الامتياز

فى

الرياضيات

جبر و هندسة

الصف

الثالث

الاعدادى

2019

إعداد

ا\عبدالمقصود حنفى

ت\ ٠١٠٦٧٣٣٦٣١٥

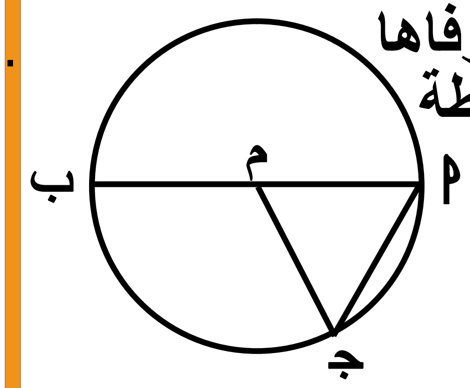
الترم الثانى

تعاريف و مفاهيم أساسية

(١) الدائرة

هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة فى المستوى و هذه النقطة تسمى مركز الدائرة و يسمى البعد الثابت (طول نصف قطر الدائرة)

(٢) نصف القطر



هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة و أى نقطة على الدائرة مثل

$\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ ، $\overline{\text{مجـ}}$

ملحوظة

أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متساوية فى الطول

(٣) الوتر

هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة مثل $\overline{\text{أجـ}}$

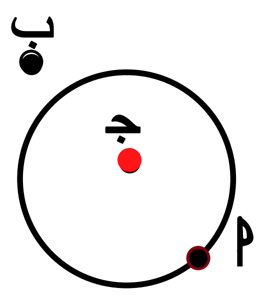
(٤) القطر

هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة و تمر بمركز الدائرة

- هو وتر يمر بمركز الدائرة
- هو أكبر أوتار الدائرة طولاً مثل $\overline{\text{أب}}$

تجزئة المستوى

الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

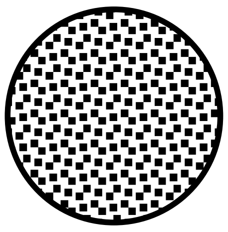


نقط داخل الدائرة مثل جـ

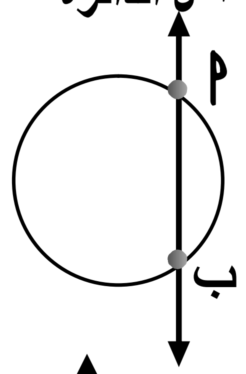
نقط خارج الدائرة مثل ب

نقط على الدائرة مثل أ

سطح الدائرة



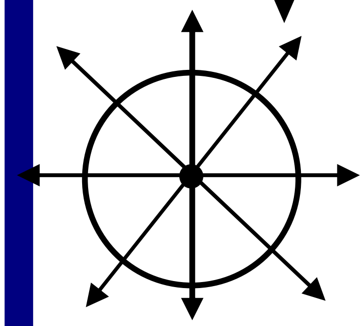
هومجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ الدائرة = { أ ، ب }

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ سطح الدائرة = $\overline{\text{أب}}$

التماثل فى الدائرة



أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها

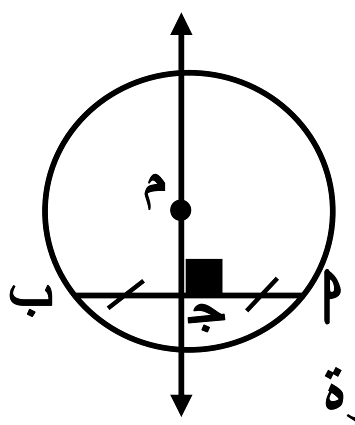
أى أن الدائرة لها عدد لانهائى من محاور التماثل

نتائج هامة

نتيجة ١ : المستقيم المار بمركز الدائرة و بمنتصف أى وتر فيها يكون عمودياًعلى هذا الوتر

نتيجة ٢ : المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

نتيجة ٣ : المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة



$\overline{\text{مجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

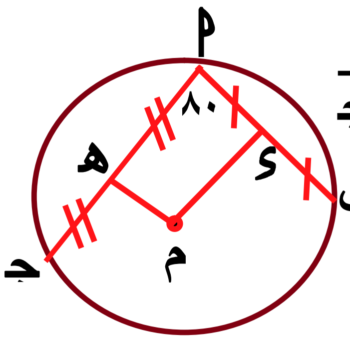
$\overline{\text{مجـ}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

$\overline{\text{مجـ}}$ يمر بمركز الدائرة

( ) فى الشكل المقابل

ء ، هـ منتصفى أب ، أجـ ، ق(∠أ) = ٨٠°

أوجد ق(∠ء م هـ)



البرهان

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

∴ ق(∠أ هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

فى الشكل الرباعي أ ء م هـ

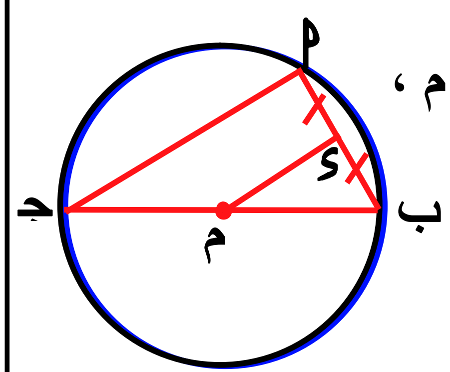
ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠ + ٩٠ + ٨٠) = ١٠٠°

---

(٢) فى الشكل المقابل

أب وتر فى الدائرة م ، بجـ قطر فيها ، ء منتصف أب

اثبت أن ء م // أجـ ثم احسب ق(∠أ)



البرهان

∵ م مركز الدائرة

∴ م منتصف القطر بجـ

، ء منتصف أب

∴ ء م // أجـ

∵ ء منتصف أب

∴ م ء ⊥ أب

∴ ق(∠ب ء م) = ٩٠°

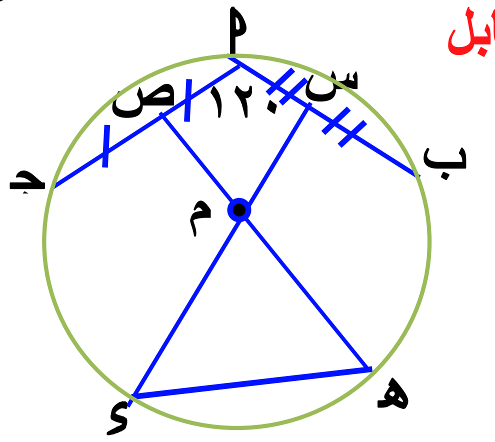
∴ ق(∠أ) = ق(∠ب ء م) = ٩٠° بالتناظر

---

(٣) فى الشكل المقابل

ق(∠أ) = ١٢٠° ، س ، ص منتصفى أب ، أجـ

اثبت أن ء هـ = نق



البرهان

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠أ س م) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ

∴ ق(∠أ ص م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

فى الشكل الرباعي أ س م ص

ق(∠س م ص) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

ق(∠هـ م ء) = ق(∠س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

فى Δ م هـ ء

∵ م هـ = م ء = نق

∴ ق(∠هـ) = ق(∠ء) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ Δ م هـ ء متساوى الأضلاع

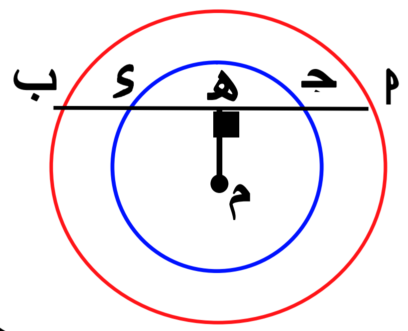
∴ هـ ء = م هـ = م ء = نق

---

(٥) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتان المركز ، م هـ ⊥ أب

اثبت أن أجـ = ب ء



البرهان

فى الدائرة الكبرى

∵ م هـ ⊥ أب ∴ هـ منتصف أب

∴ أهـ = هـ ب ⟵ (١)

فى الدائرة الصغرى

∵ م هـ ⊥ جـ ء ∴ هـ منتصف جـ ء

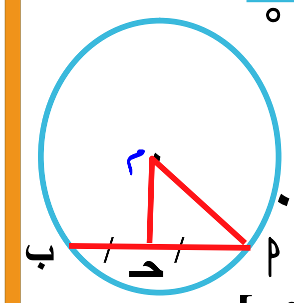
∴ جـ هـ = هـ ء ⟵ (٢)

بطرح ٢ من ١ ⟸ أجـ = ب ء

تمارين ١

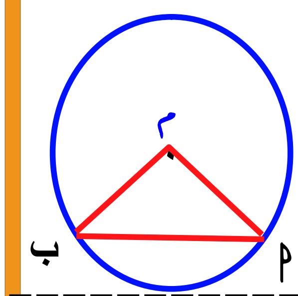
(١) فى الأشكال التالية أختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان : ق (∠ أ م حـ) = ٤٠°
، حـ منتصف أب
فإن : ق (∠ م أ حـ) = ...°
[٩٠ ؛ ٥٠ ؛ ٤٥ ؛ ٤٠]

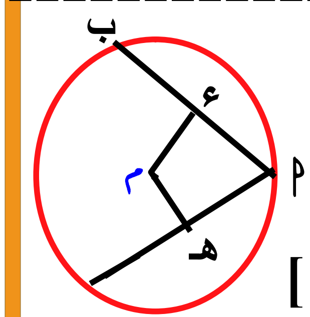


إذا كان : أب = ٨ سم ، م حـ = ٣ سم
فإن : نق = ... سم [٨ ؛٦ ؛٥ ؛ ٤]

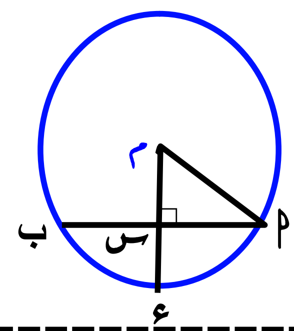
٢ إذا كان : ق (∠ أ م ب) = ٦٠°
فإن : ق (∠ م أ ب) = ...°
[٩٠ ؛٦٠ ؛ ٣٠ ؛٤٠]



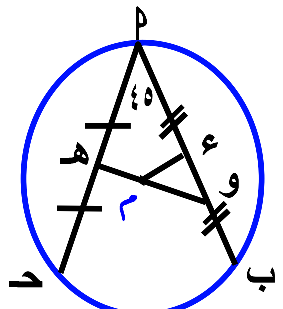
٣ إذا كان : ء ، هـ منتصفى أب ، أحـ
، ق (∠ ء م هـ) = ١١٠°
فإن : ق (∠ ء أ هـ) = ...°
[٩٠ ؛ ٧٠ ؛ ٥٥ ؛ ١١٠]



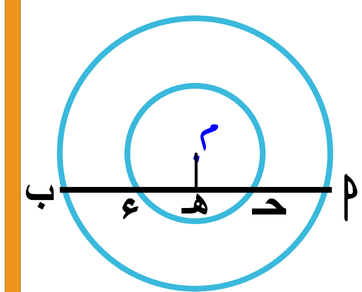
(٢) فى الشكل المقابل : أب وتر في الدائرة م
، م س ⊥ أ ب
فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم ،
س ء = ٢ سم
أوجد طول أ ب



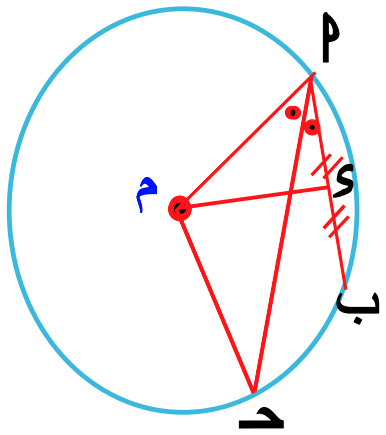
(٣) فى الشكل المقابل
ء ، هـ منتصفى أ ب ، أ حـ
، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°
فإذا كان م هـ ∩ أ ب = { و }
أثبت أن المثلث م ء و متساوى الساقين



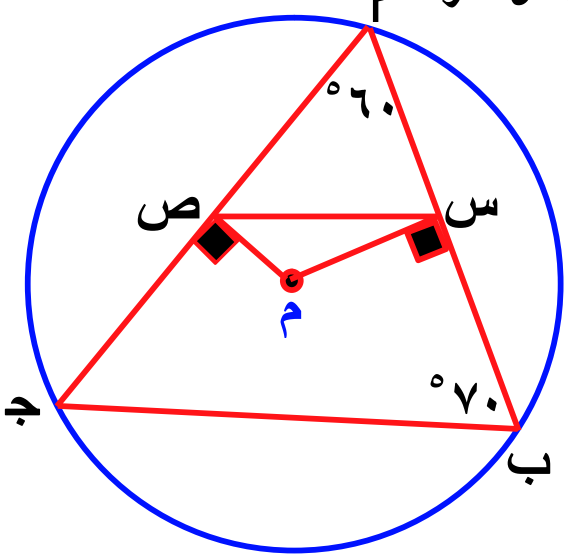
(٤) فى الشكل المقابل :
دائرتان متحدا المركز م
، طول نصفى قطريهما ١٣ سم ، ٢٠ سم
م هـ = ١٢ سم
، م هـ ⊥ أ ب أوجد طول ب ء



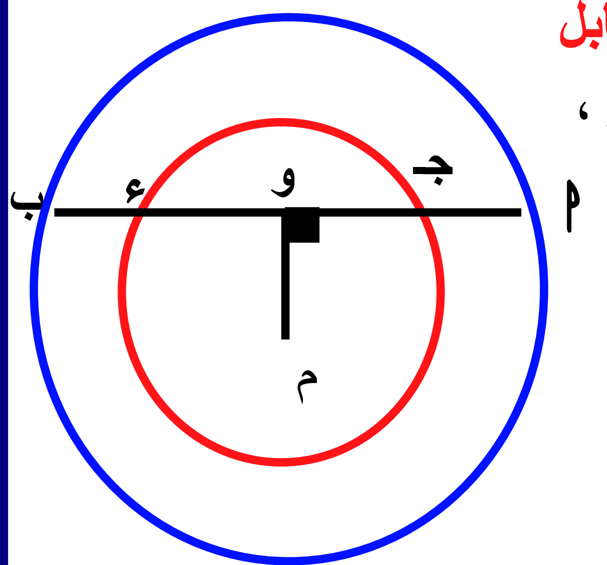
(٥) فى الشكل المقابل
أب وتر فى الدائرة م ،
أجـ ينصف (∠ب أ م)،
ء منتصف أب ،
ق(∠أ م جـ) = ١٥٠°
اثبت أن م ء ⊥ جـ م



(٦) فى الشكل المقابل
أب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ،
، م ص ⊥ أ جـ ،
م س ⊥ أ ب
ق(∠ أ) = ٦٠°
ق(∠ب) = ٧٠°
أوجد
ق(∠م ص س)



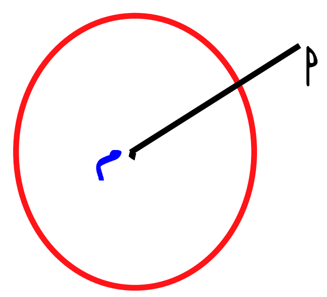
(٧) فى الشكل المقابل
دائرتان متحدتا المركز ،
م هـ ⊥ أ ب
اثبت أن
أ جـ = ب ء



وضع نقطة و مستقيم و دائرة بالنسبة لدائرة

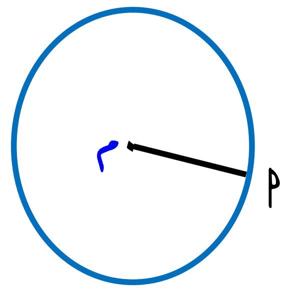
أولاً موضع نقطة بالنسبة للدائرة

إذا كانت دائرة م ، طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة فإن :



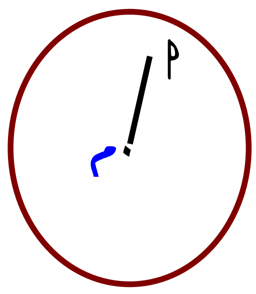
أ تقع خارج الدائرة م

إذا كان : م أ > نق



أ تقع على الدائرة م

إذا كان : م أ = نق



أ تقع داخل الدائرة م

إذا كان : م أ < نق

---

(١) م دائرة طول قطرها ٦ سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة ، حدد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة إذا كان :

[١] م أ = ٦ سم أ ....خارج الدائرة

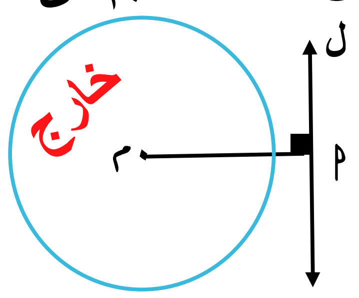
[٢] م أ = ٣ سم أ ....على الدائرة

[٣] م أ = ٢ سم أ ....داخل الدائرة

[٤] م أ = صفر سم أ ....داخل الدائرة

ثانياً موضع مستقيم بالنسبة للدائرة

إذا كان ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، م أ ⊥ ل فإن أوضاع المستقيم ل هى :

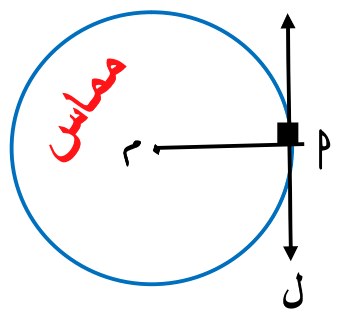


ل يقع خارج الدائرة م

م أ > نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

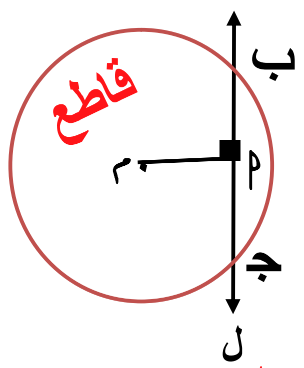


المستقيم ل مماس للدائرة م

م أ = نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = {أ}

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = {أ}



ل يقطع الدائرة م

م أ < نق

المستقيم ل ∩ الدائرة م = {ب ، جـ}

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{ب جـ}}$

---

(٢) م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، ل مستقيم فى مستوى الدائرة م ، م أ ⊥ ل ، حدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة إذا كان :

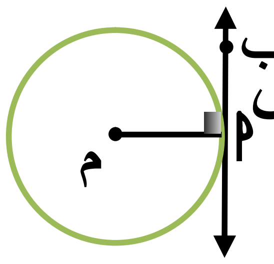
[١] م أ = ٢ سم ل...........قاطع الدائرة

[٢] م أ = ٤ سم ل...........مماس الدائرة

[٣] م أ = ٥ سم ل...........خارج الدائرة

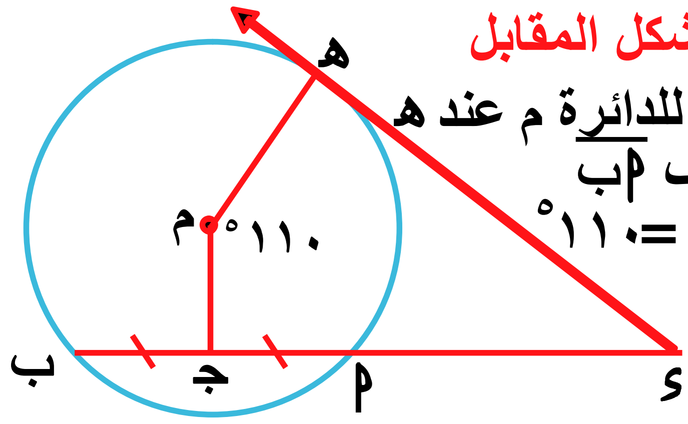
[٤] م أ = صفر سم ل...........قاطع الدائرة

حقائق هامة



١ المماس للدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس
٢ المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسا لها
٣ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان متوازيان

(١) فى الشكل المقابل

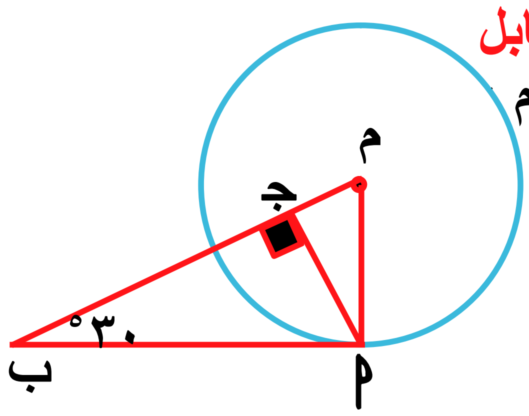


$\overleftarrow{دهـ}$ مماس للدائرة م عند هـ
، جـ منتصف $\overline{أب}$
، ق(∠م) = ١١٠°
أوجد
ق(∠د)

البرهان

∵ $\overleftarrow{دهـ}$ مماس للدائرة م ، $\overline{مهـ}$ نصف قطر
∴ $\overline{مهـ} \perp \overleftarrow{دهـ}$ ⟸ ق(∠دهـم) = ٩٠°
∵ جـ منتصف $\overline{أب}$
∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ ⟸ ق(∠أجـم) = ٩٠°
فى الشكل الرباعى هـمجـد
ق(∠د) = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ١١٠) = ٧٠°

(٢) فى الشكل المقابل

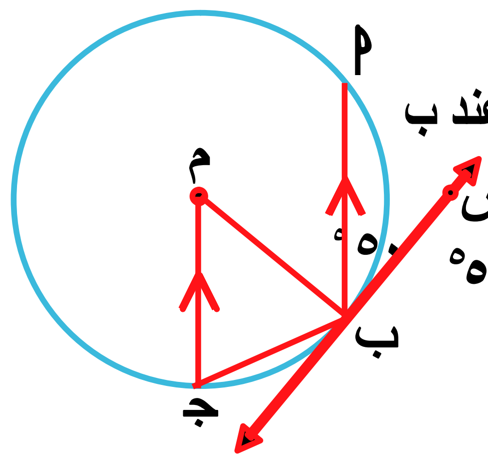


$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة م
أم = ٨ سم
ق(∠ب) = ٣٠°
، $\overline{أجـ} \perp \overline{بم}$
أوجد طول $\overline{أب}$

