

مدرسة مصر الخير الإعدادية بجهينة

الصف الثالث الإعدادي ٢٠١٩ الفصل الدراسي الثاني

إهداء إلى



ملزمة  
**الجبر والإحصاء**



إعداد وتصميم  
**متموه عوض حسن**

معلم أول رياضيات

انت أقوى من الجبر

# الفهرس

## ◆ الوحدة الأولى : المعادلات

- مراجعة على التحليل ..... ص ١  
حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين ..... ص ٢  
حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ..... ص ٥  
حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية ..... ص ٨  
الحل البياني للمعادلات ..... ص ١١  
أسئلة اختر على الوحدة الأولى ..... ص ١٢

## ◆ الوحدة الثانية : الكسور الجبرية

- أصفار الدالة ..... ص ١٤  
مجال الدالة الكسرية ..... ص ١٥  
اختزال الكسر الجبري ..... ص ١٧  
تساوي كسرين جبريين ..... ص ١٨  
جمع وطرح الكسور الجبرية ..... ص ٢٠  
ضرب وقسمة الكسور الجبرية ..... ص ٢٣  
المعكوس الضربي للكسر الجبري ..... ص ٢٧  
أسئلة اختر على الوحدة الثانية ..... ص ٢٨

## ◆ الوحدة الثالثة : الإحصاء

- الاحتمال ..... ص ٣٠  
أسئلة اختر على الإحصاء ..... ص ٣٥  
أسئلة اختر تراكمي ..... ص ٣٦

## مراجعة على التحليل

### التحليل بإخراج العامل المشترك

معلم اول رياضيات  
معلم اول رياضيات

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 6 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س^2 \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 - س^2 &= س (س - س) \\ \blacklozenge س^3 - 15 &= س (س - 5) \\ \blacklozenge س^2 + 4 &= س (س + 4) \\ \blacklozenge س^2 - س &= س (س - 1) \\ \blacklozenge س^2 + 6 &= س (س + 6) \\ \blacklozenge س^2 - س &= س (س - 1) \end{aligned}$$

أعداد لها جذور تربيعية مثل:

٤٩ ، ٣٦ ، ٢٥ ، ١٦ ، ٩ ، ٤ ، ١

### الفرق بين مربعين

هو عبارة عن حدين لهما جذور تربيعية وبينهم (-) مثل : س<sup>٢</sup> - ٢٥ ولو لقيت بينهم (+) ملوش تحليل

تحليل الفرق بين مربعين = (الاول - الثاني) (الاول + الثاني)

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 - 9 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 16 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 36 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 25 \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 - 9 &= (س - 3) (س + 3) \\ \blacklozenge س^2 - 16 &= (س - 4) (س + 4) \\ \blacklozenge س^2 - 36 &= (س - 6) (س + 6) \\ \blacklozenge س^2 - 25 &= (س - 5) (س + 5) \end{aligned}$$

الأعداد التي لها جذور تكعيبية مثل:

١٢٥ ، ٦٤ ، ٢٧ ، ٨ ، ١

### مجموع مكعبين والفرق بينهما

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^3 - 27 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^3 + 8 \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^3 - 27 &= (س - 3) (س^2 + 3س + 9) \\ \blacklozenge س^3 + 8 &= (س + 2) (س^2 - 2س + 4) \end{aligned}$$

### تحليل المقدار الثلاثي البسيط س<sup>٢</sup> + ب س + ج

قاعدة الإشارات: إذا كانت إشارة الأخير (+) يبقى الإشارتين زى إشارة الأوسط  
إذا كانت إشارة الأخير (-) يبقى الإشارتين مختلفتين والرقم الأكبر ياخذ إشارة الأوسط

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= س^2 + 4س + 4 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - 6س + 9 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 + س - 6 \blacklozenge \\ \dots\dots\dots &= س^2 - س - 1 \blacklozenge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge س^2 + 4س + 4 &= (س + 2) (س + 2) \\ \blacklozenge س^2 - 6س + 9 &= (س - 3) (س - 3) \\ \blacklozenge س^2 + س - 6 &= (س + 3) (س - 2) \\ \blacklozenge س^2 - س - 1 &= (س - 5) (س + 1) \end{aligned}$$



## حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

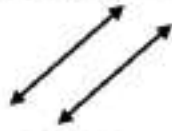


إذا كان المعادلتين على الصورة :  $أ١س + ب١ص = ج١$  ،  $أ٢س + ب٢ص = ج٢$  فإن :

## ليس لهما حلول

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{أ٢} = \frac{ب١}{ب٢} \neq \frac{ج١}{ج٢}$$

أو المستقيمان متوازيان



م. ح =  $\Phi$   
عدد الحلول = ٠

## لهما عدد لا نهائي

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{أ٢} = \frac{ب١}{ب٢} = \frac{ج١}{ج٢}$$

أو المستقيمان منطبقان

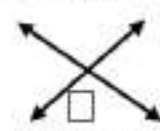


م. ح = { (س، ص) : اكتب أي معادلة من الاثنين }

## لهما حل وحيد

$$\text{إذا كان } \frac{أ١}{أ٢} \neq \frac{ب١}{ب٢}$$

أو : المستقيمان متقاطعان



عدد الحلول = ١  
م. ح = { (س، ص) }

## الحل الجبري بطريقة الحذف

١ اجعل المعادلتين على الصورة  $أس + بص = ج$  ( الحد المطلق لوحده بعد = )

٢ خلى معاملات السينات متشابهة أو معاملات الصادات متشابهة ( بضرب المعادلة كلها في رقم )

٣ اكتب المعادلتين في صورة أفقية تحت بعض ( تأكد ان السينات تحت بعض والصادات تحت بعض وهكذا )

٤ لو المتشابهين ليهم نفس الإشارة **اطرح** المعادلتين ولو إشاراتهم مختلفة **اجمع** المعادلتين.

٥ هات قيمة المجهول وعوض عنها في أي معادلة تهجيك قيمة المجهول الثاني.

## الحل الجبري بطريقة التعويض

١ من إحدى المعادلتين هات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص

٢ عوض في المعادلة الثانية بالقيمة التي جبتها ٣ فك الأقواس واجمع المتشابه

٤ احسب قيمة المجهول وعوض بيها في أي معادلة تهجيك قيمة المجهول الثاني

مثال على طريقة التعويض: حل المعادلتين  $س + ص = ٤$  ،  $س + ٢ص = ٥$

**الحل**  $ص = ٤ - س$  بالتعويض في الثانية  $س + ٢(٤ - س) = ٥$   $س + ٨ - ٢س = ٥$   $-س + ٨ = ٥$   $-س = ٥ - ٨$   $-س = -٣$   $س = ٣$  بالتعويض في الأولى  $٣ + ص = ٤$   $ص = ٤ - ٣$   $ص = ١$  م. ح = { (٣، ١) }

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$2س - ص = 3 \quad , \quad 2ص + س = 4$$

الحل

بضرب المعادلة الأولى  $\times 2$ 

$$\begin{array}{r} 2س - ص = 3 \\ + \quad 2ص + س = 4 \\ \hline 10 = 5 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية

$$\begin{aligned} 2س - ص &= 3 \quad \Rightarrow \quad 2س = 3 + ص \quad \Rightarrow \quad س = \frac{3 + ص}{2} \\ 2ص + س &= 4 \quad \Rightarrow \quad 2ص + \frac{3 + ص}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad 4ص + 3 + ص = 8 \quad \Rightarrow \quad 5ص = 5 \quad \Rightarrow \quad ص = 1 \\ س &= \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\{ (1, 2) \} = \text{ح. م.}$$

أوجد مجموعة حل المعادلتين :

$$3س + 4ص = 24 \quad , \quad 2س - 2ص = 0$$

الحل

نظبط شكل المعادلة الثانية :

بضرب المعادلة الثانية  $\times 3$ 

$$\begin{array}{r} 3س + 4ص = 24 \\ - \quad 6س - 6ص = 0 \\ \hline 24 = 10ص \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية

$$\begin{aligned} 3س + 4ص &= 24 \quad \Rightarrow \quad 3س = 24 - 4ص \quad \Rightarrow \quad س = \frac{24 - 4ص}{3} \\ 2س - 2ص &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2س = 2ص \quad \Rightarrow \quad س = ص \\ 3س + 4ص &= 24 \quad \Rightarrow \quad 3س + 4س = 24 \quad \Rightarrow \quad 7س = 24 \quad \Rightarrow \quad س = \frac{24}{7} \\ 2س - 2ص &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2س = 2ص \quad \Rightarrow \quad ص = س = \frac{24}{7} \end{aligned}$$

$$\{ (3, 4) \} = \text{ح. م.}$$

ملحوظة  
بينه

ما تطرح إطح الرقمين بإشارتهما : يعنى مثلا في مثال ٢ هتقول : ٦ - ٤  
نفس الكلام في الجمع ، خلاصة الكلام اتعامل مع الأرقام بإشاراتها

أوجد قيمتي أ، ب علما بأن (٣، ١) حلا للمعادلتين :

$$17 = 3س + 1ص \quad , \quad 5 = 3س - 1ص$$

الحل

$$\therefore \text{حل للمعادلة } 17 = 3س + 1ص$$

$$\text{نعوض عن } 3س = 17 - 1ص$$

$$\text{في المعادلة } 5 = 3س - 1ص \quad \Rightarrow \quad 5 = 17 - 1ص - 1ص \quad \Rightarrow \quad 5 = 17 - 2ص \quad \Rightarrow \quad 2ص = 12 \quad \Rightarrow \quad ص = 6$$

$$\therefore \text{حل للمعادلة } 17 = 3س + 1ص$$

$$\text{نعوض عن } 3س = 17 - 1ص$$

$$\text{في المعادلة } 5 = 3س - 1ص \quad \Rightarrow \quad 5 = 17 - 1ص - 1ص \quad \Rightarrow \quad 5 = 17 - 2ص \quad \Rightarrow \quad 2ص = 12 \quad \Rightarrow \quad ص = 6$$

$$\begin{array}{r} 17 = 3س + 1ص \\ - \quad 5 = 3س - 1ص \\ \hline 12 = 2ص \end{array}$$

$$\therefore 2 = 1ص \quad \Rightarrow \quad 1ص = 2 \quad \Rightarrow \quad ص = 2$$

$$5 = 3س - 1ص \quad \Rightarrow \quad 5 = 3س - 2 \quad \Rightarrow \quad 7 = 3س \quad \Rightarrow \quad س = \frac{7}{3}$$

$$\therefore 17 = 3س + 1ص \quad \Rightarrow \quad 17 = 7 + 1ص \quad \Rightarrow \quad 10 = 1ص \quad \Rightarrow \quad ص = 10$$

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم ،  
فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم فاعرف مساحته.

