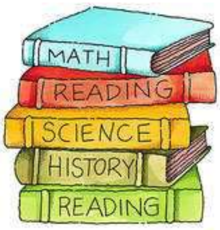
تســاوى زوجين مـرتبيـن

قــاعـدة هــامــة :

إذا كان : (ٱ ، ب) = (س ، ص) فـإن : ٱ = س ، ب = ص



س / أكمل مــا يـأتى :-

(١) إذا كـان : (ٱ ، ب) = (-٥ ، ٩) فـإن : ٱ = ... ، ب = ...

(٢) إذا كـان : (س - ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فـإن : √(س + ٢ ص) = ...

(٣) إذا كـان : (ٱ - ٧ ، ٢٦) = (-٢ ، ب³ - ١) فـإن : ٱ = ... ، ب = ...

(٤) إذا كـان : (٢^س ، ص³) = (١/٨ ، ٨) فـإن : (س ، ص) = ...

حـاصل الضـرب الـديكــارتـى

مثال ١ إذا كـانت : س = { ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجــد :

(١) س × ص ومثله بمخطط سهمى وآخر بيانى . (٢) ن (س × ص)

(٣) ن (ص²) (٤) (س × ص) ∩ ص²

الحــل

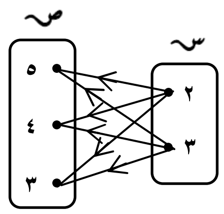
(١) س × ص = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) }

(٢) ن (س × ص) = ٢ × ٣ = ٦

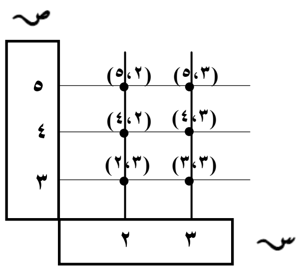
(٣) ن (ص²) = ٣ × ٣ = ٩

(٤) ص² = { (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ،
(٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ،
(٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

∴ (س × ص) ∩ ص² =
{ (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) }



المخطط السهمى



المخطط البيانى

لاحظ

ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص)

حـاصل الضـرب الـديكــارتـى للمجمـوعـات غير المنتهيـة والتمثيـل البيـانـى لـه

س / أكمل الجدول الآتى :

النقطـــة	(٤ ، ٥)	(-٢ ، ١)	(-٣ ، -٤)	(٠ ، -٣)	(٧ ، ٠)	(٤ ، -١)
الربع أو المحور	....	....	....	....	....	....

١- إذا كانت **النقطة** تقع على محور **السينات** ⇐ نضع الإحداثى **الصادى** = صفر

٢- إذا كانت **النقطة** تقع على محور **الصادات** ⇐ نضع الإحـداثى **السينى** = صفر

تمــارين متنوعة : (١) أكمل مـا يـأتى :

١- إذا كان : ن (س²) = ٢٥ فإن : ن (س) = ...

٢- إذا كان : س × ص = { (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩) }
فإن : س = ... ، ص = ...

٣- إذا كانت النقطة (٥ ، ٱ - ٤) تقع على محور السينات فإن : ٱ = ...

٤- إذا كـان : (٣ ، ٥) ∋ { ٣ ، ٦ } × { ٱ ، ٨ } فـإن : ٱ = ...

٥- إذا كـان : ن (س) = ٥ ، ن (س × ص) = ١٥ فإن : ن (ص) = ...

(٢) إذا كان : س × ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) } أوجــد :

(١) س ، ص (٢) ص × س (٣) ص²

الحــل

(١) س = ، ص =

(٢) ص × س =

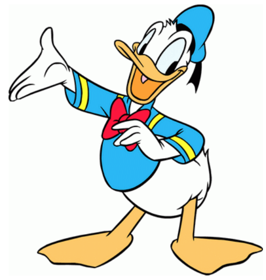
(٣) ص² =

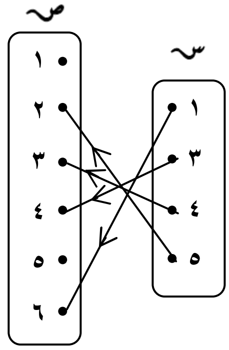
العـلاقــات

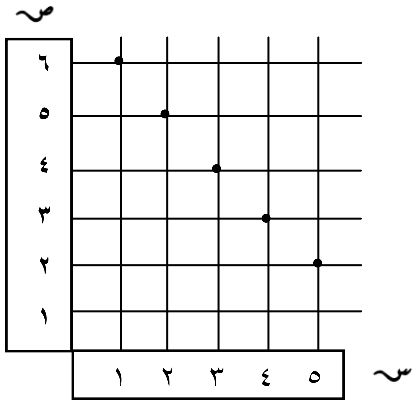
مثال ١ **إذا كـانت : س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكـانت ع علاقة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى " أ + ب = ٧ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص**
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى .

الحـل

بيان ع = { (١ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }







الـدالـة (التطبيـق)

يقال لعـلاقة من س إلى ص أنها دالة إذا كـان :

١- كـل **عنصر** من عناصر س يخرج منه **سهم واحد فقط** ⟸ ذلك فى المخطط **السهمى**

٢- كـل **خط رأسى** تقع عليه **نقطة واحدة فقط** ⟸ ذلك فى المخطط **البيانى**

مثال ٢ **إذا كـانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكـانت ع علاقة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى " أ = $\frac{١}{٣}$ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص**
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . بين أن ع دالة واكتب مـداها .

الحـل

بيان ع = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩) }

ع دالة لأن : كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى ص

مـدى الدالة = { ٣ ، ٦ ، ٩ }

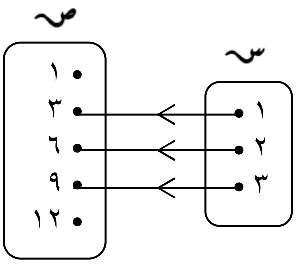
لاحظ أن :

١- المدى هو مجموعة صور س فى ص

٢- المجـال = المجموعـة س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

٣- المجال المقابل = المجموعة ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ }

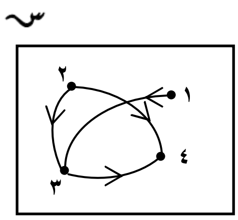
٤- مدى الدالة مجموعة جزئية من المجال المقابل .



المخطط السهمى

مثال ٣ **المخطط السهمى المقابل يبين عـلاقة على س حيث س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }**
اكتب بيان ع وبين مع ذكر السبب مـا إذا كـانت ع تمثل الدالة أم لا .

الحـل



بيان ع = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) }

ع لا تمثل دالة

لأن : العنصر ٢ خرج منه سهمان فقط

مثال ٤ إذا كـانت : س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٤ ، ٩ ، ٢٥ } وكـانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٢ ع ب " تعنى " ٢ = $\sqrt{ب}$ " لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

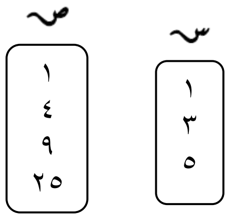
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . بين أن ع دالة واكتب مـداها .

الحـل

بيان ع = ...

ع تمثل دالة لأن : ....

مدى الدالة ع = ...



المخطط السهمى

مثال ٥ إذا كـانت : س = { -٢ ، ٢ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٧ ، ل } وكـانت ع دالـة من س إلى ص حيث " ٢ ع ب " تعنى " ب = ٢^2 - ١ " لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

أوجـد قيمــة ل ثم مثل العلاقة ع بمخطط سهمى

الحـل

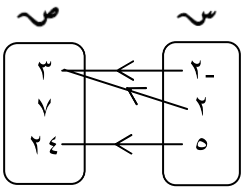
∵ ع دالـة من س إلى ص

∴ كل عنصر فى س له صورة واحدة فقط فى ص

-٢ صورتها ٣ ، ٢ صورتها ٣

∴ ٥ صورتها = ٥^2 - ١ = ٢٥ - ١ = ٢٤

∴ ل = ٢٤



المخطط السهمى

دوال كثيـرات الحــدود

الـدالة : د(س) = ٢. + ٢$_1$ س + ٢$_2$ س^2 + ... + ٢$_ن$ س^ن

تسمى كثيرة حـــدود من الـدرجــة ن

درجــة الدالة كثيرة الحدود : هى أكبر قوة للمتغير فى الدالة أو أكبر أس فى الدالة .