البرهان

∵ $\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overline{مأ}$ نصف قطر
∴ $\overline{مأ} \perp \overleftarrow{أب}$ ⟸ ق(∠مأب) = ٩٠°
فى Δ أبم القائم فى أ، ق(∠ب) = ٣٠°
∴ أم = $\frac{١}{٢}$ بم ⟸ بم = ١٦ سم
فى Δ بأم القائم الزاوية فى أ
$(أب)^٢ = (بم)^٢ - (أم)^٢$
$(أب)^٢ = (١٦)^٢ - (٨)^٢ = ١٩٢$
∴ أب = $\sqrt{١٩٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

(٣) فى الشكل المقابل

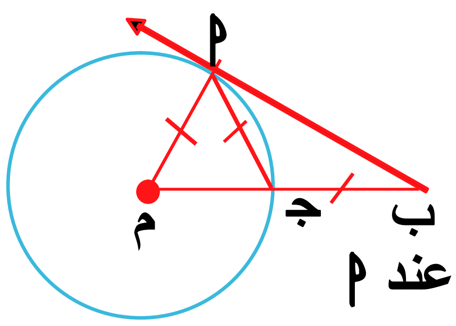


$\overleftrightarrow{بص}$ مماس للدائرة م عند ب
، $\overline{أب} // \overline{مجـ}$
، ق(∠أبص) = ٥٠°
أوجد ق(∠مجـب)

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{بص}$ مماس للدائرة م ، $\overline{مب}$ نصف قطر
∴ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{بص}$ ⟸ ق(∠مبص) = ٩٠°
∴ ق(∠أبم) = ٩٠ - ٥٠ = ٤٠°
∵ $\overline{أب} // \overline{مجـ}$
∴ ق(∠أبم) = ق(∠م) = ٤٠° بالتبادل
∵ مب = مجـ = نق
∴ Δ مبجـ متساوى الساقين
∴ ق(∠مبجـ) = ق(∠مجـب) = ٧٠°

(٤) فى الشكل المقابل



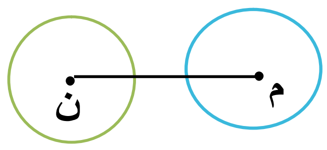
أم = أجـ = جـب
اثبت أن
$\overleftarrow{بأ}$ مماس للدائرة م عند أ

البرهان

∵ أم = بجـ
∴ أم = مجـ = نق
∴ مجـ = جـب ⟸ جـ منتصف بم
∴ أجـ متوسط فى Δ أبم
أجـ = $\frac{١}{٢}$ بم
∴ ق(∠بأم) = ٩٠°
∴ $\overleftarrow{بأ}$ مماس للدائرة م عند أ

ثالثاً موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

١ الدائرتان متباعدتان



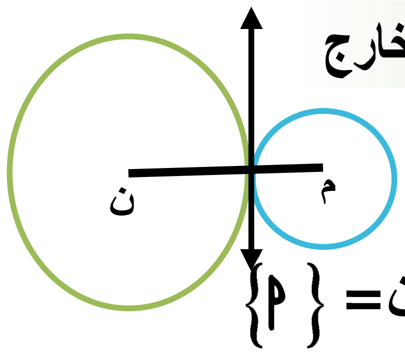
م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅

---

٢ الدائرتان متماستان من الخارج



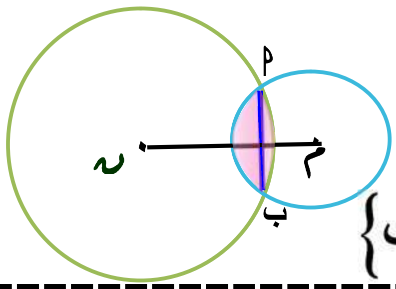
م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

---

٣ الدائرتان متقاطعتان

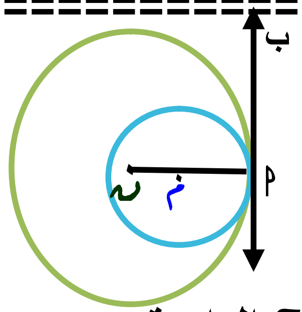


نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

---

٤ الدائرتان متماستان من الداخل



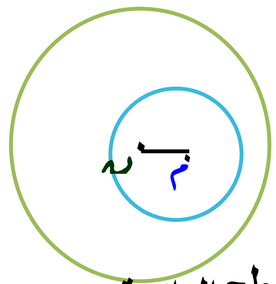
م ن = نق١ − نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

---

٥ الدائرتان متداخلتان



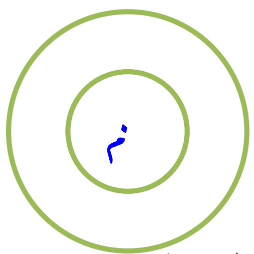
م ن < نق١ − نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

---

٦ الدائرتان متحدتا المركز

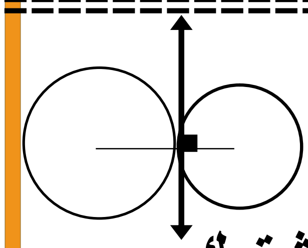


م ن = صفر

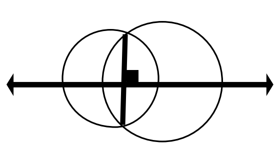
الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

نتائج هامة



١ خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس و يكون عمودياً على المماس المشترك



٢ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك و ينصفه

---

١ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣ سم
حدد وضع الدائرتين فى كل حالة مما يأتى :

(١) م ن = ٤ سم الدائرتان .... متماستان من الداخل

(٢) م ن = ١٠ سم الدائرتان .... متماستان من الخارج

(٣) م ن = ١٢ سم الدائرتان .... متباعدتان

(٤) م ن = ٨ سم الدائرتان .... متقاطعتان

(٥) م ن = ٢ سم الدائرتان .... متداخلتان

(٦) م ن = صفر الدائرتان .... متحدتا المركز

(٧) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅
الدائرتان .... متباعدتان

(٨) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }
الدائرتان .... متماستان من الخارج

(٩) الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
الدائرتان .... متماستان من الخارج او متماستان من الداخل

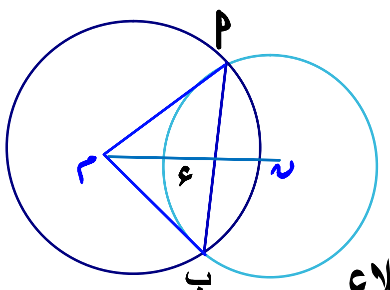
(١٠) الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅
الدائرتان .... متباعدتان او متداخلتان

(١١) سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
الدائرتان .... متداخلتان او متماستان من الداخل

(١٢) الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }
الدائرتان .... متقاطعتان

---

٢ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

ق(∠أ م ن) = ٣٠°

أثبت أن Δ أ ب م متساوى الأضلاع

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك

∴ م ن ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠أ ء م) = ٩٠°

∴ ق(∠م أ ء) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ٦٠°

∵ م أ = م ب " أنصاف أقطار "

∴ Δ أ ب م متساوى الأضلاع

تمارين ٢

(١) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، أ نقطة فى مستويها فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : م أ = ٦ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٢ إذا كان : م أ = ٥ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٣ إذا كان : م أ = ٣ سم فإن : أ تقع .... الدائرة
٤ إذا كان : م أ = صفر فإن : أ تقع .... الدائرة

==

(٢) دائرة م طول نصف قطرها ٥ سم ، م أ ⊥ ل ، أ ∈ ل فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : م أ = ٦ سم فإن : المستقيم ل ....
٢ إذا كان : م أ = ٥ سم فإن : المستقيم ل ....
٣ إذا كان : م أ = ٣ سم فإن : المستقيم ل ....
٤ إذا كان : م أ = ٢/٥ نق سم فإن ل يقع .... الدائرة
٥ إذا كان : م أ = نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة
٦ إذا كان : م أ = ٩/٥ نق سم فإن ل يسمى .... للدائرة
٧ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = φ فإن ل يكون .... الدائرة
٨ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = {س} فإن ل يكون .... الدائرة

==

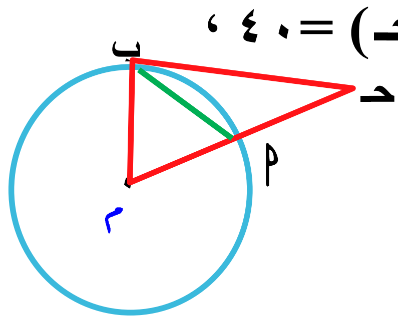
(٣) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣ سم على الترتيب فأكمل ما يلي :

١ إذا كان : م ن = ٦ سم فإن : الدائرتان ....
٢ إذا كان : م ن = ٢ سم فإن : الدائرتان ....
٣ إذا كان : م ن = ٨ سم فإن : الدائرتان ....
٤ إذا كان : م ن = ١ سم فإن : الدائرتان ....
٥ إذا كان : م ن = ٩ سم فإن : الدائرتان ....
٦ إذا كان : م ن = صفر فإن : الدائرتان ....

==

(٤) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها م ، ق(∠ حـ) = ٤٠° ،

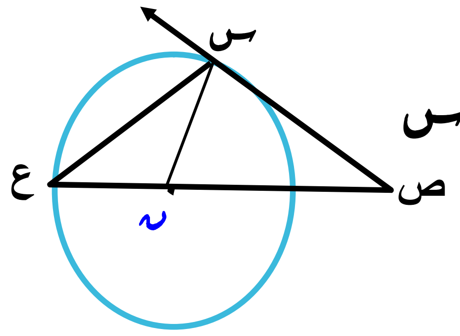


، ق(∠ م أ ب) = ٦٥°

أثبت أن

ب حـ مماس للدائرة م

(٥) فى الشكل المقابل :

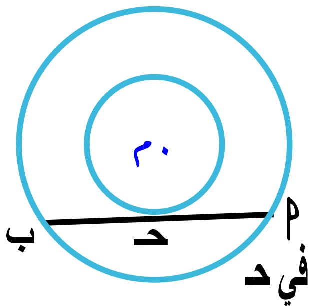


ص س مماس للدائرة ن عند س ، ق(∠ ع) = ٣٥°

أوجد ق(∠ س ص ع)

==

(٦) فى الشكل المقابل :

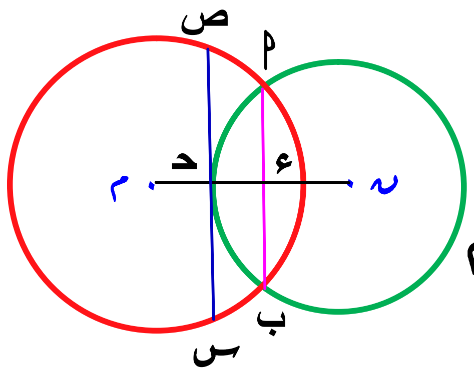


دائرتان متحدتا المركز طولا نصفى قطريهما ٥ سم، ٣سم، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى في حـ

أوجد طول أ ب

==

(٧) فى الشكل المقابل :



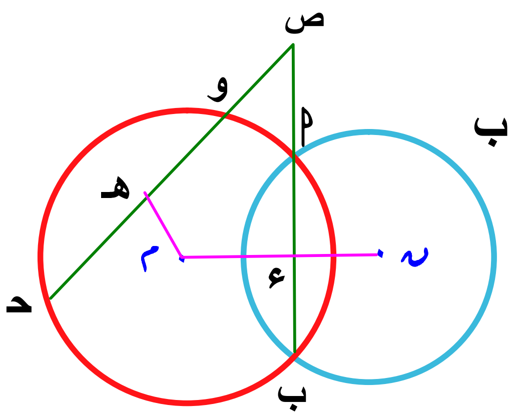
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، حـ ∈ س ص ، س ص تمس الدائرة م عند حـ

أثبت أن

١ أ ب // س ص
٢ حـ منتصف س ص

==

(٨) فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، هـ منتصف حـ و ، ق(∠ ب ص حـ) = ٥٣°

أوجد ق(∠ ء م هـ)

==

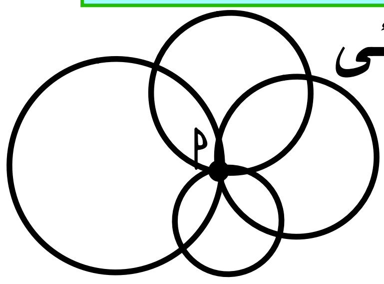
ملاحظات هامة

تعيين الدائرة

تعيين الدائرة إذا علم مركزها و طول نصف قطرها

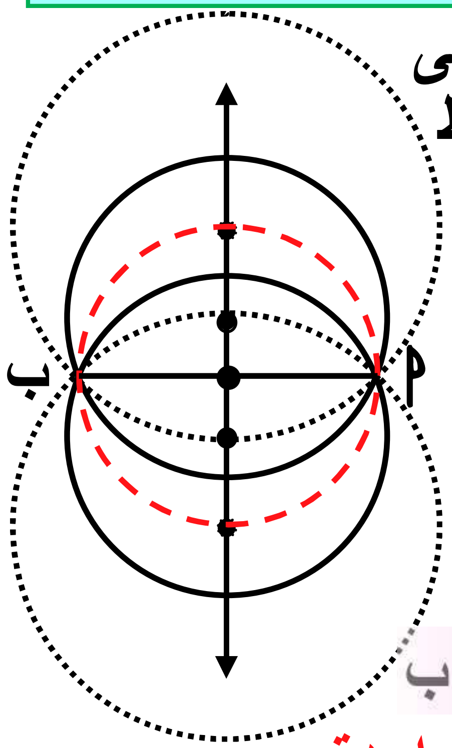
أولاً رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة



ثانياً رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر تمر بالنقط أ ، ب مراكزها جميعاً تقع على محور أب



١) إذا كان : نق > $\frac{1}{2}$ أ ب
فإنه يمكن رسم دائرتين

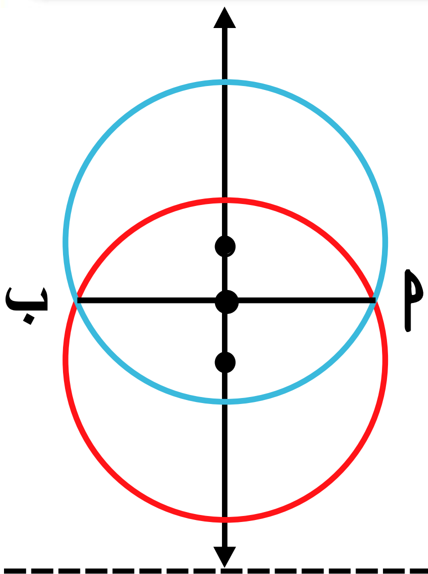
٢) إذا كان : نق = $\frac{1}{2}$ أ ب
فإنه يمكن رسم دائرة واحدة
، وهى أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ ، ب
تكون أ ب قطــــرا فيها

٣) إذا كان : نق < $\frac{1}{2}$ أ ب فإنه لا يمكن رسم دائرة

ثالثاً رسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة

١) أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد يمر بها دائرة وحيدة
٢) لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد
٣) الدائرة المارة برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجة لهذا المثلث
٤) مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى
نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها
أو نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه
وتقع هذه النقطة ١) داخل المثلث الحاد الزوايا
٢) خارج المثلث المنفرج الزاوية
٣) فى منتصف وتر المثلث القائم الزاوية
٥) مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع
محاور تماثل أضلاعه_متوسطاته_منصفات زواياه الداخلة_إرتفاعاته

مثال (١) باستخدام الأدوات الهندسية
ارسم أب طولها ٦ سم
ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤سم
(كم عدد الحلول)
عدد الحلول = ٢



================================

تمارين ٣

س١ أكمل ما يلى :

١) عدد الدوائر المارة بنقطة معلومة .....
٢) عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة .....
٣) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد .....
٤) عدد الدوائر المارة بثلاث نقط تنتمى لمستقيم واحد .....
٥) جميع الدوائر المارة بالنقطتين س ، ص تقع جميع مراكزها على .....
٦) إذا كان △س ص ع قائم الزاوية فى ص فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو .....
٧) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع .....
٨) طول نصف قطر أصغر دائرة مارة بطرفى قطعة مستقيمة طولها ٦سم هو .....
٩) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .....، .....، .....
١٠) عدد الدوائر التى طول نصف قطرها نق و تمر بطرفى قطعة مستقيمة أب طولها ١٠سم يكون :
إذا كان نق = ٥سم ....
إذا كان نق = ٧ سم ....
إذا كان نق < ٥ سم ....

س٢ ارسم أب طولها ٥سم
ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم
(كم عدد الحلول)

س٣ △ أ ب حـ فيه :
أ ب = ٤سم ، ب حـ = ٥سم ، أ حـ = ٣سم ،
إرسم الدائرة الخارجة عنه

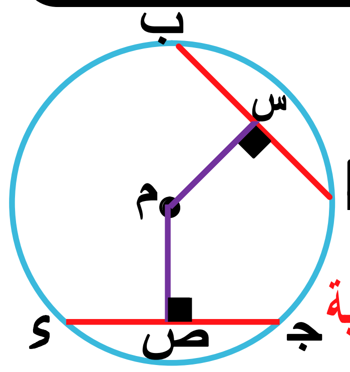
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

ملاحظة

بعد الوتر عن مركز الدائرة هو طول العمود المرسوم عليه من مركز الدائرة

نظرية ١

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة



∵ م س ⊥ أب

∵ م ص ⊥ جـ ء

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

عكس نظرية ١

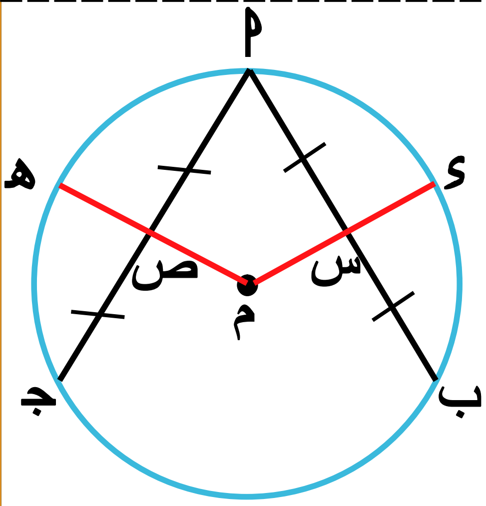
إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون متساوية فى الطول

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

===========================

(١) فى الشكل المقابل



أب = أجـ

س ، ص منتصفى أب ، أجـ

أثبت أن

ء س = هـ ص

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

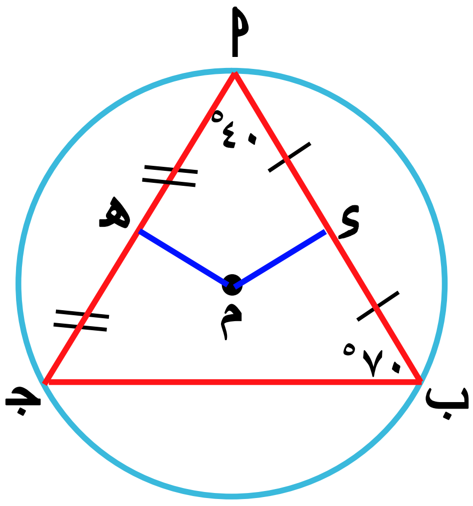
∴ م س = م ص أبعاد متساوية ①

∵ م ء = م هـ = نق ②

بطرح ١ من ٢

∴ ء س = هـ ص

(٢) فى الشكل المقابل



ء، هـ منتصفى أب ، أجـ

ق(∠أ) = ٤٠°

ق(∠ب) = ٧٠°

أثبت أن م ء = م هـ

البرهان

فى Δ أب جـ

∵ ق(∠جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٤٠) = ٧٠°

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب)

∴ أب = أجـ أوتار متساوية ①

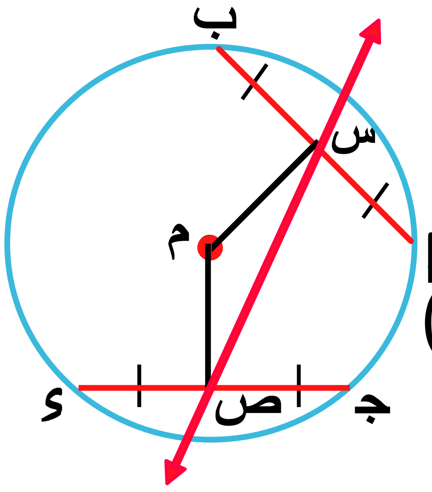
∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب ②

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ ③

من ١ ، ٢ ، ٣ ∴ م ء = م هـ أبعاد متساوية

===========================

(٣) فى الشكل المقابل



أب = جـ ء ، س، ص منتصفى أب ، جـ ء

أثبت أن ق(∠أ س ص) = ق(∠جـ ص س)

البرهان

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ

∴ ق(∠م ص جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠م س أ) = ق(∠م ص جـ) = ٩٠° ①

∵ أب = جـ ء أوتار متساوية

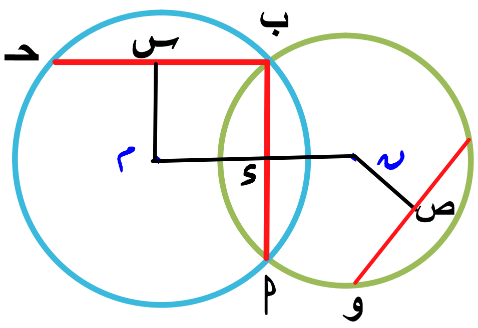
∴ م س = م ص أبعاد متساوية

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) ②

بطرح ٢ من ١

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠جـ ص س)

(٤) فى الشكل المقابل



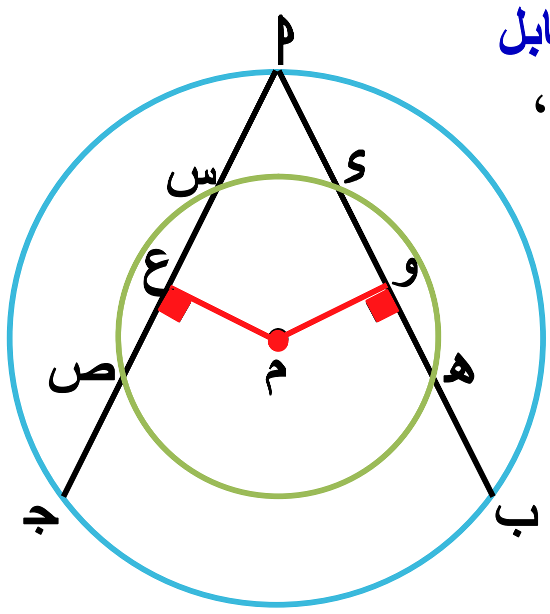
م س = م د
، ن د = ن ص
ن ص ⊥ هـ و
، س منتصف جـ ب
اثبت أن ب جـ = هـ و

البرهان

∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ م ن ⊥ أ ب
∵ ن د ⊥ أ ب ، م د ⊥ أ ب
∵ س منتصف جـ ب ∴ م س ⊥ ب جـ
∵ م س = م د أبعاد متساوية
∴ ب جـ = أ ب أوتار متساوية (١)
∵ ن ص ⊥ هـ و
∵ ن د = ن ص أبعاد متساوية
∴ أ ب = هـ و أوتار متساوية (٢)
من ١ ، ٢ ∴ ب جـ = هـ و

---

(٥) فى الشكل المقابل



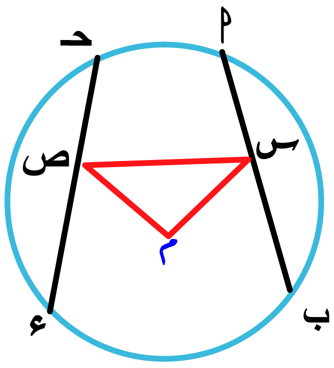
دائرتان متحدتا المركز م ،
أ ب = أ جـ
م و ⊥ أ ب
، م ع ⊥ أ جـ ،
اثبت أن
د هـ = س ص

البرهان

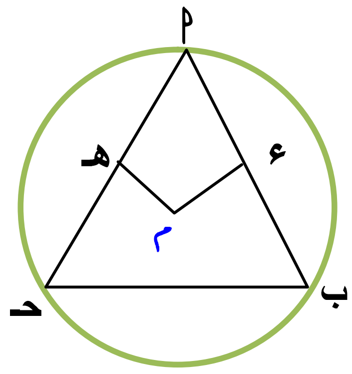
فى الدائرة الكبرى
∵ م و ⊥ أ ب
∵ م ع ⊥ أ جـ
∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية
∴ م و = م ع أبعاد متساوية
فى الدائرة الصغرى
∵ م و = م ع أبعاد متساوية
∴ د هـ = س ص أوتار متساوية

تمارين ٤

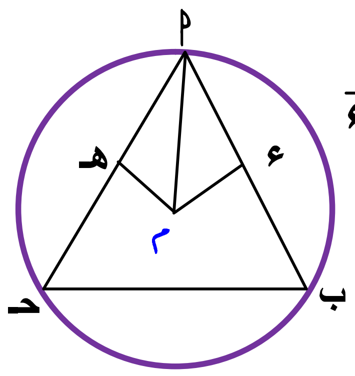
س١ أكمل ما يلى :



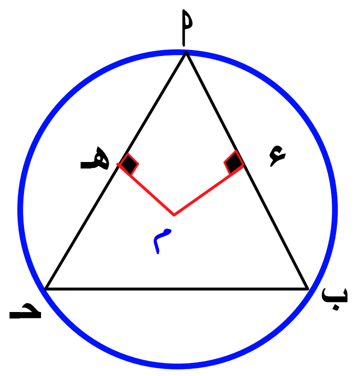
١) م دائرة ، س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ د ،
ق (∠ أ س ص) = ٥٠°
أ ب = جـ د فإن :
ق (∠ س م ص) = ... °



٢) دائرة م ، د منتصف أ ب
هـ منتصف جـ د
ق (∠ أ) = ٥٠°
فإن : ق (∠ د م هـ) = ... °



٣) دائرة م ، أ ب = أ جـ
، د منتصف أ ب ، هـ منتصف جـ د
ق (∠ د أ هـ) = ٦٠°
ق (∠ د م أ) = ... °



٤) دائرة م ، أ ب = أ جـ
د م = س + ٢ سم
هـ م = ٦ سم
فإن س = ...

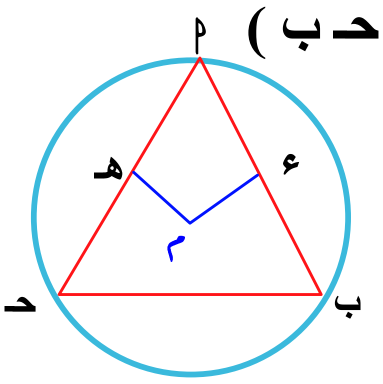
٥) الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على .... مركز الدائرة

٦) إذا كانت الأوتارعلى أبعاد متساوية من مركز الدائرة فإنها تكون .....

(٢) فى الشكل المقابل :

ق (∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب)
م هـ ⊥ أ جـ ،
ء منتصف أ ب ،

أثبت أن :
م ء = م هـ

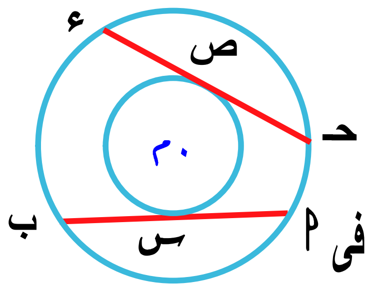


==

(٣) فى الشكل المقابل :

دائرتان متحدا المركز م ، أ ب ؛ جـ ء وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س ، ص على الترتيب

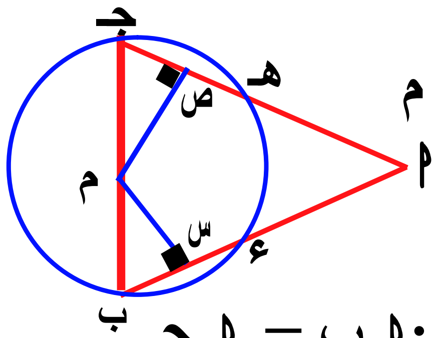
أثبت أن : أ ب = جـ ء



==

(٤) فى الشكل المقابل

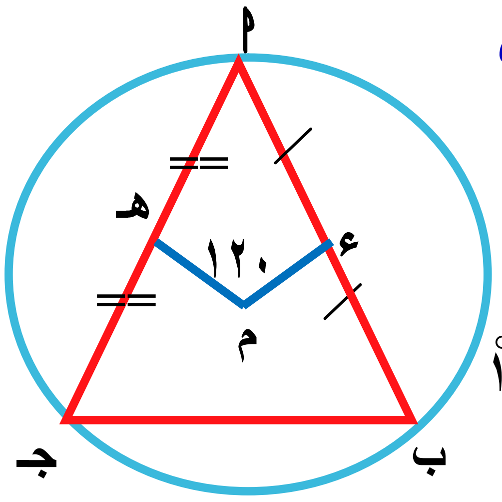
ب جـ قطر فى الدائرة م
م س ⊥ أ ب
م ص ⊥ أ جـ ،
ب ء = جـ هـ أثبت أن : أ ب = أ جـ



==

(٥) فى الشكل المقابل

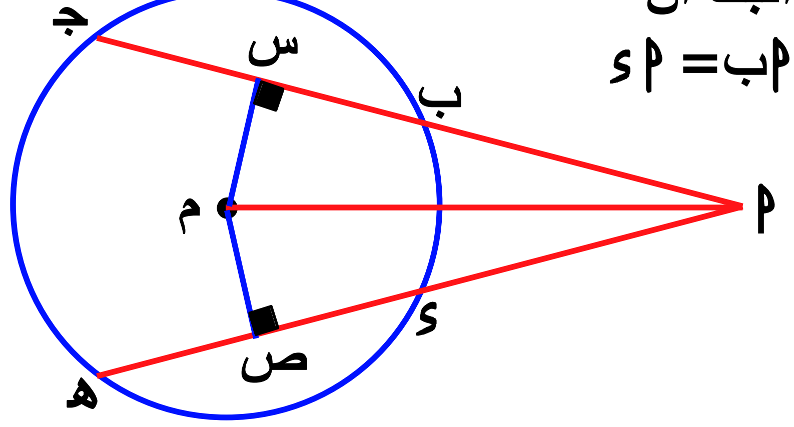
ء منتصف أ ب
هـ منتصف أ جـ
م ء = م هـ
ق (∠ء م هـ) = ١٢٠°



==

(٦) فى الشكل المقابل

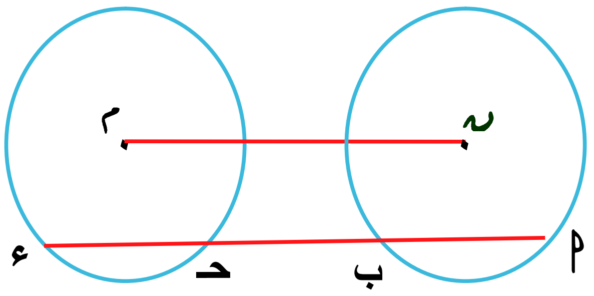
ب جـ = ء هـ ، م س ⊥ ب جـ
م ص ⊥ ء هـ
اثبت أن
أ ب = أ ء



(٧) فى الشكل المقابل :

دائرتان م ، ن متطابقتان ، أ ب // م ن

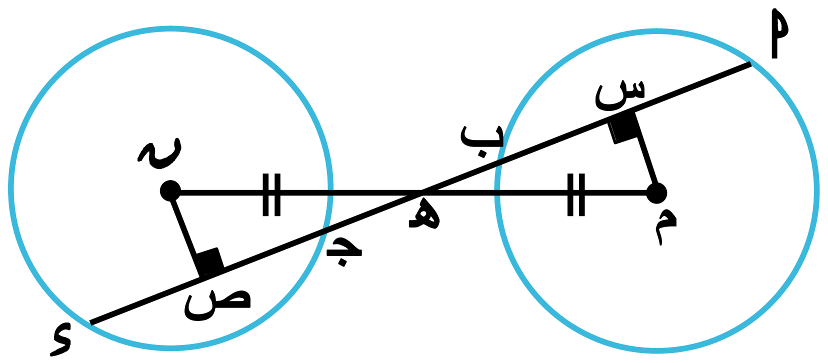
أثبت أن :
أ جـ = ب ء



==

(٨) فى الشكل المقابل

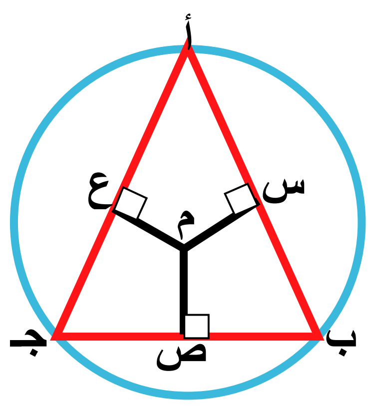
م، ن دائرتان متطابقتان و متباعدتان
، هـ منتصف م ن ، اثبت أن أب = جـ ء
، هـ منتصف أ ء



==

(٩) فى الشكل المقابل

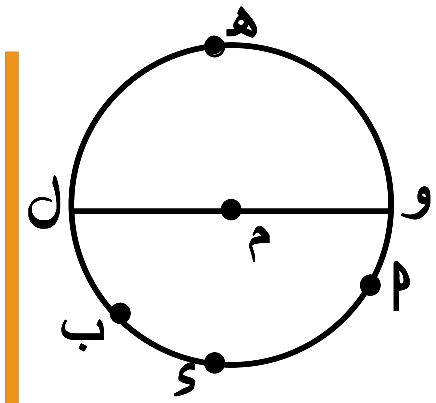
إذا كان م س = م ص = م ع
أوجد ق(∠أ)
وإذا كان أ ب = ١٠ سم
أوجد محيط △ أ ب جـ



==

الزاوية المركزية و قياس الأقواس

القوس



هناك قوسان يعبر عنهما $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

(١) $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (الاصغر) أو $\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$

(٢) $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (الاكبر) أو $\overset{\frown}{\text{أ هـ ب}}$

ملاحظات :-

(١) $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ يعبر عن القوس الأصغر إن لم يذكر غير ذلك

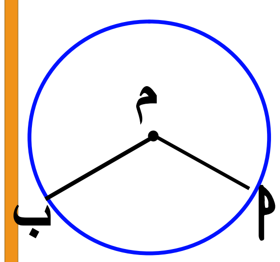
(٢) إذا كان $\overline{\text{و ل}}$ قطر فى الدائرة م فإن

$\overset{\frown}{\text{و هـ ل}} = \overset{\frown}{\text{و ء ل}}$ ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة و يحمل كل من ضليعها نصف قطر فى الدائرة

ملاحظات هامة



١) (∠ أ م ب) المركزية يقابلها $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (الاصغر)

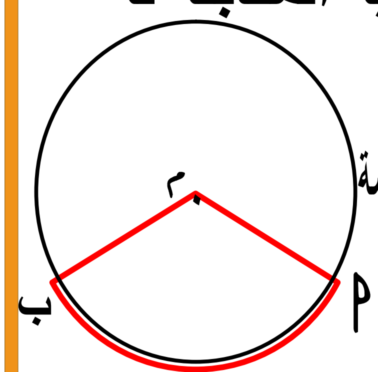
٢) (∠ أ م ب) المركزية المنعكسة يقابلها $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (الاكبر)

قياس القوس

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق(∠ أ م ب)

ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) الاكبر = ق(∠ أ م ب) المنعكسة



ملاحظات هامة

١) قياس الدائرة = ٣٦٠°

٢) قياس القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ١٨٠°

٣) قياس القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ٩٠°

٤) قياس القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ١٢٠°

٥) قياس القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ٢٧٠°

٦) قياس $\frac{٢}{٥}$ الدائرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طول القوس

هو جزء من محيط دائرة يتناسب مع قياسه

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$$

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

= $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

ملاحظات هامة

١) طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = π نق

٢) طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٢}$ π نق

٣) طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٢ π نق

= $\frac{٢}{٣}$ π نق

=====================================

مثـال ١

أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠°

فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحل

∵ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائرة

∴ طول القوس = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

=====================================

مثـال ٢ أوجد طول القوس الذى يمثل رُبع الدائرة التى طول نصف قطرها ١٤سم

الحل

طول القوس = $\frac{١}{٤}$ × ٢ π نق

= $\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٢٢سم

مثال ٣ أوجد قياس وطول القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ من الدائرة حيث طول قطر الدائرة ١٤ سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس $= \frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة

$= \frac{٢}{٥} \times ٣٦٠° = ١٤٤°$

طول القوس $= \frac{١٤٤°}{٣٦٠°} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١٧,٦$ سم

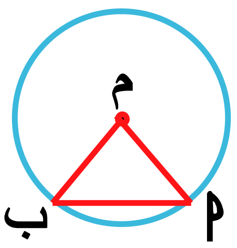
مثال ٤ أوجد قياس القوس الذى طوله ١١سم فى دائرة طول نصف قطرها ٧سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

الحل

قياس القوس $= \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times ٣٦٠°$

قياس القوس $= \frac{١١}{٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧} \times ٣٦٠° = ٩٠°$

مثال ٥ فى الدائرة م ق(∠ب) = ٤٥ ، م أ = ٧سم أوجد طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$



الحل

∵ م أ = م ب = نق

∴ Δ أ م ب متساوى الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

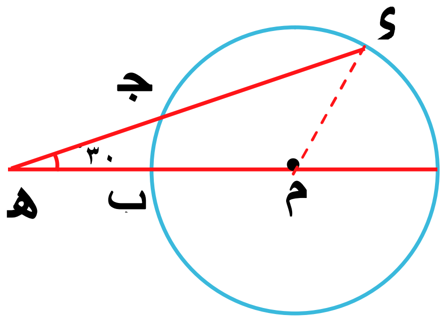
∴ ق(∠م) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ٩٠°

∴ طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ $= \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠} \times ٢\pi$ نق

$= \frac{٩٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١١$ سم

مثال ٦ فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة ق(∠د جـ أ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{\text{أد}}$) = ٨٠

أوجد: ق(∠م د جـ)

الحل

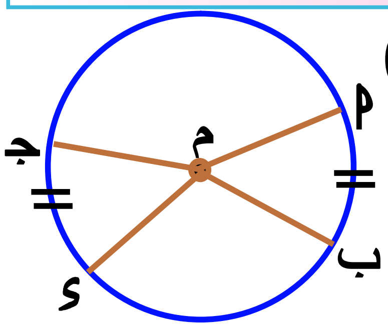
∵ ق($\overset{\frown}{\text{أد}}$) = ق(∠أ م د) = ٨٠

∵ (∠أ م د) خارجة عن Δ

∴ ق(∠م د جـ) = ٨٠ − ٣٠° = ٥٠°

نتائج هامة

نتيجة ١ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح

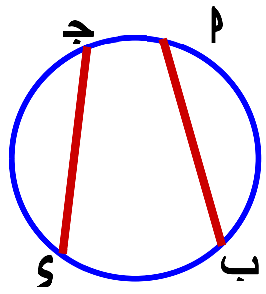


إذا كان: ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$)

فإن طول $\overset{\frown}{\text{أب}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$

والعكس صحيح

نتيجة ٢ : فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

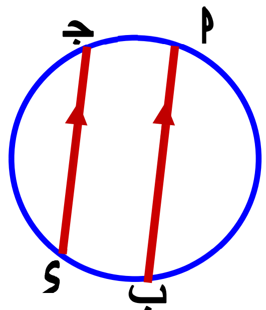


إذا كان: ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$)

فإن: ⟸ $\overline{\text{أب}}$ = $\overline{\text{جـ د}}$

والعكس صحيح

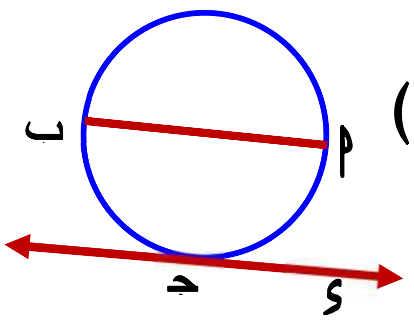
نتيجة ٣ : الوتران المتوازيان فى دائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس



إذا كان أب // جـ د

فإن ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$)

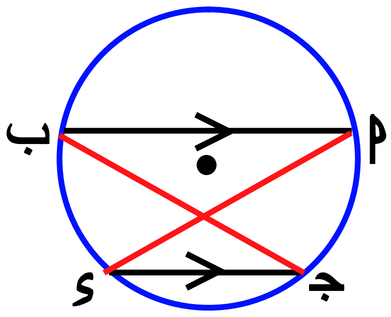
نتيجة ٤: القوسان المحصوران بين وتر و مماس يوازيه متساويان فى القياس



إذا كان أب // جـ د

فإن ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جـ د}}$)

(١) فى الشكل المقابل



$\overline{أب} // \overline{جـ ء}$

اثبت أن أ ء = ب جـ

البرهان

∵ $\overline{أب} // \overline{جـ ء}$

∴ ق(أ⌒جـ) = ق(ب⌒ء)

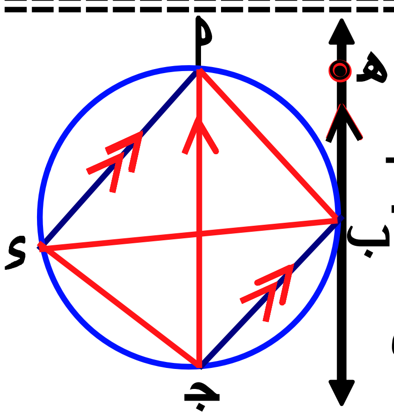
باضافة ق(جـ⌒ء) للطرفين

∴ ق(أ⌒جـ ء) = ق(ب⌒ء جـ)

∴ أ ء = ب جـ

==============================

(٢) فى الشكل المقابل



$\overleftrightarrow{ب هـ}$ مماس للدائرة

$\overline{ب جـ} // \overline{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{ب هـ} // \overline{أ جـ}$

اثبت أن

Δ ب جـ ء متساوى الساقين

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{ب هـ} // \overline{أ جـ}$ ⇐ ق(أ⌒ب) = ق(ب⌒جـ) (١)

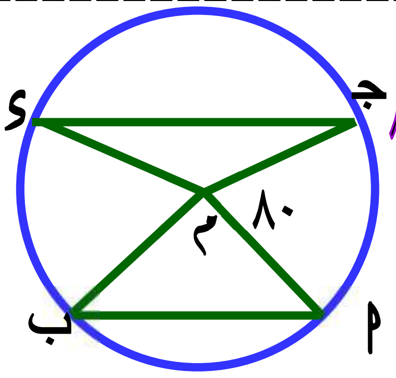
∵ $\overline{ب جـ} // \overline{أ ء}$ ⇐ ق(أ⌒ب) = ق(جـ⌒ء) (٢)

من ١ ، ٢ ∴ ق(ب⌒جـ) = ق(جـ⌒ء)