الحل

نفرض أن الطول = س والعرض = ص

الطول يزيد عن العرض  $\therefore$  الطول - العرض = الزيادة

$$\therefore س - ص = 4$$

المحيط = ٢٨ ، محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

$$\therefore 2(س + ص) = 28 \quad \Rightarrow \quad س + ص = 14$$

$$\therefore س + ص = 14$$

$$\begin{array}{r} س + ص = 14 \\ + \quad س - ص = 4 \\ \hline 2س = 18 \end{array}$$

$$\therefore س = 9$$

بالتعويض في س - ص = 4

$$\therefore 9 - ص = 4 \quad \Rightarrow \quad 5 = ص$$

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض} = 9 \times 5 = 45 \text{ سم}^2$$





٢ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص = ٤$$

الحل

١ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$س + ٣ص = ٧ ، ٥س - ص = ٣$$

الحل

٤ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية  
الفرق بين قياسيهما ٥٠ ، أوجد قياسيهما

الحل

٣ أوجد في ح× ح مجموعة حل المعادلتين :

$$ص = ١ - ٢س ، ٢س + ٢ص = ٥$$

الحل

جرب حلها بالطريقتين (الحذف والتعويض)



## حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

إذا كانت المعادلة على الصورة :  $أس^2 + ب س + ج = ٠$  ، نستخدم القانون العام:

### القانون العام



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$



أ : معامل  $س^2$   
ب : معامل  $س$   
ج : الحد المطلق

### خطوات حل المعادلة:

١ خلى المعادلة على الصورة  $أس + ب ص + ج = صفر$  ( وديهم كلهم قبل يساوى )

يعنى لو كانت كده :  $س^2 = ٣ + ٥س$  خليها كده :  $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$

٢ خذ من المعادلة قيم أ ، ب ، ج بإشارتهم الموجودة في المعادلة

يعنى لو المعادلة كده  $س^2 - ٥س - ٣ = ٠$  يبقى أ = ١ ، ب = -٥ ، ج = -٣

٣ عوض في القانون العام عن قيم أ ، ب ، ج واحسب اللي تحت الجذر لحد ما يبقى رقم واحد بس

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^2 - ٤(-٣)}}{٢ \times ١} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ١٢}}{٢} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$$

٤ افصل الناتج مرة بال ( + ) ومرة بال ( - ) واحسب القيمتين بالآلة الحاسبة

$$س = \frac{-٥ + \sqrt{٣٧}}{٢} = ٢,٥٤١ \quad \text{و} \quad س = \frac{-٥ - \sqrt{٣٧}}{٢} = -٠,٥٤١$$

٥ اكتب الناجين في مجموعة الحل

$$س \in \{ ٢,٥٤١ , -٠,٥٤١ \}$$



### ملاحظات

ملحوظة ١ : شايف - ب اللي فوق في القانون؟ دى معناها انك تعوض عن ب بس بإشارة مختلفة

ملحوظة ٢ : شايف ٢ أ اللي في المقام؟ شايقها؟ لا دى مفبهاش حاجة ، كويس انك شايقها

ملحوظة ٣ : إذا كان المميز  $ب^2 - ٤ أ ج < صفر$  (موجب) فإن المعادلة لها جذران

وإذا كان  $ب^2 - ٤ أ ج > صفر$  (سالب) فإن المعادلة ليس لها حلول ، أي م . ح =  $\Phi$

وإذا كان  $ب^2 - ٤ أ ج = صفر$  فإن المعادلة لها جذر واحد ( أو جذران متساويان )



## أمثلة محلولة

١ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل

المعادلة الآتية في ح :  $س^3 - ٥س + ١ = ٠$   
مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل

$$\begin{array}{l} ٣ = أ \\ ٥ = ب \\ ١ = ج \end{array}$$



$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^2 - ١ \times ٣}}{٣ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٣}}{٦} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٢}}{٦}$$

$$\text{إما } س = \frac{-٥ + \sqrt{٢٢}}{٦} \text{ أو } س = \frac{-٥ - \sqrt{٢٢}}{٦}$$

$$\therefore س \approx ١,٤٣ \quad \therefore س \approx -٠,٢٣$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{ ١,٤٣ , -٠,٢٣ \}$$

٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$س^2 - ٤س + ١ = ٠$  مقربا الناتج لرقمين عشريين

الحل

$$\begin{array}{l} ١ = أ \\ ٤ = ب \\ ١ = ج \end{array}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤^2 - ١ \times ١}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ١}}{٢} = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٥}}{٢}$$

$$\text{إما } س = \frac{-٤ + \sqrt{١٥}}{٢} \text{ أو } س = \frac{-٤ - \sqrt{١٥}}{٢}$$

$$\therefore س \approx ٣,٧٣ \quad \therefore س \approx -٠,٢٧$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{ ٣,٧٣ , -٠,٢٧ \}$$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س(١ - س) = ٤$

باستخدام القانون العام مقربا الناتج لثلاثة أرقام

الحل

الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$$س^2 - س - ٤ = ٠$$

$$\begin{array}{l} ١ = أ \\ ١ = ب \\ ٤ = ج \end{array}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١^2 - ٤ \times ١ \times ٤}}{١ \times ٢}$$



$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ١٦}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-١٥}}{٢}$$

$$\text{إما } س = \frac{-١ + \sqrt{-١٥}}{٢} \text{ أو } س = \frac{-١ - \sqrt{-١٥}}{٢}$$

$$\therefore س \approx ٢,٥٦٢ \quad \therefore س \approx -١,٥٦٢$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{ ٢,٥٦٢ , -١,٥٦٢ \}$$

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س(٣ - س) = ٥$

مقربا الناتج لرقمين عشريين

الحل



الأول لازم نضرب الـ س في القوس

$$س^2 - ٣س - ٥ = ٠$$

$$س^2 - ٣س + ١١ = ٠$$

$$\begin{array}{l} ١ = أ \\ ١١ = ب \\ ٩ = ج \end{array}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١١ \pm \sqrt{١١^2 - ٩ \times ١ \times ٤}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-١١ \pm \sqrt{١٢١ - ٣٦}}{٢} = \frac{-١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$$\text{إما } س = \frac{-١١ + \sqrt{٨٥}}{٢} \text{ أو } س = \frac{-١١ - \sqrt{٨٥}}{٢}$$

$$\therefore س \approx ١٠,١١ \quad \therefore س \approx -٠,٨٩$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{ ١٠,١١ , -٠,٨٩ \}$$



١ أوجد مجموعة حل المعادلة  $٥س + ١ = ٠$   
 باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشري واحد

الحل

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ٠}}{٢ \times ٥}$$

$$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١}}{١٠}$$

$$س = \frac{-١ \pm ١}{١٠}$$

$$س = \frac{-١ + ١}{١٠} = ٠ \quad \text{أو} \quad س = \frac{-١ - ١}{١٠} = -٠,٢$$

٢ م. ح = { ٠,٢ , ٢,٣ } اتأكد بالآلة

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س - ٢ = ٤$   
 باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشري واحد

الحل

مساعدة : اوعي تنسى تنقل الـ ٤ قبل = بإشارة مخالفة

٤ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة

$$١ = \frac{١}{س} + \frac{٨}{س}$$

الحل

مساعدة : للتخلص من الكسور اضرب المعادلة كلها  $\times س$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة  $س - ٢ = ٤$   
 باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقمين عشريين

الحل

## حل معادلتين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية



نصه  
مجموع عوض  
معلم اول رياضيات

- \* ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى وهات قيمة ص بدلالة س أو قيمة س بدلالة ص
- \* عوض في معادلة الدرجة الثانية عن القيمة التي انت جبتها
- \* فك الأقواس
- \* جمع المتشابه ( وخلي المعادلة = ٠ )
- \* التحليل (ولو لقيت رقم عامل مشترك اقسم عليه قبل التحليل)
- \* إما - أو ( وهات قيمتين للمجهول )
- \* عوض عن القيمتين في معادلة الدرجة الأولى وهات قيمتين للمجهول الثاني



### نوريت على فك الأقواس

$$\text{نوريت على فك الأقواس} \quad (س + ٣)^2 = \text{مربع الأول} \pm \text{الأول} \times \text{التاني} \times ٢ + \text{مربع التاني} = س^2 + ٦س + ٩$$

إشارة القوس

$$\dots\dots\dots = (س + ٤)^2 \quad \text{✈} \quad \dots\dots\dots = (١ - ص)^2 \quad \text{✈}$$

$$\text{نوريت على جمع المتشابه} \quad س(س + ٣) + س^2 = (س + ٣)^2 \quad \text{✈} \quad س - (س - ٣) = (٣ - س)س \quad \text{✈}$$

$$\dots\dots\dots = (٥ - س)س \quad \text{✈} \quad \dots\dots\dots = ص - (١ + ٣ص) \quad \text{✈}$$

### نوريت على جمع المتشابه

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= ٢٥ + ١ص + ٢ص + ١ص^2 \\ \dots\dots\dots &= ١ + ٤ص + ٤ص^2 - ص - ٢ص^2 \\ \dots\dots\dots &= ٥٢ + ٢٠ص + ١٠٠ - ٤ص^2 - ١٠ص + ٢ص^2 \\ \dots\dots\dots &= ١٣ - ٣س - ٩ + ٦س + ١س^2 \\ \dots\dots\dots &= ١ص^2 + ٢ص + ١ص^2 \end{aligned}$$

