مراجعة ليلة الامتحان

الهندسة

الصف الثالث الإعدادي

الفصل الدراسي الثاني

إعداد /

أسرة كتاب اليماني في الرياضيات

مراجعة ليلة الامتحان في الهندسة

★ أولاً : الدائرة :

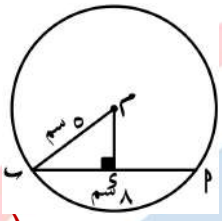
أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

❶ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو .....

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) عدد لا نهائي

---

❷ **في الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ،

أب = ٨ سم ، مب = ٥ سم **فإن :** مء = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٢

---

❸ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، أ نقطة في مستوي الدائرة وكان مأ = ٤ سم **فإن :** موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة ..... الدائرة

(أ) تقع داخل (ب) تقع خارج (حـ) على (ء) على مركز

---

❹ إذا كان : المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ **فإن :** المستقيم ل يكون ..... الدائرة

(أ) خارج (ب) قاطع (حـ) مماس (ء) محور تماثل

---

❺ دائرة محيطها ٦ π سم ،والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم

فإن : المستقيم ل يكون .....

(أ) مماسًا للدائرة (ب) قاطعًا للدائرة (حـ) خارج للدائرة (ء) قطرًا للدائرة

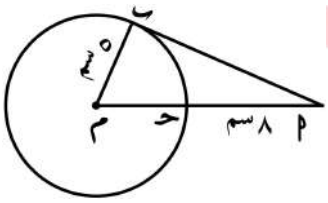
---

❻ إذا كان المستقيم ل مماساً للدائرة طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار..... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ٨

---

❼ **في الشكل المقابل :**



$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ، فإذا كان مب = ٥ سم ، أحـ = ٨ سم **فإن :** أب = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٢ (ء) ١٣

---

❽ دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٩ سم ، ٤ سم فإذا كان من = ٥ سم

فإن : الدائرتين تكونان .....

(أ) متماستان من الخارج (ب) متماستان من الداخل

(حـ) متقاطعتان (ء) متباعدتان

٩ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج ،وطول نصف قطر أحدهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم **فإن :** طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٧ (ء) ١٤

---

١٠ م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفي قطريهما ٣ سم ، ٥ سم **فإن :** م ن ∈ .....

(أ)]٨ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(حـ)]٠ ، ٢[(ء)]٢ ، ٨[

---

١١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين يساوي .....

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ٤

---

١٢ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط تقع على استقامة واحدة هو .....

(أ) صفر (ب) واحد (حـ) ثلاث (ء) عدد لا نهائي

---

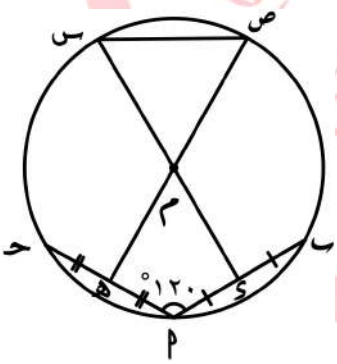
١٣ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو .....

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) عدد لا نهائي

ثانيًا : الأسئلة المقالية

* تعاريف ومفاهيم أساسية :

١ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران في الدائرة م يحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ علي الترتيب ، رسم $\overleftarrow{ءم}$ ، $\overleftarrow{هـم}$ فقطعا الدائرة في س ، ص علي الترتيب

أثبت أن : Δ س ص م متساوي الأضلاع

البرهان :

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ م ء أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{أحـ}$ ∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

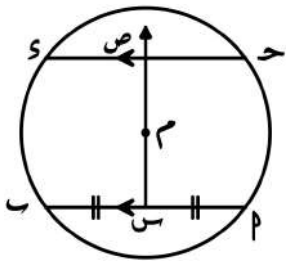
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠ س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس ، ∵ م س = م ص = نق

∴ Δ م س ص متساوي الأضلاع

٢ في الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ، س منتصف $\overline{أب}$

، رسم $\overleftarrow{سم}$ فقطع $\overline{حـء}$ في ص

أثبت أن : ص منتصف $\overline{حـء}$

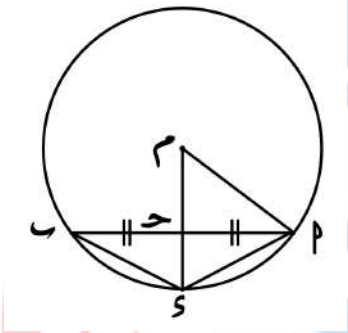
البرهان :

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ مسأ) = ٩٠°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ∴ ق(∠ حـص م) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠° بالتداخل

∴ $\overline{مص} \perp \overline{حـء}$ ∴ ص منتصف $\overline{حـء}$

٣ في الشكل المقابل :



م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم

، $\overline{أب}$ وتر فيها طوله ٢٤سم ، حـ منتصف $\overline{أب}$

أوجد بالبرهان : مساحة △ أ ء ب

البرهان :

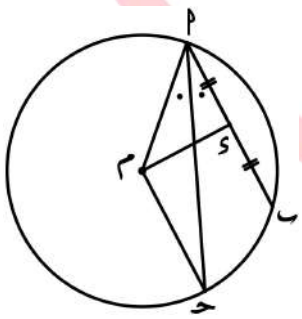
∵ حـ منتصف $\overline{أب}$ ، أ ب = ٢٤سم ∴ $\overline{مح} \perp \overline{أب}$ ، أ حـ = ١٢سم

∵ △ أ م حـ قائم الزاوية في حـ ∴ م حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٥ سم

∴ حـ ء = ١٣ - ٥ = ٨سم

∴ مساحة △ أ ء ب = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم^٢

٤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overleftarrow{أحـ}$ ينصف (∠ ب أ م)

ويقطع الدائرة م في حـ ، إذا كان ء منتصف $\overline{أب}$

أثبت أن : $\overline{ءم} \perp \overline{مح}$

البرهان :

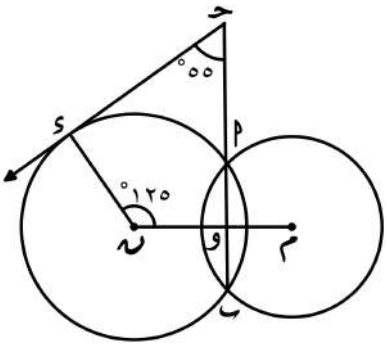
∵ م أ = م حـ = نق ∴ ق(∠ م أ حـ) = ق(∠ حـ) ❶