مثال ١ إذا كـانت د دالـة : ع ⟵ ع فاذكـر درجـة الدالـة فى كل حالـة :

(١) د(س) = ٣ - ٢ س (الأولـى) (٢) د(س) = س^4 + ٥ س^3 - ٧ س^5 + ١ (الخامسة)

(٣) د(س) = -٥ (الصفرية) (٤) د(س) = س (٣ – س)^2 (الثـالـثـة)

مثال ٢ إذا كـانت : د(س) = ٢ س^2 - ٥ س + ٢

(١) اذكـر درجة د (٢) أثبت أن : د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$) (٣) أوجد : د (٠) - د (١)

الحـل

(١) الـدرجــة الثانيـه

(٢) د (٢) = ٢ × ٤ - ٥ × ٢ + ٢ = ٨ - ١٠ + ٢ = صفر

د ($\frac{١}{٢}$) = ٢ × $\frac{١}{٤}$ - ٥ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٥}{٢}$ + ٢ = صفر ∴ د (٢) = د ($\frac{١}{٢}$)

(٣) د (٠) = ٠ - ٠ + ٢ = ٢ ، د (١) = ٢ - ٥ + ٢ = ٤ - ٥ = -١

∴ د (٠) - د (١) = ٢ - (-١) = ٢ + ١ = ٣

مثال ٣ أى من الـدوال الآتيـة تمثل دالـة كثيـرة حـدود :

(١) د(س) = س (٣ – س^2)^2 ⇐

(٢) د(س) = ٢ س + ٥ ⇐

(٣) د(س) = س^2 - ٥ $\sqrt{س}$ + ٢ ⇐

(٤) د(س) = س (٣ + $\frac{١}{س}$) ⇐

الـدالــة الخطيـــة

الدالــة د : ح ⟵ ح حيث : د(س) = م س + ب ، م ≠ ٠ دالة خطية أو دالة من الدرجة الأولى

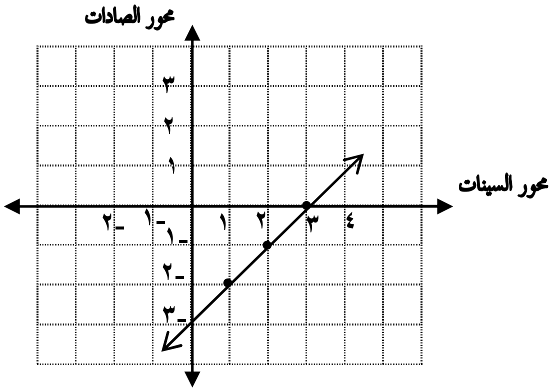
التمثيل البيانى للدالــة الخطيــة

مثال ١ إذا كـانت د : ح ⟵ ح حيث : د(س) = س - ٣

(١) مثل بيانياً الدالة د (٢) أوجد نقط تقاطع بيان الدالة مع محورى الإحداثيات

الحـــل

س	١	٢	٣
ص = د(س)	٢-	١-	٠



نقط تقاطع بيان الدالة مع محورى الإحداثيات من الرسم :

المستقيم يقطع محــور السينات فى النقطة (٣ ، ٠)

المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، - ٣)

مثال ٢ إذا كـانت د : ح ⟵ ح حيث : د(س) = ٣س - ١

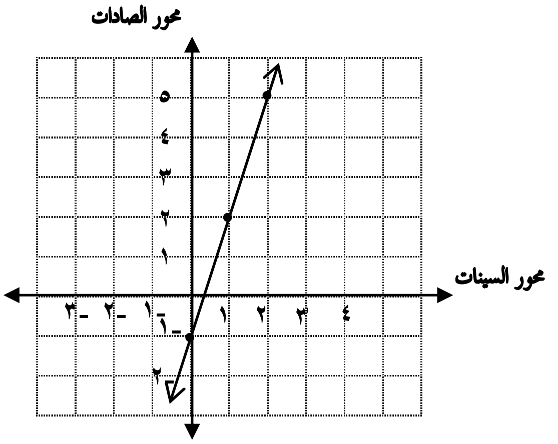
(١) مثل بيانياً الدالة د .

(٢) إذا كـان : د (م) = ٢٩ فمـا قيمــة م ؟

(٣) أوجد نقط تقاطع بيان الدالة مع محورى الإحداثيات

الحـــل

س	٠	١	٢
ص = د(س)	١-	٢	٥



∵ د (م) = ٢٩ ∴ ٣ م - ١ = ٢٩

∴ ٣ م = ٣٠ ∴ م = ١٠

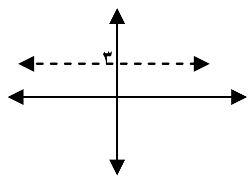
نقطة التقاطع مع محور السينات : نضع ص = ٠

∴ ٣س - ١ = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٣}$ ∴ النقطة هى ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

نقطة التقاطع مع محور الصادات : نضع س = ٠

∴ ص = ٠ - ١ = - ١ ∴ النقطة هى (٠ ، - ١)

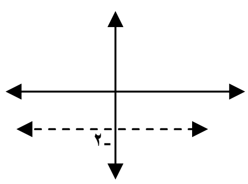
التمثيل البيانى للدالــة الثـابتــة



د(س) = ٣

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

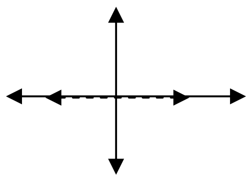
أعلى محـور السينات



د(س) = - ٢

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، - ٢)

أسفل محور السينات



د(س) = ٠

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

منطبق على محور السينات

ملاحظة هـامـة جـداً

إذا كـانت : د(س) = ٧ فإن : د (أى عدد) = ٧

أى أن : د (٠) = د (١) = د (- ٥) = د (٧) = د (- ٧) = ... = ٧

أكمل / إذا كـان : د(س) = ٢ فإن : د (٨) - د (٣) = ...

الــدالــة التــربيعيــة

الدالة د : ع ⟵ ع حيث : د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

دالة تربيعية وهى كثيرة حـدود من الدرجة الثانيه

ملاحظـات هامة

١- **إذا كانت** أ > ٠ (أ **موجبة**) ⟸ المنحنى مفتوح **لأعلى** ويوجد للدالة قيمــة **صغـرى**

٢- **إذا كانت** أ < ٠ (أ **سـالبة**) ⟸ المنحنى مفتوح **لأسفل** ويوجد للدالة قيمــة **عظمــى**

٣- لإيجـاد نقطة رأس المنحنى (س ، ص)

$$\text{الإحداثى السينى} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{٢ معامل ص}} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢ أ}} \quad ، \quad \text{الإحداثى الصادى} = \text{د}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{٢ أ}}\right)$$

التمثيـل البيـانى للـدالــة التـربيعيــة

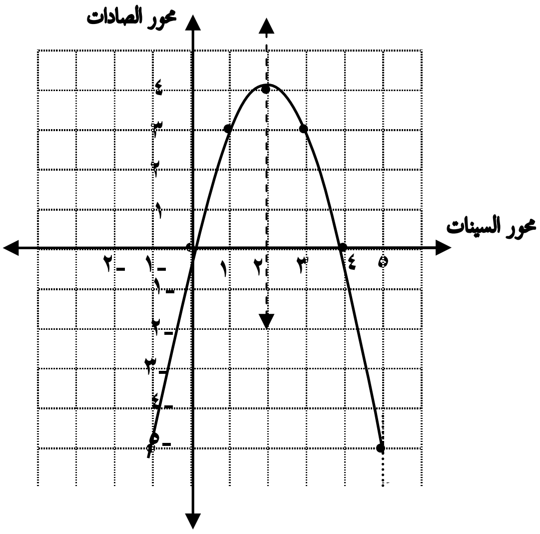
مثال ١ **مثل بيانياً الدالـة التربيعية د حيث : د(س) = ٤ س - س^{٢} متخـذاً س ∈ [-١ ، ٥]**

ثم أوجـد : (١) نقطـة رأس المنحنى . (٢) معادلة محور التماثل .

(٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة . (٤) مجموعة حل المعادلة : د(س) = ٠

الحــل

س	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	-٥	٠	٣	٤	٣	٠	-٥



من الرسم نجـد أن :

١- نقطة رأس المنحنى : (٢ ، ٤)

٢- معادلة محور التماثل : س = ٢

٣- القيمة العظمى للدالة = ٤

٤- د(س) = ٠ ∴ ٤ س - س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} - ٤ س = ٠

∴ س (س - ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٤

∴ م . ح = { ٠ ، ٤ }

ملحوظة هامة :

يمكن من الـرسم إيجاد مجموعة حل المعادلة . وضح ذلك .

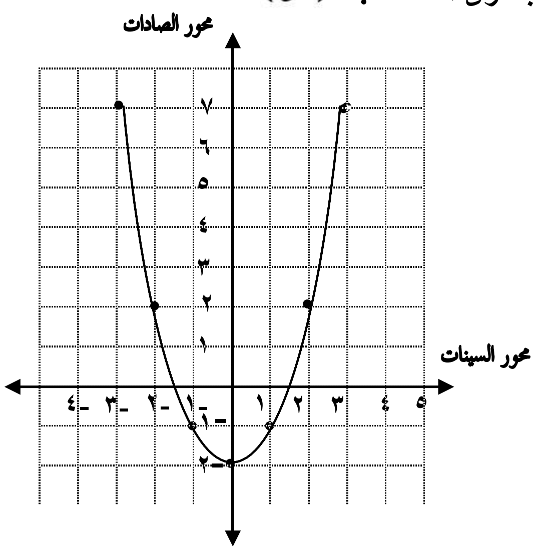
مثال ٢ **مثل بيانياً الدالـة التربيعية د حيث : د(س) = س^{٢} - ٢ متخـذاً س ∈ [-٣ ، ٣]**

ثم أوجـد : (١) نقطـة رأس المنحنى . (٢) معادلة محور التماثل .

(٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة . (٤) جـذرى المعادلة : د(س) = ٠

الحــل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٧	٢	-١	-٢	-١	٢	٧



من الرسم نجـد أن :

١- نقطة رأس المنحنى : (٠ ، -٢)

٢- معادلة محور التماثل : س = ٠

٣- القيمة الصغرى للدالة = -٢

٤- د(س) = ٠

∴ س^{٢} - ٢ = ٠

∴ س^{٢} = ٢ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

∴ س = ± $\sqrt{٢}$

∴ س ≈ ١,٤ أو -١,٤

مسـائـل متنـوعـة علـى الوحـدة الأولـى

(١) إذا كـانت : س = { ٤ ، ٦ ، ك } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ } وكـانت ع علاقة من س إلى ص حيث :
" أ ع ب " تعنى " ب = $\frac{١}{٢}$ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص .

(١) إذا كـان ك ع ٥ فـأوجـد قيمـــة ك . (٢) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . هل ع دالة أم لا ؟ وضـح .

الحـــل

---

(٢) إذا كـانت : د(س) = ٢س - ١ . أثبـت أن : د (٢) - ٣ د (١) = صفـر .

الحـــل

---

(٣) إذا كـانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ } وكـانت ع علاقـة على س حيث " أ ع ب " تعنى
" أ + ٢ ب = عـدد فـردى " لكل أ ، ب ∈ س . اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وهل ع دالة ؟ وضـح .

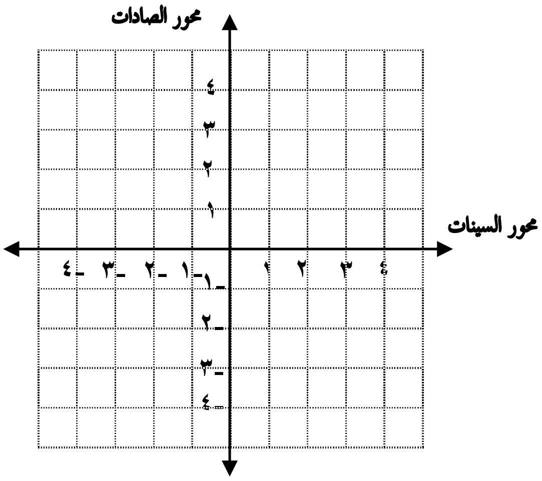
الحـــل

---

(٤) مثـل بيانياً الدالة التربيعية د حيث : د(س) = ٤ - س^{٢} متخـــذاً س ∈ [-٢ ، ٢]
ثـم أوجـد : (١) أكبر قيمـــة للـدالـة . (٢) مجموعة أصفار الـدالـــة د .
(٣) مجموعـة حل المعادلـة : د(س) + ٥ = صفـر .

الحـــل

س					
د(س)					



تمـارين عـامـة على الـوحـدة الأولـى

[أ] أكمـل مـا يـأتى : -

١- الدالة د : د(س) = ٣س^{٤} - ٢س^{٣} + س^{٥} - ٧ كثيرة حدود من الدرجة ....

٢- الدالة د : د(س) = ٧ كثيرة حدود من الدرجة ....

٣- إذا كـان : د(س) = ٣ فإن : د (٠) + د (١) + د (٢) = ...

٤- إذا كـان : د(س) = ٥ فإن : د (١٠) - د (٤) = ...

٥- إذا كـان : (٦ ، ب - ٣) = (أ - ٢ ، – ١) فـإن : أ + ب = ...

٦- إذا كـان : س = { ٥ } فـإن : س^{٢} = ...

٧- إذا كـان : ن (س^{٢}) = ٤٩ فإن : ن (س) = ...

٨- إذا كـانت : س = { ٢ ، ٣ } فـإن : س × ϕ = ...

٩- { ٢ } × { ٥ } = ...

١٠- إذا كـان : ن (س) = ٣ ، ن (س × ص) = ١٢ فإن : ن (ص) = ...

١١- الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٢س - ١ تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

١٢- الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٤س - ٨ تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

١٣- إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على المستقيم : د(س) = ٤س - ٥ فـإن : أ = ...

١٤- نقطة رأس منحنى الـدالة د : د(س) = ٢س^{٢} - ٤س + ٥ هـى ....

١٥- النقطـة (٢ ، - ٢) تقع فى الـربـع .... بينما النقطة (٠ ، ٩) تقع على ....

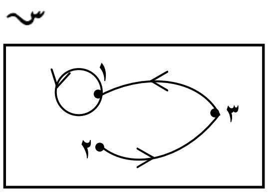
١٦- إذا كـانت : س = {٢ ، ٤ ، ٦} ، د(س) = ٢س + ٣ فإن مدى الدالة د = ...

١٧- إذا كـانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧} ، ن (ص) = ٤ ، د(س) = ٢س - ٥ فإن : ص = ...

١٨- إذا كـانت : س = {١ ، ٢ ، ٧} ، د(س) = ٣ فإن مدى الدالة د = ...

١٩- إذا كـانت : مجموعـة حل المعادلة : س^{٢} + م س + ٩ = ٠ هـى { - ٣ } فـإن : م = ...

[ب] أجـب عن الأسـئلة الآتيـة : -



[١] المخطـط السهمى الذى أمـامـك يبين العـلاقـة ع على س

(١) اكتب بيـان ع .

(٢) بين ما إذا كانت العلاقة ع تمثل دالة أم لا مـع ذكـر السبب .

(٣) إذا كـانت العـلاقـة دالـة اكتـب مـداهـا .

[٢] إذا كـانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكـانت ع عـلاقـة من س إلى ص

حيث " أ ع ب " تعنى " أ = $\frac{١}{٢}$ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . بين أن ع دالة واكتب مداها .

[٣] إذا كـانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ } وكـانت ع عـلاقـة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى

" أ = معكوس ضربى للعدد ب " لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى . بين أن ع دالة أم لا ؟

[٤] إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ن (ص) = ٥ ، د(س) = ٣س - ١

أوجـد ص ثم مثل الدالة بمخطط سهمى

[٥] مثل بيانياً الـدوال الخطية الآتية ، وأوجـد نقطتى تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محورى الإحـداثيات :

(١) د(س) = - ٣س (٢) د(س) = س + ٢ (٣) د(س) = - ٢س + ٣

[٦] مثل بيانياً كل من الـدوال الآتية فى الفتـرة المعطـاة ومـن الرسـم أوجـد رأس المنحنى ومعادلـة محـور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للـدالة ومجموعة حـل المعادلـة : د(س) = ٠

(١) د(س) = - س^{٢} + ٣ فى الفترة [- ٣ ، ٣] (٢) د(س) = س^{٢} - ٤س + ٣ فى الفترة [٠ ، ٤]

(٣) د(س) = س^{٢} + ١ فى الفترة [- ٣ ، ٣] (٤) د(س) = (س - ٣)^{٢} فى الفترة [- ١ ، ٥]

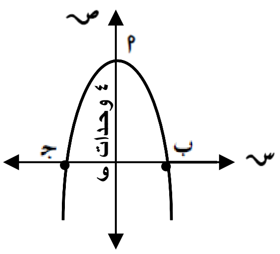
[٧] الشكل المقابل :

يمثل منحنى الدالة د : د(س) = م - س^{٢} ، فـإذا كـان : أ و = ٤ وحدات

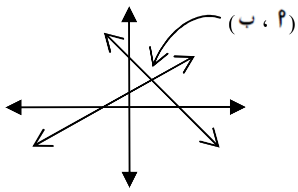
(١) أوجـد قيمـة م

(٢) أوجـد إحـداثيى ب ، جـ

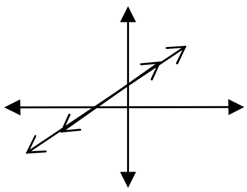
(٣) احسـب مسـاحة Δ أ ب جـ



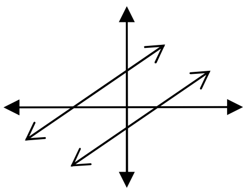
حل معادلتيـن من الـدرجـة الأولـى فى متغيرين جبريـاً وبيـانيـاً



المستقيمان متقاطعان
يوجد حل وحيد
م . ح = { (أ ، ب) }



المستقيمان منطبقان
يوجد عدد لانهائى من الحلول



المستقيمان متوازيان
عدد الحلول = ٠
م . ح = φ

مثال ١ أوجـد عدد حلول كل زوج من المعادلات الآتية :