ملحوظة : س ص = ٩ هي معادلة من الدرجة الثانية وليست من الدرجة الأولى







١ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين

$$\text{ص} - \text{س} = 3, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 13$$

الحل

من معادلة الدرجة الأولى :  
بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية

∴

نفس الأقواس

∴

نجمع المتشابه

بالتحليل

∴

∴

إما

∴

بالتعويض في

∴

$$\therefore \text{م.ح} = \{ (-1, 4), (1, 4) \}$$

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم ومساحته ١٢ سم<sup>٢</sup>

أوجد كلا من بعديه

الحل

نفرض أن بُعدا المستطيل هما س ، ص

∴ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

$$\therefore 14 = 2(\text{س} + \text{ص}) \quad \text{بالقسمة على ٢}$$

$$\text{س} + \text{ص} = 7 \quad \text{ومنها} \quad \text{ص} = 7 - \text{س}$$

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ س ص = ١٢

بالتعويض عن ص = ٧ - س في المعادلة س ص = ١٢

$$\therefore \text{س} (7 - \text{س}) = 12 \quad 7\text{س} - \text{س}^2 = 12$$

٧س - س<sup>٢</sup> - ١٢ = ٠ نرتب ونغير إشارة الكل

$$\text{س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0 \quad \text{س} = 4 \quad \text{س} = 3$$

$$\text{إما} \quad \text{س} = 4 \quad \text{أو} \quad \text{س} = 3$$

$$\text{ص} = 7 - 4 = 3 \quad \text{أو} \quad \text{ص} = 7 - 3 = 4$$

∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم ، ٤ سم

٣ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{ص} - \text{س} = 2, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 4$$

الحل

٤ أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين :

$$\text{س} + \text{ص} = 5, \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} = 15$$

الحل

## الحل البياني للمعادلات

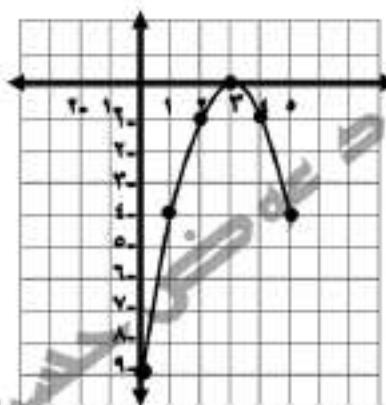
أرسم الشكل البياني للدالة

٢

د(س) =  $س^2 - ٩س + ١٠$  في الفترة  $[٠, ٩]$   
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

الحل

س	٥	٤	٣	٢	١	٠
ص	٤	١	٠	١	٤	٩



ح.م = { ٢ } =

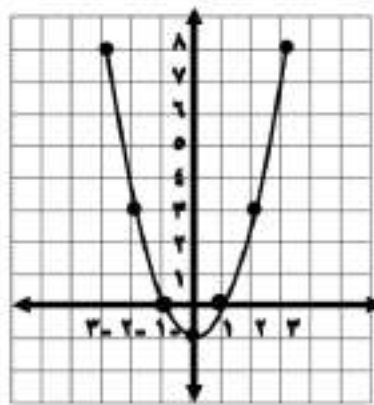
أرسم الشكل البياني للدالة : د(س) =  $س^2 - ١س + ١$ 

١

في الفترة  $[-٣, ٣]$   
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة  $س^2 - ١س + ١ = ٠$

الحل

س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص	٨	٣	٠	١	٠	٣	٨



ح.م = { ١, ٠ } =

نفس خطوات تمثيل الدالة التربيعية

نص محمود عوض حسن  
معلم أول رياضيات

## ملاحظات على الحل البياني

- مجموعة حل معادلة من الدرجة الثانية بيانيا هي :  
قيم س التي يقطعها المنحنى من محور السينات
- إذا لم يقطع المنحنى محور السينات فإن ح.م =  $\Phi$
- .....
- مجموعة حل معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا هي :  
نقطة تقاطع المستقيمين
- إذا توازي المستقيمان فإن ح.م =  $\Phi$
- إذا انطبق المستقيمان فإن مجموعة الحل هي :  
{ (س، ص) : واكتب أي معادلة من الاثنين }

أوجد في ح × ح مجموعة حل المعادلتين بيانيا :

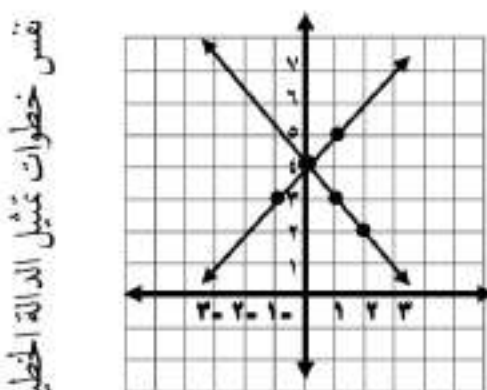
٣

ص = س + ٤ ، س = ص + ٤

الحل

ص = س + ٤ ، س = ص + ٤

س	٢	١	٠
ص	٢	٣	٤



ح.م = { (٠, ٠) } =

نفس خطوات تمثيل الدالة الخطية

نص محمود عوض حسن  
معلم أول رياضيات



## أسئلة اختر على الوحدة الأولى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ نقطة تقاطع المستقيمان  $ص = 2$  ،  $س + ص = 6$  هي .....  
 (أ)  $(6, 2)$  (ب)  $(4, 2)$  (ج)  $(2, 4)$  (د)  $(2, 6)$

- ٢ مجموعة حل المعادلتين  $س - 2ص = 1$  ،  $3س + ص = 10$  هي .....  
 (أ)  $\{(2, 5)\}$  (ب)  $\{(4, 2)\}$  (ج)  $\{(3, 1)\}$  (د)  $\{(1, 3)\}$

- ٣ عدد حلول المعادلتين  $س + ص = 2$  ،  $ص + س = 3$  هو .....  
 (أ) صفر (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

الحل  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$  ،  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$  ،  $\frac{2}{3} = \frac{1}{1.5}$   $\therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$   $\therefore$  عدد الحلول = صفر أى : م.ح  $\Phi$

- ٤ إذا كان للمعادلتين  $س + 4ص = 7$  ،  $3س + ك = 21$  عدد لا نهائي من الحلول فإن ك = .....  
 (أ) 4 (ب) 7 (ج) 12 (د) 21

الحل  $\therefore$  للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول  $\therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \therefore \frac{4}{21} = \frac{1}{3}$  (مقص)  $\therefore$  ك = 12

- ٥ إذا كان للمعادلتين  $س + 2ص = 1$  ،  $2س + ك = 2$  حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوى .....  
 (أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \therefore \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$  (مقص)  $\therefore$  للمعادلتين حل وحيد  $\therefore$  ك لا يمكن أن تساوى 4

- ٦ المستقيمان  $3س + 5ص = 5$  ،  $5س - 3ص = 5$  يتقاطعان في .....  
 (أ) الربع الأول (ب) الربع الثانى (ج) نقطة الأصل (د) الربع الثالث

- ٧ مجموعة حل المعادلتين  $س - 2ص = 0$  ،  $س + 9 = 9$  هي .....  
 (أ)  $\{(0, 0)\}$  (ب)  $\{(3, -3)\}$  (ج)  $\{(3, 3)\}$  (د)  $\{(3, 3), (3, -3)\}$

الحل : من المعادلة الأولى:  $س = 2ص$  بالتعويض في الثانية  $9 = 9 \therefore 3 = 3$   $\therefore$   $س = 3$  ،  $ص = 3$  بالتعويض في  $س = 2ص$  عندما  $ص = 3$  ،  $س = 6$  ، عندما  $ص = -3$  ،  $س = -6$   $\therefore$  م.ح  $\{(3, 3), (3, -3)\}$

- ٨ أحد حلول المعادلتين  $س - 2ص = 2$  ،  $2س + 3ص = 20$  هو .....  
 (أ)  $\{(2, 4)\}$  (ب)  $\{(4, -2)\}$  (ج)  $\{(1, 3)\}$  (د)  $\{(2, 4)\}$

- ٩ إذا كان المستقيمان  $س + 3ص = 4$  ،  $س + 7ص = 7$  متوازيين فإن أ = .....  
 (أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7



## الواجب المنزلي

## الدرس الأول : حل معادلتين من الدرجة الأولى

١ أوجد في ح' مجموعة حل المعادلتين  $س + ٢ = ٨$  ،  $٣س + ١ = ٩$ ٢ أوجد في ح' ح مجموعة حل المعادلتين  $س + ٢ = ١$  ،  $س + ٢ = ٥$ ٣ أوجد في ح' ح مجموعة حل المعادلتين  $س = ٤ + ٤$  ،  $٣س + ٢ = ٧$ 

٤ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم فإذا كان محيطه ٢٢ سم فأوجد مساحته.

٥ أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلتين  $س = ٣ - ٢س$  ،  $س + ٢ = ٤$ 

## الدرس الثاني : القانون العام

١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة  $س' - ٢س - ٦ = ٠$  مقربا الناتج لرقم عشري واحد.٢ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة  $٣س' - ٦س + ٦ = ٠$  مقربا الناتج لثلاثة أرقام عشرية٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث  $د(س) = س' - ٢س - ٤$  في الفترة  $[-٢, ٤]$   
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة  $س' - ٢س - ٤ = ٠$ 

## الدرس الثالث : حل معادلتين إحداها من الدرجة الأولى والأخرى من الثانية

١ أوجد في ح' ح مجموعة حل المعادلتين  $س - ٢ = ٢$  ،  $س' + ٢ = ٢٠$ ٢ أوجد في ح' ح مجموعة حل المعادلتين  $س + ٢ = ٤$  ،  $س + ٢ = ٧$ 

٣ عددان مجموعهما ٩٠ وحاصل ضربهما ٢٠٠٠ أوجد العددين

٤ مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم<sup>٢</sup> أوجد محيطه.