∵ $\overleftarrow{أحـ}$ ينصف (∠ ب أ م) ∴ ق(∠ م أ حـ) = ق(∠ ب أ حـ) ❷

من ❶ ، ❷ : ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ حـ) وهما في وضع التبادل ∴ $\overline{أب}$ // $\overline{مح}$

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ∴ $\overline{ءم} \perp \overline{مح}$

٥ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

، ء ∈ الدائرة ن ، ق(∠ م ن ء) = ١٢٥°

، ق(∠ ب حـ ء) = ٥٥°

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ مماساً للدائرة ن عند ء

البرهان :

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ الوتر المشترك

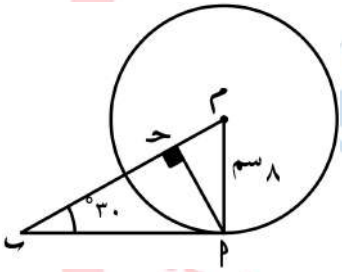
∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ أ و ن) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ ن ء حـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٥٥° + ١٢٥°) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{ن ء}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ مماساً للدائرة ن عند ء

٦ في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ

، م أ = ٨ سم ، ق(∠ أ ب م) = ٣٠°

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

البرهان :

∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ م أ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ أ ب م) = ٣٠° ∴ م ب = ٢ م أ = ١٦ سم

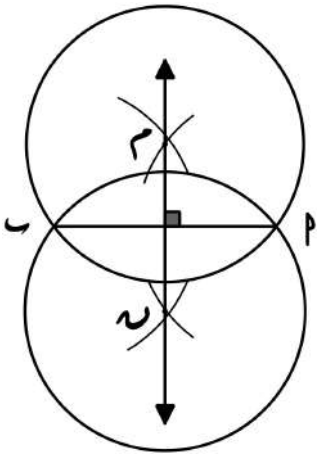
∴ أ ب = $\sqrt{(١٦)^٢ - (٨)^٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم ∴ أ حـ = $\frac{٨ \times ٨\sqrt{٣}}{١٦}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

٧ باستخدام الأدوات الهندسية : ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ طولها ٤ سم

ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب

وطول نصف قطرها ٣ سم

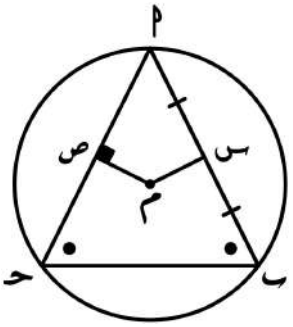
كم عدد الحلول الممكنة ؟ (لا تمح الأقواس)



الحل :

عدد الحلول الممكنة ٢

٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

فيه ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ، س منتصف $\overline{أ ب}$

، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ **أثبت أن :** م س = م ص

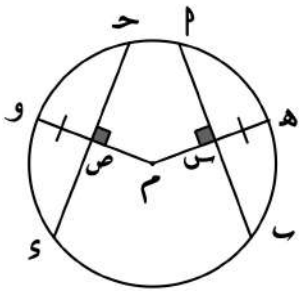
البرهان :

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ∴ أ ب = أ حـ

∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، أ ب = أ حـ (أوتار) ∴ $\boxed{م س = م ص}$ (أبعاد)

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{حـ ء}$ ، هـ س = ص و

أثبت أن : أ ب = حـ ء

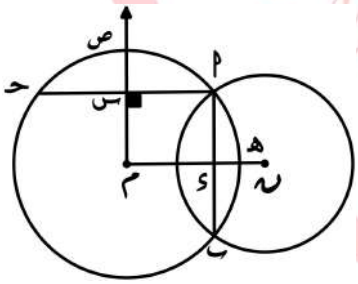
البرهان :

∵ هـ س = ص و ① ، م هـ = م و = نق ②

بطرح ① من ② : ∴ م س = م ص (أبعاد)

∵ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{حـ ء}$ ∴ $\boxed{أ ب = حـ ء}$ (أوتار)

١٠ في الشكل المقابل :



م ، نق دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

،رسم $\overleftarrow{م س}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ في س ويقطع الدائرة م

في ص ،رسم $\overline{م نق}$ يقطع $\overline{أ ب}$ في ء ويقطع الدائرة نق في هـ

فإذا كان : أ حـ = أ ب **أثبت أن :** س ص = ء هـ

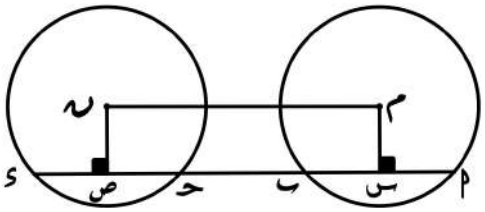
البرهان :

∵ $\overleftrightarrow{م نق}$ خط المركزين ، $\overline{أ ب}$ الوتر المشترك ∴ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∵ $\overleftarrow{م س}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، أ حـ = أ ب (أوتار) ∴ م ء = م س (أبعاد) ⟵ ①

∵ م أ = م حـ = نق ⟵ ② بطرح ① من ② : $\boxed{∴ س ص = ء هـ}$

١١ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب = حـ ء

$\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : الشكل م س ص ن مستطيل

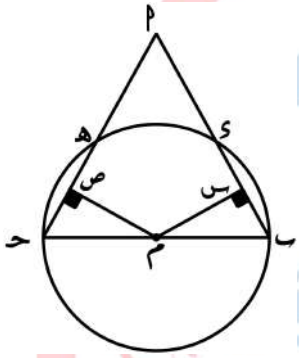
البرهان :

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$ ، أ ب = حـ ء (أوتار)

∴ م س = ن ص (أبعاد) ، $\overline{\text{م س}} \parallel \overline{\text{ن ص}}$ ∴ الشكل م س ص ن متوازي أضلاع

∵ ق(∠ م س ص) = ٩٠° ∴ الشكل م س ص ن مستطيل

١٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ، رسمت دائرة م

قطرها $\overline{\text{ب حـ}}$ قطعت $\overline{\text{أ ب}}$ في ء ، $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ

، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ هـ}}$ **أثبت أن :** ب ء = حـ هـ

البرهان :

∵ أ ب = أ حـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

∵ Δ Δ ب م س ، حـ م ص فيهما :

ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ، ق(∠ ب س م) = ق(∠ حـ ص م) = ٩٠° ، م ب = م حـ = نق

∴ Δ ب م س ≡ Δ حـ م ص وينتج أن : م س = م ص (أبعاد) ∴ $\boxed{\text{ب ء = حـ هـ}}$ (أوتار)

★ ثانيًا : الزوايا والأقواس في الدائرة :

أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

١ قياس القوس الذي يمثل ثلث الدائرة = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (حـ) ١٢٠° (ء) ٢٤٠°

٢ طول القوس الذي يمثل ربع محيط الدائرة يساوي .....