(١) ٧س + ٤ ص - ٦ = ٠ ، ٥س - ٢ ص - ١٤ = ٠ ⟸ متقاطعان ، عدد الحلول = ١

(٢) ٩س + ٦ ص - ٢٤ = ٠ ، ٣س + ٢ ص - ٨ = ٠ ⟸ منطبقـان ، عدد الحلول = عدد لانهائى

(٣) ٤س + ٢ ص = ١٠ ، ٢س + ص = - ٥ ⟸ متوازيان ، عدد الحلول = ٠

مثال ٢ أوجـد فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين :

س - ص = ٤ ، ٣س + ٢ ص = ٧ جبريـاً وبيـانيـاً

الحـل

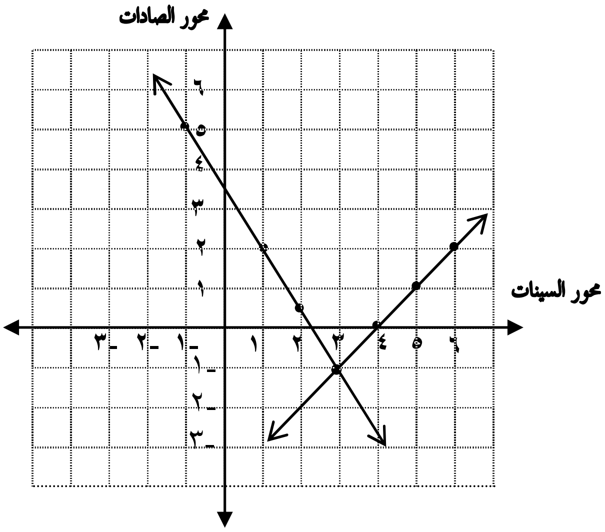
أولاً : بيـانيـاً

المستقيم : س = ص + ٤

س	٤	٥	٦
ص	٠	١	٢

المستقيم : ٣س + ٢ ص = ٧

س	-١	١	٢
ص	٥	٢	٠,٥



ومن الـرسم نجـد أن : م . ح = { (٣ ، - ١) }

ثـانيـاً : جبريـاً

∵ س - ص = ٤ بضرب هذه المعادلة فى ٢

∴ ٢س - ٢ ص = ٨ (١)

، ٣س + ٢ ص = ٧ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٥س = ١٥ ∴ س = ٣

وبالتعويض فى (١) : ٣ - ص = ٤ ∴ ص = - ١ ∴ م . ح = { (٣ ، - ١) }

مثال ٣ إذا كـانت النقطتان (٣ ، ١) ، (٥ ، ٥) تقعـان على المستقـيم : أ س + ب ص = ٥

فــأوجد قيمتـى : أ ، ب

الحـل

∵ (٣ ، ١) تقع على المستقيم ∴ ٣ أ + ب = ٥ (١)

∵ (٥ ، ٥) تقع على المستقيم ∴ ٥ أ + ٥ ب = ٥ (٢)

بقسمة المعادلة (٢) على ٥ ∴ أ + ب = ١ (٣)

بطرح (٣) من (١) ينتج أن : ٢ أ = ٤ ∴ أ = ٢

بالتعويض فى (٣) ينتج أن : ٢ + ب = ١ ∴ ب = - ١

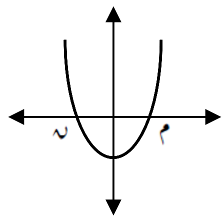
ملحــوظـة هــامـــة جــــداً

إذا ذكر فى المسألة إحدى العبارات الآتية :
النقطة (٢ ، ٣) تقــع على المستقيــم
النقطة (٢ ، ٣) تنتمى إلــى المستقيــم
النقطة (٢ ، ٣) تحقق معادلة المستقيم
النقطة (٢ ، ٣) أحــد حلــول المعادلة
⇓
س = ٢ ، ص = ٣

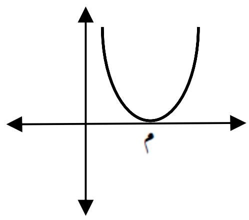
ملحـوظـة هـامـة جـداً : المعادلة : ٣س + ص = ١ (مثلاً)

(١) مجموعـة حلـها = { (س ، ص) : ص = ١ – ٣ س } (٢) عـدد حلولها = عـدد لانهائى من الحلول

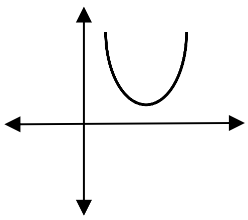
حل معـادلـة من الـدرجـة الثـانيـه فى مجهـول واحـد بيـانيـاً



المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين
م . ح = { م ، ن }



المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة
م . ح = { م }



المنحنى لا يقطع محور السينات
م . ح = ϕ

مثال ارسـم منحنى الـدالـــة د : د(س) = س^{٢} + ٢س - ٣ على الفترة [-٤ ، ٢]

ومن الرسم أوجـد :

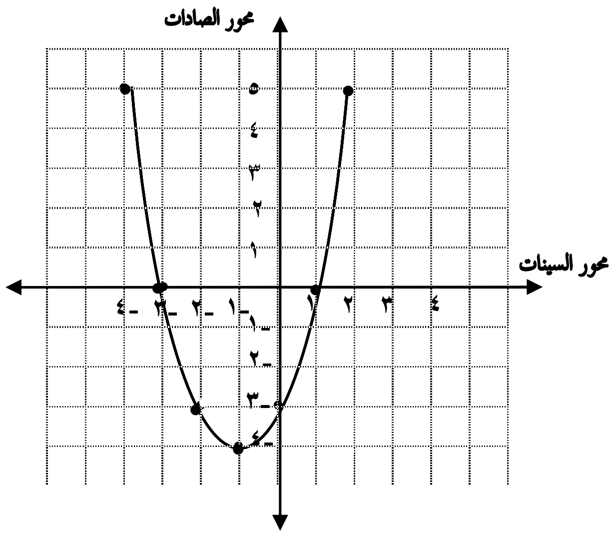
(١) نقطة رأس المنحنى . **(٢) معادلة محور التماثل .**

(٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة .

(٤) مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠

الحــل

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



من الرسم نجد أن :

١- نقطة رأس المنحنى : (-١ ، -٤)

٢- معادلة محور التماثل : س = -١

٣- القيمة الصغرى للدالة = -٤

٤- مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠

م . ح = { ١ ، -٣ }

ويمكن التحقق من ذلك باستخدام التحليل

(س - ١) (س + ٣) = ٠

⇐ س = ١ ، س = -٣

∴ م . ح = { ١ ، -٣ }

حل معـادلـة من الـدرجـة الثـانيـه فى مجهـول واحـد جبـريـاً باستخـدام القـانـون العـام

الصـورة العـامـة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

مثال ١ **باستخدام القانون العام أوجـد فى ح مجموعة حل المعادلة :**

س (س + ٣) = ٥ مقـربـاً النـاتـج لـثلاثـة أرقـام عشـرية

الحــل

س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠ ⇐ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = -٥

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times (-٥)}}{٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$$

$$∴ س = \frac{-٣ + \sqrt{٢٩}}{٢} \approx ١,١٩٣$$

$$∴ س = \frac{-٣ - \sqrt{٢٩}}{٢} \approx -٤,١٩٣$$

∴ م . ح = { ١,١٩٣ ، -٤,١٩٣ }

لاحـظ الجـدول

العـدد	التقـــريب			
	عدد صحيح	رقم عشرى واحد	رقميـن عشريين	ثلاثة أرقام عشرية
٢,٢٦٤٧	٢	٢,٣	٢,٢٦	٢,٢٦٥
٠,٧٦١٢	١	٠,٨	٠٧٦	٠٧٦١
٥,٦٥٨١	٦	٥,٧	٥,٦٦	٥,٦٥٨

مثال ٢ باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$س + \frac{٤}{س} = ٦$ مقربـاً الناتـج لرقمين عشريين

الحــل

$س^٢ - ٦س + ٤ = ٠ \Leftarrow أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٤$

$\therefore س = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢} = \frac{٦ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

$\therefore س \approx ٥,٢٤ ، س \approx ٠,٧٦$ $\therefore م . ح = \{ ٥,٢٤ ، ٠,٧٦ \}$

مثال ٣ باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢س - ١ = \frac{٥س}{٢س + ١}$

الحــل

$(٢س - ١)(٢س + ١) = ٥س$ $\therefore ٤س^٢ - ١ = ٥س$

$\therefore ٤س^٢ - ٥س - ١ = ٠ \Leftarrow أ = ٤ ، ب = -٥ ، جـ = -١$

$\therefore س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٤ \times (-١)}}{٢ \times ٤} = \frac{٥ \pm \sqrt{٤١}}{٨}$

$\therefore س \approx ١,٤ ، س \approx -٠,٢$ $\therefore م . ح = \{ ١,٤ ، -٠,٢ \}$

حـل معادلتين فى متغيرين إحـداهمـا من الدرجـة الأولى والأخـرى من الـدرجـة الثـانيـه

مثال ١ أوجـد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين : $ص - س = ٢$ ، $س^٢ + س ص - ٤ = ٠$

الحــل

$\because ص - س = ٢$ $\therefore ص = س + ٢$ (١) بالتعويض فى المعادلة الثانيه نجد أن :