٥ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوي ٣٠ سم أوجد طول ضلعي القائمة



## أصفار الدالة



\* لإيجاد أصفار الدالة نساوي الدالة بالصفر ونحل المعادلة

مثال: إذا كانت د (س) =  $س^2 - ٩$  فأوجد أصفار الدالة  
الحل:  $س^2 - ٩ = ٠$   $\therefore س^2 = ٩$   $\therefore س = \pm ٣$   $\therefore$  ص (د) =  $\{ ٣, -٣ \}$

\* لو كانت د (س) = صفر فإن ص (د) = ح

\* أصفار الكسر الجبري = أصفار البسط - أصفار المقام  
( يعني التي موجود في اصفار البسط ومثل متكرر في أصفار المقام )

## الدوال التي أصفارها $\Phi$

\* (س + عفرية) ملوش أصفار: زى  $س^2 + ٤$  أو  $س^2 + ٣$  وهكذا  $\Phi = \text{ص (د)}$

\* في مجموع المكعبين والفرق بينهما : القوس الكبير ملوش أصفار  $\Phi = \text{ص (د)}$

\* لو كانت د (س) = أي عدد (ما عدا الصفر) زى د (س) = ٣ فإن  $\Phi = \text{ص (د)}$

تدريب: أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال الآتية:

١ د (س) = $س^2 - ١٨س$	٢ د (س) = $س^2 + ١٥س - ١٥$	٣ د (س) = $س^2 + ١٦س$
الحل :	الحل :	الحل :
.....	.....	.....
ص (د) =	ص (د) =	ص (د) =

ملحوظة : لو أعطاك أصفار الدالة معلومة في المسألة عوض بيها في الدالة وسأوي الدالة بالصفر

إذا كانت د (س) =  $س^3 - ٢س^2 - ٧٥س$   
فأثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة

الحل بالتعويض في الدالة عن س = ٥

$$\begin{aligned} \therefore د (٥) &= ٥^3 - ٢ \times ٥^2 - ٧٥ \times ٥ \\ &= ١٢٥ - ٥٠ - ٧٥ \\ &= ٠ \end{aligned}$$

$\therefore د (٥) = ٠$   $\therefore$  العدد ٥ أحد أصفار الدالة

إذا كانت  $\{ ٣, -٣ \}$  هي مجموعة أصفار الدالة د  
حيث د (س) =  $س^2 + ١$  فأوجد قيمة أ

الحل  $\therefore \{ ٣, -٣ \}$  هي مجموعة أصفار الدالة

$\therefore$  أي قيمة من هذه القيم تجعل د (س) = ٠

$$\therefore ٠ = ٣^2 + ١$$

$$\therefore ٠ = ٩ + ١ \quad \therefore ٠ = ١٠$$





دالة الكسر الجبري : يرمز لها بالرمز  $\frac{د(س)}{ق(س)}$  وهي دالة على صورة  $\frac{د(س)}{ق(س)}$

مثل :  $\frac{س + ٥}{٣} = (س) \text{ ن}$  ،  $\frac{س^٢}{٨ + س} = (س) \text{ د}$  ،  $\frac{س - ٣}{١٢ + س} = (س) \text{ د}$

نصم  
معلم اول رياضيات  
يم

- ◆ مجال الكسر الجبري = ح - اصفار المقام  
مثال : اذا كان  $\frac{س - ١}{س - ٣} = (س) \text{ ن}$  فإن مجال  $ح = \{ ٣ \}$
- ◆ المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ح - مجموعة اصفار المقامات  
مثال : اذا كان  $\frac{س}{س - ١} = (س) \text{ ن}$  ،  $\frac{س + ٣}{(س - ٥)(س + ٧)} = (س) \text{ ن}$  ، فإن المجال المشترك لكل من  $١ \text{ ن}$  ،  $٥$  ،  $٧$  - ح =  $\{ ١ ، ٥ ، ٧ \}$
- ◆ ملحوظة : قبل اخراج المجال حلل المقام لوليه تحليل .

نصم  
معلم اول رياضيات  
يم

تدريب ١ : عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الآتية :

٣  $\frac{س - ١}{س + ٢} = (س) \text{ ن}$   
الحل

٢  $\frac{س - ٢}{س^٢} = (س) \text{ ن}$   
الحل

١  $\frac{س + ٥}{٣} = (س) \text{ ن}$   
الحل  
المقام عدد يبقى ملوش اصفار  
المجال = ح

٦  $\frac{س + ١}{س^٤ - ٩} = (س) \text{ ن}$   
الحل

٥  $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤} = (س) \text{ ن}$   
الحل

٤  $\frac{س + ١}{س - ١} = (س) \text{ ن}$   
الحل

تدريب ٢ : عيّن المجال المشترك لكل من الدوال الكسرية الآتية :

٢  $\frac{س + ١}{س^٣ - ٧} = (س) \text{ ن}$  ،  $\frac{س + ١}{س^٣ - ٨} = (س) \text{ ن}$   
الحل

١  $\frac{س + ٥}{س^٢ - ١٦} = (س) \text{ ن}$  ،  $\frac{س + ٥}{س^٢ - ٢٠} = (س) \text{ ن}$   
الحل



أمثلة وتدريبات على الأصفار والمجال

إذا كانت مجموعة أصفار الدالة

د(س) = أس' + ب س + ١٥ هي {٥، ٣} فأوجد قيمة كل من أ، ب

$$\text{د(٣)} = ٠ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٣ب + ١٩ \quad \therefore \text{بالقسمة : ٣} \\ ١٣ = ب + ٥ \quad \leftarrow ١$$

$$\text{د(٥)} = ٠ \quad \therefore ٠ = ١٥ + ٥ب + ٢٥ \quad \therefore \text{بالقسمة : ٥} \\ ٢ = ب + ٣ \quad \leftarrow ٢$$

بحل المعادلتين بطريقة الحذف

$$\begin{array}{r} ٥ = ب + ١٣ \\ ٣ = ب + ١٥ \\ \hline \text{بالطرح} \end{array}$$

$$\therefore ٢ = ١٢ \quad \therefore ١ = ب$$

بالتعويض في ١ :  $٥ = ب + ٣ \quad \therefore ٥ = ب$

س - ١

إذا كان مجال الدالة ن(س) =  $\frac{س - ١}{س^٢ - أس + ٩}$  هو ح - {٣} فأوجد قيمة أ

$$\therefore \text{المجال} = ح - \{٣\}$$

$$\therefore \text{أصفار المقام} = ٣$$

بالتعويض عن س = ٣ ونساوي المقام بالصفر

$$\therefore ٠ = ٩ + ٣ \times ١ - أ$$

$$٠ = ٩ + ١٣ - أ$$

$$٠ = ١٣ - ١٨$$

$$١٨ = ١٣$$

$$\therefore ٦ = أ$$

س + ٥

إذا كان مجال الدالة د(س) =  $\frac{س + ٥}{س^٢ - أ}$

هو ح - {٢، ٢} فأوجد قيمة أ

الحل

إذا كانت {٥، ٣} هي مجموعة أصفار الدالة

د(س) = س' - ٢ س + أ فأوجد قيمة أ

الحل

إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن(س) =  $\frac{س - أ}{س + ب}$

هي {٥}، ومجالها هو ح - {٣} فأوجد قيمتي كل من أ، ب

الحل

$\therefore$  أصفار الكسر الجبري = {٥}

$\therefore$  أصفار البسط = {٥}

$$٥ = ١ - أ \quad \therefore ٥ = أ$$

$\therefore$  المجال = ح - {٣} :  $\therefore$  أصفار المقام = {٣}

$$٣ = ب + ٠ \quad \therefore ٣ = ب$$

إذا كان مجال الدالة ن(س) =  $\frac{٩}{س} + \frac{ب}{س + أ}$

هو ح - {٤، ٠}، ن(٥) = ٢ فأوجد قيمتي أ، ب

$\therefore$  المجال = ح - {٤، ٠} :  $\therefore$  أصفار المقام الثاني = ٤

$$٤ = ١ + أ \quad \therefore ٤ = أ$$

$$\therefore \text{ن(س)} = \frac{٩}{س} + \frac{ب}{س - ٤}$$

$$\therefore \text{ن(٥)} = ٢ \quad \therefore ٢ = \frac{٩}{٥ - ٤} + \frac{ب}{٥ - ٤}$$

$$\frac{٢}{٥} = ٩ + \frac{ب}{٥} \quad \therefore ٢٥ = ٩٥ + ب$$

# اختزال الكسر الجبري



نصه مهمه عوض  
معلم اول رياضيات



تحليل البسط والمقام

تحليل

إخراج المجال - ح - أصغار المقام

صجال

حذف العوامل المتشابهة بين البسط والمقام

حذف

فقران واختزال وكسر جبري

## تدريب ١

$$\text{اختصر لأبسط صورة ن(س) = } \frac{س^٢ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$$

الحل

التحليل :

المجال :

الحذف :

## مثال

$$\text{اختصر لأبسط صورة ن(س) = } \frac{س^٢ - ١}{س^٣ + س^٢ - ٥س}$$

الحل

$$\text{التحليل : ن(س) = } \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س+٥)}$$

$$\text{المجال : المجال = ح - } \{١, -٥\}$$

$$\text{الحذف : ن(س) = } \frac{س+١}{س+٥}$$

## تدريب ٣

$$\text{اختصر لأبسط صورة ن(س) = } \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٨س + ١٥}$$

الحل

## تدريب ٢

$$\text{اختصر لأبسط صورة ن(س) = } \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٨}$$

الحل

# تساوی کسرین جبریین



إعداد / محمود عوض حسن

## لوعايز تعرف هل : $n_1 = n_2$ أم لا اتبع الآتى :

- ☐ اختصر كل كسر لوحده بالخطوات الثلاثة (تحليل - مجال - حذف)
  - ☐  $n_1 = n_2$  إذا تحقق شرطان معًا وهما : ① مجال  $n_1$  = مجال  $n_2$  ②  $n_1(s) = n_2(s)$  بعد الاختصار النهائي
  - ☐ لوقيت مجال  $n_1$  = مجال  $n_2$  بينما  $n_1(s) \neq n_2(s)$  فإن  $n_1 \neq n_2$
  - ☐ لوقيت  $n_1(s) = n_2(s)$  بينما مجال  $n_1 \neq$  مجال  $n_2$  فإن :  $n_1 \neq n_2$
- ولكن في حالة اختلاف المجالين يكون  $n_1 = n_2$  في المجال المشترك فقط