(أ) ٤ π نق (ب) ٢ π نق (حـ) π نق (ء) $\frac{١}{٢}$ π نق

٣ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}$ π نق يقابل زاوية مركزية قياسها = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (حـ) ١٢٠° (ء) ٢٤٠°

٤ قياس الزاوية المحيطية يساوي ..... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس

(أ) نصف (ب) ضعف (حـ) ربع (ء) ثلث

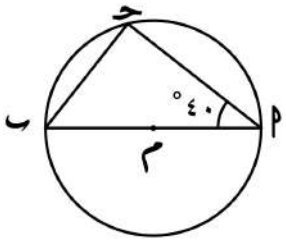
---

٥ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (حـ) ١٢٠° (ء) ١٨٠°

---

٦ **في الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ قطر للدائرة م ، ق(∠أ) = ٤٠°

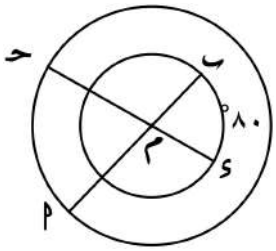
فإن : ق(∠ب) = ...

(أ) ١٤٠° (ب) ٩٠°

(حـ) ٤٠° (ء) ٥٠°

---

٧ **في الشكل المقابل :**



دائرتان متحدتا المركز في م ، فإذا كان ق(⌒ب ء) = ٨٠°

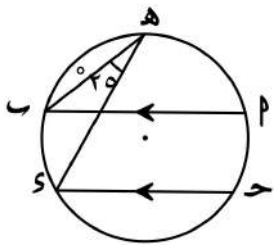
فإن : ق(⌒أ حـ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٨٠°

(حـ) ١٠٠° (ء) ١٦٠°

---

٨ **في الشكل المقابل :**



$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متوازيان ، ق(∠ب هـ ء) = ٢٥°

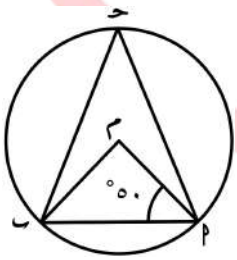
فإن : ق(⌒أ حـ) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠°

(حـ) ١٠٠° (ء) ١٢,٥°

---

٩ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : ق(∠م أ ب) = ٥٠°

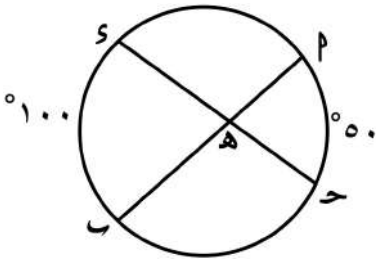
فإن : ق(∠أ حـ ب) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٨٠°

(حـ) ١٠٠° (ء) ١٦٠°

---

١٠ **في الشكل المقابل :**



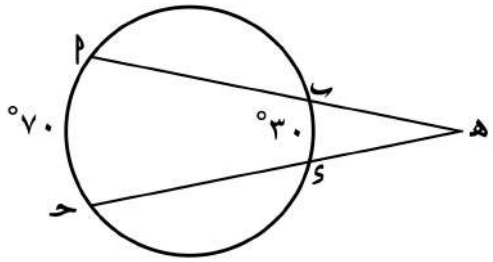
ق(⌒أ حـ) = ٥٠° ، ق(⌒ء ب) = ١٠٠°

فإن : ق(∠أ هـ حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠°

(حـ) ١٦٠° (ء) ٧٥°

١١ في الشكل المقابل :



ق(⌒أحـ) = ٧٠° ، ق(⌒بء) = ٣٠°

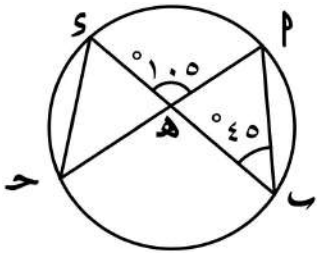
فإن : ق(∠ هـ) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠°

(حـ) ٥٠° (ء) ١٠٠°

---

١٢ في الشكل المقابل : $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = {هـ}



، ق(∠ ب) = ٤٥° ، ق(∠ أ هـ ء) = ١٠٥°

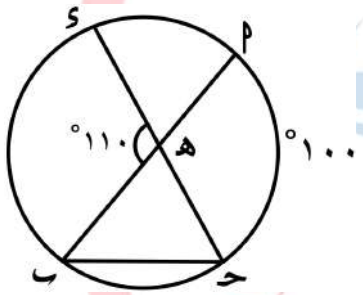
فإن : ق(∠ بء حـ) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠°

(حـ) ١٥٠° (ء) ١٠٥°

ثانيًا : الأسئلة المقالية

١ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{حء}$ وتران في الدائرة م ، $\overline{أب}$ ∩ $\overline{حء}$ = { هـ }

، ق(∠ ء هـ ب) = ١١٠° ، ق(⌒أحـ) = ١٠٠°

أوجد : ق(∠ ء حـ ب)

البرهان :

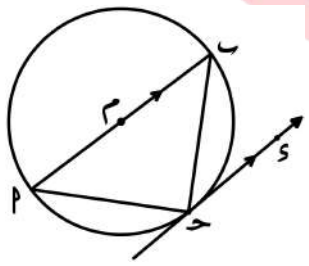
∵ ق(⌒أحـ) = ١٠٠° ∴ ق(∠ أ ب حـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أحـ) = ٥٠°

∵ ء ، هـ ، حـ على استقامة واحدة ∴ ق(∠ حـ هـ ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

∴ △ هـ حـ ب : ق(∠ ء حـ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = **٦٠°**