∴ ب جـ = جـ ء ∴ Δب جـ ء متساوى الساقين

==============================

(٣) فى الشكل المقابل



$\overline{أب} // \overline{جـ ء}$ ، ق(أ⌒جـ) = ٨٠

طول أ جـ = طول أ ب

أوجد: ق(أ̂) ، ق(جـ⌒ء)

البرهان

∵ طول أ جـ = طول أ ب

∴ ق(أ⌒جـ) = ق(أ⌒ب) = ٨٠

∴ ق(أ م̂ ب) المركزية = ق(أ⌒ب) = ٨٠

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(أ̂) = ق(ب̂) = $\frac{١٨٠-٨٠}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

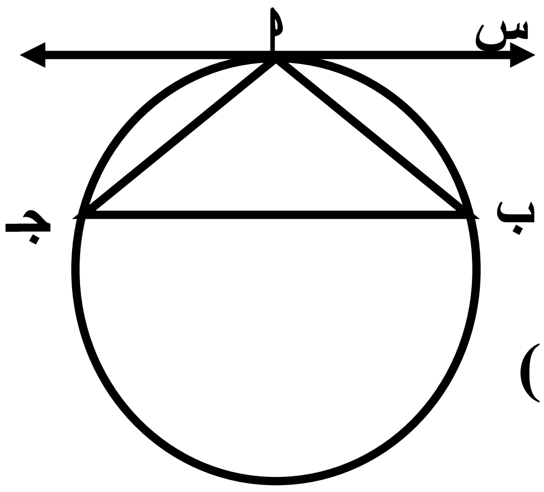
∵ أ ب // جـ ء

∴ ق(أ⌒جـ) = ق(ب⌒ء) = ٨٠

ق(جـ⌒ء) = ٣٦٠ − (٨٠ + ٨٠ + ٨٠)

= ٣٦٠ − ٢٤٠ = ١٢٠

(٤) فى الشكل المقابل



أ س مماس للدائرة عند أ

، $\overline{ب جـ} // \overline{أ س}$ ،

ق(∠ب) = ٣٥°

أوجد

ق(∠ب أ جـ)

البرهان

∵ $\overline{أ س} // \overline{ب جـ}$ ⇐ ق(أ⌒ب) = ق(أ⌒جـ)

∴ أ ب = أ جـ

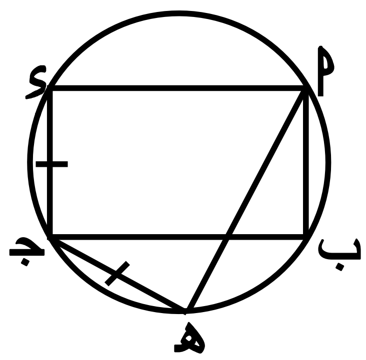
∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٣٥°

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − [٣٥ + ٣٥]

= ١٨٠° − ٧٠ = ١١٠°

==============================

(٥) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء مستطيل ،

جـ ء = جـ هـ

اثبت أن

أ هـ = ب جـ

البرهان

∵ أ ب جـ ء مستطيل

∴ أ ب = جـ ء

∵ جـ ء = جـ هـ

∴ أ ب = جـ هـ

∴ ق(أ⌒ب) = ق(جـ⌒هـ)

باضافة ق(ب⌒هـ) للطرفين

∴ ق(أ⌒ب هـ) = ق(جـ⌒هـ ب)

∴ أ هـ = ب جـ

تمارين ٥

س١ أكمل ما يلى :

١ الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين ....

٢ الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة .

٣ طول القوس الذى يمثل $\frac{1}{4}$ محيط الدائرة = ...

، قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة = ...

٤ قياس القوس الذى يساوى ٠,٤ قياس الدائرة = ...

٥ قياس القوس الذى طوله ٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

٦ طول الدائرة = ... ، قياس الدائرة = ...

٧ الزاوية المركزية فى دائرة يقع رأسها عند .... وكل من ضلعيها يحمل ....

٨ فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تكون ....

٩ قياس القوس = ... بينما طول القوس هو جزء من ....

١٠ قياس نصف الدائرة = ... بينما طول نصف الدائرة = ...

١١ إذا كان دائرة محيطها = ٣٦ سم فإن قياس قوس فيها طوله ٦ سم = ...

١٢ قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{5}$ قياس الدائرة = ..

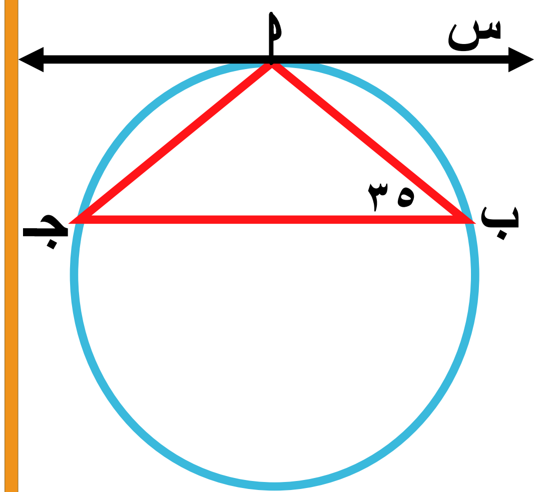
١٣ قياس القوس الذى طوله ١٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى ....

١٤ الزاوية المركزية التى قياسها ٣٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة

١٥ إذا كان أ ب جـ ء مربع فإن ق(أب⌢) = ...

(٢) فى الشكل المقابل أس مماس للدائرة عند أ ، ب جـ // أ س ، ق(∠ب) = ٣٥°

أوجد ق(∠ب أ جـ)

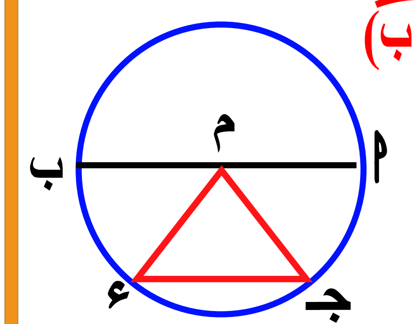


(٣) فى الشكل المقابل أ ب قطر فى الدائرة م

ق(أ جـ⌢) = ق(جـ ء⌢) = ق(ء ب⌢)

أثبت أن

∆ أ جـ ء متساوى الاضلاع



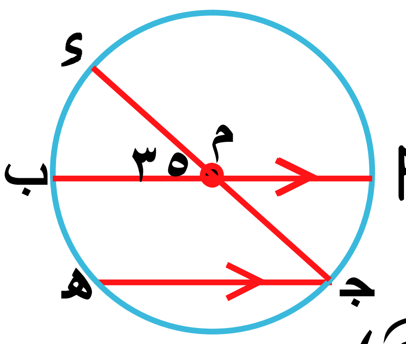
(٤) فى الشكل المقابل

أب ، جـ ء قطران فى الدائرة م

، أب // جـ هـ

ق(∠ء م ب) = ٣٥°

أوجد ق(جـ هـ⌢) ، ق(أ ء⌢)

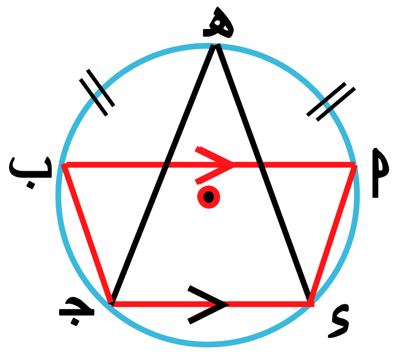


(٥) فى الشكل المقابل

أب // جـ ء

، هـ منتصف أب⌢

أثبت أن هـ ء = هـ جـ

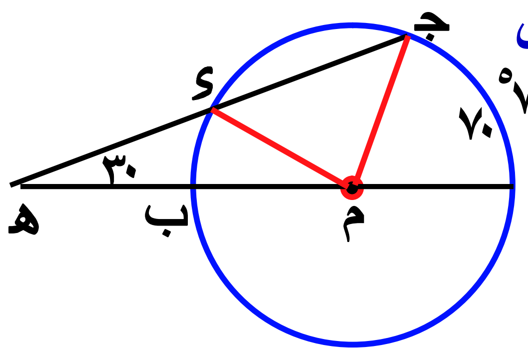


(٦) فى الشكل المقابل

أب قطر، ق(أ جـ⌢) = ٧٠°

ق(∠هـ) = ٣٠°

أوجد ق(جـ ء⌢)

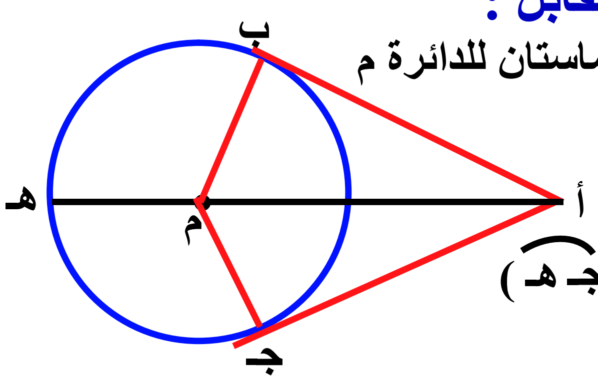


(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، جـ

أثبت أن

ق(ب هـ⌢) = ق(جـ هـ⌢)



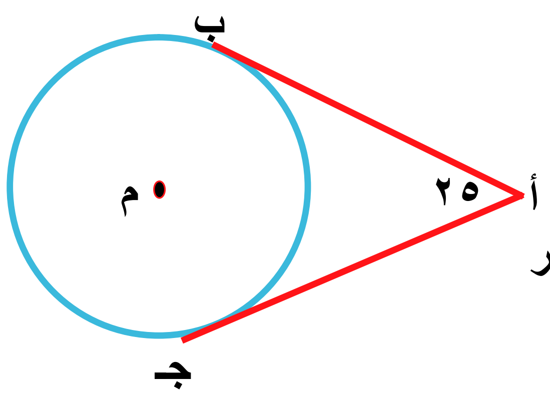
(٨) فى الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، جـ ،

ق(∠ب أ جـ) = ٢٥°

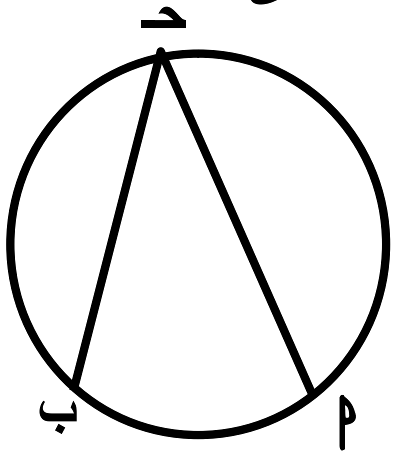
أوجد

ق(ب جـ⌢) الاكبر



الزاوية المحيطية :

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة و يحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً فى الدائرة

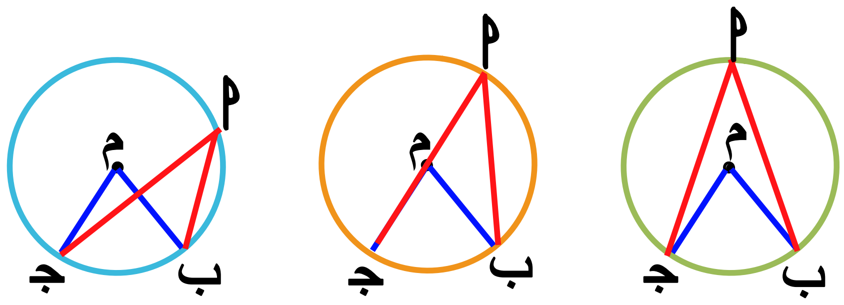


∠ ا جـ ب زاوية محيطية

$\frown$ ا ب هو القوس المقابل لها

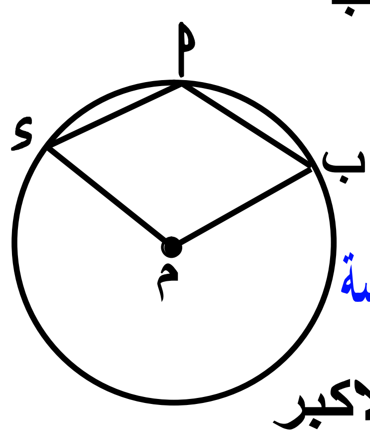
نظرية ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس



ق (∠ ا) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ م) المركزية

مشتركتان فى $\frown$ ب جـ



ق(∠ب ا ء) المحيطية

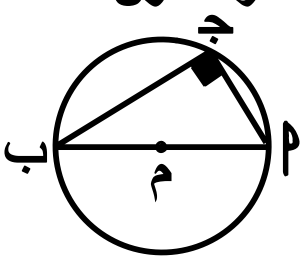
= $\frac{١}{٢}$ ق (∠ م) المركزية المنعكسة

مشتركتان فى $\frown$ ب ء الاكبر

نتائج هامة

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

٢ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة



∵ $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق (∠ جـ) = ٩٠°

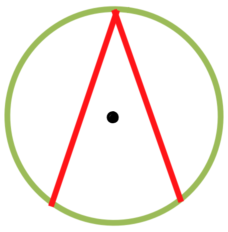
عكس النتيجة

إذا كان ق (∠ جـ) المحيطية = ٩٠°

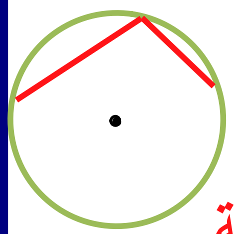
فإن $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

(٣) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أقل من نصف دائرة تكون حادة

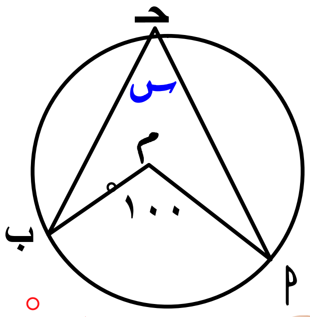


(٤) الزاوية المحيطية تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة تكون منفرجة

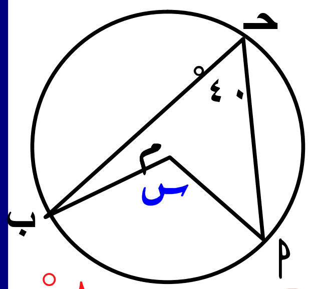


==

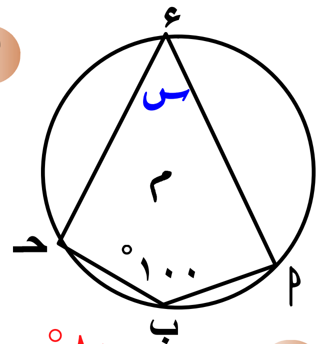
مثـــال ١ : فى الأشكال الآتية أوجد س بالدرجات :



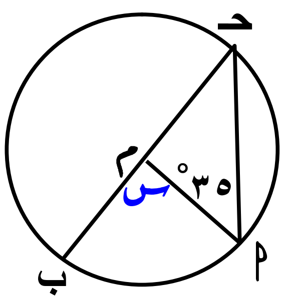
١) س = ٥٠° . . . .



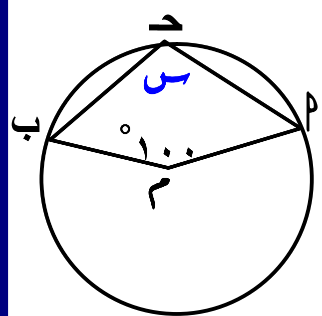
٢) س = ٨٠° . . . .



٣) س = ٨٠° . . . .



٤) س = ٧٠° . . . .

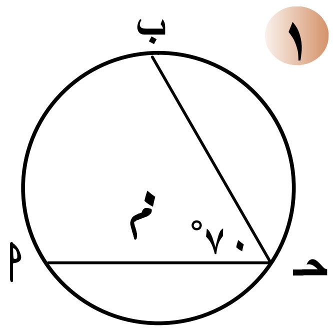


٥) س = ١٣٠° . . . .

==

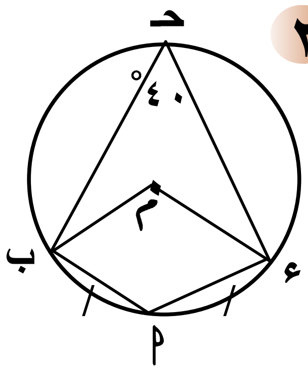
مثـــال ٢ فى الأشكال الآتية أكمل :

١



ق(ا ب) = ١٤٠° .....

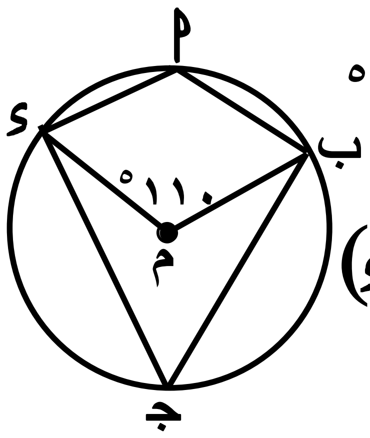
٢



ق(ا ب) = ٤٠° .....

==

(٣) في الشكل المقابل



ق(∠ب م ء) = ١١٠°

أوجد

ق(∠ب جـ ء) ، ق(∠ب أ ء)

البرهان

∵ ق(∠ب جـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) المركزية

= ٥٥°

∴ ق(∠ب م ء) المركزية المنعكسة

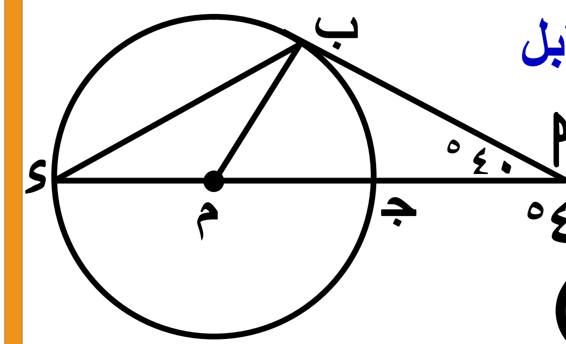
= ٣٦٠° − ١١٠° = ٢٥٠°

ق(∠أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) المركزية المنعكسة

= ١٢٥°

---

(٤) في الشكل المقابل



أب مماس للدائرة

ق(∠أ) = ٤٠°

اوجد ق(∠ء)

البرهان

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر

∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

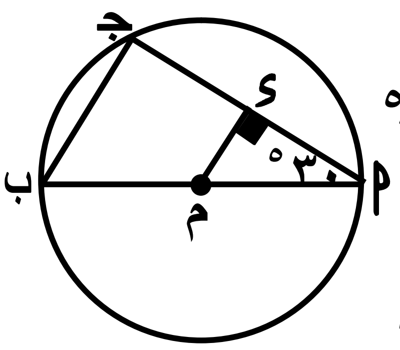
∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∴ ق(∠ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) المركزية

مشتركتان في ⌒ب جـ

∴ ق(∠ء) = ٢٥°

(٥) في الشكل المقابل



أب قطر في الدائرة ، م ء ⊥ أجـ ، ق(∠أ) = ٣٠°

اثبت أن م ء // ب جـ ، ب جـ = نق

البرهان

∵ أب قطر في الدائرة

∴ ق(∠جـ) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∴ ق(∠جـ) = ق(∠أ ء م) = ٩٠°

وهما في وضع تناظر

∴ م ء // ب جـ

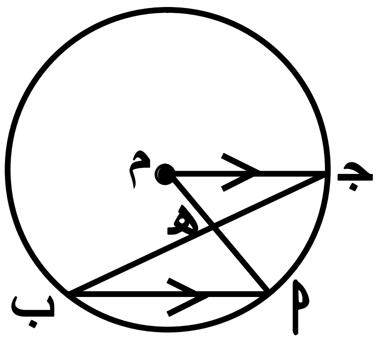
في Δ أ ب جـ القائم في جـ

∵ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أب = نق

---

(٦) في الشكل المقابل



أب // م جـ ، أم ∩ ب جـ = {هـ}

اثبت أن ب هـ > أ هـ

البرهان

∵ أب // م جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠م) بالتبادل ①

∵ ق(∠ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠م) المركزية ②

مشتركتان في ⌒أجـ

من ١ ، ٢ ∴ ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ)

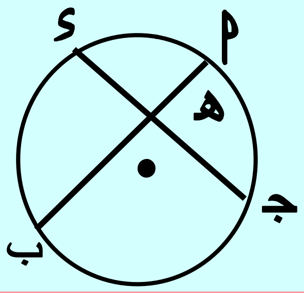
في Δ أ ب هـ

∵ ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ ب هـ > أ هـ

تمرين مشهور ١

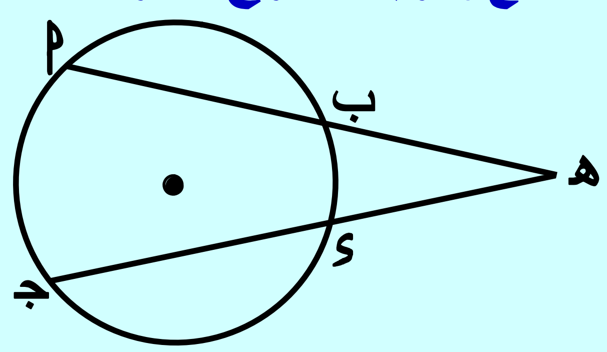
قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة



ق(∠أهـجـ)
= ١/٢ [ق(أجـ⌢) + ق(ب د⌢)]

تمرين مشهور ٢

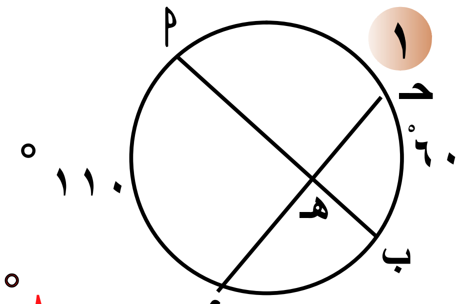
قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة



ق(∠هـ)
= ١/٢ [ق(أجـ⌢) − ق(ب د⌢)]

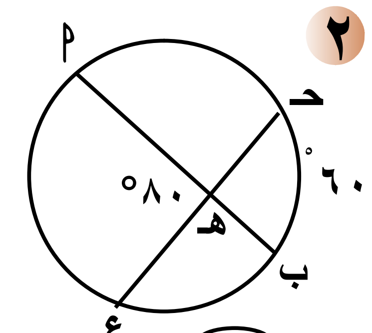
مثال ١ في الأشكال الآتية أكمل :

١)



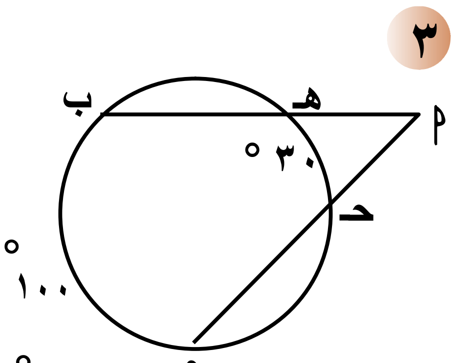
ق(∠أهـ د) = ٨٥°

٢)



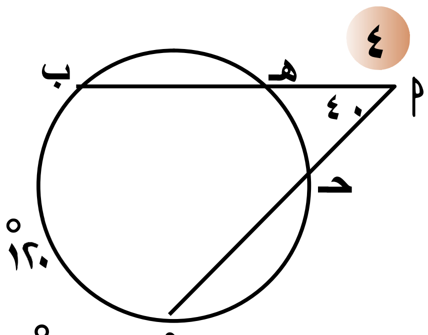
ق(أ د⌢) = ١٠٠°

٣)



ق(∠ب أ د) = ٣٥°

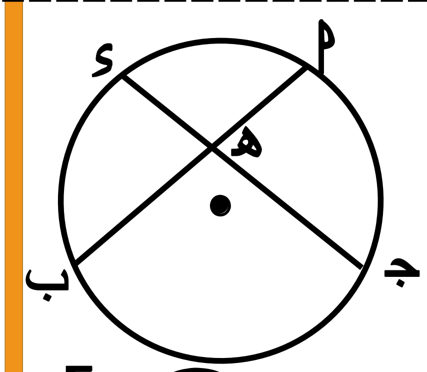
٤)



ق(هـ حـ⌢) = ٤٠°

---

(٢) في الشكل المقابل

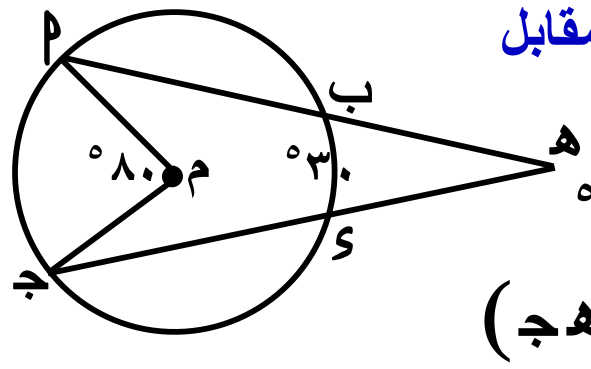


ق(أجـ⌢) = ٤٠°
، ق(ب د⌢) = ٩٠°
أوجد ق(∠أهـجـ)

الحل

ق(∠أهـجـ) = ١/٢ [ق(أجـ⌢) + ق(ب د⌢)]
ق(∠أهـجـ) = ١/٢ × [٤٠° + ٩٠°] = ٦٥°

(٣) في الشكل المقابل



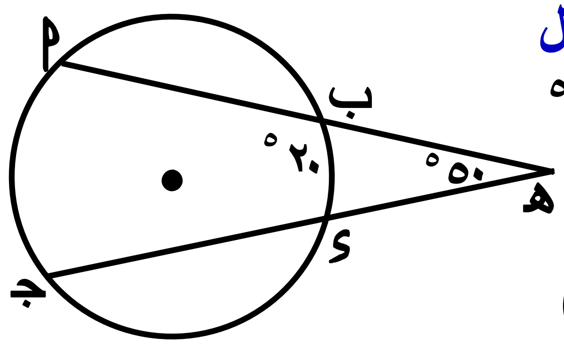
ق(ب د⌢) = ٣٠°
ق(∠م) = ٨٠°
أوجد ق(∠أهـجـ)

الحل

ق(أجـ⌢) = ق(∠أمجـ) المركزية = ٨٠°
ق(∠هـ) = ١/٢ [ق(أجـ⌢) − ق(ب د⌢)]
ق(∠هـ) = ١/٢ × [٨٠° − ٣٠°] = ٢٥°

---

(٤) في الشكل المقابل



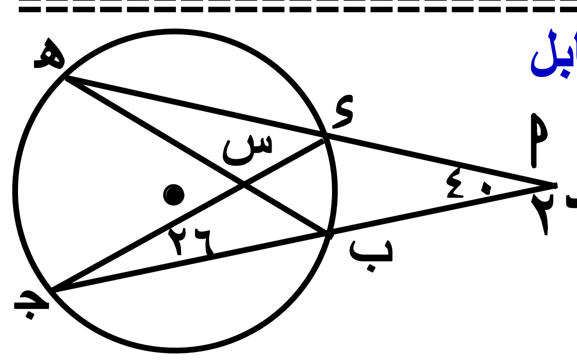
ق(ب د⌢) = ٢٠°
، ق(∠هـ) = ٥٠°
أوجد ق(أجـ⌢)

الحل

ق(∠هـ) = ١/٢ [ق(أجـ⌢) − ق(ب د⌢)]
٥٠ = ١/٢ [ق(أجـ⌢) − ٢٠]   ×٢
١٠٠ = ق(أجـ⌢) − ٢٠
١٠٠ + ٢٠ = ق(أجـ⌢)
ق(أجـ⌢) = ١٢٠°

---

(٥) في الشكل المقابل



ق(∠أ) = ٤٠°
، ق(∠دجـب) = ٢٦
أوجد ق(هـجـ⌢)

الحل

∵ ق(∠جـ) المحيطية = ١/٢ ق(ب د⌢)
∴ ق(ب د⌢) = ٢٦ × ٢ = ٥٢°
ق(∠أ) = ١/٢ [ق(هـجـ⌢) − ق(ب د⌢)]
٤٠° = ١/٢ [ق(هـجـ⌢) − ٥٢°]
ق(هـجـ⌢) = ١٣٢°

تمارين ٦

س١ أكمل ما يلى :

١) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة ....

٢) قياس الزاوية المحيطية يساوي .... قياس القوس المقابل لها

٣) الزاوية المحيطية التي تقابل قوس أصغر في الدائرة ......

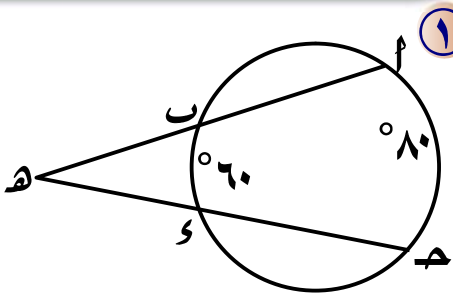
٤) قياس الزاوية المركزية ....قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

٥) قياس الزاوية المحيطية يساوى....... قياس القوس المقابل لها

٦) النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس = ...

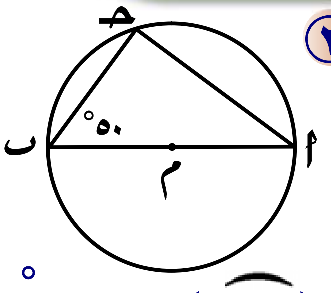
س٢ في كل شكل من الاشكال الاتية أكمل

(١)



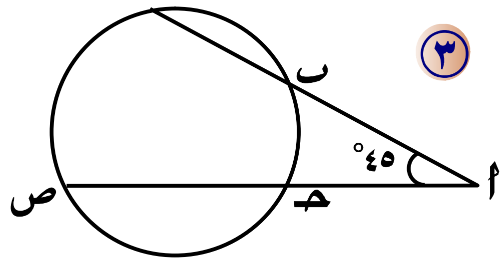
ق (∠هـ) = ... °

(٢)



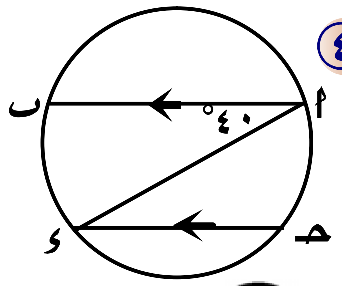
ق (ب⌢حـ) = ... °

(٣)



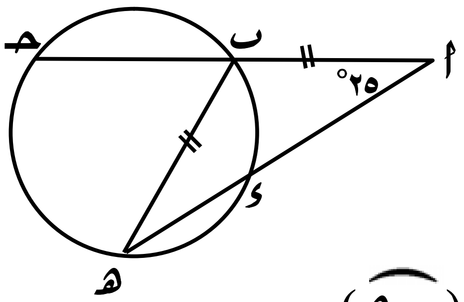
ق (س⌢ص) – ق (ب⌢حـ) = ...

(٤)



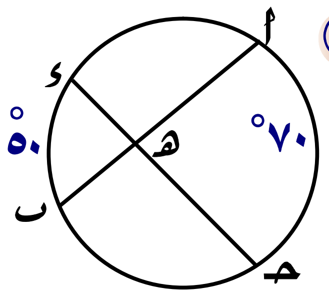
ق (أ⌢حـ) = ...

(٥)



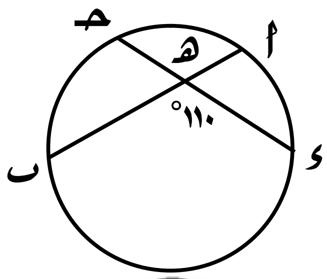
ق (حـ⌢هـ) = ...

(٦)



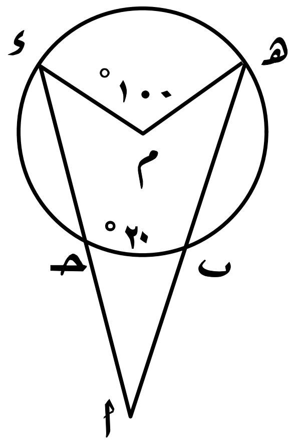
ق (∠أ هـ حـ) = ...

(٧)



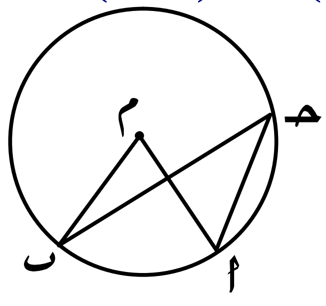
ق (أ⌢حـ) + ق (ب⌢ء) = ...

(٨)



ق (∠أ) = ...

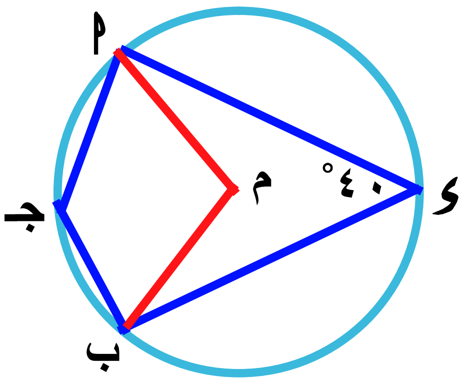
(٩)



ق (∠حـ) + ق (∠أ م ب) = ٩٠°

فإن ق (∠حـ) = ...

(٣) في الشكل المقابل

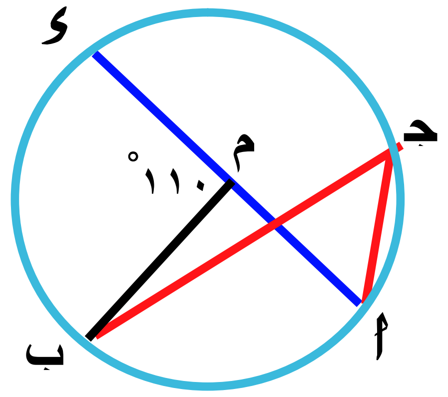


ق (∠أ ء ب) = ٤٠

أوجد

ق (∠أ جـ ب)

(٤) في الشكل المقابل

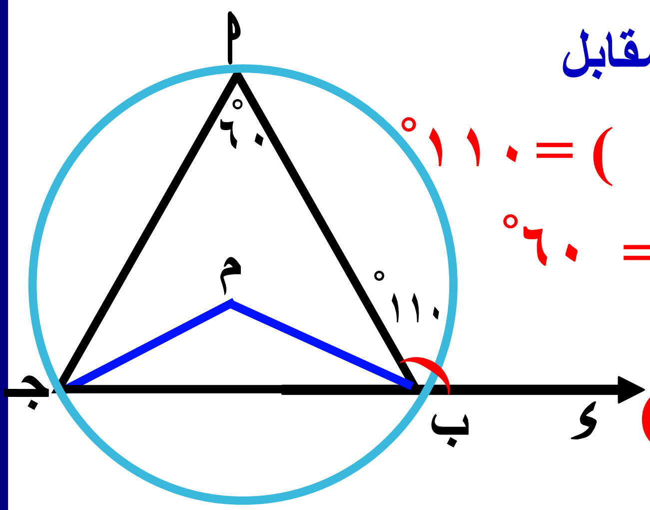


ق (∠ء م ب) = ١١٠°

أوجد

ق (∠أ جـ ب)

(٥) في الشكل المقابل



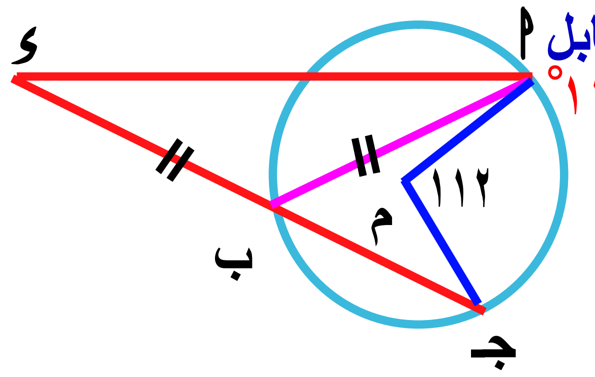
ق (∠أ ب ء) = ١١٠°

ق (∠ب أ جـ) = ٦٠°

أوجد

ق (∠أ ب م)

(٦) في الشكل المقابل

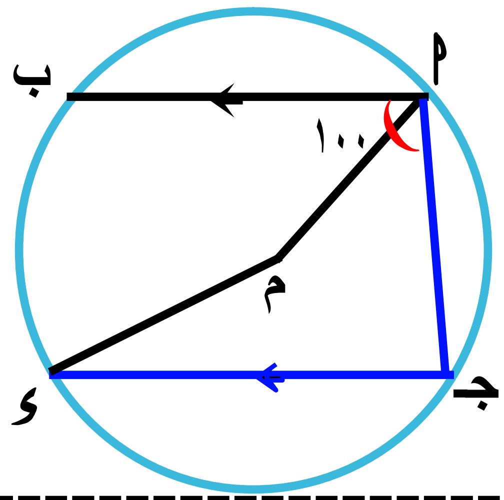


ق (∠أ م جـ) = ١١٢°

، أ ب = ب ء

أوجد ق (∠ء)

(٧) في الشكل المقابل



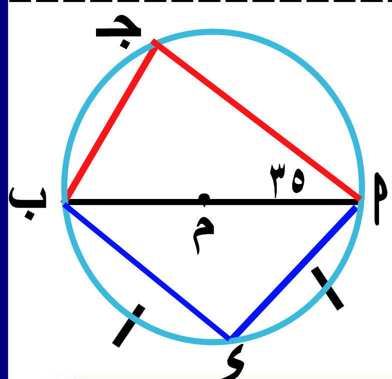
ق (∠ب أ جـ) = ١٠٠°

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$

أوجد

ق (∠أ م ء)

(٨) في الشكل المقابل



أ ب قطر في الدائرة م ، طول أ⌢ء = طول جـ⌢ء

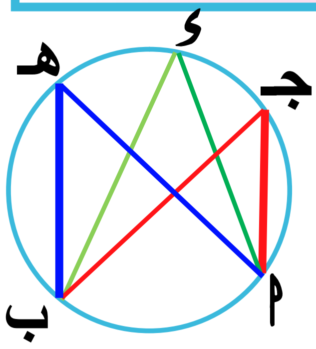
ق (∠جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد ق (∠جـ ب ء)

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية٢

الزوايا المحيطية التى تحصرنفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

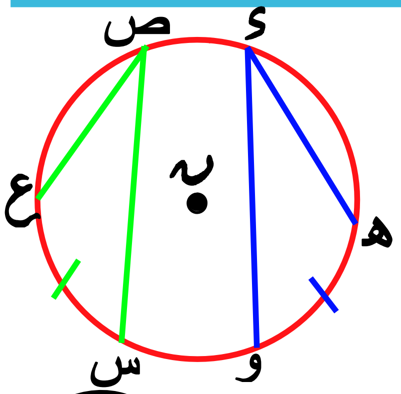


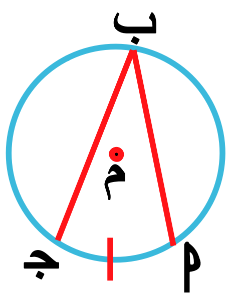
ق(∠جـ) = ق(∠ء) = ق(∠هـ)

زوايا محيطية مشتركة فى القوس (أ⌒ب)

نتيجة

الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو فى عدة دوائر تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح



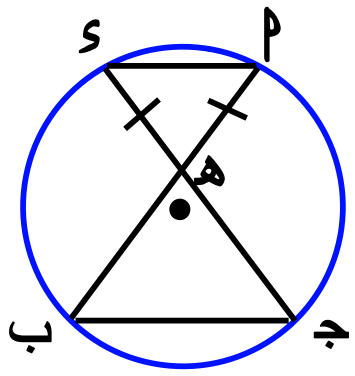


إذا كان ق(أ⌒جـ) = ق(و⌒هـ) = ق(س⌒ع)

فإن ق(∠ب)=ق(∠ء)=ق(∠ص)

==

(١) فى الشكل المقابل



أهـ = ءهـ

اثبت ان

هـب = هـجـ

البرهان

∵ أهـ = ءهـ

∴ ق(∠أ)=ق(∠ء) ١

∵ ق(∠أ) المحيطية = ق(∠جـ) المحيطية ٢

مشتركان فى (ب⌒ء)

∵ ق(∠ء) المحيطية = ق(∠ب) المحيطية ٣

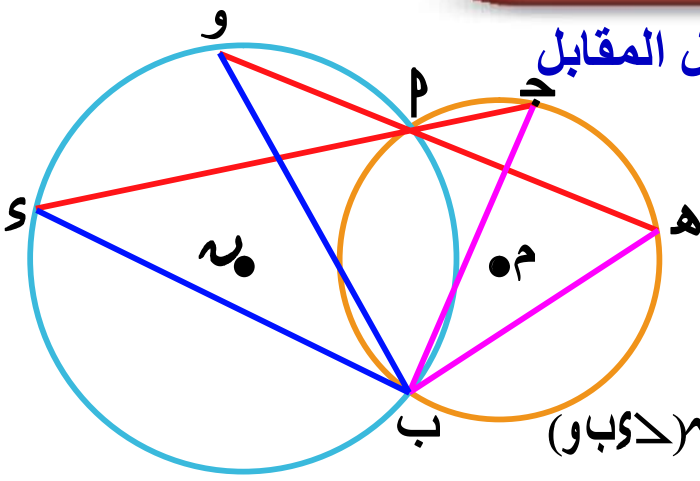
مشتركان فى (أ⌒جـ)

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠جـ)=ق(∠ب)

∴ هـب = هـجـ

(٢) فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتين

متقاطعتين فى أ ، ب

اثبت أن

ق(∠هـبجـ)=ق(∠ءبو)

البرهان

فى الدائرة م

∵ ق(∠جـأهـ) المحيطية = ق(∠جـبهـ) المحيطية ١

مشتركان فى (جـ⌒هـ)

فى الدائرة ن

∵ ق(∠وأء) المحيطية = ق(∠وبء) المحيطية ٢

مشتركان فى (و⌒ء)

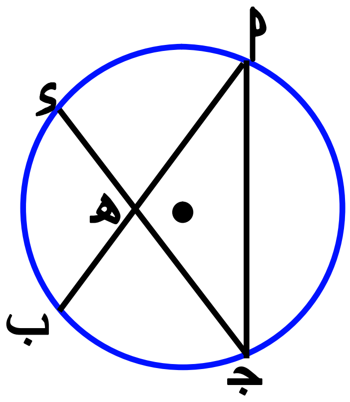
∵ ق(∠جـأهـ)=ق(∠وأء) بالتقابل بالرأس ٣

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ ق(∠هـبجـ)=ق(∠ءبو)

==

(٣) فى الشكل المقابل



أب ، جـء وتران متساويان

اثبت أن

Δ أهـجـ متساوى الساقين

البرهان

∵ أب = جـء

∴ ق(أ⌒ءب) = ق(جـ⌒بء)

بطرح ق (ب⌒ء) من الطرفين

∴ ق (أ⌒ء) = ق (ب⌒جـ)

∴ ق(∠جـ)=ق(∠أ)

