٣

مدرسة مصر الخير الإعدادية بجهينة - سوهاج

٢٠٢١

ملزمة

الجبر والإحصاء

الصف الثالث الإعدادي

الترم الأول

إعداد و تصميم

محمود عوض حسن

معلم أول رياضيات

تساوى زوجين مرتبين

• الزوج المرتب: (أ ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ : المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب : المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

◆ (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) فمثلا (٢ ، ٥) ≠ (٥ ، ٢)

◆ (١ ، ٣) يسمى زوج مرتب بينما {١ ، ٣} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا: إذا كان (س ، ص) = (٥ ، ٣) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا : إذا كان (س – ٢ ، ١٠) = (٧ ، ص+٢)

فإن س – ٢ = ٧ ⬅ س = ٩ ، ص +٢ = ١٠ ⬅ ص = ٨

مثال ١

إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣)

فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س+٢ص}}$

الحل

س – ١ = ٨ ∴ س = ٩

ص + ٣ = ١١ ∴ ص = ٨

∴ $\sqrt{\text{س+٢ص}} = \sqrt{٩ + ٢ \times ٨}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال 2

إذا كانت ($\text{س}^{٥}$ ، ص +١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{س}^{٥}$ = ٣٢ ∴ $\text{س}^{٥}$ = $٢^{٥}$

∴ س = ٢

ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ ∴ ص + ١ = ٣

∴ ص = ٢

تدريب

إذا كانت: (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب – ١)

فإن أ = ... ، ب = ...

إعداد أ/ محمود عوض

١

حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين س ، ص

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين س ، ص يكتب س × ص ويقرأ س ضرب ص
- س × ص : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمى للمجموعة س ومسقطها الثانى ينتمى للمجموعة ص.

أي أن: س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

- فمثلا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

فإن : س × ص = {١ ، ٣} × {٢ ، ٤ ، ٦}

= { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

بينما ص × س = {٢ ، ٤ ، ٦} × {١ ، ٣}

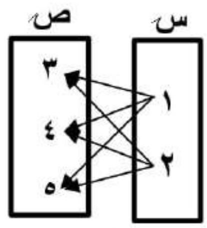
= { (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) }

- لاحظ أن : س × ص ≠ ص × س
- يمكن تمثيل س × ص كمخطط سهمى ومخطط بيانى كما في المثال التالى.

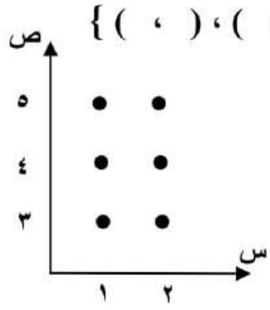
مثال إذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

فأوجد س × ص ومثله بمخطط سهمى وآخر بياني

الحل : س × ص = { (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) ، (،) }



مخطط سهمى



مخطط بيانى

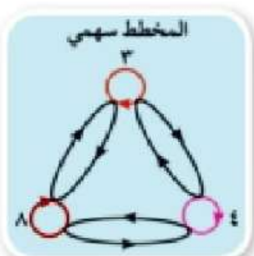
تعليم محمود عوض
معلم أول رياضيات

حاصل الضرب الديكارتي س × س أو س٢

- إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٨}

فإن : س × س أو س٢ = {٣ ، ٤ ، ٨} × {٣ ، ٤ ، ٨}

= { (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٣،٨) ، (٤،٣) ، (٤،٤) ، (٤،٨) ، (٨،٣) ، (٨،٤) ، (٨،٨) }



عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

◆ إذا كانت س = {٢ ، ٥} فإن عدد عناصر س = ٢ وتكتب ن (س) = ٢

◆ إذا كانت ص = {٤} فإن ن (ص) = ١ وليس ٤

القاعدة: $\boxed{\text{ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)}}$

فمثلا: إذا كانت ن (س) = ٤ ، ن (ص) = ٥ فإن ن (س × ص) = ٤ × ٥ = ٢٠

أيضا: إذا كانت س = {١ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦} فإن ن (س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

العمليات على المجموعات

إذا كانت س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥} فإن:

◆ **التقاطع ∩** : س ∩ ص = { ٣ } ← خد المكرر

◆ **الاتحاد ∪** : س ∪ ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← خد الكل ، والمكرر مرة واحدة

◆ **الفرق ــ** : س ـ ص = { ٢ } ← خد الموجود في س ومش موجود في ص

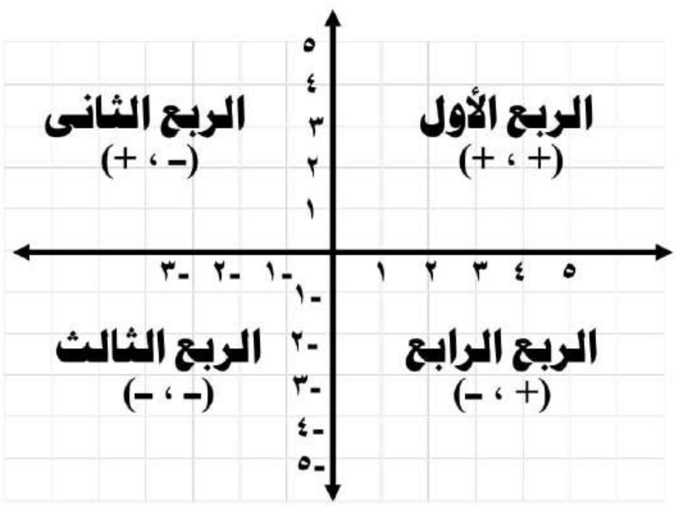
ص ـ س = {٤ ، ٥} ← خد الموجود في ص ومش موجود في س

الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبعة التربيعية إلى ٤ أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتى إحداثييها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثى السينى = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل (٠ ، ٣)
- إذا كان الإحداثى الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل (٢ ، ٠)

مثال

- النقطة (٥ ، ٢) تقع في الربع الأول
- النقطة (-٢ ، ٣) تقع في الربع الثاني
- النقطة (-٣ ، -٤) تقع في الربع الثالث
- النقطة (١ ، -٣) تقع في الربع الرابع
- النقطة (٠ ، ٢) تقع على محور الصادات
- النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور السينات
- النقطة (٠ ، ٠) تسمى نقطة الأصل "و"



تدريب

◆ النقطة (٣ ، -٢) تقع ....

◆ النقطة (-٥ ، ٦) تقع ....

◆ النقطة (-٤ ، -٧) تقع ....

◆ النقطة (٠ ، -٢) تقع ....

◆ النقطة (٥ ، ٠) تقع ....

◆ النقطة (٣ ، ٤) تقع ....

أمثلة محلولة

إعداد / محمود عوض حسن

١ إذا كانت س × ص = { (٢،٢) ، (٢،٥) ، (٢،٧) }

أوجد : ١) ص ٢) ص × س

٣) ن (ص^٢)

الحل

- ص = { ٢ ، ٥ ، ٧ }
- ص × س = { (٢،٢)، (٥،٢)، (٧،٢) }
- ن (ص^٢) = ٣ × ٣ = ٩

٢ إذا كانت س = {٣،٤} ، ص = { ٤، ٥ }

، ع = { ٦، ٥ } فأوجد :

١) س × (ص∩ع) ٢) (س − ص) × ع

الحل

التجهيز: (ص ∩ ع) = { ٥ } ، س − ص = { ٣ }

- س × (ص∩ع) = {٣،٤} × { ٥ }
= { (٣،٥)، (٤،٥) }
- (س − ص) × ع = { ٣ } × { ٦،٥ }
= { (٣،٦)، (٣،٥) }

٣ إذا كانت س = {٢،٥} ، ص = { ١، ٢ }

، ع = { ٣ } فأوجد :

١) ن (س × ع) ٢) (ص ∩ س) × ع

الحل

١ ن (س×ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢×١ = ٢

٢ التجهيز: (ص ∩ س) = { ٢ }

(ص ∩ س) × ع = { ٢ } × { ٣ } = { (٢،٣) }

٤ إذا كانت س = {١،٥،٦} ، ص = { ٢، ٤، ٥ }

فأوجد : ١) ص × س ومثله بمخطط سهمى

٢) ن (س × ص)

الحل

١ ص × س = { (٢،١)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٤،١)، (٤،٥)، (٤،٦)، (٥،١)، (٥،٥)، (٥،٦) }

مثل المخطط بنفسك

٢ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٣×٣ = ٩

٥ إذا كانت س = {٢،٣} ص = { ٣، ٤، ٥ }

فأوجد : ١) س × ص

٢) (س × ص) ∩ ص^٢

الحل

١ س × ص = { (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥)، (٣،٣)، (٣،٤)، (٣،٥) }

٢ ص^٢ = { (٣،٣)، (٣،٤)، (٣،٥)، (٤،٣)، (٤،٤)، (٤،٥)، (٥،٣)، (٥،٤)، (٥،٥) }

(س × ص) ∩ ص^٢ = { (٣،٣)، (٣،٤)، (٣،٥) }

٦ إذا كانت س = {٢، -١} ص = { ٤، ٠ }

، ع = { ٤، ٥، -٢ } فأوجد :