---

٢ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

، $\overleftarrow{حء}$ مماس للدائرة عند حـ ، $\overleftarrow{حء}$ // $\overline{أب}$

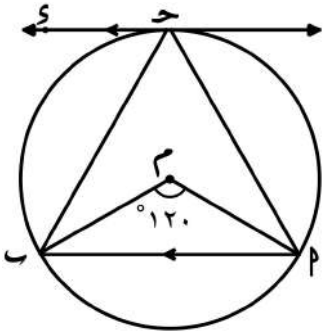
١ أثبت أن : أ حـ = ب حـ **٢ أوجد :** ق(∠ ب)

البرهان :

∵ $\overleftarrow{حء}$ // $\overline{أب}$ ∴ ق(⌒حـأ) = ق(⌒حـب) ∴ **أ حـ = ب حـ**

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° ∴ ق(∠ ب) = **٤٥°**

٣ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة عند حـ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // $\overline{أ ب}$

، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

أثبت أن : △ أ حـ ب متساوي الأضلاع

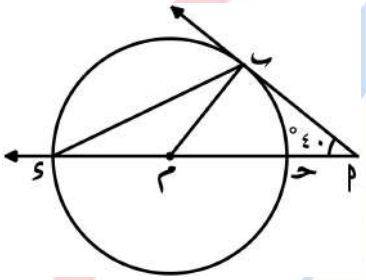
البرهان : ∵ ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ حـ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ب) المركزية = ٦٠° ← ①

∵ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // $\overline{أ ب}$ ∴ ق($\overset{\frown}{حـ أ}$) = ق($\overset{\frown}{حـ ب}$) ∴ حـ أ = حـ ب ← ②

من ① ، ② **ينتج أن :** △ أ حـ ب متساوي الأضلاع

٤ في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overleftarrow{أ م}$ قطع الدائرة م في حـ ، ء علي الترتيب

، ق(∠ أ) = ٤٠° **أوجد :** ق(∠ ب ء حـ) ، ق($\overset{\frown}{ب حـ}$)

البرهان :

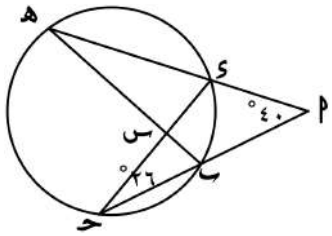
∵ $\overleftarrow{أ ب}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overleftarrow{أ ب}$ ∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠°

∴ △ أ م ب : ق(∠ ب م أ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

∴ ق(∠ ب ء حـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م حـ) المركزية = $\boxed{٢٥°}$

∴ ق($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ق(∠ ب م حـ) المركزية = $\boxed{٥٠°}$

٥ في الشكل المقابل :



ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق(∠ ء حـ ب) = ٢٦°

أوجد : ق($\overset{\frown}{هـ حـ}$) ، ق(∠ هـ س حـ)

البرهان :

∵ ق(∠ ء حـ ب) = ٢٦° ∴ ق($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٢ ق(∠ ء حـ ب) المحيطية = ٥٢°

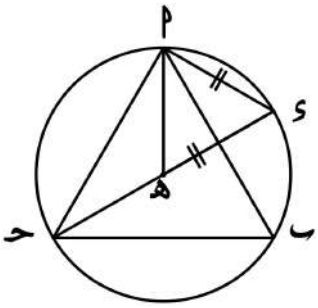
∵ $\overleftarrow{ء هـ}$ ∩ $\overleftarrow{حـ ب}$ = {أ} ∴ ق(∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{هـ حـ}$) - ق($\overset{\frown}{ء ب}$)]

∴ ٨٠° = ق($\overset{\frown}{هـ حـ}$) - ٥٢° ∴ ق($\overset{\frown}{هـ حـ}$) = ٨٠° + ٥٢° = $\boxed{١٣٢°}$

∵ $\overline{ء حـ}$ ∩ $\overline{ب هـ}$ = {س}

∴ ق(∠ هـ س حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{ء ب}$) + ق($\overset{\frown}{هـ حـ}$)] = $\frac{١}{٢}$ (٥٢° + ١٣٢°) = $\boxed{٩٢°}$

٦ في الشكل المقابل :



△ أ ب حـ متساوي الأضلاع ، أ ء = ء هـ

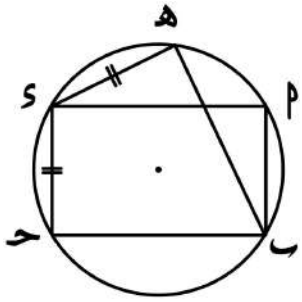
أثبت أن : △ أ ء هـ متساوي الأضلاع

البرهان : ∵ △ أ ب حـ متساوي الأضلاع ∴ ق(∠ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء حـ) المحيطية = ق(∠ أ ب حـ) المحيطية = ٦٠°

∵ أ ء = ء هـ ∴ △ أ ء هـ متساوي الأضلاع

٧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، رسم الوتر $\overline{\text{ب هـ}}$ بحيث ء حـ = ء هـ

أثبت أن : ب هـ = أ ء

البرهان :

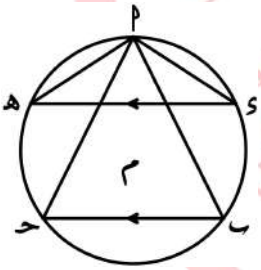
∵ أ ب حـ ء مستطيل ∴ أ ب = ء حـ

∵ ء حـ = ء هـ ∴ أ ب = ء هـ

∴ ق(⌒ أ ب) = ق(⌒ ء هـ) بإضافة ق(⌒ أ هـ) للطرفين :

∴ ق(⌒ ب أ هـ) = ق(⌒ أ هـ ء) ∴ ب هـ = أ ء

٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

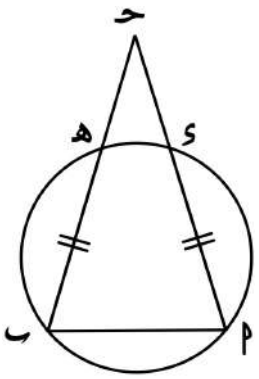
أثبت أن : ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

البرهان : ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ق(⌒ ء ب) = ق(⌒ هـ حـ)

∴ ق(∠ ء أ ب) المحيطية = ق(∠ حـ أ هـ) المحيطية

بإضافة ق(∠ ب أ حـ) للطرفين : ∴ ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة

، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ = { حـ } **أثبت أن :** حـ ء = حـ هـ

البرهان : ∵ أ ء = ب هـ

∴ ق(⌒ أ ء) = ق(⌒ ب هـ) بإضافة ق(⌒ ء هـ) للطرفين

∴ ق(⌒ أ ء هـ) = ق(⌒ ب هـ ء) ∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ ب أ ء)

∴ أ حـ = ب حـ ① ∵ أ ء = ب هـ ② **بطرح ② من ①** : ∴ حـ ء = حـ هـ

★ ثالثا : الشكل الرباعي الدائري :

أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

❶ في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين .....