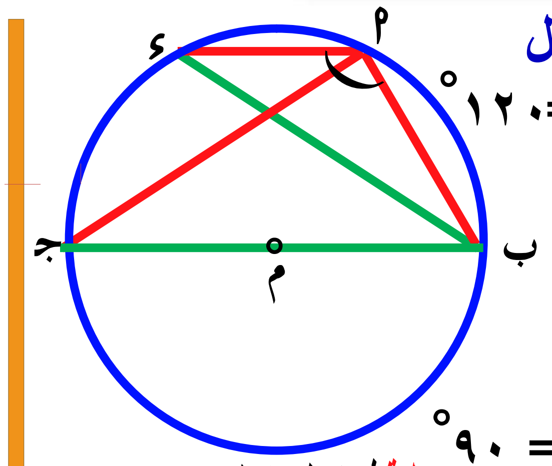
∴ هـأ = هـجـ

∴ Δ أهـجـ متساوى الساقين

(٤) فى الشكل المقابل

إذا كان ق (∠ب أ ء) = ١٢٠°

أوجد ق (∠ ء ب جـ)



البرهان

∵ ب جـ قطر

⇐ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

∵ ق(∠ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق(∠جـ أ ء) = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠°

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ جـ أ ء) = ٣٠°

مُحيطيتان مشتركتان في القوس جـ ء

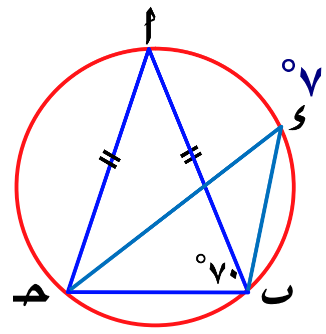
==========================

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠°

، ق (∠ء) = ٥ ع − ١٠°

أوجد قيمة ع



البرهان

∵ أ ب = أ جـ

ق (∠أ جـ ب) = ق (∠أ ب جـ) = ٧٠°

∴ ق (∠أ) = ١٨٠ـ(٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

∴ ق (∠ء) = ق (∠أ) = ٤٠°

٥ ع − ١٠° = ٤٠°

٥ ع = ٤٠ + ١٠ ⇐ ٥ ع = ٥٠ ÷ ٥

∴ ع = ١٠

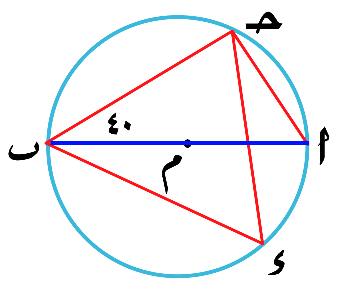
==========================

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق (∠ أ ب جـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب ء جـ)



البرهان

∵ أ ب قطر ⇐

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° محيطية في نصف دائرة

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠ـ(٩٠° + ٤٠°) = ٥٠

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ ب ء جـ)

مُحيطيتان مشتركتان في القوس ب جـ

∴ ق (∠ ب ء جـ) = ٥٠°

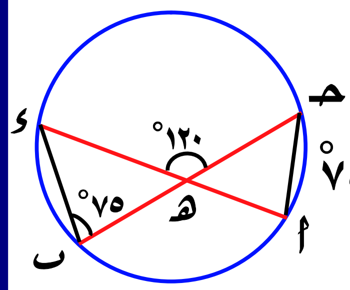
تمارين ٧

(١) فى الشكل المقابل

ب جـ ، أ ء وتران متقاطعان في هـ ،

ق (∠ جـ هـ ء) = ١٢٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥°

أوجد : ق (∠ جـ) مع البرهان



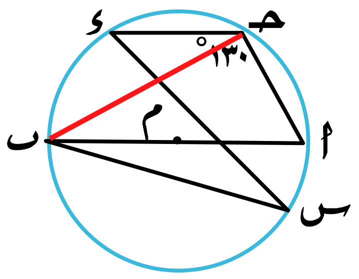
==========================

(٢) فى الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

، ق (∠ أ جـ ء) = ١٣٠°

أوجد ق (∠ ء س ب)



==========================

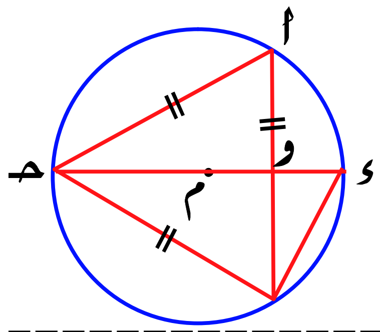
(٣) فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ متساوي الأضلاع

مرسوم داخل دائرة م

① **أوجد** ق (∠ جـ ء ب)

② **أثبت أن** أ ب ⊥ ء جـ



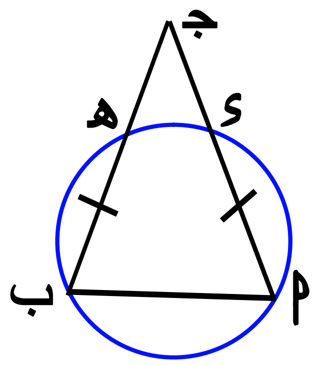
==========================

(٤) فى الشكل المقابل

أ ء = ب هـ

اثبت ان

جـ ء = جـ هـ



==========================

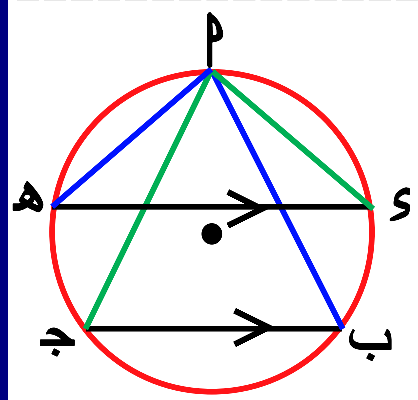
(٥) فى الشكل المقابل

أب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، ء هـ // ب جـ

أثبت أن

ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ب أ هـ)



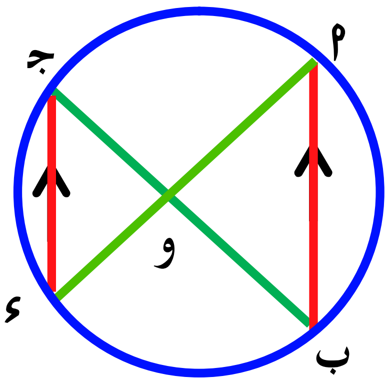
==========================

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة

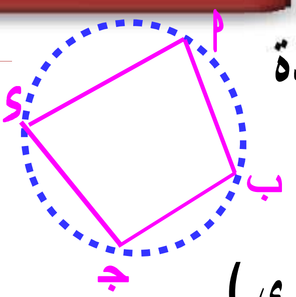
أ ثبت أن:

أ و = و ب



الشكل الرباعى الدائرى

هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة أو يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الاربعة

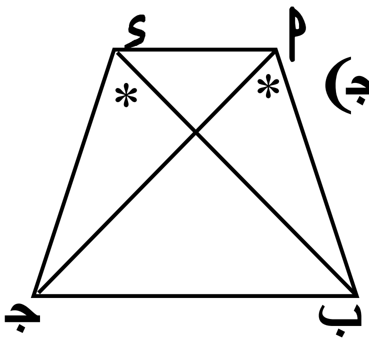


الشكل الرباعي أ ب جـ ى (رباعى دائرى)

عكس نظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل



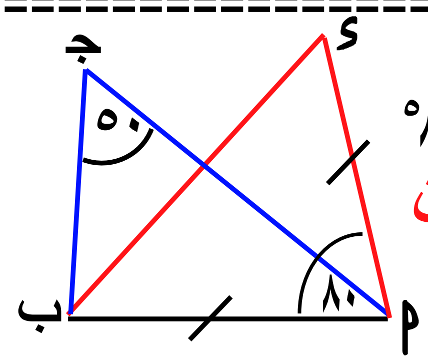
إذا كان ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ى جـ)
المرسومتان على القاعدة ب جـ
∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى

ملاحظة
إذا كان ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° كان ب جـ قطر فى الدائرة

ملاحظات

١ المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية
٢ متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية

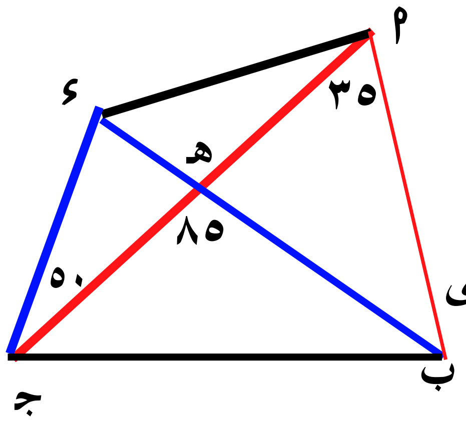
(١) فى الشكل المقابل



أب = أى ، ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠جـ) = ٥٠° أثبت أن
أ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة

البرهان
∵ أب = أى
∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠أ ب ى) = (١٨٠ − ٨٠) ÷ ٢ = ٥٠°
∴ ق(∠ى) = ق(∠جـ) = ٥٠°
و هما مرسومتان على أب
∴ أ ، ب ، جـ ، ى تمر بها دائرة واحدة
∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى

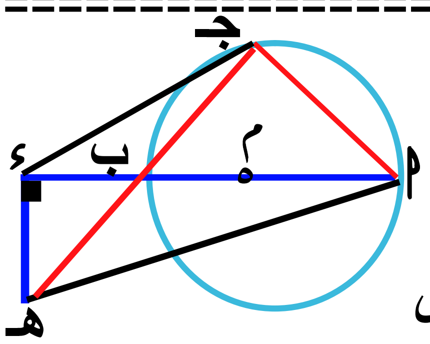
(٢) فى الشكل المقابل



أثبت أن
الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى

البرهان
∵ ∠ب هـ جـ خارجة عن △ ى هـ جـ
∴ ق(∠هـ ى جـ) = ٨٥ − ٥٠ = ٣٥°
∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب ى جـ) = ٣٥°
و هما مرسومتان على قاعدة واحدة ب جـ و فى جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى

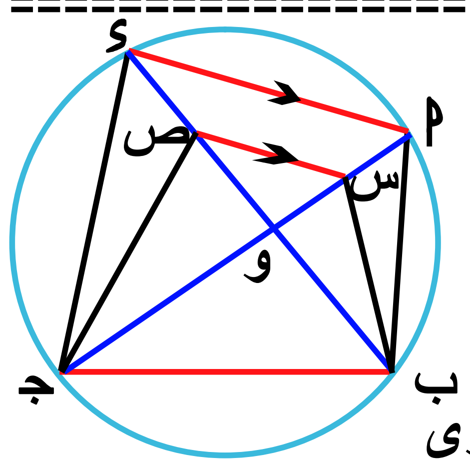
(٣) فى الشكل المقابل



أ ب قطر فى الدائرة م ، ى هـ ⊥ أ ب
إثبت أن
أ جـ ى هـ رباعى دائرى

البرهان
∵ أ ب قطر فى الدائرة م ⟸ ق(∠أ جـ هـ) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة
∵ ى هـ ⊥ أ ب ⟸ ق(∠أ ى هـ) = ٩٠°
∴ ق(∠أ جـ هـ) = ق(∠أ ى هـ) = ٩٠°
و هما مرسومتان على أ هـ
الشكل أ جـ ى هـ رباعى دائرى

(٤) فى الشكل المقابل



س ص // أ ى
أثبت أن
س ب جـ ص رباعى دائرى

البرهان
∴ أ ب جـ ى رباعى دائرى
∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠أ جـ ب) ١
مرسومتان على أ ب
∵ س ص // أ ى
∴ ق(∠أ ى ب) = ق(∠س ص ب) بالتناظر ٢
من ١ ، ٢
∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠س جـ ب)
و هما مرسومتان على س ب و فى جهة واحدة منها
∴ س ب جـ ص رباعى دائرى

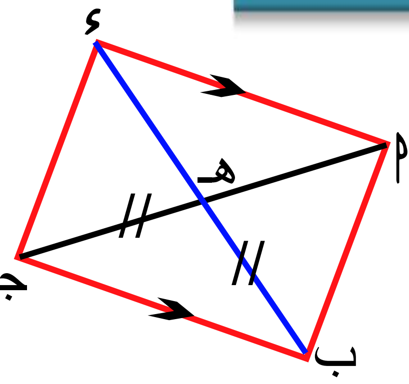
تمارين ٨

(١) فى الشكل المقابل

أ ء // ب جـ ، هـ ب = هـ جـ

إثبت أن

أ ب جـ ء رباعى دائرى



---

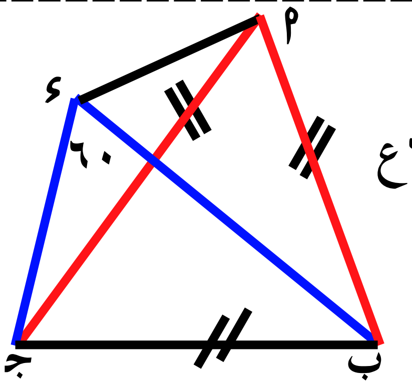
(٢) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع

، ق(∠ب ء جـ) = ٦٠°

إثبت أن

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



---

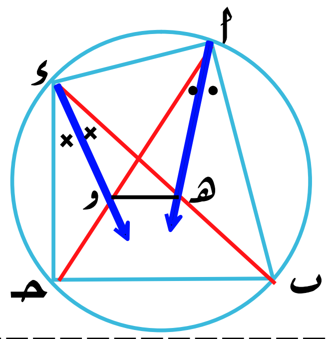
(٣) فى الشكل المقابل

أ هـ ينصف ∠ ب أ جـ ،

ء و ينصف ∠ ب ء جـ

اثبت أن :

الشكل أ هـ و ء رباعي دائري



---

(٤) فى الشكل المقابل

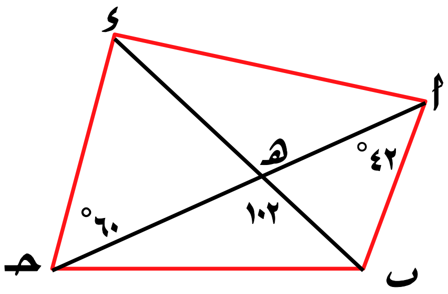
ق(∠ب أ جـ) = ٤٢°

، ق(∠أ جـ ء) = ٦٠°

، ق(∠ب هـ جـ) = ١٠٢°

اثبت أن :

أ ب جـ ء رباعي دائري



---

(٥) فى الشكل المقابل

أ جـ قطر في الدائرة م

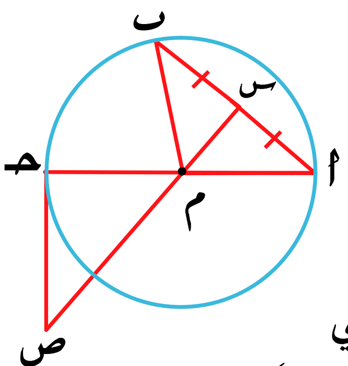
، س ص منتصف أ ب

، جـ ص مماس للدائرة

اثبت أن

(١) الشكل أ س جـ ص رباعي دائري

(٢) ق(∠ ب م جـ) = ٢ق(∠ م ص جـ)



---

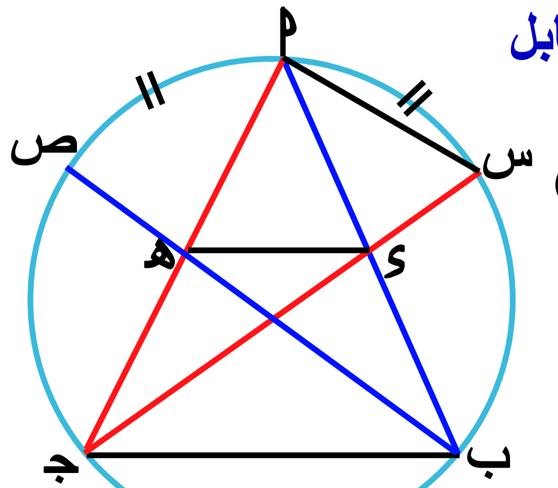
(٦) فى الشكل المقابل

ق(أ س⌒) = ق(أ ص⌒)

أثبت أن

(١) الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري

(٢) ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠س أ ب)



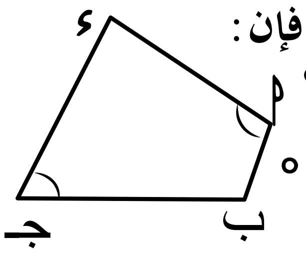
خواص الشكل الرباعى الدائرى

١) كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهما= ١٨٠°)

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى فإن:

(١) ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

(٢) ق(∠ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

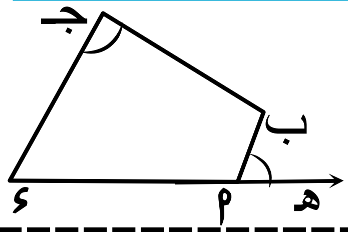


---

٢) قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ب أ هـ) = ق(∠ب جـ ء)



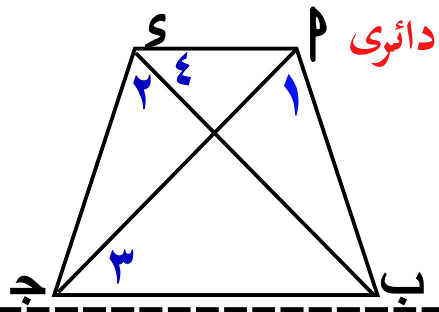
---

٣) كل زاويتين مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع متساويتان فى القياس

إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى فإن:

ق(∠١) = ق(∠٢)

ق(∠٣) = ق(∠٤)



يكون الشكل الرباعي دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

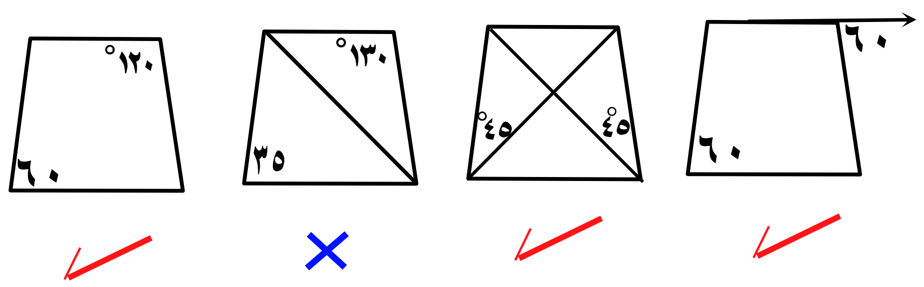
١) إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

٢) إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع

٣) إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)

٤) إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

مثـــال اي من الأشكال الآتية رباعي دائرى

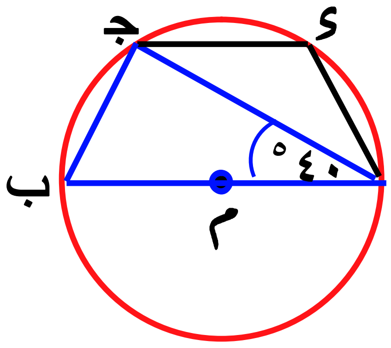


(١) فى الشكل المقابل

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

، ق(∠جـ أب) = ٤٠°

أوجد ق(∠ ء)



البرهان

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ⟸ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° محيطية فى نصف دائرة

فى Δ أبجـ

ق(∠ب) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٠) = ٥٠°

∵ أبجـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ ق(∠ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

---

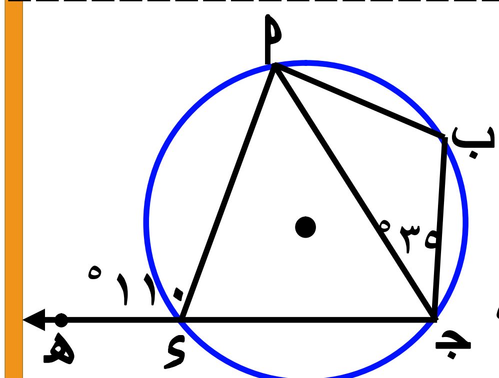
(٢) فى الشكل المقابل

أبجـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

ق(∠ أ ء هـ) = ١١٠°

، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٥°

اثبت أن Δ أبجـ متساوى الساقين



البرهان

∵ أبجـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب) = ١١٠°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

فى Δ أبجـ

∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٣٥) = ٣٥°

∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب جـ أ)

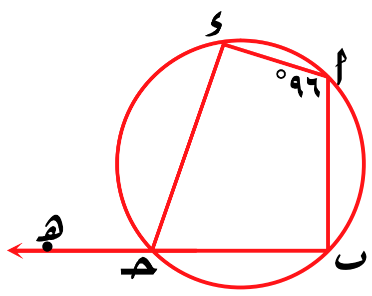
∴ Δ أبجـ متساوى الساقين

---

(٣) فى الشكل المقابل

ق(∠ ء جـ هـ) = ص − ٢٤°

أوجد : ص



البرهان

∵ أبجـ ء رباعى دائرى

ق(∠ ء جـ هـ) = ق(∠ أ)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∵ ص − ٢٤° = ٩٦°

ص = ٩٦° + ٢٤°

ص = ١٢٠°

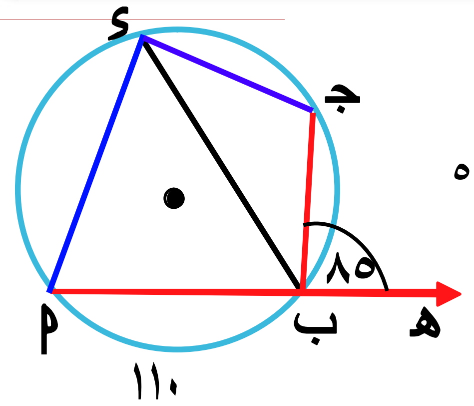
---

(٤) فى الشكل المقابل

ق(أب⌒) = ١١٠°

، ق(∠جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق(∠ ب ء جـ)



البرهان

∵ ق(∠أ ء ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌒) = ٥٥°

∵ أبجـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠ أ ء جـ) = ٨٥°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