$\therefore س^٢ + س (س + ٢) - ٤ = ٠$ $\therefore س^٢ + س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$

$\therefore ٢س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$ $\therefore س^٢ - س - ٢ = ٠$

$\therefore (س + ٢)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = -٢ ، س = ١$ بالتعويض فى (١)

عند : $س = -٢ \Leftarrow ص = س + ٢ = -٢ + ٢ = ٠$

عند : $س = ١ \Leftarrow ص = س + ٢ = ١ + ٢ = ٣$

$\therefore م . ح = \{ (-٢ ، ٠) ، (١ ، ٣) \}$

مثال ٢ أوجـد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين : $س - ص = ٣$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٧$

الحــل

$\because س - ص = ٣$ $\therefore س = ص + ٣$ (١) بالتعويض فى المعادلة الثانيه نجد أن :

$\therefore (ص + ٣)^٢ + ص^٢ = ١٧$ $\therefore ص^٢ + ٦ص + ٩ + ص^٢ = ١٧$

$\therefore ٢ص^٢ + ٦ص - ٨ = ٠$ $\therefore ص^٢ + ٣ص - ٤ = ٠$

$\therefore (ص + ٤)(ص - ١) = ٠$

إمـا :	أو :
$ص + ٤ = ٠$	$ص - ١ = ٠$
$ص = -٤$	$ص = ١$
$\therefore س = ص + ٣$	$\therefore س = ص + ٣$
$= -٤ + ٣ = -١$	$= ١ + ٣ = ٤$

$\therefore م . ح = \{ (-١ ، -٤) ، (٤ ، ١) \}$

تطبيقـــات على حـل المعـــادلات

مثال ١ **مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سـم ، فإذا كان محيطـه ٢٨ سم . احسـب مساحة المستطيل .**

الحـل

نفرض أن العـرض = س ∴ الطــول = س + ٤

محيط المستطيل = ٢٨ سـم ∴ ٢ (س + س + ٤) = ٢٨

∴ ٢س + ٤ = ١٤ ∴ ٢س = ١٠ ∴ س = ٥

∴ العـرض = ٥ سـم ، الطـول = ٩ سـم ⟸ مساحة المستطيل = ٥ × ٩ = ٤٥ سـم²

مثال ٢ **زاويتـان متكاملتان ضعف قياس أكبرهما يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى . أوجد قياس كل زاوية .**

الحـل

نفرض أن قياس الزاوية الكـبرى = س° ، قياس الزاوية الصغـرى = ص°

∴ س + ص = ١٨٠ ∴ س = ١٨٠ - ص (١)

، ٢ س = ٧ ص بالتعويض من (١) فى هذه المعادلة

∴ ٢ (١٨٠ - ص) = ٧ ص

∴ ٣٦٠ - ٢ص = ٧ ص ∴ ٣٦٠ = ٩ ص

∴ ٩ ص = ٣٦٠ ومنها ص = ٣٦٠ / ٩ = ٤٠° ∴ س = ١٨٠ - ٤٠ = ١٤٠°

∴ قياس الزاوية الكـبرى = ١٤٠° ، قياس الزاوية الصغـرى = ٤٠°

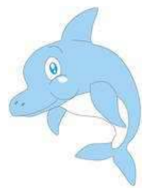
خـد بالـك

الزاويتان المتكاملتان مجموعهما = ١٨٠°
الزاويتان المتتامتان مجموعـهما = ٩٠°

حـاول أن تحـل هــذه المسألة بطريقة أخرى

مثال ٣ **مجمـوع مـا لـدى أحمـد وسمـير ١٢٠ جنيهاً . فـإذا كـان مـا مع سمير ينقـص ٣٠ جنيهـاً عن ضعـف مـا مع أحمـد . فمـا المبلغ الذى لـدى كل منهمـا ؟**

الحـل



نفرض أن مـا مع أحمد = س جنيهاً ، مـا مع سمـير = ص جنيهاً

∴ س + ص = ١٢٠ (١) ، ص + ٣٠ = ٢ س (٢)

∴ ٢س - ص = ٣٠ (٢) بجمع (١) ، (٢)

∴ ٣س = ١٥٠ ∴ س = ٥٠ ومنها ص = ٧٠

∴ مـا مع أحمد = ٥٠ جنيهاً ، مـا مع سمير = ٧٠ جنيهاً

مثال ٤ **مسـتطيل محيطـه ٢٨ سـم ، مسـاحتـه ٤٨ سـم² . أوجـد بـُعدى المستطيل .**

الحـل

نفرض أن : الطـول = س ، العـرض = ص

∴ ٢ (س + ص) = ٢٨ ∴ س + ص = ١٤ ، س ص = ٤٨

∴ س (١٤ - س) = ٤٨ ∴ س² - ١٤س + ٤٨ = ٠

∴ (س - ٦) (س - ٨) = ٠ ومنها س = ٦ أو س = ٨ ⟸ ص = ٨ أو ص = ٦

∴ بـُعدى المستطيـل همـا : ٦ سـم ، ٨ سـم

مثال ٥ **إذا كـان مجمـوع عـُمـرى أحمـد وأسـامة الآن ٤٣ سـنة وبـعـد ٥ سـنوات يـكـون الفـرق بـيـن عمريهما ٣ سـنوات أوجـد عـُمـر كـل منهمـا بعد ٧ سـنوات من الآن .**

الحـل

نفرض أن عـُمـر أحمد الآن = س سـنة ، عـُمـر أسامة الآن = ص سـنة

∴ س + ص = ٤٣ (١) ، (س + ٥) - (ص + ٥) = ٣

∴ س - ص = ٣ (٢) وبجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢س = ٤٦ ∴ س = ٢٣ بالتعويض فى (١)

∴ ٢٣ + ص = ٤٣ ∴ ص = ٢٠

∴ عـُمـر أحمد بعد ٧ سـنوات = ٢٣ + ٧ = ٣٠ سـنة

، عـُمـر أسـامة بعد ٧ سـنوات = ٢٠ + ٧ = ٢٧ سـنة

	عمر أحمد	عمر أسامة
الآن	س	ص
بعد ٥ سنوات	س + ٥	ص + ٥
بعد ٧ سنوات	س + ٧	ص + ٧

تمــارين عــامـة علـى الـوحـدة الثـانيـه

[أ] أكمـــل مـــا يـأتى : -

١- **مجمـوعـة** حل المعادلتين : س + ص = ٠ ، ص - ٥ = ٠ هى ....

٢- **مجمـوعة** حل المعادلتين : س + ٥ص = ٤ ، ٥ص + س = ٣ هى ....

٣- إذا كـان منحنى الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ - أ **يمر** بالنقطة (٢ ، ٠) فـإن : أ = ...

٤- إذا كـان : $س^{٢}$ - $ص^{٢}$ = ٢٤ ، س + ص = ٦ فـإن : س - ص = ...

٥- إذا كـان المستقيمان : س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ **متوازيين** فـإن : أ = ...

٦- **مجموعة** حل المعادلتين : س - ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هى ....

٧- إذا كـان : س = ٣ **جذر** المعادلة : $س^{٢}$ + م س = ٣ فـإن : م = ...

٨- **مجمـوعـة** حل المعادلـة : ٤س - ٢ص = ٦ هى ....

٩- إذا كـان المستقيمان : ٢س - ٣ص = ٧ ، ٤س + أ ص = ١٤ **متوازيين** فـإن : أ = ...

١٠- مجمـوعـة حـل المعادلتين : س - ص = ٣ ، س + ص = ٧ هى ....

١١- **نقطة تقاطع** المستقيمان : س + ٣ = ٠ ، ص = ٥ هى .... ، **وقياس** الـزاويـة بينهما = ...°

١٢- إذا كـان للمعادلتين : س + ٣ص = ٧ ، ٢س + أ ص = ١٤ **عدد لانهائى** من الحلول فإن : أ = ...

١٣- المستقيمان : ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س - ٣ص = ٠ **يتقاطعان** فى ....

١٤- المستقيمان : ص = س + ٥ ، ص = س - ٥ **يكـونـان** ....