(أ) متساويتان (ب) متتامتان (حـ) متكاملتان (ء) متبادلتان

---

❷ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : ق(∠ أ) = ٣ ق(∠ حـ) فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (حـ) ١٢٠° (ء) ١٣٥°

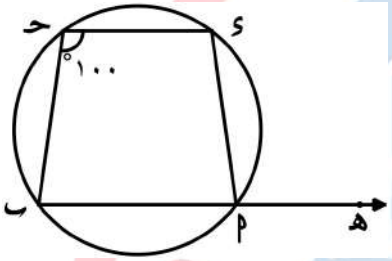
---

❸ أي من الأشكال الآتية يسمي رباعيًا دائريًا ؟ .....

(أ) المعين (ب) المربع (حـ) متوازي الأضلاع (ء) شبه المنحرف

---

❹ **في الشكل المقابل :**



هـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$ ، ق(∠ حـ) = ١٠٠°

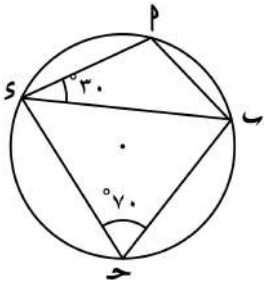
فإن : ق(∠ ء أ هـ) = ...

(أ) ٨٠° (ب) ٦٠°

(حـ) ١٠٠° (ء) ٢٠٠°

---

❺ **في الشكل المقابل :**



ق(∠ حـ) = ٧٠° ، ق(∠ أ ء ب) = ٣٠°

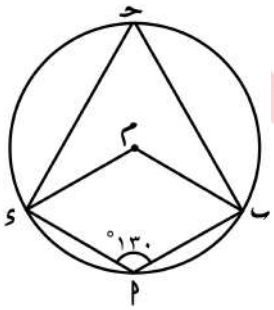
فإن : ق(∠ أ ب ء) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠°

(حـ) ٧٠° (ء) ١٠٠°

---

❻ **في الشكل المقابل :**



إذا كان : ق(∠ أ) = ١٣٠°

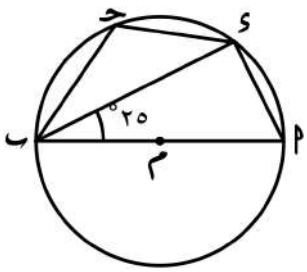
فإن : ق(∠ ب م ء) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٨٠°

(حـ) ١٠٠° (ء) ١٣٠°

---

❼ **في الشكل المقابل :**



$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م ، ق(∠ أ ب ء) = ٢٥°

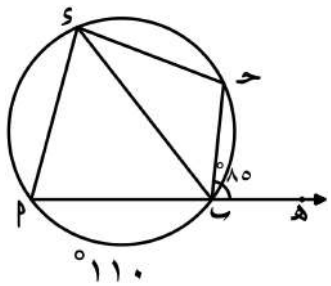
فإن : ق(∠ حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٠٠°

(حـ) ١١٥° (ء) ١٢٥°

ثانيًا : الأسئلة المقالية

١ في الشكل المقابل :



هـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، هـ ∉ $\overline{أب}$ ، ق($\widehat{أب}$) = ١١٠°

، ق(∠ حـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد : ق(∠ ب د حـ)

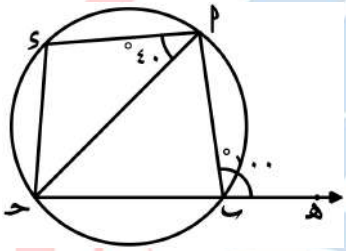
البرهان : ∵ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ حـ ب هـ) الخارجة = ق(∠ حـ د أ) المقابلة للمجاورة لها = ٨٥°

∵ ق(∠ ب د أ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق($\widehat{أب}$) = ٥٥°

∴ ق(∠ ب د حـ) = ٨٥° − ٥٥° = $\boxed{٣٠°}$

٢ في الشكل المقابل :



ق(∠ أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق(∠ حـ أ د) = ٤٠°

أثبت أن : ق($\widehat{حـ د}$) = ق($\widehat{أ د}$)

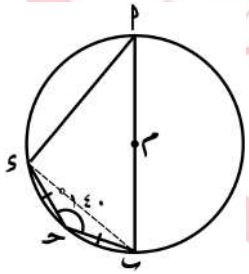
البرهان : ∵ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ أ ب هـ) الخارجة = ق(∠ د) المقابلة للمجاورة لها = ١٠٠°

∴ △ أ د حـ : ق(∠ أ حـ د) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ ق(∠ حـ أ د) = ق(∠ أ حـ د) = ٤٠° ∴ $\boxed{ق(\widehat{حـ د}) = ق(\widehat{أ د})}$

٣ في الشكل المقابل :



أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

، م ∈ $\overline{أب}$ ، حـ ب = حـ د ، ق(∠ ب حـ د) = ١٤٠°

أوجد : ❶ ق(∠ أ) ❷ ق(∠ د)

العمل : نرسم $\overline{ب د}$

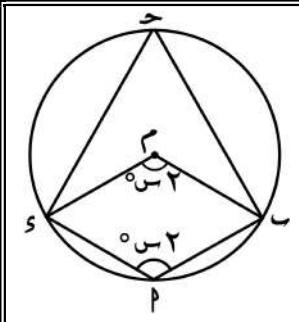
البرهان : ∵ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري ∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = $\boxed{٤٠°}$

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ أ د ب) = ٩٠°

∵ حـ ب = حـ د ∴ ق(∠ ب د حـ) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∴ ق(∠ أ د حـ) = ٩٠° + ٢٠° = $\boxed{١١٠°}$