فأوجد : ١) س × ص ٢) س^٢

٣) ن (س × ع) ٤) ن (ع^٢) ٥) ن(ص^٢)

الحل

١ س × ص = { (٢،٤)، (٢،٠)، (-١،٤)، (-١،٠) }

٢ س^٢ = { (٢،٢)، (٢،-١)، (-١،٢)، (-١،-١) }

٣ ن (س × ع) = ن (س) × ن (ع) = ٢ × ٣ = ٦

٤ ن (ع^٢) = ن (ع) × ن (ع) = ٣ × ٣ = ٩

٥ ن (ص^٢) = ن (ص) × ن (ص) = ٢ × ٢ = ٤

إعداد أ/ محمود عوض

العلاقة ع

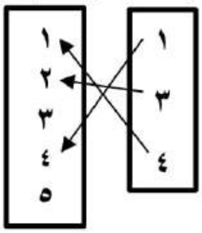
- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج **بيان العلاقة** من أزواج الضرب الديكارتي حسب **شرط** معين يعطى لك في المسألة
- **المقصود بجملة أ ع ب** : أي علاقة أ ، ب حيث أ هى المسقط الأول ، ب هي المسقط الثانى في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول ∋ س ، المسقط الثانى ب ∋ ص

مثال ١ إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٤ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٥

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج اللى ينطبق عليها الشرط أ + ب = ٥ يعنى المسقط الأول + المسقط الثانى = ٥

بيان ع = { (١،٤)، (٣،٢)، (٤،١) }



تدريب إذا كانت س = { ٢، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ = $\frac{١}{٢}$ ب

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

الحل

اختر الأزواج اللى فيها المسقط الأول نصف الثانى

بيان ع =

متي تكون العلاقة دالة ؟!

- يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتى:
  - **إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط** (في بيان ع)
  - **أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط** (في المخطط السهمى)
- إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثانى في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

أمثلة على العلاقة

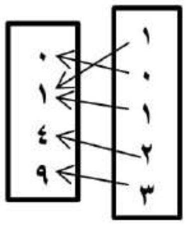
إعداد / محمود عوض حسن

١

إذا كانت س = { -١، ٠، ١، ٢، ٣}، ص = {٠، ١، ٤، ٦، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^٢$ = ب "
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان ع = { (-١، ١)، (٠، ٠)، (١، ١)، (٢، ٤)، (٣، ٩) }



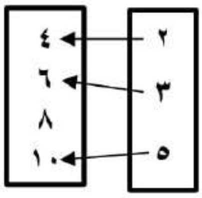
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
أو لأن كل عنصر من س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٠، ١، ٤، ٩ }

٢

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " ٢ أ = ب "
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٥، ١٠) }



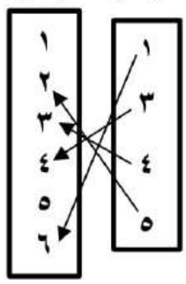
- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }

٣

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن أ + ب = ٧
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

الحل

بيان ع= { (١، ٦)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٥، ٢) }

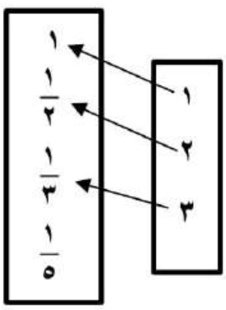


- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ٢، ٣، ٤، ٦ }

٤

إذا كانت س = { ١، ٢، ٣} ، ص = { ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب
١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
٢) بين أن ع دالة واكتب مداها

بيان ع= { (١، ١)، (٢ ، $\frac{١}{٢}$)، (٣ ، $\frac{١}{٣}$) }



- ع دالة
- لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط .
- المدى = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

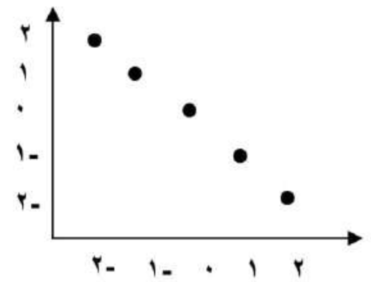
٥

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعنى أن العدد أ معكوس جمعى للعدد ب

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان ع = { (-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢) }



- ع دالة
- لأن كل عنصر من س ظهر في بيان ع كمسقط أول مرة واحدة فقط .
- المدى = { ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ }

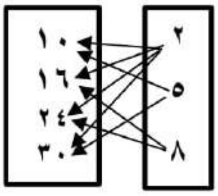
٦

إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.هل ع دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (٢،١٠)، (٢،١٦)، (٢،٢٤)، (٢،٣٠)، (٥،١٠)، (٥،٣٠)، (٨،١٦)، (٨،٢٤) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت س = { ١، ٣ ، ٥ } ، وكانت ع علاقة معرفة على س

وكان بيان ع = { (أ ، ٣)، (ب ، ١)، (١ ، ٥) }

١) أوجد مدى الدالة

٢) أوجد القيمة العددية للمقدار أ + ب

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثانى

المدى = { ٣ ، ١ ، ٥ }

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..

العنصر ١ ظهر يبقى أ ، ب هما ٣ ، ٥

أ + ب = ٣ + ٥ = ٨

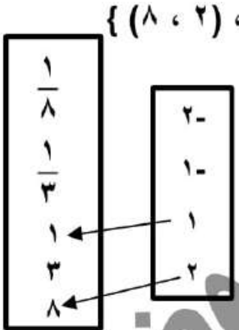
٨

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ }، ص = { $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن " $أ^{٣}$ = ب "

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وهل ع دالة أم لا ، ولماذا؟

الحل

بيان ع = { (١،١)، (٢ ، ٨) }



- ع ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من س لم يخرج منه أسهم.

محمود عوض

إعداد أ/ محمود عوض

٣

الدالة

- يرمز للدالة بالرمز د أو ر أو ق
- إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ⟵ ص ويكون :

❖ **المجال**: هو عناصر المجموعة س

❖ **المجال المقابل**: هو عناصر المجموعة ص

❖ **المدى**: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)

- قاعدة الدالة: تكون مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س + ١ ، د(س) = س^{٢} + ٢س – ٣ وهكذا
- لاحظ أن : د(س) هي نفسها ص أي أن : د(س) = ص

مثال ١

إذا كانت د: س ⟵ ص ، س = { ٣، ٥ ، ٧ }
، ص = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }
بيان د = { (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١) }

فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل
٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

الحل

١- مجال الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

٢- المجال المقابل = { ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢١ }

٣- مدى الدالة = { ٩ ، ١٥ ، ٢١ }

٤- قاعدة الدالة هي : د (س) = ٣س

مثال ٢

إذا كان بيان الدالة د = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥)
، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١) }

فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة
٢- قاعدة الدالة

◆ مجال الدالة = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

◆ مدى الدالة = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

◆ قاعدة الدالة هي : د(س) = ٢س + ١

محمود عوض

ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في س^{٢} نضع العدد بين قوسين فمثلا إذا كانت س = -٣ فإن س^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة س أو قيمة ص أو كلاهما ويمكن الاستعانة بالآتى:

١ إذا كان (٢ ، ٥) ينتمى لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٢ ، د(س) أو ص = ٥

٢ إذا كان د (٣) = ٧ فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن س = ٣ ، د(س) أو ص = ٧

مسائل على التعويض فى الدالة

١ إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥

أوجد قيمة ب

الحل

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن س = ٣ الناتج هيساوى ١٥

٤ × ٣ + ب = ١٥

١٢ + ب = ١٥ ∴ ب = ٣

٢ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٤س ـ ٥

فأوجد قيمة أ

الحل

من الزوج (أ ، ٣) نأخذ س = أ ، د (س) = ٣

بالتعويض في الدالة

∴ ٣ = ٤ أ ـ ٥

٤ أ = ٣ + ٥ ⟸ ٤ أ = ٨

∴ أ = ٢

٣ إذا كانت د (س) = $س^٢$ ـ ٣س ، ر (س) = س ـ ٣

فأوجد د ($\sqrt{٢}$) + ٣ ر ($\sqrt{٢}$)

الحل

د ($\sqrt{٢}$) = $(\sqrt{٢})^٢$ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$

ر ($\sqrt{٢}$) = $\sqrt{٢}$ ـ ٣

٣ ر($\sqrt{٢}$) = ٣ $\sqrt{٢}$ ـ ٩

د ($\sqrt{٢}$)+٣ ر($\sqrt{٢}$) = ٢ ـ ٣ $\sqrt{٢}$ + ٣ $\sqrt{٢}$ ـ٩= ـ ٧

٤ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٦س ـ أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمتى أ ، ب

الحل

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠

من الزوج (ب ، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص =٣

٣ = ٦ × ٠ ـ أ ⟸ ٣ = ٠ ـ أ

ـ أ = ٣ ⟸ أ = ٣

٥ إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٥ ـ س

فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

الحل

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س

د (٠) = ٥ ـ ٠ = ٥

د(١) = ٥ ـ ١ = ٤

د (٣) = ٥ ـ ٣ = ٢

∴ صور عناصر س (هي المدى) = { ٥ ، ٤ ، ٢ }

٦ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص ={ ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٩ ـ س

فأوجد بيان الدالة د ثم أوجد المدى .