[ب] أجـب عن الأســئلة الآتيــة : -

[١] أوجـد مجمـوعة الحل لكل من المعادلات الآتية مقـربـاً الناتج لأقـرب رقمين عشـريين :

(١) ٢ $س^{٢}$ - ٤س + ١ = ٠ « الجـواب : م . ح = { ٠,٢٩ ، ١,٧١ } »

(٢) س (س + ٨) = - ٩ حيث : $\sqrt{٧}$ ≈ ٢,٦٥ « الجـواب : م . ح = { - ١,٣٥ ، - ٦,٦٥ } »

(٣) ٢ $س^{٢}$ - ٣س + ٣ = ٠ « الجـواب : م . ح = ϕ »

(٤) $\frac{س}{٣} = \frac{١}{٥ - س}$ « الجـواب : م . ح = { ٤,٣ ، ٠,٧ } »

---

[٢] أوجـد مجمـوعـة الحل لكل زوج من المعادلات الآتيـة :

(١) س + ص = ٤ ، ص = س + ٤ « الجـواب : م . ح = { (٠ ، ٤) } »

(٢) س + ٢ص = ٨ ، ٣س + ص = ٩ « الجـواب : م . ح = { (٢ ، ٣) } »

(٣) ٣س + ص = ٤ ، ٢ص + ٦س = ١٠ « الجـواب : م . ح = ϕ »

(٤) ٣س + ص = ٥ ، س + ٣ص = ٧ « الجـواب : م . ح = { (١ ، ٢) } »

(٥) ٢س + ص = ٤ ، ٨ - ٢ص = ٤س « الجـواب : عدد لانهائى »

---

[٣] أوجــد مجمــوعــة الحـل لكل زوج من المعــادلات الآتيـــة :

(١) س + ص = ٥ ، س ص = ٦ « الجـواب : م . ح = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) } »

(٢) س + ص = ٧ ، $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٢٥ « الجـواب : م . ح = { (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) } »

(٤) ص - س = ٣ ، $س^{٢}$ - س ص + $ص^{٢}$ = ١٣ « الجـواب : م . ح = { (١ ، ٤) ، (-٤ ، -١) } »

---

[٤] مسـائـل تـطـبـيـقـات

(١) عــددان حقيقيان موجبان مجمــوعهما ١٧ وحــاصل ضربهما ٧٢ أوجـد العـددان . « ٨ ، ٩ »

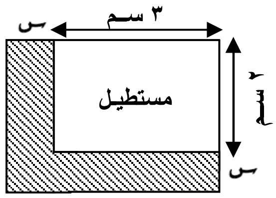
(٢) عــدد مكون من رقمـين رقـم آحـاده ضعـف رقـم عشـراتـه ، فـإذا كـان حـاصـل ضـرب الـرقمـين يسـاوى نصف العدد الأصلى ، فمـا هـو العـدد ؟ « ٣٦ »

(٣) تتحرك نقـطـة على المستقيـم ٥س - ٢ص = ١ بحيث كـان إحــداثيـها الصـادى ضعـف مـربـع إحداثيـها السينى . أوجـد إحـداثيى هـذه النقطـة . « (١ ، ٢) أ، ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$) »

---

[٥] فى الشكـل المقـابل :

مستطيـل بُـعداه ٢ سـم ، ٣ سـم فـإذا كـانت :
مسـاحــة المنطقــة المظللة **تسـاوى** مسـاحــة المستطيــل
احســب قيمــة : **س**



مجموعـة أصفـار الـدالـة كثيـرة الحـدود

هـى قيم س والتى عندها تصبح الدالة مساوية للصفر ونحصل على هذه الأصفار بحل المعادلة : د(س) = ٠

مثال عين أصفار كل من الـدوال الآتيـة :

(١) د(س) = ٧ « الجـــواب : ϕ »
(٢) د(س) = ٠ « الجـــواب : ع »
(٣) د(س) = ٢س – ٨ « الجـــواب : { ٤ } »
(٤) د(س) = س^٢ + ٩ « الجـــواب : ϕ »
(٥) د(س) = س^٢ - ٢س + ١ « الجـــواب : { ١ } »
(٦) د(س) = س^٢ + ٤س « الجـــواب : { ٠ ، -١ } »
(٧) د(س) = س^٢ - ٢س - ٣ « الجـــواب : { ٣ ، -١ } »
(٨) د(س) = س^٣ - ٩س^٢ + ١٨س « الجـــواب : { ٠ ، ٣ ، ٦ } »

ملحوظـة هـامـة جـداً
إذا كـان ٩ عدد صحيح موجب :
د(س) = ٩
د(س) = س^٢ + ٩
د(س) = س^٢ + س + ٩
نجــد أن :
ص(د) = ϕ

ملحوظـة هامة : مجمـوعـة أصفـار دالة الكسـر الجبرى = مجمـوعـة أصفـار البسـط - مجمـوعـة أصفـار المقـام

مثـال : إذا كـان : د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ فـإن :
ص(د) = { ٢ ، -٢ } - { ٢ ، ٣ } = { -٢ }

دالـة الكسـر الجبـــرى

قـــاعـــدة هـــامـــة : مجـال دالـة الكسـر الجـبـرى = ع - مجمـوعـة أصفـار المقـام

مثال ١ عين مجـال كـل من الـدوال الآتيـة ثـم أوجـد : ن(٠) ، ن(١) ، ن(٢) :

(١) ن(س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ (٢) ن(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$ (٣) ن(س) = $\frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٤}$

الحـل

(١) ن(س) = $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ ∴ مجـال ن(س) = ع - { -٣ }

ن(٠) = $\frac{-٢}{٣}$ ، ن(١) = $\frac{-١}{٤}$ ، ن(٢) = $\frac{٠}{٥}$ = ٠

(٢) ن(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$ = $\frac{س - ٢}{(س - ٢)(س - ٣)}$ ∴ مجـال ن(س) = ع - { ٢ ، ٣ }

ن(٠) = $\frac{-٢}{٦}$ = $\frac{-١}{٣}$ ، ن(١) = $\frac{-١}{-٢}$ ، ن(٢) غيـر معرفة لأن ٢ ∉ مجـال ن

(٣) ن(س) = $\frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٤}$ ∴ مجـال ن(س) = ع

ن(٠) = ٠ ، ن(١) = ٠ ، ن(٢) = $\frac{١}{٤}$

مثال ٢ إذا كـان مجـال الـدالـة ن : ن(س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - أس + ٩}$ هو ع - {٣} فـأوجـد قيمـة ٩

الحـل

∵ مجـال ن = ع - { ٣ }
∴ عنـد س = ٣ يكـون : س^٢ - ٩س + ٩ = ٠
∴ ٩ - ٣ ٩ + ٩ = ٠
∴ ١٨ - ٣ ٩ = ٠
∴ ٣ ٩ = ١٨ ∴ ٩ = ٦

المجــال المشتـــرك لكســرين جبــريـيـن أو أكـثــر

قــاعــدة هــامـة ⇐ المجـال المشـتـرك لـعدد من الكسـور الجبرية = ح - مجمـوعـة أصفـار مقـامـات هـذه الكسـور

مثال

عيـن المجـال المشـترك لـكـل مـــن الكســور الجبـريــة الآتيـــة :

$\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{٣}{\text{س} - ٥}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}$ ، $\text{د}_3(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س} - ٧}{\text{س}^٢ + ٢٥}$

الحـل

$\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{٣}{\text{س} - ٥}$ ⇐ مجـال د_1 = ع - { ٥ }

$\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٥)}$ ⇐ مجـال د_2 = ع - { ١ ، ٥ }

$\text{د}_3(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س} - ٧}{\text{س}^٢ + ٢٥}$ ⇐ مجـال د_3 = ع

∴ المجـال المشتـرك للكسـور الجبـريـة د_1 ، د_2 ، د_3 = ع - { ١ ، ٥ }

تسـاوى كسـرين جبـريـيـن

نقـول أن الـدالتين د_1 ، د_2 متسـاويتان إذا تحقق الشـرطـان الآتيـان معاً :

(١) مجـال د_1 = مجـال د_2 (٢) $\text{د}_1(\text{س}) = \text{د}_2(\text{س})$ لكل س تنتمى للمجال المشترك

مثال ١ أوجـد $\text{د}(\text{س})$ **فى أبسط صورة مبينـاً المجال :** $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢}$ **ثم أوجد $\text{د}(٢)$ إن أمكن**

الحـل

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٦)}$ ∴ مجـال $\text{د}(\text{س})$ = ع - { -٢ ، ٦ }

∴ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٦}$ ∴ $\text{د}(٢) = \dfrac{٢ - ٢}{٢ - ٦}$ = صفر

مثال ٢ إذا كـان : $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

خطوات تبسيط الكسر

تحليل

المجال

الإختصار

بيـن مـا إذا كـان $\text{د}_1 = \text{د}_2$ أم لا مـع ذكـر السبب .