٤ في الشكل المقابل :



ق(∠ م) = ق(∠ أ) = ٢ س°

أوجد : ق(∠ أ)

البرهان : ∵ ق(∠ م) = ٢ س°

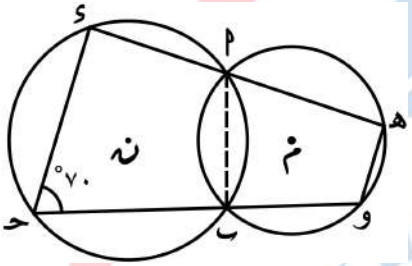
∴ ق(∠ حـ) المحيطية = ½ ق(∠ م) المركزية = س°

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ٢ س° + س° = ١٨٠° ∴ ٣ س° = ١٨٠° (÷ ٣)

∴ س° = ٦٠° ∴ ق(∠ أ) = ٢ س° = **١٢٠°**

٥ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

،رسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يقطعان الدائرة ن في ء ، حـ

،الدائرة م في هـ ، و على الترتيب ، ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠°

❶ **أوجد :** ق(∠ و) ❷ **برهن أن :** $\overline{حـ ء}$ // $\overline{هـ و}$

العمل : نرسم $\overline{أ ب}$

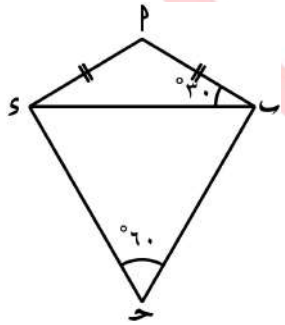
البرهان : ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ هـ أ ب) الخارجة = ق(∠ حـ) المقابلة للمجاورة لها = ٧٠°

∵ الشكل أ ب و هـ رباعي دائري ∴ ق(∠ و) = ١٨٠° - ٧٠° = **١١٠°**

∵ ق(∠ و) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° وهما في تداخل ∴ **$\overline{حـ ء}$ // $\overline{هـ و}$**

٦ في الشكل المقابل :



أ ب = أ ء ، ق(∠ أ ب ء) = ٣٠°

، ق(∠ حـ) = ٦٠°

برهن أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

البرهان :

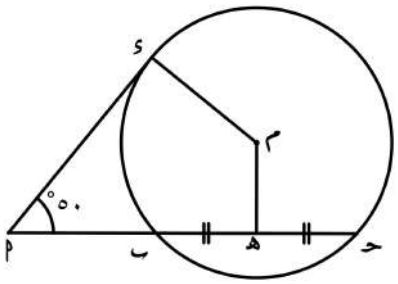
∵ أ ب = أ ء ∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) = ٣٠°

∴ △ أ ب ء : ق(∠ أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

٧ في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أء}$ مماس للدائرة م ، $\overline{أحـ}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ

، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ، ق(∠أ) = ٥٠°

❶ **أثبت أن :** الشكل أ هـ م ء رباعي دائري

❷ **أوجد :** ق(∠ء م هـ)

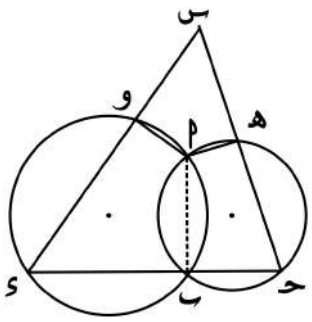
البرهان : ∵ هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{بحـ}$ ∴ ق(∠م هـ ب) = ٩٠°

∵ $\overleftarrow{أء}$ مماس للدائرة م عند ء ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أء}$ ∴ ق(∠م ء أ) = ٩٠°

∵ ق(∠م هـ ب) + ق(∠م ء أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ الشكل أ هـ م ء رباعي دائري ∴ ق(∠ء م هـ) = ١٨٠° − ٥٠° = **١٣٠°**

٨ في الشكل المقابل :



دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، $\overline{حء}$ يمر بالنقطة ب

ويقطع الدائرتين في حـ ، ء ، $\overleftarrow{حهـ} \cap \overleftarrow{ءو}$ = {س}

برهن أن : الشكل أ و س هـ رباعي دائري

العمل : نرسم $\overline{أب}$

البرهان :

∵ الشكل أ ب حـ هـ رباعي دائري ∴ ق(∠س هـ أ) الخارجة = ق(∠أ ب حـ) المقابلة للمجاورة

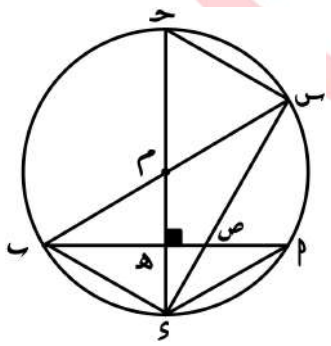
∵ الشكل أ ب ء و رباعي دائري ∴ ق(∠س و أ) الخارجة = ق(∠أ ب ء) المقابلة للمجاورة

∵ حـ ، ب ، ء على استقامة واحدة ∴ ق(∠أ ب حـ) + ق(∠أ ب ء) = ١٨٠°

∴ ق(∠س هـ أ) + ق(∠س و أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري

٩ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{حء}$ قطر فيها عمودي على $\overline{أب}$

، $\overline{سء} \cap \overline{أب}$ = {ص}

برهن أن : ❶ الشكل س ص هـ حـ رباعي دائري

❷ ق(∠ء ص ب) = ق(∠ء ب س)

البرهان :

∵ $\overline{حء}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠حـ س ء) = ٩٠°

∵ $\overline{حء} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠حـ هـ أ) = ٩٠°

∵ ق(∠حـ س ء) + ق(∠حـ ص أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

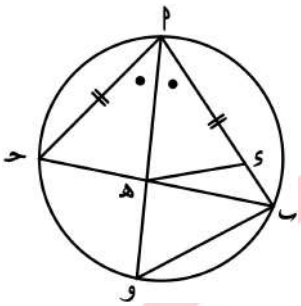
∴ الشكل س ص هـ حـ رباعي دائري

∴ ق(∠ ء ص ب) الخارجة = ق(∠ س حـ ء) المقابلة للمجاورة ①

∵ ق(∠ س حـ ء) المحيطية = ق(∠ س ب ء) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ء ص ب) = ق(∠ ء ب س)