### مثال ٢

نصمعه عوض  
معلم اول رياضيات

### مثال ١

أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه  $n_1$  ،  $n_2$  حيث :

$$\frac{n_1^2 + n_1 + 12}{n_1^2 + n_1 + 5 + 4} = \frac{n_2^2 - 2n_2 + 3}{n_2^2 + n_2 + 1 + 3} = n_2(s)$$

الحل

$$n_1(s) = \frac{n_1^2 + n_1 + 12}{(n_1 + 4)(n_1 + 1)} = \frac{(n_1 - 3)(n_1 + 4)}{(n_1 + 4)(n_1 + 1)}$$

مجال  $n_1$  = ح - { -4 ، -1 }

$$n_1(s) = \frac{n_1 - 3}{n_1 + 1}$$

$$n_2(s) = \frac{n_2^2 - 2n_2 + 3}{n_2^2 + n_2 + 1 + 3} = \frac{(n_2 - 3)(n_2 + 1)}{(n_2 + 1)(n_2 + 4)}$$

مجال  $n_2$  = ح - { -1 }

$$n_2(s) = \frac{n_2 - 3}{n_2 + 4}$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$  بينما مجال  $n_1 \neq$  مجال  $n_2$

$\therefore n_1 = n_2$  في المجال المشترك ح - { -4 ، -1 }

$$\text{إذا كان } n_1(s) = \frac{n_1^2 - 2n_1 + 3}{n_1^2 + n_1 + 1 + 3} = \frac{n_2^2 + n_2 + 1 + 3}{n_2^2 + n_2 + 1 + 3} = n_2(s) \text{ أثبت أن : } n_1 = n_2$$

الحل

$$n_1(s) = \frac{n_1^2 - 2n_1 + 3}{(n_1 + 1)(n_1 + 4)} = \frac{n_2^2 + n_2 + 1 + 3}{(n_2 + 1)(n_2 + 4)}$$

مجال  $n_1$  = ح - { -1 ، 0 }

$$n_1(s) = \frac{1}{1 - s}$$

$$n_2(s) = \frac{n_2^2 + n_2 + 1 + 3}{n_2^2 + n_2 + 1 + 3} = \frac{(n_2 + 1)(n_2 + 4)}{(n_2 + 1)(n_2 + 4)} = \frac{(n_2 + 1)(n_2 + 4)}{(n_2 + 1)(n_2 + 4)}$$

مجال  $n_2$  = ح - { -1 ، 0 }

$$n_2(s) = \frac{1}{1 - s}$$

$\therefore n_1(s) = n_2(s)$  ، مجال  $n_1 =$  مجال  $n_2$

$\therefore n_1 = n_2$





١

$$\frac{س^2}{س^2 + ٨} = (س)١ \text{ إذا كان } ن١$$

$$ن٢ = (س)٢ = \frac{س^2 + ٤س}{س^2 + ٨س + ١٦} \text{ أثبت أن : } ن١ = ن٢$$

الحل

٢

$$\frac{س^2}{س^2 - ١} = (س)١ \text{ إذا كان } ن١, \frac{س^2 + ٦س}{(س^2 + ٣س)(س^2 - ١)} = (س)٢$$

بين إذا كان  $ن١ = ن٢$  أم لا ؟ مع ذكر السبب

الحل

٣

أوجد المجال المشترك الذي تتساوى فيه الدالتان:

$$ن١ = (س)١ = \frac{س^2 + ٩س + ٢٠}{س^2 - ١٦}, ن٢ = (س)٢ = \frac{س^2 + ٥س}{س^2 - ٤س}$$

الحل

٤

$$\frac{س^2 - ٤س}{س^2 + ٦س - ٦} = (س)١ \text{ إذا كان } ن١$$

$$ن٢ = (س)٢ = \frac{س^2 - ٦س - ٩}{س^2 - ٩س} \text{ أثبت أن : } ن١ = (س)١ = ن٢$$

لجميع قيم س التي تنتمي إلى المجال المشترك ، وأوجد هذا المجال

الحل

$$\frac{س^2 - ٤س}{(س^2 + ٦س - ٦)(س^2 - ٩س)} = \frac{س^2 - ٦س - ٩}{(س^2 - ٩س)(س^2 + ٦س - ٦)}$$

$$\frac{س^2 + ٥س}{س^2 + ٦س - ٦} = (س)١ \text{ مجال } ن١ = \{ -٣, ٢ \}$$

$$\frac{س^2 - ٦س - ٩}{(س^2 - ٩س)(س^2 + ٦س - ٦)} = \frac{س^2 - ٤س}{(س^2 + ٦س - ٦)(س^2 - ٩س)}$$

$$\frac{(س^2 - ٦س - ٩)(س^2 + ٦س - ٦)}{(س^2 - ٩س)(س^2 + ٦س - ٦)} = \frac{س^2 - ٤س}{(س^2 + ٦س - ٦)(س^2 - ٩س)}$$

$$\frac{س^2 + ٥س}{س^2 + ٦س - ٦} = (س)١ \text{ مجال } ن٢ = \{ -٣, ٠, ٣ \}$$

$ن١ = (س)١ = ن٢ = (س)٢$  بينما مجال  $ن١ \neq$  مجال  $ن٢$

$\therefore ن١ = (س)١ = ن٢ = (س)٢$  فقط في المجال المشترك

ح -  $\{ -٣, ٠, ٣ \}$

# جمع وطرح الكسور الجبرية



اعداد / محمود عوض

## الخطوات:

- ١ ترتيب حدود المقادير (يعني ١٥ - ١٣ س + ٢ س<sup>٢</sup> رتبة بإشاراته وخليه كده ٢ س<sup>٢</sup> - ١٣ س + ١٥)
- ٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن
- ٣ اخراج المجال المشترك (ح - أصفار المقامات)
- ٤ حذف العوامل المتشابهة في كل كسر لوحده (أو عى تحذف قوس من الكسر الأول مع قوس من الكسر الثاني)
- ٥ لو لقيت المقامات موحدة : خذ مقام منهم واجمع البسطين أو اطرحهم (حسب العملية).

$$\frac{3 + س}{2 + س} = \frac{3}{2 + س} + \frac{س}{2 + س} \quad \text{زى كده :}$$

لو المقامات غير موحدة : وحد المقامات كالتالى :

شوف إيه اللي موجود في مقام الأول ومش موجود في مقام التاني واضربه × الكسر التاني كله (بسط ومقام)  
وشوف إيه اللي موجود في مقام التاني ومش موجود في مقام الأول واضربه × الكسر التاني كله (بسط ومقام)

$$\frac{3 + س}{(2 + س)(3 - س)} + \frac{س}{2 - س} \quad \text{هنضرب بسط ومقام الأول × (3 - س)} \quad \text{زى كده :}$$



$$\frac{3 + س}{(2 + س)(3 - س)} + \frac{س(3 - س)}{(3 - س)(2 - س)} \quad \text{هيبقى كده :}$$

$$\frac{1}{1 + س} + \frac{س}{1 - س} \quad \text{هنضرب بسط ومقام الأول × (1 - س)} \quad \text{وهنضرب بسط ومقام التاني × (1 + س)} \quad \text{أو كده :}$$

$$\frac{1 + س}{(1 + س)(1 - س)} + \frac{س(1 - س)}{(1 - س)(1 + س)} \quad \text{هيبقى كده :}$$

٦ اجمع المتشابه في البسط ولو نفع يتحلل حلله و ضع المقدار في أبسط صورة

$$\frac{1 + س}{2 - س} = \frac{(1 + س)(3 - س)}{(3 - س)(2 - س)} = \frac{3 + س٢ - ٢س - ٣س}{(3 - س)(2 - س)} = \frac{3 + س٢ - ٣س - ٢س}{(3 - س)(2 - س)} \quad \text{فمثلا :}$$

لو لقيت مقدار فيه حدين مطروحين ومش مرتب

$$\begin{array}{ll} \text{زى كده} & ٣ - س \\ \text{أو كده} & ١ - س٢ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{هنخليه كده} \\ \text{هنخليه كده} \end{array} \quad \begin{array}{l} - (س - ٣) \\ - (س٢ - ١) \end{array}$$

ملحوظة هامة



## أمثلة محلولة

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{4}{س} - \frac{س - 3}{س(س + 7) + 12} = \frac{س - 2}{س(س - 4)}$$

الحل

$$\frac{4}{س} = \frac{س - 3}{س(س + 7) + 12} + \frac{س - 2}{س(س - 4)}$$

المجال = ح - { 0 ، 3 ، 4 }

$$\frac{4}{س} = \frac{س - 3}{س(س + 7) + 12} + \frac{س - 2}{س(س - 4)}$$

نؤحد المقامات : نضرب الكسر الأول × س

$$\frac{4}{س} = \frac{س - 3}{س(س + 7) + 12} + \frac{س - 2}{س(س - 4)}$$

خذ منهم مقام واضرح البسطين

$$\frac{4}{س} = \frac{س - 3}{س(س + 7) + 12} + \frac{س - 2}{س(س - 4)}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س + 3}{س(س - 2)} + \frac{س + 2}{س(س - 4)} = \frac{س - 5}{س(س - 6)}$$

الحل

$$\frac{س + 3}{س(س - 2)} + \frac{س + 2}{س(س - 4)} = \frac{س - 5}{س(س - 6)}$$

المجال = ح - { 2 ، 4 ، 6 }

$$\frac{س + 3}{س(س - 2)} + \frac{س + 2}{س(س - 4)} = \frac{س - 5}{س(س - 6)}$$

نؤحد المقامات : نضرب الكسر الأول × (س - 3)

$$\frac{س + 3}{س(س - 2)} + \frac{س + 2}{س(س - 4)} = \frac{س - 5}{س(س - 6)}$$

اضرب س × القوس واجمع البسطين

$$\frac{س + 3}{س(س - 2)} + \frac{س + 2}{س(س - 4)} = \frac{س - 5}{س(س - 6)}$$

## نصم هههه عوض حسن

معلم اول رياضيات

٣ أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س}{س - 1} + \frac{س}{س - 1} = \frac{س}{س - 1}$$

