangente au cercle M, $\overline{AB}$ est une corde qui passe par le point de contact

∴ m (∠ ABC) = m (∠ D) *(théorème)*

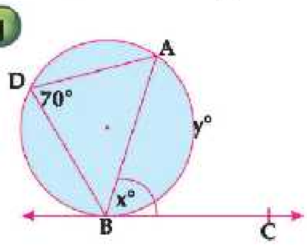
∵ m (∠ D) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB) *(théorème)*

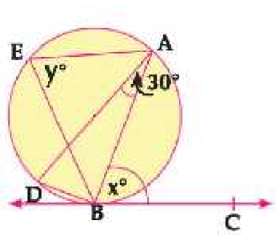
∴ m (∠ ABC) = $\frac{1}{2}$ m (∠ AMB)

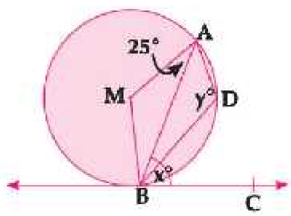


Pour t'entraîner : **Dans chacune des figures suivantes:** $\overleftrightarrow{BC}$ est une tangente au cercle.

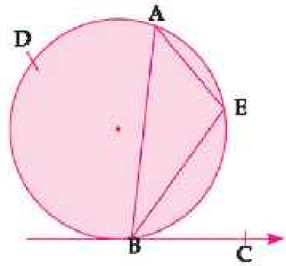
Trouve la valeur du symbole utilisé pour la mesure :

1


2


3


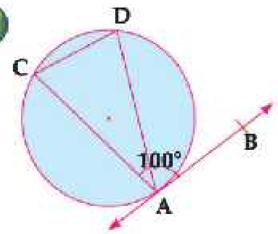
Remarque importante :



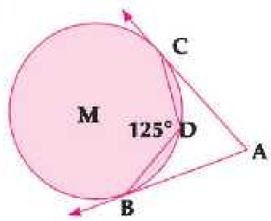
Si un angle inscrit est tracé sur la corde d'un angle tangentiel et si les deux angles sont d'un même côté par rapport à la corde, alors ils sont supplémentaires.

Dans la figure, ∠ ABC et ∠ AEB sont supplémentaires.

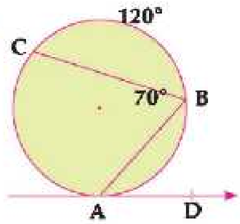
Pour t'entraîner : **A l'aide des données de la figure, trouve**

1


m (∠ADC) = ...°

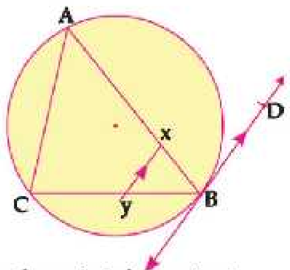
2


m (∠ BAC) = ...°

3


m (∠ BAD) =...........°

Exemple (1)



ABC est un triangle inscrit dans un cercle et $\overleftrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B. X ∈ $\overline{AB}$ et Y ∈ $\overline{BC}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overleftrightarrow{BD}$.

Démontre que : AXYC est un quadrilatère inscriptible.

Démonstration :

∵ $\overleftrightarrow{BD}$ est une tangente au cercle en B et $\overline{AB}$ est une corde qui passe par le point de contact

∴ m (∠DBA) = m (∠C)

∵ $\overline{XY}$ // $\overleftrightarrow{DB}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ *est une sécante*

∴ m (∠ DBA) = m (∠BXY) ∴ m (∠BXY) = m (∠C)

∵ ∠BXY est un angle extérieur au quadrilatère XYCA.

∴ XYCA est un quadrilatère inscriptible

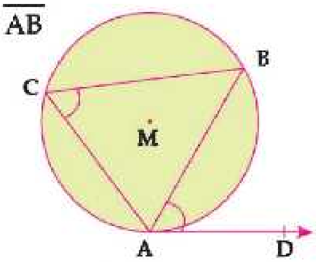
Al Ahram Commercial Press ACP

Réciproque du théorème 5

Si une demi-droite est tracée en l'une des deux extrémités d'une corde dans un cercle de sorte que la mesure de l'angle compris entre cette demi-droite et la corde est égale à la mesure de l'angle inscrit tracé sur cette corde de l'autre côté, alors cette demi-droite est une tangente au cercle.

C'est-à-dire si on trace $\overrightarrow{AD}$ en l'une des deux extrémités de la corde $\overline{AB}$ dans le cercle M et si:

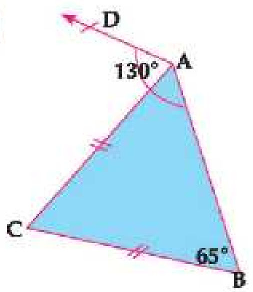
m ($\angle$DAB) = m ($\angle$C) **alors :** $\overrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle M .



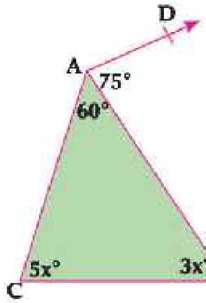
Pour t'entraîner :

Dans chacune des figures suivantes, montre que $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les sommets du $\triangle$ ABC.

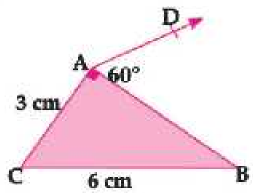
1



2



3

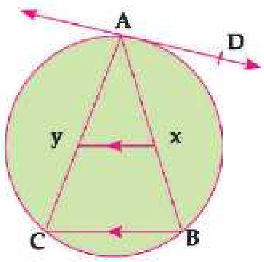


Exemple (4)

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en A , X $\in \overline{AB}$ et Y $\in \overline{AC}$ tels que $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$

Démontre que: $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A, X et Y

Solution



Hypothèses : $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle en , $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$

Conclusion : **Démontre que** : $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A , X et Y .

Démonstration : $\because$ $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente et $\overline{AB}$ est une corde

$\therefore$ m ($\angle$D A B) = m ($\angle$C) (1)

$\because$ $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ *est une sécante* $\therefore$ m ($\angle$AYX) = m ($\angle$C) (2)

De (1) et (2) on déduit que: m ($\angle$ DAB) = m ($\angle$ AYX)

Donc : m ($\angle$ DAX) = m ($\angle$ AYX)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD}$ est une tangente au cercle passant par les points A, X et Y .

رقــم الكتــاب	١١٢٥ /١٨ /١٥/٣٣/٣/٢٠
عـدد الصفحــات	١٨٠ صفحة بالغلاف
المقـــــاس	٨/١ فرخ (٥٧ X ٨٢ سم)
نـوع الـــورق	الداخلي ٨٠ جرام والغلاف ٢٠٠ جرام
طبـــع المتن	٤ / ٤ لون
طبـع الغـــلاف	٤ لون
التوضيـــب	جانبي
الكمية المسنده	٣,٦١٦

http://elearning.moe.gov.eg

Al-Ahram Commercial Press ACP