---

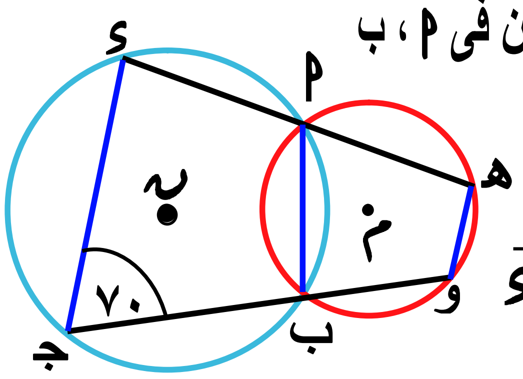
(٥) فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتين متقاطعتين فى أ ، ب

، ق(∠جـ) = ٧٠°

أوجد ق(∠و)

ثم اثبت أن $\overline{هـ و}$ // $\overline{جـ ء}$



البرهان

∵ أبجـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

∵ أ ب و هـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠ و) = ١١٠°

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

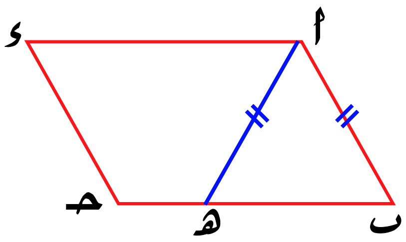
∴ ق(∠جـ) + ق(∠ و)

= ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما داخلتان فى جهة واحدة من القاطع

∴ $\overline{هـ و}$ // $\overline{جـ ء}$

(٦) فى الشكل المقابل



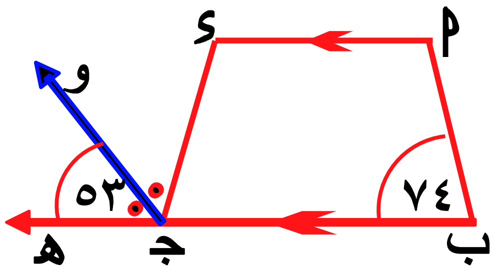
أ ب جـ ء متوازي أضلاع ،
هـ ∈ ب جـ بحيث أ ب = أ هـ
أثبت أن :
الشكل أ هـ جـ ء رباعي دائري

البرهان

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع
∴ ق(∠ب) = ق(∠ء) ①
∵ أ ب = أ هـ
∴ ق(∠ب) = ق(∠أ هـ ب) ②
من ١ ، ٢ ق(∠أ هـ ب) = ق(∠ء)
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∴ أ هـ جـ ء رباعي دائرى

=====================================

(٧) فى الشكل المقابل



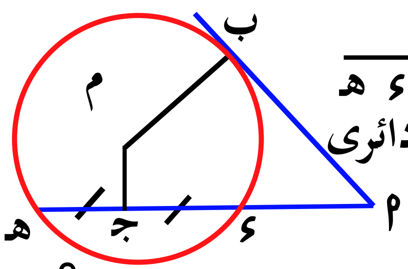
أ ء // ب جـ
ق(∠ب) = ٧٤°
ق(∠و جـ هـ) = ٥٣°
، جـ و ينصف (∠ء جـ هـ)
اثبت أن أ ب جـ ء رباعي دائرى

البرهان

∵ جـ و ينصف (∠ء جـ هـ)
∴ ق(∠ء جـ هـ) = ٥٣ × ٢ = ١٠٦° من ① ، ②
∵ أ ء // ب جـ
∴ ق(∠ء) = ق(∠ء جـ هـ) = ١٠٦° بالتبادل
∴ ق(∠ب) + ق(∠ء)
= ٧٤° + ١٠٦° = ١٨٠° متقابلتان متكاملتان
∴ أ ب جـ ء رباعي دائرى

=====================================

(٨) فى الشكل المقابل

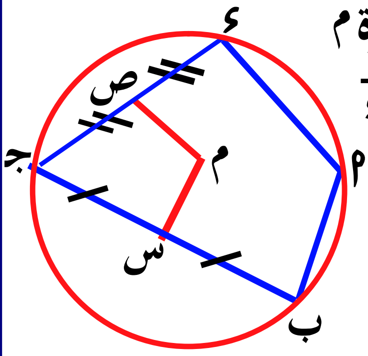


أ ب مماس للدائرة م ، جـ منتصف ء هـ
إثبت أن أ ب م جـ رباعي دائرى

البرهان

∵ أ ب مماس للدائرة م ⇐ ق(∠أ ب م) = ٩٠°
∵ جـ منتصف ء هـ ⇐ ق(∠أ جـ م) = ٩٠°
ق(∠أ ب م) + ق(∠أ جـ م) = ١٨٠°
∴ الشكل أ ب جـ م رباعي دائرى

(٩) فى الشكل المقابل



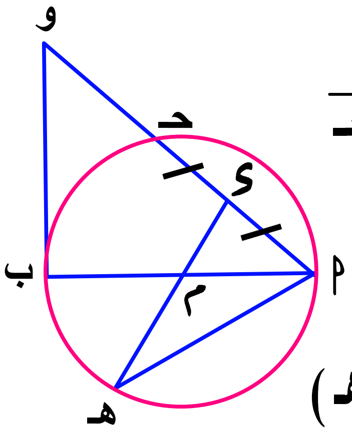
أ ب جـ ء رباعي مرسوم داخل دائرة م
س منتصف ب جـ ، ص منتصف جـ ء
إثبت أن :
① الشكل م س جـ ص رباعي دائرى
② ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)

البرهان

∵ س منتصف ب جـ ⇐ م س ⊥ ب جـ
ق(∠م س جـ) = ٩٠°
∵ ص منتصف ء جـ ⇐ م ص ⊥ ء جـ
ق(∠م ص جـ) = ٩٠°
∴ ق(∠م س جـ) + ق(∠م ص جـ) = ١٨٠°
∴ الشكل م س جـ ص رباعي دائرى
∴ ق(∠س م ص) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ⟵ ①
∵ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائرى
ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ⟵ ②
من ١ ، ٢ ق(∠س م ص) = ق(∠ب أ ء)

=====================================

(١٠) فى الشكل المقابل



أ ب قطر فى الدائرة م ، ء منتصف أ جـ
، ب و مماس للدائرة عند ب
اثبت أن
① الشكل م ء و ب رباعي دائرى
② ق(∠و) = ٢ق(∠ب أ هـ)

البرهان

∵ ء منتصف أ جـ ⇐ ق(∠م ء و) = ٩٠°
∵ أ ب قطر فى الدائرة ، ب و مماس للدائرة
∴ ق(∠م ب و) = ٩٠°
∴ ق(∠م ب و) + ق(∠م ء و) = ١٨٠°
متقابلتان متكاملتان
∴ الشكل م ء و ب رباعي دائرى
∴ ق(∠ب م هـ) = ق(∠و)
(الخارجة = المقابلة للمجاورة)
∴ ق(∠ب م هـ) المركزية = ٢ق(∠ب أ هـ) المحيطية
∴ ق(∠و) = ٢ق(∠ب أ هـ)

تمارين ٩

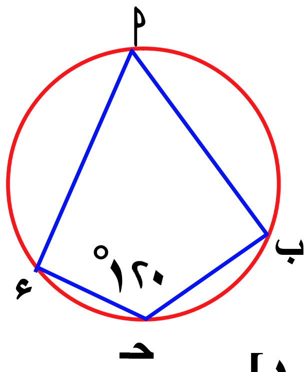
أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين . . . .
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

٢) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها
[متكاملتان ؛ متتامتان ؛ متساويتان فى القياس ؛ متبادلتان]

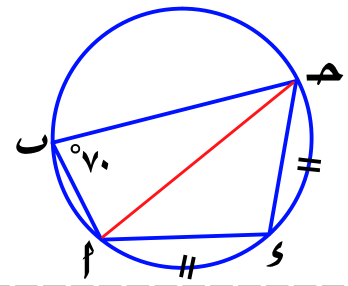
٣) . . . . شكل رباعى دائرى [شبه المنحرف ؛ المعين ؛ متوازى الأضلاع ؛ المستطيل]

٤) فى الشكل المقابل :



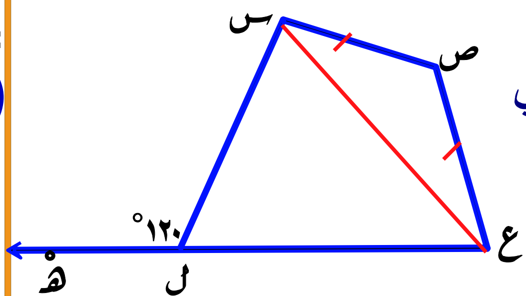
ق (∠ م) = ... °
[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]
، ق (م⌒جـ) = ... °
[٢٤٠ ؛ ٦٠ ؛ ١٢٠ ؛ ١٨٠]

(٢) فى الشكل المقابل



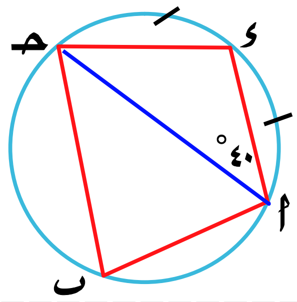
ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠° ،
طول (أ⌒ء) = طول (ء⌒جـ)
أوجد : ق (∠ أ جـ ء)

(٣) فى الشكل المقابل



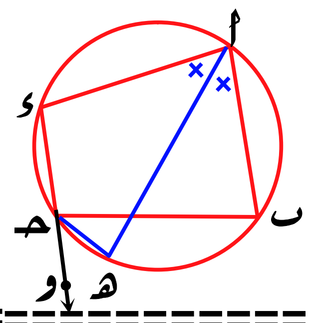
س ص ع ل رباعى دائرى
س ص = ص ع
، ق (∠ س ل هـ) = ١٢٠°
أوجد : ق (∠ س ص ع)

(٤) فى الشكل المقابل



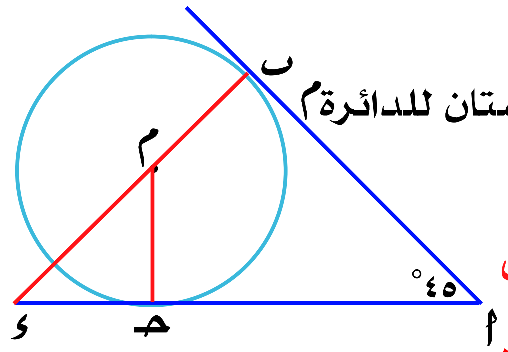
ق (أ⌒ء) = ق (ء⌒جـ)
، ق (∠ ء أ جـ) = ٤٠°
أوجد ق (∠ ء)
، ق (∠ أ ب جـ)

(٥) فى الشكل المقابل



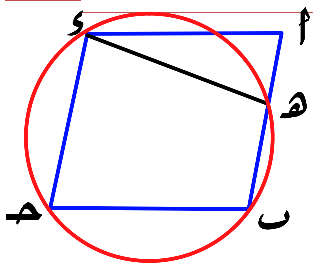
الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى
، و ∈ ء جـ ، أ هـ ينصف ∠ ب أ ء
أثبت أن :
جـ هـ ينصف ∠ ب جـ و

(٦) فى الشكل المقابل



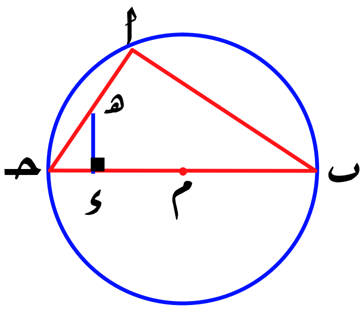
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م
ق (∠ أ) = ٤٥°
أثبت أن :
① الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى
② Δ م جـ ء متساوى الساقين

(٧) فى الشكل المقابل



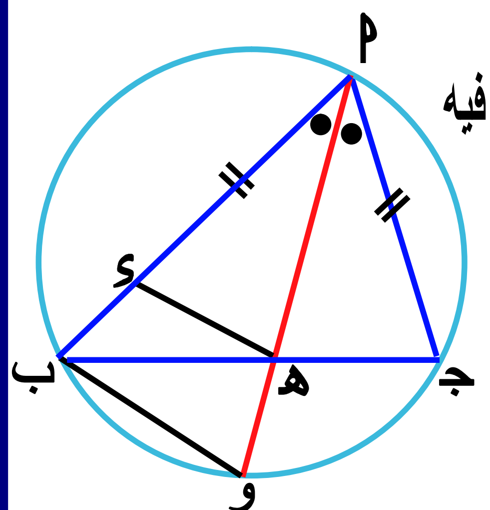
أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء تقطع أ ب فى هـ
أثبت أن : أ ء = هـ ء

(٨) فى الشكل المقابل



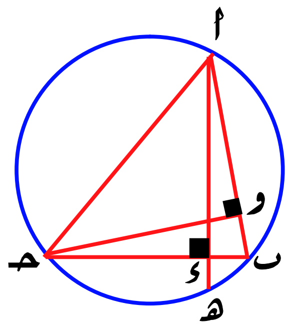
ب جـ قطر فى الدائرة م ،
هـ ء ⊥ ب جـ
أثبت أن :
ق (∠ جـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (أ⌒جـ)

(٩) فى الشكل المقابل



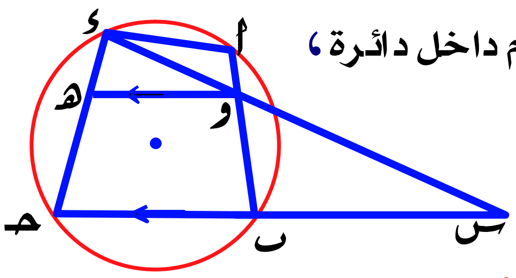
م ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه
م ب > م جـ ، م جـ = م ء ،
م هـ ينصف (∠ م)
اثبت أن
ب ء هـ و رباعى دائرى

(١٠) فى الشكل المقابل



أ ء ⊥ ب جـ يقطعها فى ء
ويقطع الدائرة فى هـ ، جـ و ⊥ أ ب
أثبت أن :
① الشكل أ و ء جـ رباعى دائرى
② ق (∠ هـ ب جـ) = ق (∠ ء و جـ)

(١١) فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ،
و هـ // ب جـ
ء و ∩ جـ ب = { س }
اثبت أن :
① الشكل أ و هـ ء رباعي دائري
② ق (∠ ب س و) = ق (∠ هـ أ ء)

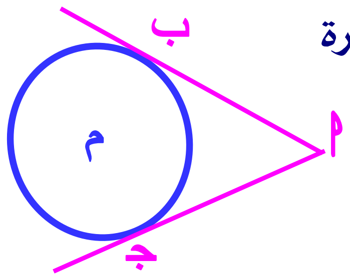
(١٢) أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

تقاطع قطراه أ جـ ، ب ء في و ،
س ∈ أ و ، ص ∈ ء و بحيث س ص // أ ء
اثبت أن
الشكل س ب جـ ص رباعي دائري

العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية ٤

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول

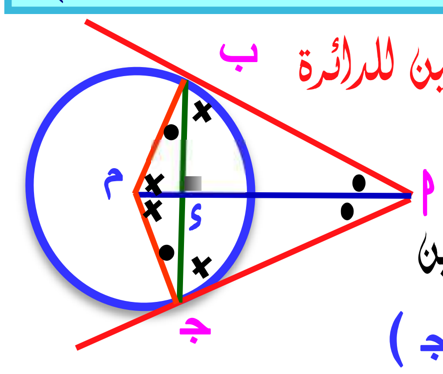


∵ أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ

نتائج هامة

المستقيم المار بمركز الدائرة و نقطة تقاطع مماسين
① ينصف الزاوية بين هذين المماسين
② ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس
③ ينصف وتر التماس لهذين المماسين و يكون عمودياً عليه
(اى يكون محور تماثل لوتر التماس)



① أ م ينصف الزاوية بين المماسين للدائرة

ق(ب أ̂ م) = ق(حـ أ̂ م)

② أ م ينصف الزاوية بين نصفى القطرين

ق(أ م̂ ب) = ق(أ م̂ حـ)

③ أ م ينصف وتر التماس ب حـ ويكون عموديا علية

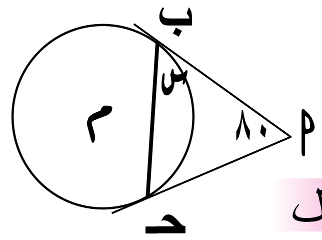
ب ء = حـ ء ، أ م ⊥ ب حـ

④ الشكل أ ب م حـ يكون رباعي دائرى

مثـــال أوجد قيمة س بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتية:

حيث أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة م

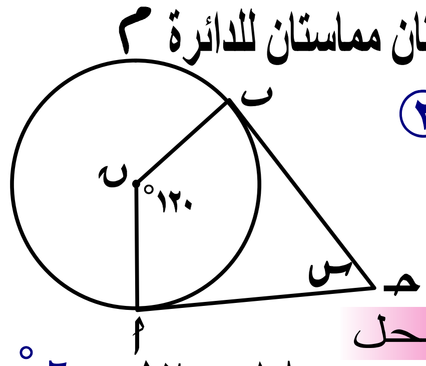
①



الحل

$س = \frac{180 - 80}{2} = 50$

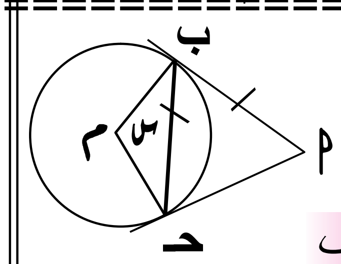
②



الحل

س = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

③



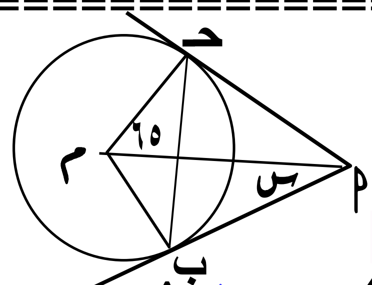
الحل

Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

ق(∠أ) = ٦٠

س = ١٢٠°

④



الحل

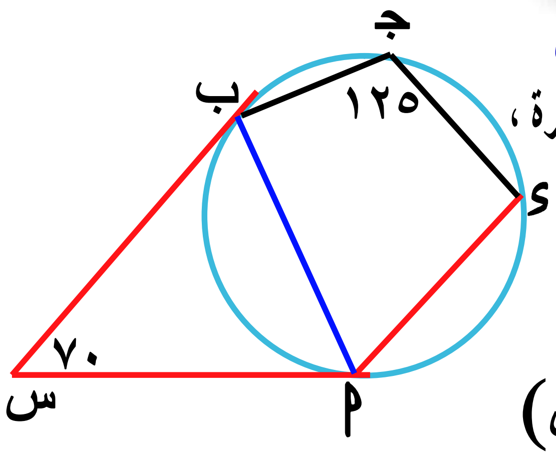
ق(ب م̂ أ) = ق(حـ م̂ أ) = ٦٥

ق(م ب̂ أ) = ٩٠

س = ٢٥°

---

(١) فى الشكل المقابل



$\overline{س أ}$ ، $\overline{س ب}$ مماستان للدائرة ، ق(∠س) = ٧٠° ، ق(∠حـ) = ١٢٥°

اثبت أن

$\overline{أ ب}$ ينصف (∠ء أ س) ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{س ب}$

البرهان

∵ $\overline{س أ}$ ، $\overline{س ب}$ مماستان للدائرة

∴ س أ = س ب

∴ ق(∠س ب أ) = ق(∠س أ ب) = $\frac{180 - 70}{2}$ = ٥٥°

∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ء أ ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ء أ ب) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥°

∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠ء أ ب) = ٥٥°

∴ $\overline{أ ب}$ ينصف (∠ء أ س)

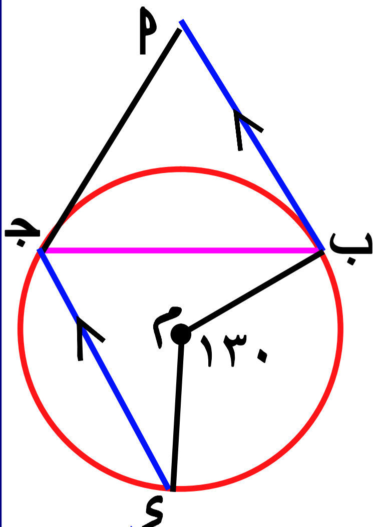
∵ ق(∠س ب أ) = ق(∠ء أ ب) = ٥٥°

و هما فى وضع تبادل

∴ $\overline{أ ء}$ // $\overline{س ب}$

---

(٢) فى الشكل المقابل



$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ مماستان للدائرة ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق(∠ب م ء) = ١٣٠°

① اثبت أن $\overline{حـ ب}$ ينصف (∠أ حـ ء)

② أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ ق(∠ب حـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م ء) المركزية

ق(∠ب حـ ء) = ٦٥°

∵ أ ب // ء حـ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠ب حـ ء) = ٦٥° بالتبادل

∵ أ ب ، أ حـ مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ حـ ⟸ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = ٦٥

∵ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠ب حـ ء) ⟸ حـ ب ينصف (∠أ حـ ء)

فى Δ أ ب حـ

ق(∠أ) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ملاحظات

عدد المماسات المشتركة لدائرتين :

- متباعدتين = ٤
- متماستين من الخارج = ٣
- متماستين من الداخل = ١
- متقاطعتين = ٢
- متداخلتين = صفر