١٠ في الشكل المقابل :



أ ء = أ حـ ، $\overleftarrow{أ و}$ ينصف (∠ أ)

أثبت أن : الشكل ء ب و هـ رباعي دائري

البرهان : ∵ ΔΔ أ و هـ ، أ و حـ فيهما :

أ ء = أ حـ ، ق(∠ هـ أ ء) = ق(∠ هـ أ حـ) ، $\overline{أ هـ}$ ضلع مشترك

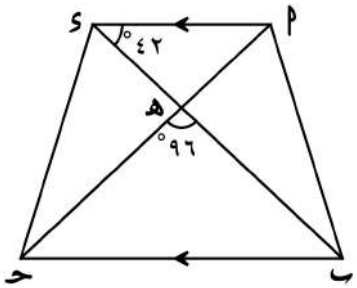
∴ Δ أ هـ ء ≡ Δ أ هـ حـ وينتج أن : ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ حـ) ①

∵ ق(∠ أ و ب) المحيطية = ق(∠ أ حـ ب) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ أ ء هـ) الخارجة = ق(∠ و) المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل ء ب و هـ رباعي دائري

١١ في الشكل المقابل :



$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق(∠ أ ء ب) = ٤٢°

، ق(∠ ب هـ حـ) = ٩٦°

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

البرهان :

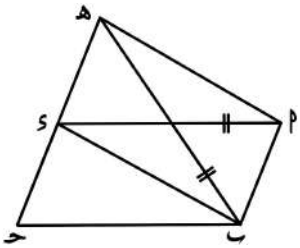
∵ $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ∴ ق(∠ ء ب حـ) = ق(∠ أ ء ب) = ٤٢° **بالتبادل**

∵ Δ هـ ب حـ : ق(∠ هـ حـ ب) = ١٨٠° - (٩٦° + ٤٢°) = ٤٢°

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ حـ ب) = ٤٢° وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{أ ب}$

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

١٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{حـ ء}$ حيث ب هـ = أ ء

أثبت أن : الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

البرهان :

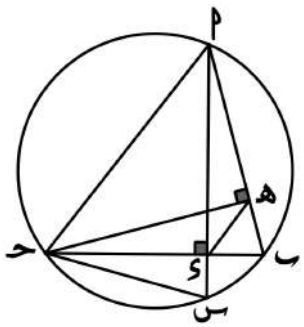
∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ∴ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ حـ) ① ، أ ء = ب حـ

∴ ب هـ = أ ء ∴ ب هـ = ب حـ ∴ ق(∠ ب هـ حـ) = ق(∠ حـ) ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب هـ ء) وهما زاويتان مرسومتان على $\overline{ب ء}$

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

١٣ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع الدائرة في س

برهن أن : ❶ الشكل أ هـ ء حـ رباعي دائري

❷ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ينصف (∠ هـ حـ س)

البرهان :

∵ $\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ أ هـ حـ) = ٩٠°

∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ هـ حـ) = ق(∠ أ ء حـ) = ٩٠° وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ الشكل أ هـ ء حـ رباعي دائري

∴ ق(∠ هـ أ ء) = ق(∠ هـ حـ ء) لأنهما مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{هـ ء}}$ ①

∴ ق(∠ ب أ س) المحيطية = ق(∠ ب حـ س) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ∴ ق(∠ هـ حـ ء) = ق(∠ ب حـ س)

∴ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ينصف (∠ هـ حـ س)

★ رابعًا : العلاقة بين مماسات الدائرة :

أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

❶ الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين .....

(أ) وترين (ب) مماسين (حـ) وتر ومماس (ء) وتر وقطر

❷ مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع .....

(أ) متوسطاته (ب) ارتفاعاته

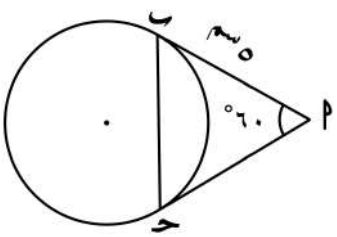
(حـ) منصفات زواياه الداخلة (ء) محاور تماثل أضلاعه

❸ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع .....

(أ) منصفات زواياه الداخلة (ب) منصفات زواياه الخارجة

(حـ) ارتفاعاته (ء) محاور تماثل أضلاعه

❹ **في الشكل المقابل :** $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ مماس ، ق(∠ أ) = ٦٠°



، أ ب = ٥ سم **فإن :** طول $\overline{\text{حـ ب}}$ = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥

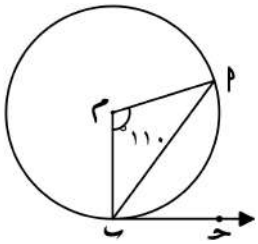
(حـ) ١٠ (ء) ١٥

٥ في الشكل المقابل : $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة م

، ق(∠ أ م ب) = ١١٠° **فإن :** ق(∠ أ ب حـ) = ...

(أ) ٥٥° (ب) ١١٠°

(حـ) ٧٠° (ء) ٢٢٠°

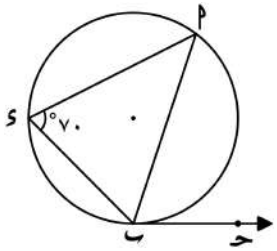


٦ في الشكل المقابل : $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة م

، ق(∠ ء) = ٧٠° **فإن :** ق(∠ أ ب حـ) = ...