الحل

نعوض في الدالة د(س) = ٩ ـ س عن قيم المجموعة س

د (٢) = ٩ ـ ٢ = ٧

د(٣) = ٩ ـ ٣ = ٦

د (٤) = ٩ ـ ٤ = ٥

بيان د = { (٢،٧) ، (٣،٦) ، (٤،٥) }

المدى = { ٧ ، ٦ ، ٥ }

٤ دوال كثيرات الحدود

◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير س ∈ ط ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ **أمثلة لدوال كثيرات حدود:**

مثل: د(س) = ٢س + ١ ، د(س)= $س^٢$ + ٣س − ٢ ، د(س) = $س^٣$ − ٨

◆ **أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :**

مثل: د(س)= $س^٢$ + $\sqrt{س}$ + ٨ ، د(س) = س (س + $\frac{١}{س}$ + ٢)

درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د: د(س) = $س^٤$ + ٢$س^٣$ + ٥ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د: د(س) = $س^٢$ + ٢س - ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د: د(س) = س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د: د(س) = ٧ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال١: الدالة د: د(س) = $س^٢$ (س + ٢) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^٣$ + ٢$س^٢$ ∴ د دالة من الدرجة الثالثة

مثال٢: الدالة د: د(س) = $س^٢$ − ($س^٢$ − ٣س + ١) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

الحل: نبسط الدالة فتكون : د(س) = $س^٢$ − $س^٢$ + ٣س − ١ = ٣س + ١ ∴ د دالة من الدرجة الأولى

مثال ١

إذا كان د(س) = $س^٢$ − س + ٣

فأوجد : د(-٢) ، د(٠) ، د($\sqrt{٣}$)

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (-٢) = $(-٢)^٢$ − -٢ + ٣ = ١١

د (٠) = $٠^٢$ − ٠ + ٣ = ٣

د ($\sqrt{٣}$) = $(\sqrt{٣})^٢$ − $\sqrt{٣}$ + ٣

= ٩ − $\sqrt{٣}$ + ٣ = ١٢ − $\sqrt{٣}$

مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٢$س^٢$ − ٥س + ٢

١) اذكر درجة الدالة د

٢) اثبت أن د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

الحل

- الدالة د من الدرجة الثانية
- د (٢) = ٢ × $٢^٢$ − ٥ × ٢ + ٢ = صفر

د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × $(\frac{١}{٢})^٢$ − ٥× $\frac{١}{٢}$ + ٢ = صفر

∴ د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

محمود عوض معلم أول رياضيات

الدالة الخطية

إعداد أ/ محمود عوض

◆ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة **الأولى**

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س – ١ ، د(س) = ٥س +٣

◆ تكون على الصورة د(س) = أ س + ب حيث أ ≠ ٠ وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ، ٠)

فمثلا: إذا كانت د: د(س) = ٢س – ٥ فإن أ = ٢ ، ب = –٥ ومنها فإن :

- نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، –٥)
- نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي ($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)

◆ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠
و نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ⟸ نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ⟸ نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

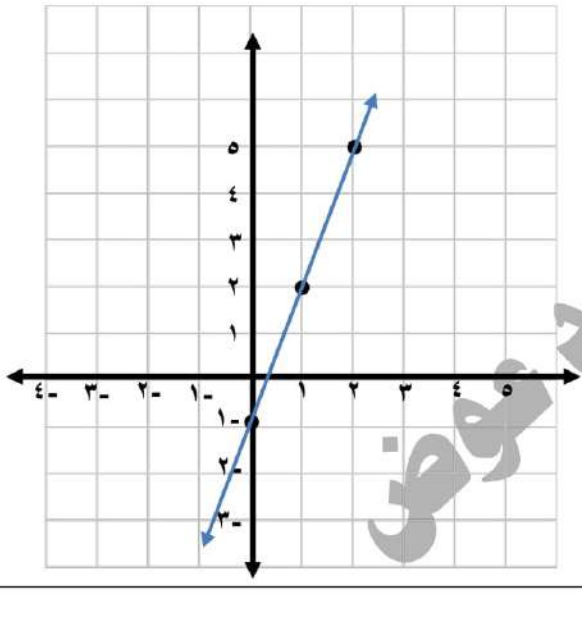
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣ س – ١

وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحل

في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم لـ س

س	٣س – ١	ص
٠	٣ × ٠ – ١	-١
١	٣ × ١ – ١	٢
٢	٣ × ٢ – ١	٥



من قاعدة الدالة: أ = ٣ ، ب = –١

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات ($\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$ ، ٠) هى ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

، نقطة التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ب) هى (٠ ، -١)

محمود عوض
تصميم محمود عوض معلم أول رياضيات

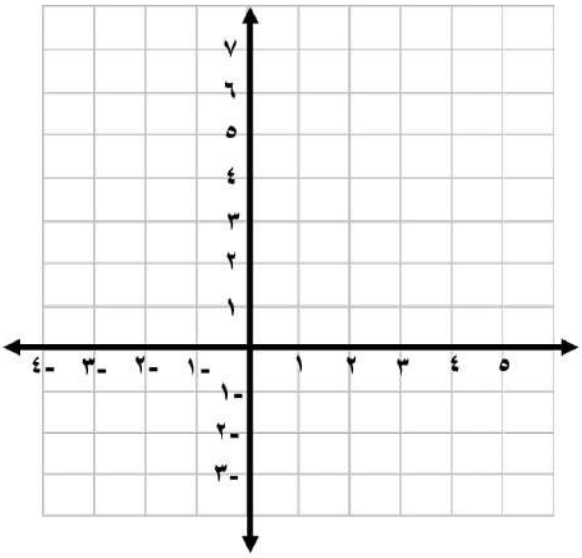
تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ٢ س – ٣

وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

الحـل

س	٢س – ٣	ص



الدالة الثابتة

❖ الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∋ ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د (س) = ٧ ، د (س) = ٥ ، د (س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د (س) = ٥ فإن د (١) = ٥ ، د (٥) = ٥ ، د (-٥) = ٥ ، د (٠) = ٥ وهكذا

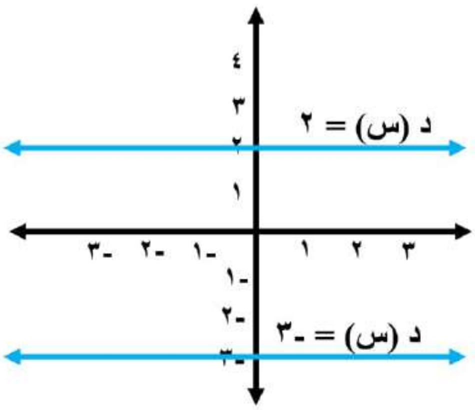
فمثلا: إذا كانت د (س) = ٧ فإن د(٣) + د (-٣) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور السينات

◆ مثال١ : مثل بيانيا الدالة د (س) = ٢

◆ مثال٢ : مثل بيانيا الدالة د (س) = -٣

الحل



إعداد أ/ محمود عوض

الدالة التربيعية

❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ تسمى دالة تربيعية

مثل: د(س) = س^{٢} ، د(س) = ــ س^{٢} ، د(س) = س^{٢} ــ ٥ ، د(س) = س^{٢} ــ ٢ س + ١

ملاحظات هامة

١ إذا كان معامل س^{٢} موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

٢ إذا كان معامل س^{٢} سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

٣ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ بالقانون:

نقطة رأس المنحنى = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د($\frac{-ب}{٢أ}$))

٤ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة العظمى أو الصغرى

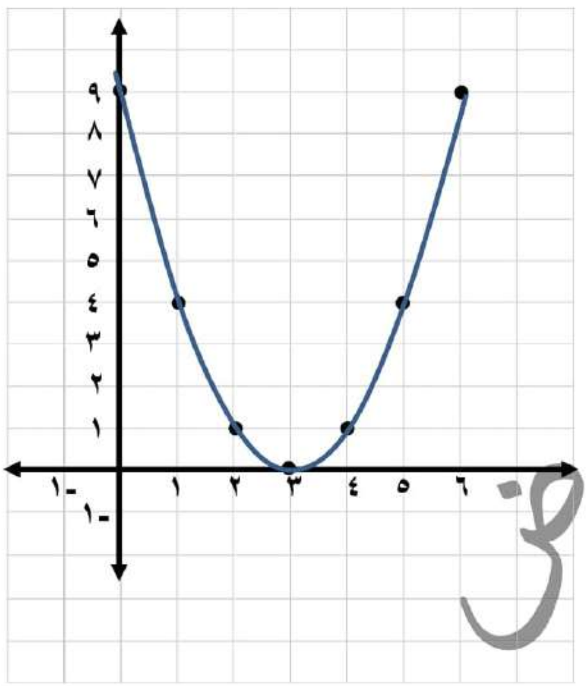
مثال١ مثل بيانيا الدالة د(س) = (س ــ ٣)^{٢} متخذاً س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج :

١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	(س ــ ٣)^{٢}	ص
٠	(٠ ــ ٣)^{٢}	٩
١	(١ ــ ٣)^{٢}	٤
٢	(٢ ــ ٣)^{٢}	١
٣	(٣ ــ ٣)^{٢}	٠
٤	(٤ ــ ٣)^{٢}	١
٥	(٥ ــ ٣)^{٢}	٤
٦	(٦ ــ ٣)^{٢}	٩



رأس المنحنى = (٣ ، ٠)

معادلة محور التماثل س = ٣

القيمة الصغرى = ٠

محمود عوض

إعداد / محمود عوض حسن

مثال ٢

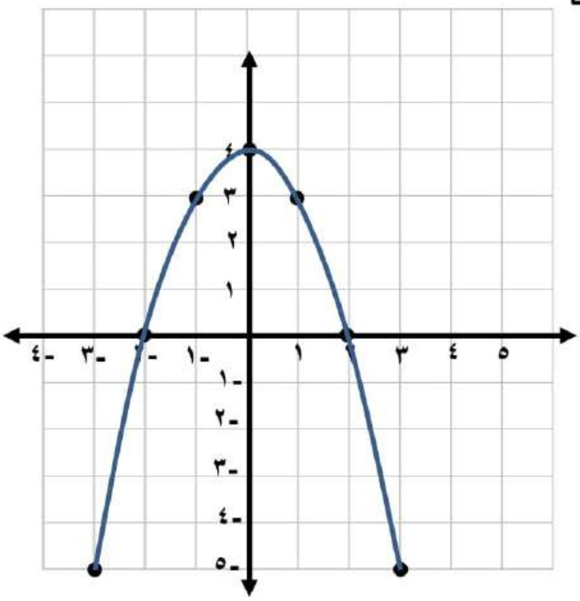
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٤ – س^{٢} متخذًا س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٢) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	٤ – س^{٢}	ص
-٣	٤ – (-٣)^{٢}	-٥
-٢	٤ – (-٢)^{٢}	٠
-١	٤ – (-١)^{٢}	٣
٠	٤ – (٠)^{٢}	٤
١	٤ – (١)^{٢}	٣
٢	٤ – (٢)^{٢}	٠
٣	٤ – (٣)^{٢}	-٥



رأس المنحنى = (٠ ، ٤)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة العظمى = ٤

مثال ٣

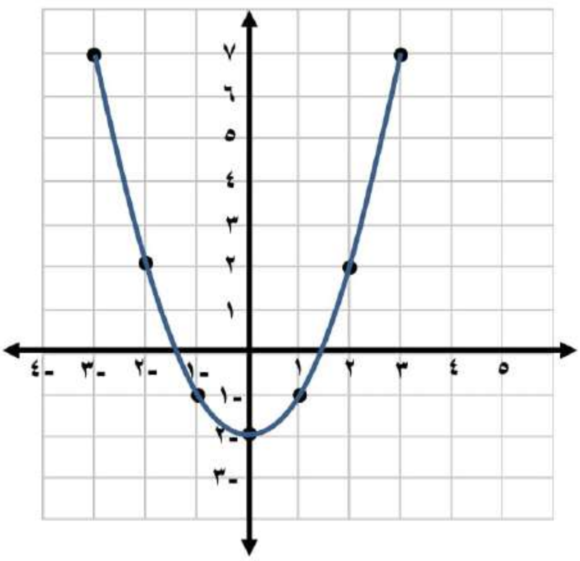
مثل بيانيا الدالة د(س) = س^{٢} – ٢ متخذًا س ∋ [-٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

٣) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

الحل

س	س^{٢} – ٢	ص
-٣	(-٣)^{٢} – ٢	٧
-٢	(-٢)^{٢} – ٢	٢
-١	(-١)^{٢} – ٢	-١
٠	(٠)^{٢} – ٢	-٢
١	(١)^{٢} – ٢	-١
٢	(٢)^{٢} – ٢	٢
٣	(٣)^{٢} – ٢	٧



رأس المنحنى = (٠ ، -٢)

معادلة محور التماثل س = ٠

القيمة الصغرى = -٢

تدريب ١ مثل بيانيا الدالة د(س) = $س^٢ + ٢س + ١$ متخذًا س ∋ [-٤ ، ٢]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) القيمة الصغرى أو العظمى ٣) معادلة محور التماثل

س	$س^٢$ + ٢س +١	ص

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

تدريب ٢ مثل بيانيا الدالة د: د(س) = – $س^٢$ متخذًا س ∋ [-٣ ، ٣]
ومن الرسم استنتج :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل ٣)القيمة الصغرى أو العظمى

س	– $س^٢$	ص
-٣	– $(-٣)^٢$	-٩

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

أسئلة اختر على الوحدة الأولى

١ إذا كان (٢ ، س –١) = (ص ، ٠) فإن س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) -٣

٢ إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص+٣) فإن $\sqrt{\text{س+٢ص}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٢٥

٣ إذا كان (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨ } فإن س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٤ النقطة (-٣ ، ٤) تقع فى الربع ....

(أ) الأول (ب) <u>الثاني</u> (جـ) الثالث (د) الرابع

٥ إذا كانت س = { ٢ } ، ص = { ٣ } فإن س × ص = ...

(أ) ٦ (ب) { ٣ } (جـ) (٢ ، ٣) (د) { (٢ ، ٣) }

٦ إذا كان ن (س) = ٣ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن ن (ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

٧ إذا كان ن (س) = ٢ ، ن (ص × س) = ٦ فإن ن ($\text{ص}^{٢}$) = ...

(أ) ٤ (ب) <u>٩</u> (جـ) ١٦ (د) ١٢

٨ إذا كانت ن ($\text{س}^{٢}$) = ٩ فإن ن (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٩ إذا كانت النقطة (س - ٤ ، ٢ - س) تقع فى الربع الثالث فإن س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

١٠ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

١١ إذا كانت د(س) = ٧ فإن د (-٣) = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢١ (د) -٢١

١٢ الدالة د : د(س) = ٣ س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، -٣) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٣)

تصميم محمود عوض
معلم أول رياضيات

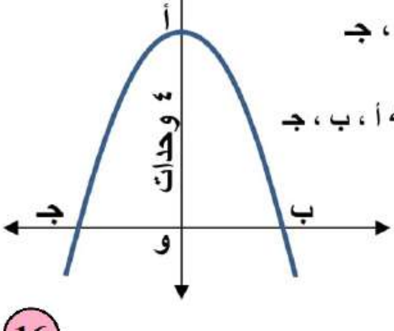
متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م – $\text{س}^{٢}$ فإذا كان أ و = ٤ وحدات فأوجد:

١) قيمة م ٢) إحداثى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، جـ



الحل

- المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٤ = م – $٠^{٢}$ ∴ م = ٤
- إحداثى ب هو (س ، ٠) بالتعويض في الدالة
  ∴ ٠ = ٤ – $\text{س}^{٢}$ ∴ $\text{س}^{٢}$ = ٤ ∴ س = ± ٢
  ∴ إحداثى ب (٢ ، ٠) ، إحداثى جـ (–٢ ، ٠)
- مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
  = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدات مربعة

واجب على الوحدة الأولى

إعداد أ/ محمود عوض

حاصل الضرب الديكارتى

(١) إذا كانت (س ـ ١ ، ٢٩) = (٤ ، ص^{٣} + ١)

فأوجد قيمة س + ٢ ص

(٢) إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٥ }

، ع = { ٤ ، ٥ } فأوجد:

١) (س ـ ص) × ع ٢) ن (ع^{٢})

(٣) إذا كانت س × ص = { (٢،٦) ، (٢،٩) ، (٣،٦)

، (٣،٩) ، (٥،٦) ، (٥،٩) } فأوجد:

١) س ، ص ٢) ص × س ٣) ن (س^{٢})

العلاقة

(١) إذا كانت س = {١،٢،٤،٥} ، ص = {١،٤،١٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:

أ^{٢} = ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى

٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟

(٢) إذا كانت س = {١،٢،٣،٤}

، ص = {ص:ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى:

(أ = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى

٢) بيّن أن ع دالة وأوجد مداها؟

(٣) إذا كانت س = {١،٢،٣} ، ص = {١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٥}$ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أن أ ب = ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى

٢) بيّن أن ع دالة واكتب مداها

الدالة

(١) إذا كان بيان الدالة د = {(١،٣) ، (٢،٥) ، (٣،٧)

، (٤،٩) ، (٥،١١)}

١) اكتب مجال ومدى الدالة د ٢) اكتب قاعدة الدالة

(٢) إذا كانت د (س) = س^{٢} ـ ٣س ،

ر (س) = س ـ ٣

١) أوجد د(٢) + ر(٢)

٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر

(٣) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥س + ٤

يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب)

فأوجد قيمة ب

(٤) إذا كانت د (س) = ٣س + ب ، د (٤) = ١٣

فأوجد قيمة ب

(٥) إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ← ح

حيث د (س) = ٢س + أ ، د (٣) = ٩

١) أوجد قيمة أ

٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السينى

التمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود

(١) مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢س + ١ ثم أوجد نقط

تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محورى الإحداثيات

(٢) ارسم منحنى الدالة د: د (س) = س^{٢} + ١

متخذا س ∈ [ـ٢ ، ٢] ومن الرسم عين:

١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل

٣)القيمة الصغرى أو العظمى

(٣) مثل بيانيا منحنى الدالة د (س) = ٣ ـ س^{٢}

حيث س ∈ [ـ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد:

١) معادلة محور التماثل

٢) القيمة العظمى أو الصغرى

اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ/ **محمود عوض**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب – ٥) تقع على محور السينات فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ إذا كان { ٢ } × { أ ، ب } = { (٢،٤) ، (٢،٣) } فإن أ – ب = ...