الحـل

∵ $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)}$

∴ مجـال $\text{د}_1(\text{س})$ = ع - { ٢ ، -٣ } ، $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$ (١)

∵ $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

∴ مجـال $\text{د}_2(\text{س})$ = ع - { ٣ ، -٣ } ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\text{د}_1 \neq \text{د}_2$ لأن : مجـال $\text{د}_1(\text{س}) \neq$ مجـال $\text{د}_2(\text{س})$

مـلحـوظة هـامة : نستطيع أن نقول إن : $\text{د}_1(\text{س}) = \text{د}_2(\text{س})$ فى المجــال المشترك ع - { ٣ ، -٣ ، ٢ }

مثال ٣ أثبت أن : $\text{د}_1 = \text{د}_2$ **حيث :** $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}}{٢\text{س} + ٨}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ١٦}$

الحـل

∵ $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}}{٢(\text{س} + ٤)}$ ∴ مجـال $\text{د}_1(\text{س})$ = ع - { -٤ } ، $\text{د}_1(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٤}$ (١)

∵ $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}(\text{س} + ٤)}{(\text{س} + ٤)(\text{س} + ٤)}$ ∴ مجـال $\text{د}_2(\text{س})$ = ع - { -٤ } ، $\text{د}_2(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\text{د}_1 = \text{د}_2$

العمليـات علـى الكسـور الجبـريـة

(أولاً) جمـع وطـرح الكســور الجبــرية

مثال ١ أوجـد $د(س)$ فى أبسط صورة مبينـاً المجال حيث :

$$د(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ٤}{س^{٣} + ٨} + \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + س - ٢}$$

الحـل

$$د(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ٤}{(س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)} + \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)(س + ٢)}$$

$\therefore$ مجـال $د(س) = ع - \{-٢ ، ١\}$

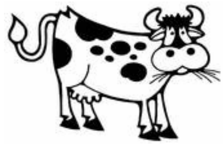
$$د(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{س + ١}{س + ٢} = \frac{١ + س + ١}{س + ٢} = \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$$

مثال ٢ إذا كـان : $د(س) = \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٨س + ١٥} - \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{س^{٣} - ٢٧}$

فـأوجـد $د(س)$ فى أبسـط صـورة مبينـاً المجـال ثم احسـب : $د(١)$ ، $د(٥)$ إن أمكن .

الحـل

$$د(س) = \frac{س(س - ٥)}{(س - ٣)(س - ٥)} - \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}$$



$\therefore$ مجـال $د(س) = ع - \{٣ ، ٥\}$

$$د(س) = \frac{س}{س - ٣} - \frac{١}{س - ٣} = \frac{س - ١}{س - ٣}$$

$د(١) = \frac{١ - ١}{١ - ٣} =$ صفر ، $د(٥)$ غيرمعرفة لأن $٥ \notin$ مجـال $د$

مثال ٣ إذا كـان : $د_{١}(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ٢س}$ ، $د_{٢}(س) = \frac{١٢}{٤ - س^{٢}}$

(١) فـأوجـد مجال $د(س)$ حيث : $د(س) = د_{١}(س) + د_{٢}(س)$ ثـم ضع $د(س)$ فى أبسط صـورة

(٢) أوجـد قيمـة $س$ عنـدما : $د(س) = ١$

الحـل

$$\boxed{٤ - س^{٢} = -(س^{٢} - ٤)}$$

$$د(س) = \frac{٣س}{س^{٢} - ٢س} + \frac{١٢}{٤ - س^{٢}}$$

$$= \frac{٣س}{س^{٢} - ٢س} - \frac{١٢}{س^{٢} - ٤} = \frac{٣س}{س(س - ٢)} - \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$\therefore$ مجـال $د(س) = ع - \{٠ ، ٢ ، -٢\}$

$$د(س) = \frac{٣}{س - ٢} - \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{٣(س + ٢) - ١٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$\therefore د(س) = \frac{٣س + ٦ - ١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{٣س - ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٣(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{٣}{س + ٢}$$

عنـدما : $د(س) = ١$ $\therefore \frac{٣}{س + ٢} = ١$ $\therefore س + ٢ = ٣$ $\therefore س = ١$

ملحـوظة هـامة $\Leftarrow$ مجـال الكسـر الجبـرى = مجـال معكوسـه الجمعى

مثال : الكسـر $\frac{٥ - س}{س - ٣}$ معكوسـه الجـمعى يســاوى $-\frac{٥ - س}{س - ٣}$ أ، $\frac{س - ٥}{س - ٣}$ أ، $\frac{٥ - س}{٣ - س}$

ومجـال معكـوسـه الجمعـى $= ع - \{٣\}$

(ثانياً) ضــرب وقسمـــة الكســـور الجبـريـة

مثال ١ أوجــد د(س) فى أبسط صورة مبينـاً المجــال حيث :

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}$$

ثم أوجــد : د(٠) ، د(٥)

الحــل

$$\text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} + ١)} \times \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢)}$$

∴ مجــال د(س) = ح - { -٣ ، -١ ، ٥ ، -٢ } ، $\text{د(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$

د(٠) = -٣ ، د(٥) غيـر معرفـة لأن ٥ ∉ مجــال د

المعكــــوس الضــــربي للكســــر الجبرى

إذا كــان : $\text{د(س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٧}$ فــإن المعكوس الضربى $\text{د}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{س} + ٧}{\text{س} - ٣}$

ويكــون : مجــال د(س) = ح - { -٧ } **بينما** مجــال $\text{د}^{-١}\text{(س)}$ = ح - { -٧ ، ٣ }

مثال ١ إذا كــان : $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

(١) أوجــد $\text{د}^{-١}\text{(س)}$ وعين مجــالــه .

(٢) أوجــد : $\text{د}^{-١}(١)$ ، $\text{د}^{-١}(٢)$

(٣) إذا كــان $\text{د}^{-١}\text{(س)} = ٢$ فــأوجــد قيمــة س

الحــل

$$(١)\ \text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} = \frac{\text{س}(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}$$

∴ مجــال د(س) = ح - { -٣ ، ٢ } ، $\text{د(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

∴ مجــال $\text{د}^{-١}\text{(س)}$ = ح - { ٠ ، -٣ ، ٢ } ، $\text{د}^{-١}\text{(س)} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}}$

(٢) $\text{د}^{-١}(١) = \frac{١ - ٢}{١} = -١$ ، $\text{د}^{-١}(٢)$ غير معرفـة لأن ٢ ∉ مجــال $\text{د}^{-١}$

(٣) ∵ $\text{د}^{-١}\text{(س)} = ٢$ ∴ $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}} = ٢$ ∴ ٢ س = س - ٢ ∴ س = -٢

مثال ٣ أوجــد د(س) فى أبسط صورة مبينـاً المجــال حيث :

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩} \div \frac{٢\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$$

ثم أوجــد : د(٧) ، د(-٣)

الحــل

$$\text{د(س)} = \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} \div \frac{٢(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}$$

خــد بالـك

$$\frac{٣}{٥} \div \frac{٢}{٧} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٧}{٢} = \frac{٢١}{١٠}$$

∴ مجــال د(س) = ح - { ٣ ، -٣ ، ٥ } ،

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س} - ٣} \times \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)}{٢(\text{س} - ٥)} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$$

$\text{د}(٧) = \frac{٧ - ٣}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، د(-٣) غير معرفـة لأن (-٣) ∉ مجــال د

تمارين عامة على الوحدة الثالثة

أكمل ما يأتى

1- مجموعة أصفار كل من الدوال :

(1) $د(س) = س^2 - 3س$ هى .... (2) $د(س) = س(س^2 - 2س + 1)$ هى ....

(3) $د(س) = س^2 - س$ هى .... (4) $د(س) = س^2 + 1$ هى ....

2- إذا كان : ص(د) = {2} ، $د(س) = س^3 - م$ فإن : م = ...

3- إذا كان : $ن_1(س) = \frac{س + 1}{س - 2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 + س}{س^2 - 2س}$

فإن المجال المشترك الذى فيه : $ن_1 = ن_2$ هو ....

4- إذا كان للكسر الجبرى : $\frac{س - أ}{س - 3}$ معكوس ضربى هو $\frac{س - 3}{س + 2}$ فإن : أ = ...

5- إذا كان : $ن_1(س) = \frac{-7}{س + 2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك للدالتين $ن_1$ ، $ن_2$

هو ح - {-2 ، 7} فإن : ك = ...

6- أبسط صورة للدالة ن حيث : $ن(س) = \frac{6س^2 - 3س}{3س}$ ، س ≠ 0 هى ....

7- مجال الدالة ن حيث : $ن(س) = 5س^{صفر}$ ، س ≠ 0 هو ....

8- مجال الكسر الجبرى : $ن(س) = \frac{5}{س^2 + 9}$ هو ....

9- مجال الدالة : $\frac{س^3 - 4س}{س^2 + 4}$ هو ....

10- الكسر الجبرى : $ن(س) = \frac{س}{س - 5}$ له معكوس ضربى فى المجال ....

11- إذا كان : $ن(س) = \frac{س + 1}{س - 2}$ فإن مجال معكوسه الجمعى = ...

12- أبسط صورة للدالة ن : $ن(س) = \frac{3س}{س + 1} \div \frac{س}{س + 1}$ هى .... ومجالها ....

13- إذا كان : $ن(س) = \frac{س^2 - س}{س^2 - 1}$ ، $ن^{-1}(م) = 3$ فإن : م = ...

14- إذا كان : {-3 ، 3} هى مجموعة أصفار الدالة : $د(س) = س^2 + أ$ فإن : أ = ...