الحل

$$\frac{س}{س - 1} + \frac{س}{س - 1} = \frac{س}{س - 1}$$

$$\frac{س}{س - 1} + \frac{س}{س - 1} = \frac{س}{س - 1}$$

نضرب السالب اللى قدام القوس × ال + بتاعت الجمع

$$\frac{س}{س - 1} + \frac{س}{س - 1} = \frac{س}{س - 1}$$

خد بالك ان العملية اتحولت طرح

المجال = ح - { 1 }

$$\frac{س}{س - 1} + \frac{س}{س - 1} = \frac{س}{س - 1}$$

٣ أوجد الدالة ن في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{س - 5}{س(س - 10)} + \frac{س - 8}{س(س + 12)} = \frac{س - 4}{س(س - 2)}$$

الحل

$$\frac{س - 5}{س(س - 10)} + \frac{س - 8}{س(س + 12)} = \frac{س - 4}{س(س - 2)}$$

المجال = ح - { 2 ، 5 }

$$\frac{س - 5}{س(س - 10)} + \frac{س - 8}{س(س + 12)} = \frac{س - 4}{س(س - 2)}$$

$$\frac{س - 5}{س(س - 10)} + \frac{س - 8}{س(س + 12)} = \frac{س - 4}{س(س - 2)}$$

اجمع الحدود المتشابهة اللى في البسط

$$\frac{س - 5}{س(س - 10)} + \frac{س - 8}{س(س + 12)} = \frac{س - 4}{س(س - 2)}$$

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال :

$$\frac{س - ٥}{س - ١} + \frac{س - ٢}{س - ١} = ن (س)$$

الحل

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$\frac{س + ٢}{س - ٤} + \frac{س}{س + ٢} = ن (س)$$

الحل

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\frac{س + ٤}{س - ١٦} = \frac{س}{س - ٤} = ن (س)$$

الحل

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال:

$$\frac{٩ - س}{س + ٦} = \frac{س + ٢ + س + ٤}{س - ٨} = ن (س)$$

الحل





## أمثلة محلولة

١ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - ٨}{س^2 + س - ٤} \times \frac{س + ٣}{س^2 + ٢س + ٤}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س^2 + س - ٤} \times \frac{(س - ٢)(س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} = \frac{س + ٣}{س^2 + س - ٤} \times \frac{(س - ٢)(س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{٢, -٣\}$$

$$ن(س) = ١$$

٢ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - ١}{س^2 + س - ١} \times \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} \times \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١} = \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١}$$

$$\text{المجال} = ح - \{٠, -١\}$$

$$ن(س) = \frac{س + ٣}{س}$$

٣ أوجد ن(س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س - ٩}{س^2 + ٣} \div \frac{س^2 + ٢س - ٩}{س^2 + ٣}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س - ٩}{س^2 + ٣} \times \frac{س^2 + ٣}{س^2 + ٢س - ٩}$$

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س^2 + ٣} \times \frac{س(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{س + ٢}{س(س - ٣)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{٣, -٢, ٠\} \quad ن(س) = \frac{س + ٢}{س(س - ٣)}$$

نظم  
معلم اول رياضياتنظم  
معلم اول رياضيات

$$٤ \text{ إذا كانت } ن(س) = \frac{س^2 - ٩}{س^2 + ٣س - ٤} \div \frac{س^3 + ٦س^2 - ٤٥س}{س^2 + ٣س - ٤}$$

فاوجد ن(س) في أبسط صورة موضحا المجال

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 - ٩}{س^2 + ٣س - ٤} \times \frac{س^2 + ٣س - ٤}{س^3 + ٦س^2 - ٤٥س}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٤)(س - ١)} \times \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س + ٤)(س - ١)}$$

$$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٤)(س - ١)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{٠, -\frac{٣}{٤}, ١, ٣, ٥\}$$

$$ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٤)(س - ١)}$$

$$٥ \text{ أوجد: } ن(س) = \frac{س^2 + ٢س - ٩}{س^2 + ٣س - ٤} \div \frac{س^3 + ٦س^2 - ٤٥س}{س^2 + ٣س - ٤}$$

ثم أوجد ن(٢) ، ن(٣) إن أمكن

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + ٢س - ٩}{س^2 + ٣س - ٤} \times \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س + ٤)(س - ١)}$$

$$\text{المجال} = ح - \{٣, -١, ٤\}$$

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س - ٣}$$

$$ن(٢) = \frac{٢ + ٢}{٢ - ٣} = -٢$$

ن(٣) غير ممكنة لأن ٣ ∉ للمجال



أوجد ن (س) وعين مجالها حيث:

$$\frac{10 - 3س}{5 + 3س + 16س} \times \frac{1 + س}{2 - س} = ن(س)$$

ثم أوجد ن (٠) ، ن (١-) إن أمكن



الحل

$$\frac{(2 - س)(5 + س)}{(1 + 3س)(5 + س)} \times \frac{1 + س}{(2 - س)(1 + س)} = ن(س)$$

$$\frac{1}{3} = 5 - 1 - 2$$

المجال = ح - { ١/٣ , ٥ - , ١ - , ٢ }

$$\frac{1}{1 + 3س} = ن(س)$$

$$1 = \frac{1}{1 + 3س} \Rightarrow 1 + 3س = 1 \Rightarrow 3س = 0 \Rightarrow س = 0$$

ن (١-) غير ممكنة لأن ١- ∉ للمجال

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س - 1س} \div \frac{15 - 2س - 1س}{9 - 1س} = ن(س)$$

الحل

متناسخ: ال ÷ فنقلب الكسر الثاني

$$\frac{10 - 2س}{9 + 6س - 1س} \times \frac{15 - 2س - 1س}{9 - 1س} = ن(س)$$

$$\frac{(3 - س)(3 - س)}{(5 - س)2} \times \frac{(3 + س)(5 - س)}{(3 + س)(3 - س)} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{2} = ن(س)$$

$$\frac{3 - س}{2} = ن(س)$$



نصه  
معلم اول رياضيات

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث :

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س - 1س} \div \frac{2 + 3س - 1س}{1 - 1س} = ن(س)$$

الحل

١- س' هنخليه - (١- س') ونحول الضرب لقسمة

$$\frac{15 - 3س}{5 + 6س - 1س} \times \frac{2 + 3س - 1س}{(1 - س')(1 - س')} = ن(س)$$

$$\frac{(1 - س)(5 - س)}{(5 - س)3} \times \frac{(1 - س)(2 - س)}{(1 + س)(1 - س)} =$$

$$\frac{1 - س}{3} = ن(س)$$

$$\frac{(1 - س)(2 - س)}{(1 + س)3} = ن(س)$$

أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\frac{24 + 4س}{1س - 36} \times \frac{36 + 12س}{1س - 6س} = ن(س)$$

الحل

عارف هنعمل ايه في المقدار ٣٦ - س !!

هنخليه كده - (٣٦ - س')

$$\frac{(6 + س)4}{(6 + س)(6 - س)} \times \frac{(6 - س)(6 - س)}{(6 - س)3} = ن(س)$$

$$\frac{4}{3} = ن(س)$$

$$\frac{4}{3} = ن(س)$$

نصه  
معلم اول رياضيات

١ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^2 - ١}{س} \times \frac{س + ١}{س^2 - ١}$$

الحل

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س^4 + ١٢}{س^٥ - ٢٥} \times \frac{س^٣ - ١٥}{س + ٣}$$

الحل

٣ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٣ - ٢س^٢}{س^٢ - ٦س - ٩} \div \frac{س^٣ - ٢س^٢}{س^٢ - ٦س - ٩}$$

الحل

٤ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢٧س + ٩} \div \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٢٧س + ٩}$$

ثم أوجد ن (٢) ، ن (-٢) إن أمكن

الحل



# المعكوس الضربي للكسر الجبري



◆ إذا رمزنا للكسر الجبري بالرمز  $n$  (س) فإن معكوسه الضربي يرمز له بالرمز  $n^{-1}$  (س)

◆ إذا كان  $n$  (س)  $\frac{1-s}{3+s}$  فإن  $n^{-1}$  (س)  $\frac{3+s}{1-s}$  ( شقلب الكسر يجيئك معكوسه )

◆ مجال  $n^{-1} = ح -$  أصفار البسط و المقام من المثال اللي فات: مجال  $n^{-1}$  (س)  $= ح - \{ 1, 3 \}$

مثال ١

$$\frac{9-s^2}{6-s+s^2} = n \text{ (س)}$$

أوجد  $n^{-1}$  (س) في أبسط صورة مبينا مجال  $n^{-1}$  (س)

الحل

$$n^{-1} \text{ (س)} = \frac{6-s+s^2}{9-s^2} \text{ شقلبنا الكسر}$$

$$= \frac{(2-s)(3+s)}{(3-s)(3+s)} \text{ حللنا}$$

المجال  $= ح - \{ 2, 3, -3 \}$

$$n^{-1} \text{ (س)} = \frac{2-s}{3-s} \text{ اختصرنا}$$

تدريب ١

$$\frac{s^3+s^2}{27+s^3} = n \text{ (س)}$$

أوجد  $n^{-1}$  (س) في أبسط صورة مبينا مجال  $n^{-1}$  (س)

الحل

مثال ٢

$$\frac{s^2-2s}{2+s^3-1s^2} = n \text{ (س)}$$

فأوجد: ١)  $n^{-1}$  (س) مبينا مجالها  
٢) قيمة  $s$  إذا كان  $n^{-1}$  (س)  $= 3$

الحل

$$n^{-1} \text{ (س)} = \frac{s^2-2s}{2+s^3-1s^2} = \frac{(s-2)s}{(s-2)(s^2+2s+4)} = \frac{s}{s^2+2s+4}$$