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) ±١ (د) صفر

٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة ....

(أ) (٠،٥) (ب) (٥،٥) (جـ) (٥،٠) (د) (٠،٠)

٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص^{٢}) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى:

أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث أ ع ب تعنى أ = $\frac{١}{٣}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى وبين أن ع دالة واكتب مداها.

ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٢

وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات

السؤال الثالث:

أ) إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فأوجد قيمة $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

ب) إذا كان س × ص = { (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،٢) ، (٢،٣) }

فأوجد: ١) س ∪ ص ٢) ص^{٢}

السؤال الرابع:

أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، –٥)

فأوجد : ١) د ($\frac{٢}{٣}$) ٢) قيمة أ

ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س^{٢} – ١ حيث س ∈ [–٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج:

١) معادلة محور التماثل ٢) القيمة الصغرى للدالة

النسبة

- النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ ، ب تكتب أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

  يسمى أ : مقدم النسبة ، ب: تالى النسبة ، أ ، ب معا: حدى النسبة

- النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

  فمثلا: $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٢} = \frac{٦}{١٠}$

- النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقى (ما عدا الصفر)

  فمثلا: $\frac{٣}{٥} \neq \frac{٣ + ٢}{٥ + ٢} \neq \frac{٥}{٧}$ تغيرت النسبة

- إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددان هما ٣م ، ٤م

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

الحل

نفرض أن العددان هما ٣م ، ٧م

$\therefore \frac{٣م - ٥}{٧م - ٥} = \frac{١}{٣}$ (مقص)

٩م − ١٥ = ٧م − ٥

٩م − ٧م = −٥ + ١٥

٢م = ١٠ م = ٥

∴ العدد الأول = ٣م = ٣×٥ = ١٥

∴ العدد الثانى = ٧م = ٧×٥ = ٣٥

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

الحل

نفرض أن العدد = س

$\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣س + ٢١ = ٢س + ٢٢

٣س − ٢س = ٢٢ − ٢١

∴ س = ١ ∴ العدد هو ١

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ مربعه = $س^٢$

$\frac{س^٢+٥}{س^٢+١١} = \frac{٣}{٥}$ (مقص)

٥$س^٢$ + ٢٥ = ٣ $س^٢$ + ٣٣

٥$س^٢$ − ٣ $س^٢$ = ٣٣ − ٢٥

٢ $س^٢$ = ٨ $س^٢$ = ٤

س = ± ٢ ∴ العدد الموجب هو ٢

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل

نفرض أن العدد = س ∴ ثلاثة أمثاله = ٣س

$\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ (مقص)

٣(٤٩ − ٣س) = ٢ (٦٩ − ٣س)

١٤٧ − ٩س = ١٣٨ − ٦س

− ٩س + ٦س = ١٣٨ − ١٤٧

− ٣س = − ٩ ∴ س = ٣

محمود عوض
محمود عوض معلم أول رياضيات

إعداد أ/ محمود عوض

٢

التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلا : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ يسمى تناسب والكميات أ ، ب ، جـ ، د تسمى **كميات متناسبة**

◆ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث:

أ : الأول المتناسب ، ب : الثانى المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب ، د : الرابع المتناسب

أ ، د : الطرفين ، ب ، جـ : الوسطين

خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : أ × د = ب × جـ

وغالبا ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل : $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$ أو $\frac{س + ٧}{س + ١١} = \frac{س - ٢}{س + ٣}$

محمود عوض

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحـل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

$\therefore \frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{س}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤ × س = ١٢ × ١٦

$س = \frac{١٢ \times ١٦}{٤} = ٤٨$

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{س + ٣}{س + ٥} = \frac{س + ٨}{س + ١٢}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$\cancel{س^٢} + ٣س + ١٢س + ٣٦ = \cancel{س^٢} + ٥س + ٨س + ٤٠$

$١٥س + ٣٦ = ١٣س + ٤٠$

$١٥س - ١٣س = ٤٠ - ٣٦$

$٢س = ٤ \Leftarrow س = ٢$ ∴ العدد هو ٢

تدريب

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٢ ، ٤ ، ١٢ ، ١٨ فإنها تكون متناسبة

خاصية ٢

إذا كان أ جـ = ب د فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{د}{جـ}$ في كل طرف ثبت حاجة وانقل التانية

- مثال ١: إذا كان ٥ أ = ٧ ب فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{ب}{أ} = \frac{٥}{٧}$
- مثال ٢: إذا كان ٢س – ٣ص = ٠ فإن ٢س = ٣ص ومنها $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٣}$

تدريب: إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

خاصية ٣

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ $\frac{مقدم}{مقدم} = \frac{تالى}{تالى}$

- مثال ١: إذا كانت أ ، ٢ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٩}$ ومنها $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٩}$
- مثال ٢: إذا كان: ٥أ ، ٢س ، ٣ب ، ٧س كميات متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} =$ ....

الحل: $\frac{٥أ}{٢س} = \frac{٣ب}{٧س} \Leftarrow \frac{٥أ}{٣ب} = \frac{٢س}{٧س}$ ∴ $\frac{٥أ}{٣ب} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٢ \times ٣}{٧ \times ٥} = \frac{٦}{٣٥}$

تدريب: إذا كان: أ ، ٢ص ، ب ، ٣ص كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

محمود عوض

خاصية ٤

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن أ = جـ م ، ب = د م

◆ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ = م ومنها أ = جـ م ، ب = د م

يمكن أيضا استنتاج أن : أ = ب م ، جـ = د م ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

◆ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ = ٣ م ، ب= ٥ م ومن الخطأ أن تقول أ = ٣ ، ب = ٥ وتنسى الثابت

◆ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فإن : س = ٣ م ، ص = ٤ م ، ع = ٥ م

محمود عوض

خطوات حل مسائل التناسب

١ تكوين تناسب

٢ إيجاد قيم

٣ التعويض بالقيم

٤ إخراج العامل المشترك

٥ الاختصار

ملاحظات

١ للتسهيل هتلغى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود **مضروبة** : مثل جـ م × جـ فقط اضرب فتكون $\text{جـ}^{٢}\text{م}$
- إذا كانت الحدود **متشابهة** : مثل ١٢م + ١٠م فقط اجمع فتكون ٢٢م

٢ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢}\text{م}^{٢}$ (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة نثبت أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{\text{٣ أ - ٢ جـ}}{\text{٥ أ + ٣ جـ}} = \frac{\text{٣جـ م - ٢جـ}}{\text{٥جـ م + ٣جـ}}$

$= \frac{\cancel{\text{جـ}}\text{ (٣م - ٢)}}{\cancel{\text{جـ}}\text{(٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

الأيسر $= \frac{\text{٣ ب - ٢ د}}{\text{٥ ب + ٣ د}} = \frac{\text{٣د م - ٢د}}{\text{٥د م + ٣د}}$

$= \frac{\cancel{\text{د}}\text{ (٣م - ٢)}}{\cancel{\text{د}}\text{(٥م + ٣)}} = \frac{\text{٣م - ٢}}{\text{٥م + ٣}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{٢}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

أ = جـ م ، ب = د م

الأيمن $= \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جـ م × جـ}}{\text{د م × د}} = \frac{\text{جـ}^{٢}\cancel{\text{م}}}{\text{د}^{٢}\cancel{\text{م}}} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{د}^{٢}}$

الأيسر $= \left(\frac{\text{أ - جـ}}{\text{ب - د}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ م - جـ}}{\text{د م - د}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{جـ}\cancel{\text{(م - ١)}}}{\text{د}\cancel{\text{(م - ١)}}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{جـ}}{\text{د}}\right)^{٢} = \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{د}^{٢}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣ إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$

فاثبت أن : $\frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \frac{\text{٢ص - ع}}{\text{٣س - ٢ص + ع}}$

$= \frac{\text{٢×٤م - ٥م}}{\text{٣×٣م - ٢×٤م + ٥م}}$

$= \frac{\text{٨م - ٥م}}{\text{٩م - ٨م + ٥م}} = \frac{\text{٣م}}{\text{٦م}} = \frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = الأيسر

∴ الأيمن = الأيسر

محمود عوض

مثال ٤ إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ فاثبت أن:

$\sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = \text{٢س + ص}$

الحـل

س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

الأيمن $= \sqrt{\text{٣س}^{٢} + \text{٣ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٣ × ٩م}^{٢} + \text{٣ × ١٦م}^{٢} + \text{٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{٢٧ م}^{٢} + \text{٤٨ م}^{٢} + \text{٢٥ م}^{٢}}$

$= \sqrt{\text{١٠٠ م}^{٢}} = \text{١٠ م}$

الأيسر = ٢س + ص = ٢ × ٣م + ٤م

= ٦م + ٤م = ١٠ م

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

أ = جـ م ، ب = د م

الطرف الأيمن $= \frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{د م} - \text{جـ م}}$

$= \frac{\text{جـ}\cancel{\text{م}}}{\cancel{\text{م}}(\text{د} - \text{جـ})} = \frac{\text{جـ}}{\text{د} - \text{جـ}} =$ الأيسر

مثال ٦

إذا كانت $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة: $\frac{٣\text{س} + ٢\text{ص}}{٦\text{ص} - \text{س}}$

الحـل

س = ٢م ، ص = ٣م

$\frac{٣\text{س} + ٢\text{ص}}{٦\text{ص} - \text{س}} = \frac{٣ \times ٢\text{م} + ٢ \times ٣\text{م}}{٦ \times ٣\text{م} - ٢\text{م}}$

$= \frac{٦\text{م} + ٦\text{م}}{١٨\text{م} - ٢\text{م}}$

$= \frac{١٢\text{م}}{١٦\text{م}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

محمود عوض

تصميم محمود عوض

معلم أول رياضيات

مثال ٧

إذا كان $\frac{\text{أ}^٢ - ٢\text{جـ}^٢}{\text{ب}^٢ - ٢\text{د}^٢} = \frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}^٢}$

فاثبت أن: أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الحـل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$\text{ب}^٢ (\text{أ}^٢ - ٢\text{جـ}^٢) = \text{أ}^٢ (\text{ب}^٢ - ٢\text{د}^٢)$

$\cancel{\text{أ}^٢\text{ب}^٢} - ٢\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = \cancel{\text{أ}^٢\text{ب}^٢} - ٢\text{أ}^٢\text{د}^٢$

$- ٢\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = - ٢\text{أ}^٢\text{د}^٢$ (÷ −٢)

$\text{ب}^٢\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢\text{د}^٢$ ثبت وانقل

∴ $\frac{\text{أ}^٢}{\text{ب}^٢} = \frac{\text{جـ}^٢}{\text{د}^٢}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ∴ أ، ب، جـ، د كميات متناسبة

مثال ٨

إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

الحـل

أ = ٥م ، ب = ٧م ، جـ = ٣م

بالتعويض فى أ + ب = ٢٧,٦

∴ ٥م + ٧م = ٢٧,٦

١٢م = ٢٧,٦

∴ م = ٢,٣

∴ أ = ٥م = ٥ × ٢,٣ = ١١,٥

ب = ٧ × ٢,٣ = ١٦,١

جـ = ٣م = ٣ × ٢,٣ = ٦,٩

خاصية ٥

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب

- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلا: يمكن ضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × ــ١ وضرب النسبة الثالثة × ٣ ثم بالجمع

فيكون : $\frac{٢ أ - جـ + ٣ هـ}{٢ ب - د + ٣ و}$ = إحدى النسب

- عايز تعرف هتضرب ازاى وفى كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف
- ما تيجوا نشوف !

مثال ٩

إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$

فاثبت أن : $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

الحـل

عايزين نوصل للبسط اللى في الاثبات:

بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ والجمع مع الثانية

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٢ب + ٢ب - جـ}$ = إحدى النسب

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ}$ = إحدى النسب ← (١)

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى × ٢ والنسبة الثانية × ٢ وجمع النسب الثلاثة

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ}$

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$ = إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن:

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

مثال ١٠

إذا كان $\frac{أ + ب}{٣} = \frac{ب + جـ}{٦} = \frac{جـ + أ}{٥}$

فاثبت أن : $\frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

الحـل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع : النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$\frac{أ + ب + ب + جـ + جـ + أ}{٣ + ٦ + ٥} = \frac{٢أ + ٢ب + ٢جـ}{١٤}$

$= \frac{٢(أ + ب + جـ)}{١٤}$

$= \frac{أ + ب + جـ}{٧}$ = إحدى النسب ← (١)

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللى فيهم أ ــ النسبة الثانية

$\frac{أ + ب + جـ + أ - ب - جـ}{٣ + ٥ - ٦}$

$= \frac{٢أ}{٢} = أ$ = إحدى النسب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

$\frac{أ + ب + جـ}{٧} = أ \quad \therefore \quad \frac{أ + ب + جـ}{أ} = ٧$

محمود عوض

مسألة مهمة

إذا كانت $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س

إعداد أ/ محمود عوض

٣ التناسب المتسلسل

◆ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن:

أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، جـ : الثالث المتناسب

◆ الوسط المتناسب بين عددين = $\pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ = $\pm \sqrt{٢ \times ١٨} = \pm \sqrt{٣٦} = \pm ٦$

❖ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

ومنها ب = جـ م ، أ = جـ $\text{م}^٢$

❖ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

ومنها جـ = د م ، ب = د $\text{م}^٢$ ، أ = د $\text{م}^٣$

ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادى في خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالى

٣ عند التعويض: إذا كان أ = ب م فإن $\text{أ}^٢ = \text{ب}^٢ \text{م}^٢$ (حط التربيع على ب ، م)

و إذا كان ب = د $\text{م}^٢$ فإن $\text{ب}^٢ = \text{د}^٢ \text{م}^٤$

و إذا كان أ = د $\text{م}^٣$ فإن $\text{أ}^٢ = \text{د}^٢ \text{م}^٦$

مثال ١

إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}{\text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

∴ ب = جـ م ، أ = جـ $\text{م}^٢$

الأيمن = $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}{\text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢} = \frac{\text{جـ}^٢ \text{م}^٤ + \text{جـ}^٢ \text{م}^٢}{\text{جـ}^٢ \text{م}^٢ + \text{جـ}^٢}$

$= \frac{\text{جـ}^٢ \text{م}^٢ (\text{م}^٢ + ١)}{\text{جـ}^٢ (\text{م}^٢ + ١)} = \text{م}^٢$

الأيسر = $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ م}^٢}{\text{جـ}} = \text{م}^٢$

∴ الأيمن = الأيسر

محمود عوض
معلم أول رياضيات

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{\text{جـ}^٢ - \text{د}^٢}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{أ}}$

الحل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

∴ جـ = د م ، ب = د $\text{م}^٢$ ، أ = د $\text{م}^٣$

الأيمن = $\frac{\text{جـ}^٢ - \text{د}^٢}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{د}^٢ \text{م}^٢ - \text{د}^٢}{\text{د م}^٣ - \text{د م}}$

$= \frac{\text{د}^٢ \cancel{(\text{م}^٢ - ١)}}{\text{د م} \cancel{(\text{م}^٢ - ١)}} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$

الأيسر = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ}} = \frac{\text{د م}^٢ \times \text{د}}{\text{د م}^٣} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\text{جـ} = \text{د م} \quad ، \quad \text{ب} = \text{د م}^2 \quad ، \quad \text{أ} = \text{د م}^3$

$\text{الأيمن} = \frac{\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - 3\text{د}^2} = \frac{\text{د}^2\text{م}^6 - 3\text{د}^2\text{م}^2}{\text{د}^2\text{م}^4 - 3\text{د}^2}$

$= \frac{\cancel{\text{د}^2}\text{م}^2\cancel{(\text{م}^4 - 3)}}{\cancel{\text{د}^2}\cancel{(\text{م}^4 - 3)}} = \text{م}^2$

$\text{الأيسر} = \frac{\text{ب}}{\text{د}} = \frac{\cancel{\text{د}}\text{م}^2}{\cancel{\text{د}}} = \text{م}^2$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل

فاثبت أن: $\frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

الحـل

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$

$\text{جـ} = \text{د م} \quad ، \quad \text{ب} = \text{د م}^2 \quad ، \quad \text{أ} = \text{د م}^3$

$\text{الأيمن} = \frac{\text{أب} - \text{جـ د}}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{د م}^3 \times \text{د م}^2 - \text{د م} \times \text{د}}{\text{د}^2\text{م}^4 - \text{د}^2\text{م}^2}$

$= \frac{\text{د}^2\text{م}^5 - \text{د}^2\text{م}}{\text{د}^2\text{م}^4 - \text{د}^2\text{م}^2} = \frac{\text{د}^2\text{م}(\text{م}^4 - 1)}{\text{د}^2\text{م}^2(\text{م}^2 - 1)}$

$= \frac{\cancel{\text{د}^2}\text{م}\cancel{(\text{م}^2 - 1)}(\text{م}^2 + 1)}{\cancel{\text{د}^2}\text{م}^2\cancel{(\text{م}^2 - 1)}} = \frac{\text{م}^2 + 1}{\text{م}}$

$\text{الأيسر} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د م}^3 + \text{د م}}{\text{د م}^2} = \frac{\text{د م}(\text{م}^2 + 1)}{\text{د م}^2}$