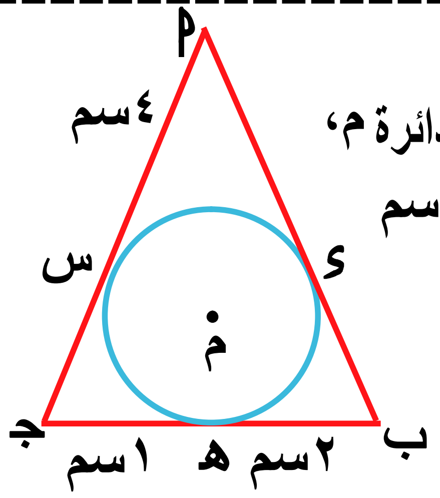
==============================

تعريف الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

==============================

(٣) فى الشكل المقابل



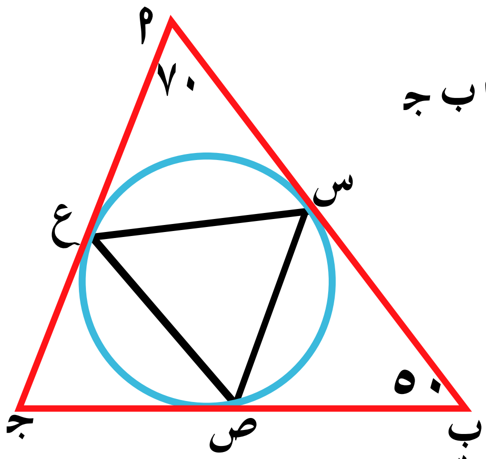
أب ، أجـ ، ب جـ مماسات للدائرة م،
أ س = ٤ سم ، ب هـ = ٢ سم
، هـ جـ = ١ سم
أوجد محيط △أ ب جـ

البرهان

∵ أ ء ، أ س مماسان للدائرة ⟸ أ ء = أ س = ٤سم
∵ ب ء ، ب هـ مماسان للدائرة ⟸ ب ء = ب هـ = ٢سم
∵ جـ هـ ، جـ س مماسان للدائرة ⟸ جـ هـ = جـ س = ١ سم
∴ محيط △أ ب جـ = ٤+٤+٢+٢+١+١ = ١٤ سم

==============================

(٤) فى الشكل المقابل



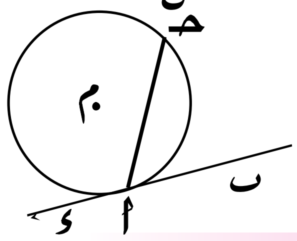
دائرة م مرسومة داخل △ أ ب جـ
ق(∠أ) = ٧٠°
، ق(∠ب) = ٥٠°
أوجد ق(∠ص س ع)

البرهان

∵ ب س ، ب ص مماسان للدائرة ⟸ ب س = ب ص
∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠ب ص س) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°
∵ أ س ، أ ع مماسان للدائرة ⟸ أ س = أ ع
∴ ق(∠أ س ع) = ق(∠أ ع س) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°
∴ ق(∠ص س ع) = ١٨٠ − (٦٥ + ٥٥) = ٦٠°

الزاوية المماسية

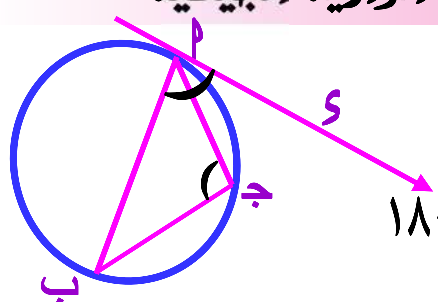
هى الزاوية المكونة من أتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والأخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس



∠ب أ جـ زاوية مماسية تقابل (أجـ)

ملاحظات هامة

١) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها
٢) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس
٣) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس
٤) **الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية التى تقع فى نفس الجهة التى تقع فيها الزاوية المحيطية**

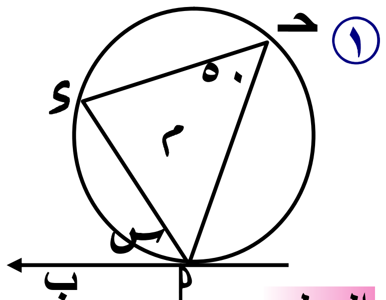


∠ء أ ب تكمل ∠جـ
أى أن
ق(∠ء أ ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠

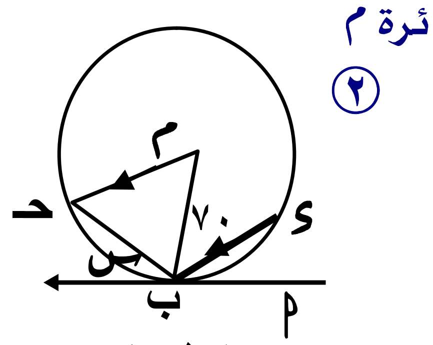
==============================

مثـــال أوجد قيمة س بالدرجات

حيث أب مماس للدائرة م



الحل
س = ٥٠°



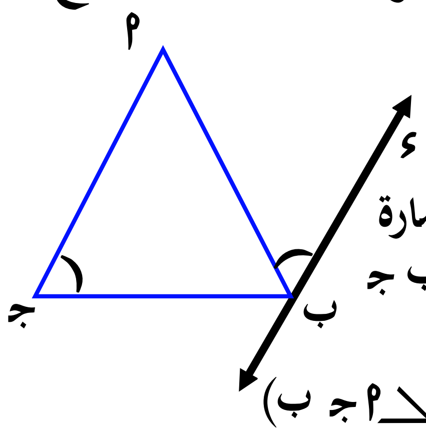
الحل ق(∠م) = ٧٠°
س = ٣٥°

==============================

عكس نظرية

إذا رسم من إحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتريساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الاخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسا للدائرة

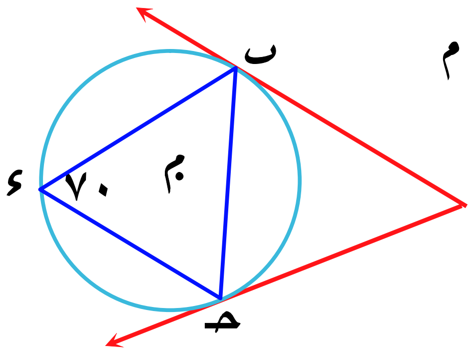
معنى النظرية



لأثبات ان ب ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

نثبت ان ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ جـ ب)

(١) فى الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ

ق(∠ب ء جـ) = ٧٠°

أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ أ ب مماس

∴ ق(∠أ جـ ب)المماسية = ق(∠ب ء جـ)المحيطية = ٧٠°

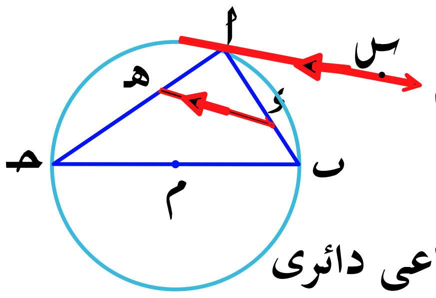
∵ أ ب ، أ جـ مماسان ⟸ أ ب = أ جـ

ق(∠أ جـ ب) = ق(∠أ ب جـ) = ٧٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

---

(٢) فى الشكل المقابل



أ س مماس للدائرة عند أ

ء هـ // أ س

أثبت أن الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

البرهان

∵ أ س مماس

∴ ق(∠س أ ب)المماسية = ق(∠جـ)المحيطية (١)

∵ أ س // ء هـ

∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠أ ء هـ) بالتبادل (٢)

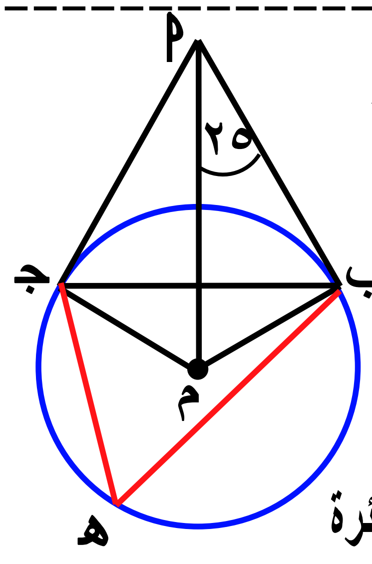
من ١ ، ٢ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠جـ)

(الخارجة = المقابلة للمجاورة)

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

---

(٣) فى الشكل المقابل



أ ب ، أ جـ مماستان للدائرة

، ق(∠ب أ م) = ٢٥°

أوجد ق(∠أ جـ ب)

، ق(∠ب هـ جـ)

البرهان

∵ أ ب ، أ جـ مماستان للدائرة

∴ أ م ينصف (∠أ)

∴ (∠أ) = ٢٥ × ٢ = ٥٠°

∴ أ ب = أ جـ

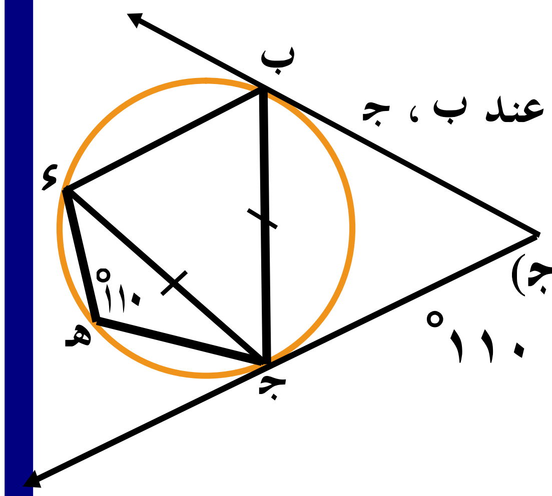
∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = ٦٥°

∴ ق(∠ب هـ جـ)المحيطية = ق(∠أ ب جـ) المماسية

∴ ق(∠ب هـ جـ) = ٦٥°

---

(٤) فى الشكل المقابل



ب أ ، أ جـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

، جـ ب = جـ ء

أثبت أن :

ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب جـ)

وإذا كان ق(∠جـ هـ ء) = ١١٠°

فأوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ أ ب مماس ⟸ ق(∠أ ب جـ)المماسية = ق(∠ب ء جـ)المحيطية

∵ جـ ب = جـ ء ⟸ ق(∠ء ب جـ) = ق(∠جـ ء ب)

∵ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠ء ب جـ)

∵ الشكل ب جـ هـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠جـ ب ء) = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

∵ أ ب ، أ جـ مماسان ⟸ أ ب = أ جـ

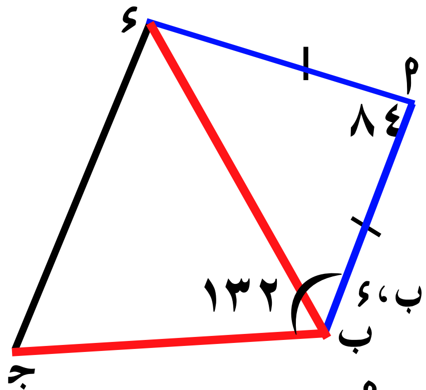
ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٧٠°

فى △ أ ب جـ

ق(∠أ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٧٠) = ٤٠°

---

(٥) فى الشكل المقابل



أ ب = أ ء ، ق(∠أ) = ٨٤°

ق(∠أ ب جـ) = ١٣٢°

أثبت أن :

ب جـ مماس لدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

البرهان

فى △ أ ب ء : ∵ أ ب = أ ء

∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = $\frac{١٨٠ - ٨٤}{٢}$ = ٤٨°

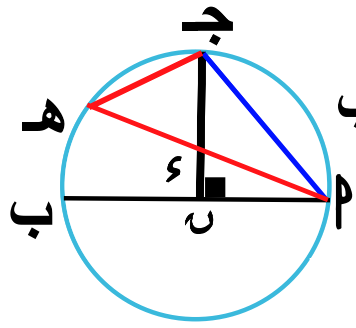
∴ ق(∠ء ب جـ) = ١٣٢ − ٤٨ = ٨٤°

∴ ق(∠ء ب جـ) = ق(∠أ)

∴ ب جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

---

(٦) فى الشكل المقابل



أ ب قطر فى الدائرة ن ، جـ ن ⊥ أ ب

أثبت أن : أ جـ مماس لدائرة المارة برؤوس △ جـ هـ ء

البرهان

∵ أ ن = جـ ن = نق

∴ ق(∠ن أ جـ) = ق(∠أ جـ ن) = ٤٥°

∵ ق(⌒أ هـ) = ق(∠أ ن جـ)المركزية = ٩٠°

∵ ق(∠أ هـ جـ)المحيطية = ½ ق(⌒أ هـ) = ٤٥°

∴ ق(∠أ جـ ن) = ق(∠أ هـ جـ) = ٤٥°

∴ أ جـ مماس لدائرة المارة برؤوس △ جـ هـ ء

تمارين ١٠

١ – أكمل ما يأتى :

(١) الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى . . . . .

(٢) قياس الزاوية المماسية = ... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

(٣) قياس الزاوية المماسية = ... قياس القوس المحصور بين ضلعيها

(٤) قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية . . . .

(٥) مركز الدائرة الداخلة ي مثلث هي نقطة تقاطع ....

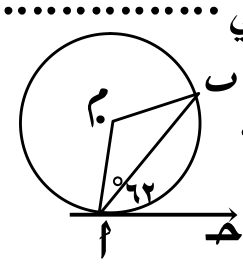
(٦) عدد المماسات المشتركة لدائرتان متباعدتان هو ....

(٧) القطعتان المماستان لدائرة من نقطة خارجها تكونان ....

(٨) عدد المماسات المرسومة لدائرة من نقطة خارجها = ...

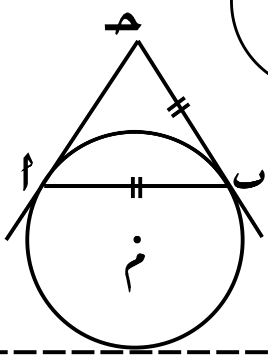
(٩) منصفات الزوايا الداخلة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي ....

(١٠) في الشكل المقابل :



ق (∠ أ م ب) = ...

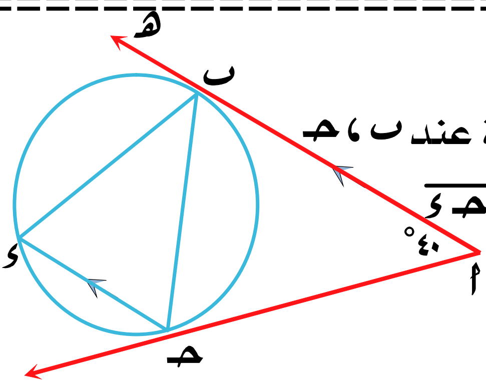
(١١) في الشكل المقابل :



ب‍ـه ، ‍ـه أ مماستان للدائرة م ،

ب‍ـه = ب أ فإن ق (∠ ‍ـه) = ...

(٢) فى الشكل المقابل



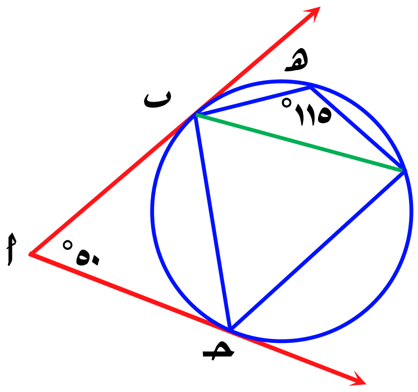
أ ب ، أ ‍ـه مماسان للدائرة عند ب ، ‍ـه ،

ق (∠ أ) = ٤٠° ، أ ب // ‍ـه ء

(١) اثبت أن : ب‍ـه = ب ء

(٢) أوجد : ق (∠ ‍ـه ب ء)

(٣) فى الشكل المقابل



أ ب ، أ ‍ـه مماستان للدائرة

ق (∠ أ) = ٥٠°

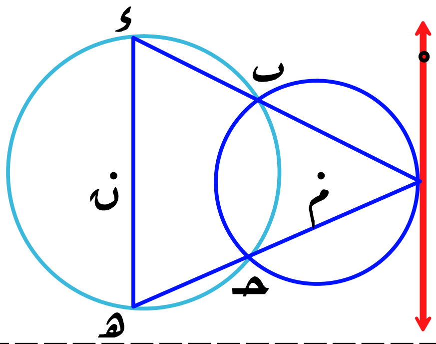
، ق (∠ ه) = ١١٥°

اثبت أن :

ب‍ـه ينصف (∠ ء ‍ـه أ)

، أ ب // ‍ـه ء

(٤) فى الشكل المقابل

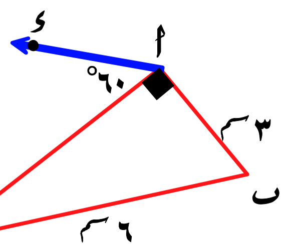


دائرتان متقاطعتان في ب ، ‍ـه

أ و مماس للدائرة م

اثبت أن أ و // ء ه

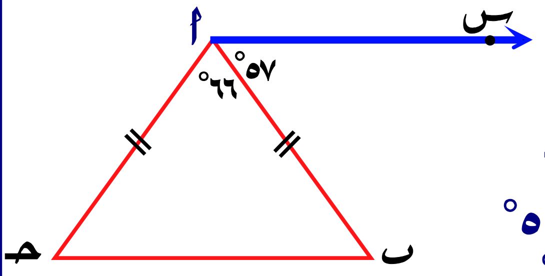
(٥) فى الشكل المقابل



أثبت أن : أ ب ⊥ أ ‍ـه

أ ء مماساً للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ‍ـه

(٦) فى الشكل المقابل



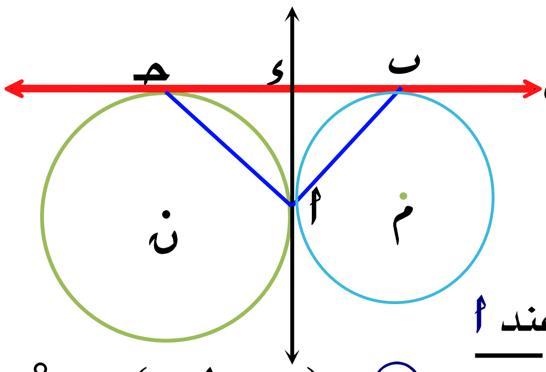
أ ب ‍ـه △ فيه أ ب = أ ‍ـه

، ق (∠ ب أ ‍ـه) = ٦٦°

، ق (∠ س أ ب) = ٥٧°

أثبت أن : أ س مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ‍ـه

(٧) فى الشكل المقابل



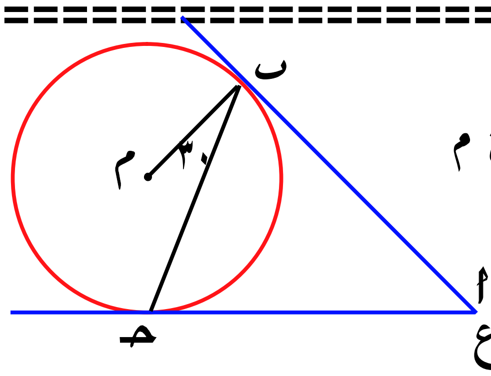
الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ،

ب ‍ـه مماس مشترك للدائرتان عند ب ، ‍ـه ،

أ ء مماس مشترك لهما عند أ

اثبت أن: (١) ء منتصف ب ج (٢) ق (∠ ب أ ‍ـه) = ٩٠°

(٨) فى الشكل المقابل



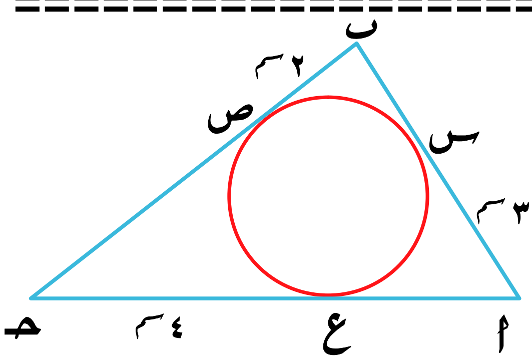
أب ، أج مماستان للدائرة م

ق (∠ م ب ج) = ٣٠°

إثبت أن

△ أ ب ج متساوى الاضلاع

(٩) فى الشكل المقابل



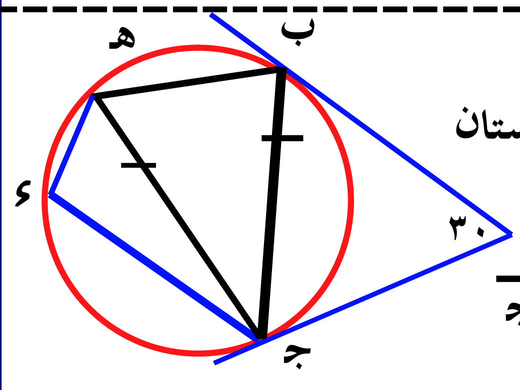
أ ب ‍ـه مثلث مرسوم خارج دائرة تمس أضلاعه في س ، ص ، ع

أ س = ٣ سم ،

ب ص = ٢ سم ، ‍ـه ع = ٤ سم

أوجد محيط المثلث أ ب ‍ـه

(١٠) فى الشكل المقابل



أب ، أج قطعتان مماستان

ق (∠ أ) = ٣٠°

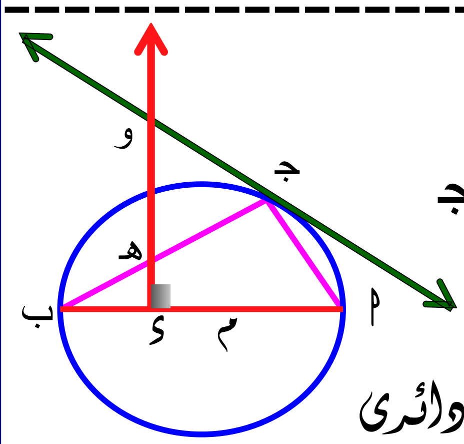
، ج ب = ج ه

(أ) إثبت أن : ب ه // أ ج

(ب) أوجد ق (∠ ج ء ه)

(ج) إثبت أن : ج ه مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ج

(١١) فى الشكل المقابل



أ ب قطر في الدائرة م

، ج و مماس للدائرة عند ج

ء ه ⊥ أ ب

أثبت أن :

(١) الشكل أ ء ه ج رباعي دائرى

(٢) و ه = و ج