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠°

(حـ) ١١٠° (ء) ١٤٠°



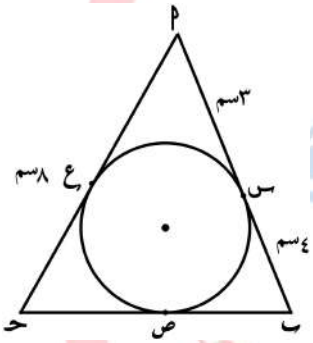
ثانيًا : الأسئلة المقالية

١ في الشكل المقابل :

دائرة داخل المثلث أ ب حـ ،وتمس أضلاعه من الداخل

عند س ، ص ، ع ، فإذا كان : أ س = ٣ سم

، س ب = ٤ سم ، أ حـ = ٨ سم **أوجد :** طول $\overline{\text{ب حـ}}$



البرهان :

∵ $\overline{\text{ب س}}$ ، $\overline{\text{ب ص}}$ قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص = ٤ سم

∵ $\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{أ ع}}$ قطعتان مماستان ∴ أ س = أ ع = ٣ سم

∴ أ حـ = ٨ سم ∴ ع حـ = ٨ − ٣ = ٥ سم

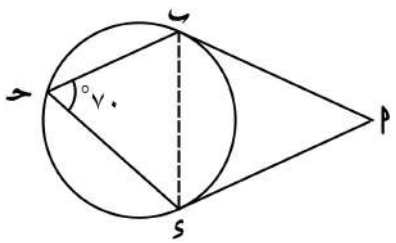
∵ $\overline{\text{حـ ص}}$ ، $\overline{\text{حـ ع}}$ قطعتان مماستان ∴ حـ ص = حـ ع = ٥ سم

∴ ب حـ = ٤ + ٥ = **٩ سم**

٢ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ء

، ق(∠ حـ) = ٧٠° **أوجد :** ق(∠ أ)



البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

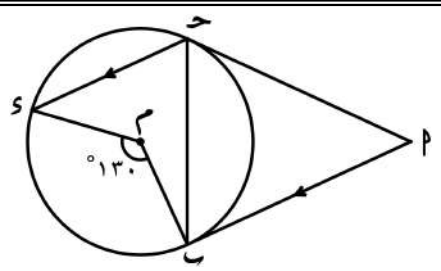
∴ ق(∠ أ ب ء) المماسية = ق(∠ حـ) المحيطية = ٧٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ء ∴ أ ب = أ ء

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ ء ب) = ٧٠°

∴ Δ أ ب ء : ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = **٤٠°**

٣ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

، $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

❶ **أثبت أن :** $\overleftarrow{حـب}$ ينصف (∠ أ حـ ء)

❷ **أوجد :** ق(∠ أ)

البرهان : ∵ ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

∴ ق(∠ ب حـ ء) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ء) المركزية = ٦٥°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٦٥° **بالتبادل**

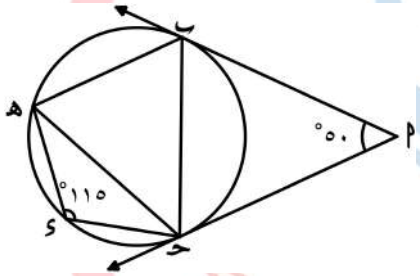
∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ ∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ٦٥°

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ب حـ ء) = ٦٥° ∴ $\boxed{\overline{حـب} \text{ ينصف } (∠ أ حـ ء)}$

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° - (٦٥° + ٦٥°) = $\boxed{٥٠°}$

٤ في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

، ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ حـ ء هـ) = ١١٥°

أثبت أن : ❶ $\overleftarrow{بحـ}$ ينصف (∠ أ ب هـ) ❷ حـ ب = حـ هـ

❸ $\overline{أحـ}$ // $\overline{بهـ}$

البرهان : ∵ الشكل ب حـ ء هـ رباعي دائري ∴ ق(∠ حـ ب هـ) = ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∵ $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ ∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

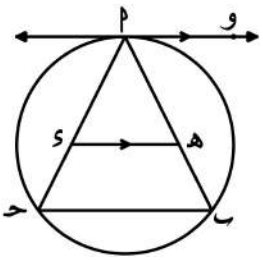
∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ حـ ب هـ) = ٦٥° ∴ $\boxed{\overleftarrow{بحـ} \text{ ينصف } (∠ أ ب هـ)}$ ①

∵ ق(∠ ب هـ حـ) المحيطية = ق(∠ أ ب حـ) المماسية = ٦٥° (مشتركتان في $\overset{\frown}{بحـ}$)

∴ △ ب حـ هـ فيه : ق(∠ حـ ب هـ) = ق(∠ حـ هـ ب) = ٦٥° ∴ $\boxed{حـب = حـهـ}$ ②

∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ حـ ب هـ) = ٦٥° وهما في وضع التبادل ∴ $\boxed{\overline{أحـ} \text{ // } \overline{بهـ}}$ ③

٥ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

برهن أن : الشكل ء هـ ب حـ رباعي دائري

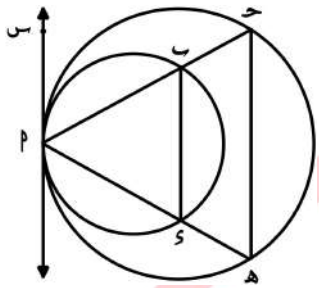
البرهان : ∵ $\overleftarrow{\text{أ و}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ ∴ ق(∠ و أ هـ) = ق(∠ أ هـ ء) بالتبادل ①

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ مماس للدائرة عند أ ∴ ق(∠ و أ ب) المماسية = ق(∠ أ حـ ب) المحيطية ②

من ① ، ② : ق(∠ أ هـ ء) الخارجة = ق(∠ أ حـ ب) المقابلة للمجاورة

∴ الشكل ء هـ ب حـ رباعي دائري

٦ في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل في أ

، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس مشترك لهما

أثبت أن : $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس مشترك للدائرتين

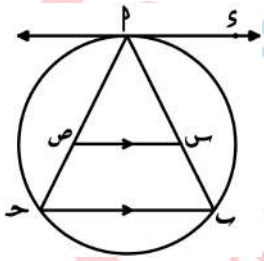
∴ في الدائرة الصغرى : ق(∠ ب ء أ) المحيطية = ق(∠ ب أ س) المماسية ①

∴ في الدائرة الكبرى : ق(∠ حـ هـ أ) المحيطية = ق(∠ حـ أ س) المماسية ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ب ء أ) = ق(∠ حـ هـ أ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$

٧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة عند أ

، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة التي تمر بالنقط أ ، س ، ص

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة عند أ

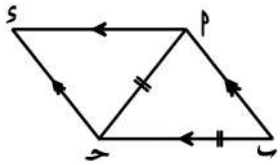
∴ ق(∠ ء أ ب) المماسية = ق(∠ أ حـ ب) المحيطية ①

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ أ حـ ب) بالتناظر ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ء أ س) = ق(∠ أ ص س)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

٨ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ حـ = ب حـ



أثبت أن : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهان : ∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ أ حـ ء) بالتبادل ①

∵ أ حـ = ب حـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب أ حـ) ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ أ حـ ء) = ق(∠ ب)

∴ $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