مجال  $n^{-1} = ح - \{ 1, 2, 0 \}$

$$n^{-1} \text{ (س)} = \frac{1-s}{s}$$

$$\therefore n^{-1} \text{ (س)} = 3 \therefore \frac{1-s}{s} = 3 \text{ (مقص)}$$

$$\therefore 1-s = 3s \therefore 1 = 4s \therefore s = \frac{1}{4}$$

تدريب ٢

$$\frac{s^3-2s}{(2+s^3)(3-s)} = n \text{ (س)}$$

فأوجد: ١)  $n^{-1}$  (س) مبينا مجالها  
٢) قيمة  $s$  إذا كان  $n^{-1}$  (س)  $= 3$

الحل

## أسئلة اختر على الوحدة الثانية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ مجموعة أصفار الدالة  $(س) = س^2 + ٤$  في ح هي .....  
 (أ)  $\{ ٢ \}$  (ب)  $\{ ٢, -٢ \}$  (ج) ح (د)  $\emptyset$
- ٢ مجموعة أصفار الدالة د:  $(س) = س^2 - ٣$  هي .....  
 (أ)  $\{ ٠ \}$  (ب)  $\{ ٣ \}$  (ج)  $\{ (٠, ٣) \}$  (د) ح
- ٣ مجموعة أصفار الدالة د:  $(س) = س(س^2 - ١ + س)$  هي .....  
 (أ)  $\{ ١, ٠ \}$  (ب)  $\{ ١, -١ \}$  (ج)  $\{ (٠, ١) \}$  (د)  $\{ ١ \}$

الحل:

- ٤ إذا كانت ص(د) =  $\{ ٢ \}$  ، د(س) =  $س^2 - م$  فإن م = .....  
 (أ)  $\sqrt[3]{٢}$  (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

الحل:

- ٥ إذا كانت ص(د) =  $\{ ٥ \}$  ، د(س) =  $س^3 - ٢س^2 + ١$  فإن أ = .....  
 (أ) ٥- (ب) ٥- (ج) ٥ (د) ٥٠

الحل:

- ٦ مجال الدالة ن(س) =  $\frac{س}{١-س}$  هو .....  
 (أ) ح - { صفر } (ب) ح - { ١ } (ج) ح - { صفر ، ١ } (د) ح - { ١ }

- ٧ إذا كان ن<sub>١</sub>(س) =  $\frac{٧-س}{٢+س}$  ، ن<sub>٢</sub>(س) =  $\frac{س}{١-س}$  وكان المجال المشترك هو ح - { ٢, ٧ } فإن ك = .....  
 (أ) ٢ (ب) ٧ (ج) ٢- (د) ٧-

- ٨ إذا كانت ن<sub>١</sub>(س) =  $\frac{١+س}{٢-س}$  ، ن<sub>٢</sub>(س) =  $\frac{٤}{٢-س}$  وكان ن<sub>١</sub>(س) = ن<sub>٢</sub>(س) فإن أ = .....  
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

- ٩ إذا كانت س  $\neq$  صفر فإن  $\frac{س}{١+س} \div \frac{س}{١+س} =$  .....  
 (أ) ٥- (ب) ١- (ج) ١ (د) ٥

- ١٥ مجال المعكوس الضربي للدالة د(س) =  $\frac{٢+س}{٣-س}$  هو .....  
 (أ)  $\{ ٣ \}$  (ب) ح - { ٣, ٢- } (ج) ح - { ٣ } (د) ح

- ١٥ إذا كان للكسر الجبري  $\frac{س-١}{س+٥}$  معكوس ضربي وهو  $\frac{س+٥}{٣+س}$  فإن أ = .....  
 (أ) ٣ (ب) ٥- (ج) ٣- (د) ٥



## الواجب المنزلي

## الأصفار والمجال

- ١ إذا كانت  $\{ 2, -2 \}$  هي مجموعة أصفار الدالة  $D(s) = s^2 + m$  فأوجد قيمة  $m$
- ٢ أوجد المجال المشترك لكل من:  $N_1(s) = \frac{s^4 - s^2}{s^2 + 5s + 6}$  ،  $N_2(s) = \frac{s^3}{s^2 - s}$
- ٣ إذا كان مجال الدالة  $D(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + 4}$  حيث  $D(s)$  هو  $\{ 2 \}$  فأوجد قيمة  $A$

## تساوي كسرين جبريين

- ٤ إذا كانت:  $N_1(s) = \frac{s^4 - s^2}{s^2 + 5s + 6}$  ،  $N_2(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^2 - 9}$  بين ما إذا كانت  $N_1 = N_2$  أم لا مع ذكر السبب
- ٥ إذا كانت:  $N_1(s) = \frac{s^2}{s^3 - 3s}$  ،  $N_2(s) = \frac{s}{s^2 - 3s}$  فاثبت أن  $N_1 = N_2$
- ٦ أوجد المجال المشترك الذي تساوى فيه الدالتان:  $N_1(s) = \frac{s + 1}{s - 2}$  ،  $N_2(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 - 2s}$

## جميع وطرح الكسور الجبرية

- ٧ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^3 - s^2}{s^2 + 5s + 6} - \frac{s^2 + 2}{s^2 - s - 6}$
- ٨ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 - 3}{s^2 - 3} - \frac{s^2 - 3}{s^2 + 7s + 12}$
- ٩ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 - s}{s^2 - 1} + \frac{s - 5}{s^2 + 5s + 6}$

## ضرب وقسمة الكسور الجبرية

- ١٥ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 - 2}{s^2 + s + 1} \div \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 - 1}$
- ١٥ أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا المجال حيث:  $N(s) = \frac{s^2 - 1}{s + 1} \div \frac{s^2 + 2s - 3}{s + 3}$
- ١٦ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 9}{s^2 - 8} \times \frac{s^2 - 2}{s + 7}$  أوجد  $N(s)$  في أبسط صورة مبينا مجالها ثم احسب قيمة  $N(1)$

## المعكوس الضربي للكسر الجبري

- ١٣ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 2}{s + 1}$  فأوجد: (١)  $N^{-1}(s)$  مبينا مجالها (٢)  $N^{-1}(3)$
- ١٤ إذا كان  $N(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s^2 - 2s}$  فأوجد: (١)  $N^{-1}(s)$  مبينا مجالها (٢)  $N^{-1}(5)$



# الاحتمال



## التقاطع $\cap$

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cap B) = 0, \quad \Phi = P(A \cap B)$$

ملحوظة: متى يطلب  $P(A \cap B)$  بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ و ب معا

إذا كانت أ و ب فإن :  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$  الصغيرة

### مثال

إذا كان  $P(A) = 0.2$  ،  $P(B) = 0.6$  ،

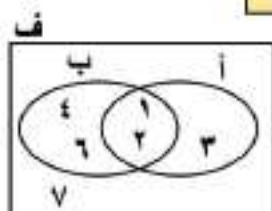
$P(A \cup B) = 0.7$  أوجد :  $P(A \cap B)$

الحل :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$0.1 = 0.2 + 0.6 - 0.7$$

### شكل فن



$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

## الاتحاد $\cup$

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ملحوظة: متى يطلب  $P(A \cup B)$  بالطريقة اللفظية؟

لو قلنا : أوجد احتمال وقوع الحدث أ أو ب  
أو قلنا : أوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

إذا كانت أ و ب فإن :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  الكبيرة

### مثال

إذا كان  $P(A) = \frac{1}{4}$  ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

أوجد :  $P(A \cup B)$

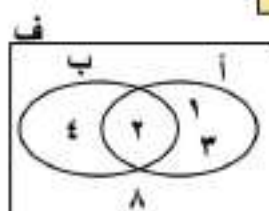
الحل :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{60}$$

بالآلة الحاسبة

### شكل فن



$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cup B}{\text{العدد الكلي}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



## المكاملة

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

$$ل(أ) = ١ - ل(ب)$$

القاعدة العامة :

$$١ = ل(أ) + ل(ب)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ) بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال **عدم** وقوع الحدث أ

### مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{5} , ل(ب) = \frac{1}{3} ,$$

أوجد : ل(أ) (٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب

الحل :

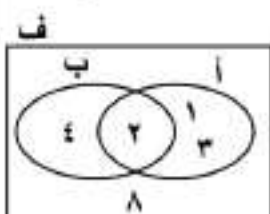
$$ل(أ) = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(٢) احتمال عدم وقوع الحدث ب : يقصد به ل(ب')

$$ل(ب') = ١ - ل(ب) = ١ - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

### شكل فن

أ : هي كل العناصر التي قدامك ما عدا عناصر أ



$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

$$ل(أ) = \frac{2}{8}$$

$$ل(ب) = \frac{3}{8}$$

$$ل(ب') = \frac{5}{8}$$

## الفرق

إذا كان أ ، ب حدثان من فضاء العينة فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$$

إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فإن :

$$ل(أ - ب) = ل(أ)$$

ملحوظة: متى يطلب ل(أ - ب) بالطريقة اللفظية؟

لو قالك : أوجد احتمال وقوع الحدث أ **فقط**

أو قالك : احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب

لو عرفت الفرق والتقاطع فإن :

$$ل(أ) = ل(أ - ب) + ل(أ \cap ب)$$

### مثال

$$\text{إذا كان } ل(أ) = \frac{1}{4} , ل(ب) = \frac{1}{3} , ل(أ \cap ب) = \frac{1}{5}$$

أوجد : ل(أ - ب) ، ل(أ - ب)

الحل :

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

### شكل فن

أ - ب : هي العناصر الموجودة في أ ومش موجودة في ب

ب - أ : هي العناصر الموجودة في ب ومش موجودة في أ

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

$$ل(أ - ب) = \frac{1}{20}$$

## أمثلة محلولة

إعداد: محمود عوض حسن

١ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = 0.3$  ،  $P(B) = 0.6$  ،  $P(A \cap B) = 0.2$   
أوجد :  $P(A \cup B)$  ،  $P(A - B)$

**الحل**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.7 = 0.3 + 0.6 - 0.2 =$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$0.1 = 0.3 - 0.2 =$$