$= \frac{\text{م}^2 + 1}{\text{م}}$ ∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن: $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}$

الحـل

محمود عوض

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

$\text{ب} = \text{جـ م} \quad ، \quad \text{أ} = \text{جـ م}^2$

$\text{الأيمن} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{جـ م}^2 - \text{جـ م}}{\text{جـ م}^2 - \text{جـ}} = \frac{\text{جـ م}(\text{م} - 1)}{\text{جـ}(\text{م}^2 - 1)}$

$= \frac{\cancel{\text{جـ}}\text{م}\cancel{(\text{م} - 1)}}{\cancel{\text{جـ}}\cancel{(\text{م} - 1)}(\text{م} + 1)} = \frac{\text{م}}{\text{م} + 1}$

$\text{الأيسر} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{جـ م} + \text{جـ}} = \frac{\cancel{\text{جـ}}\text{م}}{\cancel{\text{جـ}}(\text{م} + 1)}$

$= \frac{\text{م}}{\text{م} + 1}$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦ إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

فاثبت أن: $\frac{\text{س ع}}{\text{ص}^2 + \text{ص ع}} = \frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}}$

الحـل

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \text{م}$

$\text{ص} = \text{ع م} \quad ، \quad \text{س} = \text{ع م}^2$

$\text{الأيمن} = \frac{\text{س ع}}{\text{ص}^2 + \text{ص ع}} = \frac{\text{ع م}^2 \times \text{ع}}{\text{ع}^2\text{م}^2 + \text{ع م} \times \text{ع}}$

$= \frac{\text{ع}^2\text{م}^2}{\text{ع}^2\text{م}^2 + \text{ع}^2\text{م}} = \frac{\text{ع}^2\text{م}^2}{\text{ع}^2\text{م}(\text{م} + 1)} = \frac{\text{م}}{\text{م} + 1}$

$\text{الأيسر} = \frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ع م}^2}{\text{ع م}^2 + \text{ع م}} = \frac{\text{ع م}^2}{\text{ع م}(\text{م} + 1)}$

$= \frac{\text{م}}{\text{م} + 1}$ ∴ الأيمن = الأيسر

٤ التغير الطردي

♣ إذا كانت ص تتغير طرديا مع س فإنها تكتب: ص $\propto$ س ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
ص = م س	م = $\frac{ص}{س}$	$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

◆ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص $\propto$ $س^2$ فإن الثابت م = $\frac{ص}{س^2}$ والعلاقة هى ص = م $س^2$

◆ لإثبات أن ص $\propto$ س نثبت أن ص = (ثابت) س

مثال ١ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص= ٦ عندما س = ٣ فأوجد : ١) العلاقة بين س ، ص
٢) قيمة ص عندما س = ٥

الحل

ص $\propto$ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س} = \frac{٦}{٣}$ = ٢

العلاقة هى: ص = ٢ س

بالتعويض عن س = ٥

∴ ص = ٢ × ٥ = ١٠

مثال ٢ إذا كانت ص تتغير طرديا بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص
٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

الحل

ص $\propto$ س ∴ ص = م س

م = $\frac{ص}{س} = \frac{١٤}{٤٢} = \frac{١}{٣}$

العلاقة هى: ص = $\frac{١}{٣}$ س

٢٠ = $\frac{١}{٣}$ س

∴ س = ٢٠ × ٣ = ٦٠

مثال ٣ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومترا في ٦ ساعات، فكم كيلومترًا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

الحل

نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز

$ف_1$ = ١٥٠ ، $ز_1$ = ٦

$ف_2$ = ؟؟ ، $ز_2$ = ١٠

ف $\propto$ ز ∴ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ز_1}{ز_2}$

$\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$

∴ $ف_2 = \frac{١٥٠ \times ١٠}{٦}$ = ٢٥٠ كيلومتر

مثال ٤ إذا كان: $\frac{٢١س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فاثبت أن: ص $\propto$ ع

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٢١س ع – ص ع = ٧س ص – ص ع

٢١ س ع = ٧س ص

٢١ ع = ٧ ص

ص = $\frac{٢١}{٧}$ ع

∴ ص $\propto$ ع

محمود عوض

التغير العكسى

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: $ص \propto \frac{١}{س}$ ومنها يكون:

لإيجاد العلاقة	لحساب الثابت	لإيجاد قيمة
$ص\,س = م$	$م = ص \times س$	$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

◆ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة $ص\,س = م$ أو $ص = \frac{م}{س}$

◆ لإثبات أن $ص \propto \frac{١}{س}$ نثبت أن $ص\,س = ثابت$

مثال ١

إذا كانت $ص \propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢

أوجد : ١) العلاقة بين س ، ص

٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

الحل

$ص \propto \frac{١}{س}$ ∴ $ص\,س = م$

$م = ص \times س = ٣ \times ٢ = ٦$

العلاقة هى : $ص\,س = ٦$

$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$ ، $\frac{٣}{ص} = \frac{١,٥}{٢}$

$ص \times ١,٥ = ٦$ ∴ $ص = ٤$

مثال ٢

من بيانات الجدول التالى أجب:

١) بين نوع التغير بين ص ، س

٢) أوجد ثابت التناسب

٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

الحل

١ نوع التغير عكسى (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢ ثابت التناسب = $ص \times س = ٦ \times ٢ = ١٢$

٣ بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة $ص\,س = ١٢$

$ص \times ٣ = ١٢$ ∴ $ص = ٤$

مثال ٣

إذا كان : $س^٤ص^٢ - ١٤س^٢ص + ٤٩ = ٠$

فاثبت أن: $ص \propto \frac{١}{س^٢}$

الحل

بتحليل المقدار المربع الكامل

$(س^٢ص - ٧)^٢ = ٠$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$س^٢ص - ٧ = ٠$

$س^٢ص = ٧$

∴ $ص \propto \frac{١}{س^٢}$

مثال ٤

إذا كان: ص= أ-٩، $ص \propto \frac{١}{س^٢}$ وكان أ=١٨ عندما س= $\frac{٢}{٣}$

فأوجد العلاقة بين س،ص ثم استنتج قيمة ص عندما س=١

الحل

$ص \propto \frac{١}{س^٢}$ ∴ $ص\,س^٢ = م$

بالتعويض عن ص = أ-٩

$(أ-٩)\,س^٢ = م$ ، $(١٨-٩) \times (\frac{٢}{٣})^٢ = م$

∴ $م = ٩ \times \frac{٤}{٩} = ٤$

∴ العلاقة هى $ص\,س^٢ = ٤$

عندما س = ١ ، $ص \times ١^٢ = ٤$ ، ص = ٤

محمود عوض

أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان ٣ أ = ٤ ب فإن أ : ب = ...

(أ) ٣ : ٤   (ب) ٤ : ٣   (جـ) ٣ : ٧   (د) ٤ : ٧

٢ إذا كان ٥ أ ـ ٢ ب = ٠ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) ١٠   (د) ٥

٣ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{٥\text{أ}}{٣\text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٩}$ (د) ١

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو ....

(أ) ٤   (ب) ٧   (جـ) ١٦   (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) $\frac{-٩}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٩}$

٦ إذا كان: أ ، ٢س ، ب ، ٣س كميات متناسبة فإن أ : ب = ...

(أ) ٢ : ١   (ب) ٣ : ١   (جـ) ٢ : ٣   (د) ٣ : ٢

٧ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٥} = \frac{\text{ب}}{٤} = \frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ك}}$ فإن ك = ...

(أ) ٥   (ب) ٤   (جـ) ٩   (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى ....

(أ) ٩   (ب) -٩   (جـ) ± ٩   (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى ....

(أ) ١٠٠   (ب) ٨٠   (جـ) ٤٠   (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن ....

(أ) س ∝ ص   (ب) ص ∝ س   (جـ) ٣س ∝ ٨ص   (د) س ∝ $\frac{١}{\text{ص}}$

١٠ إذا كان ص ∝ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = ...

(أ) ١٦   (ب) ١٢   (جـ) ٢٤   (د) ٦

١١ العلاقة التى تمثل تغيرا طردياً بين المتغيرين س ، ص هى ....

(أ) س ص = ٥   (ب) ص= س +٣   (جـ) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤}{\text{ص}}$ (د) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٢}$

١٢ إذا كان س ص = ٧ فإن ص ∝ ....

(أ) $\frac{١}{\text{س}}$ (ب) س ـ ٧   (جـ) س   (د) س + ٧

١٣ إذا كانت ٧ ، س ، $\frac{١}{\text{ص}}$ فى تناسب متسلسل ، فإن س^{٢}ص = ...