٢ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{3}{8}$  ،  $P(B) = \frac{1}{4}$  ،  $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$   
أوجد :  $P(A \cap B)$  ،  $P(A - B)$

**الحل**

$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) - P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$$

٣ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = 0.8$  ،  $P(B) = 0.7$  ،  $P(A \cap B) = 0.6$   
فأوجد : ① احتمال عدم وقوع الحدث  $A$   
② احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

**الحل**

احتمال عدم وقوع الحدث  $A$  معناه  $P(A')$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$0.2 = 1 - 0.8 =$$

احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل معناه  $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.9 = 0.8 + 0.7 - 0.6 =$$

٤ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين من تجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$   
فأوجد  $P(B)$

**الحل**

∵  $A$  ،  $B$  حدثان متنافيان ∴  $P(A \cap B) = 0$  صفر

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = P(B)$$

٥ صندوق يحتوى على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء ،  
٤ كرات حمراء وباقي الكرات بيضاء ، سحب كرة عشوائية  
فاحسب احتمال أن تكون الكرة :  
① زرقاء ② ليست حمراء ③ زرقاء أو حمراء

العدد الكلى = ١٢ ، عدد الكرات البيضاء = ٣

$$P(\text{احتمال أن تكون زرقاء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{5}{12}$$

$$P(\text{احتمال ليست حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والبيضاء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{احتمال زرقاء أو حمراء}) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء والحمراء}}{\text{العدد الكلى}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

٦ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين متنافيين من تجربة عشوائية  
وكان  $P(A) = \frac{1}{4}$  ،  $P(B) = \frac{2}{3}$   
أوجد  $P(A \cap B)$  ،  $P(A \cup B)$  ،  $P(A - B)$

**الحل**

.....

.....

.....

.....

.....



٧ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان  $P(A) = 0.5$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cup B) = 0.8$  ،  $P(A \cap B) = 0.1$   
 فابحث قيمة  $P(A)$  إذا كان : ١  $A$  ،  $B$  متنافيان  
 ٢  $B \supset A$

**الحل**

أولاً : إذا كان  $A$  ،  $B$  متنافيان :

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0.8 = 0.5 + P(B)$$

$$P(B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

ثانياً : إذا كانت  $B \supset A$  :

$$P(A \cup B) = P(A) \quad \text{الاتحاد = الكبيرة}$$

$$0.8 = P(A)$$

٨ إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان  $P(A) = 0.5$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cup B) = 0.8$  ،  $P(A \cap B) = 0.1$   
 فابحث قيمة  $P(A)$  إذا كان : ١  $A$  ،  $B$  متنافيان  
 ٢  $P(A \cap B) = 0.1$

**الحل**

أولاً : إذا كان  $A$  ،  $B$  حدثان متنافيان :

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0.8 = 0.5 + P(B)$$

$$P(B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

ثانياً : إذا كان  $P(A \cap B) = 0.1$

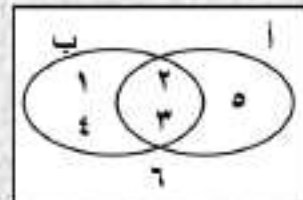
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + P(B) - 0.1$$

$$P(B) = 0.8 - 0.5 + 0.1 = 0.4$$

### تمهيد محمود عوض يم

٩ باستخدام شكل فن المقابل أوجد :



١  $P(A \cap B)$

٢  $P(A - B)$

٣ احتمال عدم وقوع الحدث  $A$

**الحل**

العدد الكلي  $n = 10$

١  $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n} = \frac{4}{10} = 0.4$

٢  $P(A - B) = \frac{n(A - B)}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$

٣  $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n} = \frac{6}{10} = 0.6$

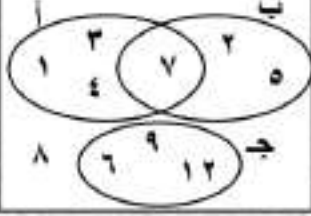
٤  $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{8}{10} = 0.8$

٥ احتمال عدم وقوع  $A$  يقصد به  $P(A^c)$

٦  $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n} = \frac{6}{10} = 0.6$

٧  $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{5}{10} = 0.5$

١٠ باستخدام شكل فن أوجد :



١  $P(A \cap B)$

٢  $P(A - B)$

٣  $P(A^c)$

**الحل**

أنت اقوى من شكل فن



٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = \frac{1}{4}$  ،  $L(B) = \frac{1}{3}$  فأوجد  $L(A \cup B)$   
إذا كان: ①  $L(A \cap B) = \frac{1}{8}$  ، ② أ ، ب متنافيان

الحل

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = \frac{4}{9}$  ،  $L(B) = \frac{2}{9}$  ،  $L(A \cap B) = \frac{1}{9}$   
أوجد:  $L(A \cup B)$  ،  $L(A - B)$  ،  $L(B - A)$

الحل

٤ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠  
، سحبت بطاقة عشوائية ، أوجد احتمال أن تكون  
البطاقة تحمل عددا :  
① يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥  
② يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحل

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية  
وكان  $L(A) = ٠,٤$  ،  $L(B) = ٠,٥$   
 $L(A \cup B) = ٠,٢$  ،  
أوجد:  $L(A \cap B)$  ،  $L(A - B)$

الحل



## أسئلة اختر على الإحصاء

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان  $A$ ،  $B$  حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٠,٥ (د)  $\Phi$

٢ إذا كان  $A$ ،  $B$  حدثين متنافيين فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ)  $\Phi$  (ب) صفر (ج) ٠,٥٦ (د) ١

٣ إذا كانت  $A \cap B$  لتجربة عشوائية ما وكان  $P(A) = \frac{1}{2}$  فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ)  $\frac{1}{3}$  (ب)  $\frac{1}{2}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د) ١

٤ إذا كان  $P(A) = \frac{1}{2}$  فإن  $P(A \cap B) = \dots$   
 (أ) صفر (ب) ١ (ج)  $\frac{1}{4}$  (د)  $\frac{1}{2}$

٥ إذا كان  $A \cap B$  فإن  $P(A \cup B)$  تساوي  $P(A \cap B)$   
 (أ) صفر (ب)  $P(A)$  (ج)  $P(B)$  (د)  $P(A \cap B)$

٦ إذا كان  $A$ ،  $B$  حدثين متنافيين وكان  $P(A) = \frac{1}{3}$ ،  $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$  فإن  $P(B) = \dots$   
 (أ)  $\frac{1}{4}$  (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{2}$  (د) ١

٧ إذا كان احتمال وقوع الحدث  $A$  هو ٦٥% فإن احتمال عدم وقوعه يساوي  $\dots$   
 (أ) ٠,٣٥ (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج) ٠,٦٥ (د) ١

٨ إذا كان احتمال وقوع الحدث  $A$  هو ٧٥% فإن احتمال عدم وقوعه هو  $\dots$   
 (أ)  $\frac{1}{2}$  (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{4}$  (د) ١

٩ إذا أُلقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي  $\dots$   
 (أ) صفر% (ب) ٢٥% (ج) ٥٠% (د) ١٠٠%

١٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي يساوي  $\dots$   
 (أ) صفر (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{3}{4}$  (د) ١

٥٥ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ يساوي  $\dots$   
 (أ) صفر (ب)  $\frac{1}{3}$  (ج)  $\frac{1}{4}$  (د)  $\frac{1}{2}$

## تراكمي

١ إذا كانت النسبة بين محيطي مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتهما = ١ : ٤

٢ المعكوس الجمعي للكسر  $\frac{3}{1+3}$  هو  $\frac{3-1}{1+3}$

٣ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو  $3 - س$  (أ)  $3 + س$  (ب)  $3 س$  (ج)  $3 - س$  (د)  $\frac{3}{س}$

٤ إذا كان  $أ^2 - ب^2 = ٢١$  ،  $أ + ب = ٧$  فإن  $أ - ب = ٣$

٥ إذا كان عمر رجل الآن س سنة فإن عمره بعد ٥ سنوات هو  $س + ٥$  وعمره منذ ٣ سنوات هو  $س - ٣$

٦ احتمال الحدث المستحيل = صفر بينما احتمال الحدث المؤكد = ١

٧ إذا كان  $س^2 - ص^2 = ٢ (س + ص)$  فإن  $س - ص = ٢$

٨ إذا كان  $(٥ ، س - ٧) = (١ + ص ، ٥ - ٥)$  فإن  $س + ص = ٦ = ٤ + ٢$

٩ الدالة د حيث  $د(س) = س^٦ + ٢س^٤ - ٣$  كثيرة حدود من الدرجة السادسة

١٠ إذا كان منحنى الدالة د حيث  $د(س) = س^٢ - أ$  يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن  $أ = ١$

١١ عددان موجبان مجموعهما ٧ ، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ٣ ، ٤

١٢ إذا كان  $س^٢ = ١$  فإن  $\frac{1}{س} = \frac{1}{س} \times \frac{1}{س} = \frac{1}{س^٢} = \frac{1}{١} = ١$

١٣ مجموعة حل المعادلة  $س^٢ + ٤ = ٠$  في ط هي

١٤ إذا كان المقدار  $س^٢ + كس + ٣٦$  مربعا كاملا فإن  $ك = \pm ١٢$

١٥ إذا كان  $س^٥ = ٤$  فإن  $س^٥ - ١ = ٤ - ١ = ٣$  ،  $س^٥ \times ٤ = ٤ \times ٤ = ١٦$  ،  $\frac{1}{س^٥} = \frac{1}{٤}$

١٦ إذا كان  $٣س + ٧ = ١$  فإن  $س = -٧$

١٧ إذا كان  $٣س + ٣س + ٣س = ٣ \times ٣س = ١ + ٣س$

١٨  $\sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$

١٩ مجموعة حل المعادلة  $س^٢ + ٤ = ٠$  في ح هي

٢٥ إذا كانت  $س^٢ - ص^٢ = ٨١$  فإن  $\frac{س}{ص} =$

٢٥  $[١ ، ٥] \cup [-٢ ، ٣] =$