(أ) ٢   (ب) ٤   (جـ) ٧   (د) ٩

محمود عوض
معلم أول رياضيات

واجب على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

النسبة والتناسب

١) أوجد العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

٢) عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٢ : ٣ أوجد العددين

٣) أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧

٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة

٥) إذا كانت ٣ أ = ٢ ب فأوجد قيمة $\frac{٣أ - ب}{٢أ + ب}$

٦) إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأوجد قيمة المقدار:

$$\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$$

٧) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{٣أ - ٦جـ}{ب - ٢د} = \frac{٣أ}{ب}$

٨) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فاثبت أن: $\frac{أ^٢ - جـ^٢}{ب^٢ - د^٢} = \frac{أ جـ}{ب د}$

٩) إذا كان $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$

فاثبت أن: $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

١٠) إذا كان $\frac{أ^٢ - ٢جـ^٢}{ب^٢ - ٢د^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$

فاثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

التناسب المتسلسل

١) إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{جـ^٢ + أ^٢}{ب} = \frac{د^٢ + جـ}{د}$

٢) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فاثبت أن $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^٣}{جـ^٢ د + د^٣}$

٣) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ

فاثبت أن $\frac{٢جـ^٢ - ٣ب^٢}{٢ب^٢ - ٣أ^٢} = \frac{جـ^٢}{ب^٢}$

٤) أوجد العدد الذى إذا أضيف للأعداد ١،٥،١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

التغير الطردى والعكسى

١) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

٢) إذا كانت أ $\propto$ ب وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥

فأوجد: ١) العلاقة بين أ ، ب

٢) قيمة ب عندما أ = ٤

٣) إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: ١) العلاقة بين ص ، س

٢) قيمة س عندما ص = ١٦

٤) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧

٥) إذا كانت $\frac{أ + ٢ب}{٦} = \frac{ب + ٣جـ}{٣}$ فاثبت أن أ $\propto$ جـ

اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ/ محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = ...

(أ) ±١ (ب) ±٢ (جـ) ±٤ (د) ±٣

٢ إذا كان $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣}$ فإن $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ب} + \text{أ}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{٧}$ عندما ص = $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ فإن ثابت التناسب = ...

(أ) ٥ (ب) ٣٥ (جـ) $\frac{٥}{٧}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦

فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

ب) إذا كانت ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة $\frac{٧\text{أ} + ٩\text{ب}}{٤\text{أ} + ٢\text{ب}}$

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، جـ فاثبت أن : $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}}$

ب) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:

١) العلاقة بين ص ، س ٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

ب) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{د}} = \frac{\text{أ} - ٢\text{جـ}}{\text{ب} - ٢\text{د}}$

انتهت الأسئلة

إعداد أ/ محمود عوض

التشتت

- التشتت هو التباعد أو الاختلاف
- من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعيارى

١ المدى

- هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

- مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ، ١٧ هو ٢٣ – ١٥ = ٨

٢ الانحراف المعيارى σ

- هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى
- الانحراف المعيارى هو أكثر مقاييس التشتت انتشارا وأدقها.
- اذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف σ = صفر والمدى = صفر

محمود عوض
معلم أول رياضيات

حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

حيث: $\bar{س}$ الوسط الحسابى ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول مكون من ٣ أعمدة
- العمود الأول س : نكتب فيه القيم التى في المسألة
- نحسب الوسط $\bar{س}$ قبل أن نملأ الجدول

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2 ك}{\text{مجـ } ك}}$$

حيث: $\bar{س}$ الوسط الحسابى ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجـ } (س \times ك)}{\text{مجـ } ك}$$

ملاحظات للحل

- نكون جدول من ٦ أعمدة
- العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة
- العمود الثانى ك نكتب فيه أرقام الصف الثانى من المسألة
- نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط $\bar{س}$ ثم نكمل الجدول

محمود عوض

مثال ١

احسب الانحراف المعيارى للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

الوسط $\overline{\text{س}}$ = $\dfrac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$= \dfrac{١٦+٣٢+٥+٢٠+٢٧}{٥} = \dfrac{١٠٠}{٥} = ٢٠$

س	س - $\overline{\text{س}}$	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢}
١٦	١٦-٢٠ = -٤	١٦
٣٢	٣٢-٢٠ = ١٢	١٤٤
٥	٥-٢٠ = -١٥	٢٢٥
٢٠	٢٠-٢٠ = ٠	٠
٢٧	٢٧-٢٠ = ٧	٤٩
مجـ	xxx	٤٣٤

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ (س - }\overline{\text{س}}\text{)}^{٢}}{\text{ن}}} = \sqrt{\dfrac{٤٣٤}{٥}} = ٩,٣$

مثال ٢

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س×ك	س - $\overline{\text{س}}$	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢}	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢} ك
٠	٨	صفر	٠-٢ = -٢	٤	٤×٨ = ٣٢
١	١٦	١٦	١-٢ = -١	١	١×١٦ = ١٦
٢	٥٠	١٠٠	٢-٢ = ٠	٠	٠×٥٠ = ٠
٣	٢٠	٦٠	٣-٢ = ١	١	١×٢٠ = ٢٠
٤	٦	٢٤	٤-٢ = ٢	٤	٤×٦ = ٢٤
مجـ	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

الوسط $\overline{\text{س}} = \dfrac{\text{مجـ (س×ك)}}{\text{مجـ ك}} = \dfrac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ (س - }\overline{\text{س}}\text{)}^{٢}\text{ ك}}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\dfrac{٩٢}{١٠٠}} = ١$ طفل

تدريب

احسب الانحراف المعيارى للقيم:

٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل

تدريب

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س×ك	س - $\overline{\text{س}}$	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢}	(س - $\overline{\text{س}}$)^{٢} ك
مجـ			xx	xx	

حساب الانحراف المعيارى للجدول التكرارى ذي المجموعات

يحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعيارى للجدول التكرارى البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو :

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة ويحسب كالتالى :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{\text{٢}}$$

مثال ٣ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

المجموعة	-٠	-٤	-٨	-١٢	١٦-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$$\text{م}_1 = \frac{\text{٠} + \text{٤}}{\text{٢}} = \text{٢} \text{ ، } \text{م}_2 = \frac{\text{٤} + \text{٨}}{\text{٢}} = \text{٦} \text{ ، } \text{م}_3 = \frac{\text{٨} + \text{١٢}}{\text{٢}} = \text{١٠}$$

$$\text{م}_4 = \frac{\text{١٢} + \text{١٦}}{\text{٢}} = \text{١٤} \text{ ، } \text{م}_5 = \frac{\text{١٦} + \text{٢٠}}{\text{٢}} = \text{١٨}$$

س	ك	س× ك	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$ ك
٢	٣	٦	٩,٦-	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	٥,٦-	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	١,٦-	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥	٢٩٠	xx	xx	٨٠٠

$$\text{الوسط } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ (س×ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{٢٩٠}}{\text{٢٥}} = \text{١١,٦}$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{٨٠٠}}{\text{٢٥}}} = \text{٥,٧}$$

تدريب احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى الآتى:

عدد الكيلومترات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل

أسئلة اختر على الإحصاء

١ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(أ) المدى　(ب) الوسط الحسابى　(جـ) الإنحراف المعيارى　(د) المنوال

٢ المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ١٢

٣ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المنوال　(ب) الوسيط　(جـ) الوسط　(د) المدى

٤ أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو ....

(أ) المنوال　(ب) الوسيط　(جـ) المدى　(د) الانحراف المعيارى

٥ إذا كانت ١٨ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = ...

(أ) ٨　(ب) ١٢　(جـ) ٢٤　(د) ٣٦

واجب على الإحصاء

١ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢، ١٤ ، ١٦

٢ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفةالتى وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة

٣ التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات

عدد الوحدات التالفة	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ	المجموع
عدد الصناديق	٢	٨	١٠	١٨	١٢	٥٠

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع

تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) [١ ، ٣] − { ٠ ، ١ } = ...

أ)] ١ ، ٣] ب) [١ ، ٣ [جـ) [١ ، ٣] د) { ٣ }

٢) مجموعة حل المعادلة $(س - ١)^٢ = ٩$ في ح هى ....

أ) { ٤ } ب) { -٢ } جـ) { ٤ ، -٢ } د) { ٣ }

٣) إذا كانت $٢^{س} = ٤^٣$ فإن س = ...

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٦٤

٤) إذا كانت $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{س} = \frac{٣}{٢}$ فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٣ د) $\frac{٣}{٢}$

٥) ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ... جنيه

أ) ٢ ب) ٢,٥ جـ) ٥ د) ٢٠

٦) إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .... = ...

أ) ٣ + س ب) ٣ س جـ) ٣ − س د) $\frac{٣}{س}$

٧) $(\sqrt{٥} + ٢)(\sqrt{٥} - ٢) =$ ....

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ٢ د) ١

٨) إذا كان $أ^٢ - ب^٢ = ١٢$ ، أ + ب = ٣ فإن أ − ب = ...

أ) ٨ ب) ٤ جـ) ١٥ د) ٣٦

٩)] ١ ، ٥ [∪ { ١ ، ٥ } = ...

أ) [١ ، ٥ [ب)] ١ ، ٥] جـ)] ١ ، ٥ [د) [١ ، ٥]

١٠) ح = ...

أ) $ح_+ \cap ح_-$ ب) ن ∩ ن جـ) $ح_+ \cup ح_-$ د) ن ∪ ن

١١) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ب) $٦\sqrt{٣}$ جـ) $٢\sqrt{٣}$ د) $-٢\sqrt{٣}$

تصميم محمود عوض معلم أول رياضيات