أجب عن الأسئلة الآتية

[1] أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبيناً المجال فى كل من الآتى :

(1) $ن(س) = \frac{س^2 + 3س + 9}{س^3 - 27} + \frac{س^2 - س - 12}{س^2 - 9}$ (2) $ن(س) = \frac{س^2 - 3س + 2}{س^2 - 1} \div \frac{3س - 15}{س^2 - 4س - 5}$

(3) $ن(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 - 2س + 1} \times \frac{2س - 2}{س^2 + س + 1}$ (4) $ن(س) = \frac{3س - 6}{س^2 - 4} - \frac{س^2 - 3س}{س^3 - س^2 - 6س}$

[2] إذا كان : $ن(س) = \frac{س^2 - 2س - 3}{(س - 3)(س^2 + 2)}$

(1) **فأوجد** $ن^{-1}(س)$ وعين **مجاله** (2) **أوجد** قيمة س إذا كان : $ن^{-1}(س) = س$

[3] إذا كان : $ن(س) = \frac{1}{3س^2 - 4س - 15}$ وكان : ن(أ) **غير معرف** . **فأوجد** قيمة أ حيث أ > 0

[4] إذا كانت {-2 ، 3} هى مجموعة أصفار الدالة : $د(س) = أس^2 + ب س - 6$ **فأوجد** قيمتى أ ، ب

[5] إذا كان مجال الدالة ن : $ن(س) = \frac{ب}{س} + \frac{9}{س + أ}$ هو ح - {0 ، 4} ، ن(5) = 2 **فأوجد** قيمتى أ ، ب

[6] أثبت أن : $ن_1 = ن_2$ حيث : $ن_1(س) = \frac{س}{س + 1}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + س}{س^3 + س^2 + س + 1}$

الاحتمــال

مــلاحظـات هــامــة على الاحتمــال

١- احتمــال وقــوع الحـدث أ = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}}$ أى أن : ل (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

٢- احتمــال الحـدث المـؤكد = ١ ، احتمــال الحـدث المسـتحيل = صفر

٣- يمكن كتابة الاحتمــال فى صــورة كسـر أوعدد عشرى أو نسـبة مئوية ، ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

٤- عند إلـقاء قطعـة نقـود منتظمـة مـرة واحدة فإن احتمال ضهور صورة = احتمال ظهور كتابة = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ = ٥٠ ٪

٥- إذا كــان أ ، ب حـدثــان متنافيان فـإن : أ ∩ ب = ϕ ويكـون : ل (أ ∩ ب) = ٠

٦- إذا كــان أ ⊂ ب فــإن : (١) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) (٢) ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

٦- احتمــال وقـوع الحـدثين أ و ب معـاً = ل (أ ∩ ب)

٧- احتمــال وقـوع الحـدثين أ أو ب أو كلاهما = احتمال وقـوع أحدهما على الأقـلّ = ل (أ ∪ ب)

٨- احتمــا وقـوع الحدث أ وعـدم وقـوع الحـدث ب = احتمــال وقـوع أ فقـط = ل (أ - ب)

٩- إذا كـان احتمـال وقـوع الحـدث = ل (أ) فـإن احتمــال عـدم وقـوع الحـدث = ل (أ َ)

قــوانــين هـــامـــة على الاحتمــال

(١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

(٢) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)

(٣) ل (أ) = ١ - (أ َ) ، ل (أ َ) = ١ - ل (أ)

(٤) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) ، ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

مثال ١ سُحبت بطـاقة عشـوائياً من ٢٠ بطـاقة متمـاثلة ومـرقمة بالأرقـام من ١ إلى ٢٠

احسـب احتمــال أن تكـون البطاقة المسحـوبة تحمل عــدداً :

(١) يقبل القسمة على ٣　(٢) يقبل القسمة على ٥　(٣) فرديـاً و يقبل القسمة على ٥

(٤) يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥　(٥) يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥

الحـل

∵ ن (ف) = ٢٠

(١) أ (عدد يقبل القسمة على ٣) = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ } ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

(٢) ب (عدد يقبل القسمة على ٥) = { ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ } ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(٣) جـ (عدد فـردي و يقبل القسمة على ٥) = { ٥ ، ١٥ } ∴ ل (جـ) = $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

(٤) د (عدد يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥) = { ١٥ } ∴ ل (د) = $\frac{١}{٢٠}$

(٥) هـ (عدد يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥)

= { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠ } ∴ ل (هـ) = $\frac{٩}{٢٠}$

مثال ٢ إذا كـان أ ، ب حـدثـين من فضـاء العينــة لتجـربة عشـوائية حيث ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$

، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$. **أوجـد :** ل (ب َ) ، ل (أ ∪ ب) ، ل (أ - ب) ، ل (أ ∩ ب)َ

الحـل

(١) ل (ب َ) = ١ - ل (ب) = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٢}{٣}$ - $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٥}{٦}$

(٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

(٤) ل (أ ∩ ب)َ = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثال ٣ إذا كـان ء ، ب حـدثين من فضـاء العينـة لتجـربة عشـوائية وكـان :

ل (ء) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجـد ل (ء ∪ ب) فى الحالات الآتيـة :

(١) ل (ء ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ (٢) ء ، ب حدثـان متنافيان   (٣) ء ⊂ ب

الحــل

(١) ل (ء ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٥}{٦}$ - $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٢٠ - ٣}{٢٤}$ = $\frac{١٧}{٢٤}$

(٢) ∵ ء ، ب حدثـان متنافيان   ∴ ل (ء ∩ ب) = ٠

∴ ل (ء ∪ ب) = ل (ء) + ل (ب) - ل (ء ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ - ٠ = $\frac{٥}{٦}$

(٣) ∵ ء ⊂ ب   ∴ ل (ء ∪ ب) = ل (ب) = $\frac{١}{٣}$

مثال ٤ إذا كـان ء ، ب حـدثين من فضـاء العينـة لتجـربة عشـوائية وكـان :

ل (ء) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (ء ∩ ب) = ٠,٦ فـأوجـد :

(١) احتمـال عـدم وقـوع الحدث ء .   (٢) احتمـال عـدم وقـوع الحدثـين ء و ب معـاً .

(٣) احتمـال وقـوع أحـد الحدثين على الأقل .   (٤) احتمـال وقـوع أحـد الحدثين دون وقـوع الآخـر .

(٥) احتمـال وقـوع أحـد الحدث ب فقـط .

الحــل

(١) احتمـال عـدم وقـوع الحدث ء = ل (ءَ) = ١ - ل (ء) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

(٢) احتمـال عـدم وقـوع الحدثين ء و ب معـاً = ل (ء ∩ ب)َ = ١ - ل (ء ∩ ب) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤

(٣) احتمـال وقـوع أحـد الحدثين على الأقل = ل (ء ∪ ب) = ٠,٨ + ٠,٧ – ٠,٦ = ٠,٩

(٤) احتمـال وقـوع أحـد الحدثين دون وقـوع الآخـر = ل (ء ∪ ب) - ل (ء ∩ ب) = ٠,٩ – ٠,٦ = ٠,٣

(٥) احتمـال وقـوع الحدث ب فقـط = ل (ب - ء) = ل (ب) - ل (ء ∩ ب) = ٠,٧ – ٠,٦ = ٠,١

تمـارين عـامـة على الاحتمـال

[أ] أكمـــل مـــا يـأتى : -

١- إذا كـان ء ، ب حـدثـان متنافيان فـإن : ل (ء ∩ ب) = ...

٢- إذا ألقيت قطعـة نقود منتظمـة مـرة واحدة فـإن احتمال ظهور صـورة أوكتابة = ... = ... ٪

٣- إذا ألقيت قطعـة نقود منتظمـة مـرة واحدة فـإن احتمال ظهور صـورة يساوى احتمال ظهوركتابة = ... = ... ٪

٤- إذا كـان : س ⊂ ص فـإن : ل (س ∩ ص) = ... ، ل (س ∪ ص) = ...

٥- إذا ألقى حجر نـرد منتظم مرة واحـدة فإن احتمـال ظهـور عـدد زوجى و ظهـور عـدد فردى معاً يساوى ....

٦- إذا كـان احتمـال وقـوع الحـدث ء هـو ٦٥ ٪ فإن احتمـال عـدم وقـوعه = ...

٧- إذا كـان : ل (ء) = ل (ءَ) فـإن : ل (ء) = ...

٨- إذا كان ء ، ب حدثين من ف لتجربة عشوائية ، ل (ء) = ٠,٧ ، ل (ء - ب) = ٠,٥ فـإن : ل (ء ∩ ب) = ...

[ب] أجـب عن الأسـئلة الآتيـة : -

[١] كيس به ١٢ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٢ ، سُحبت منه كرة عشوائياً فإذا كان الحدث ء " الحصول على عدد فردى" ، الحدث ب " الحصول على عدد أولى " فـأوجـد : ل (ء) ، ل (ب) ، ل (ءَ) ، ل (ء ∪ ب) ، ل (ء - ب)

[٢] إذا كان ء ، ب حدثين من ف لتجربة عشوائية ، ل (ء) = ٠,٥ ، ل (ء ∪ ب) = ٠,٨ ، ل (ب) = س

فـأوجـد قيمـة س إذا كـان : (١) ء ، ب حدثـان متنافيان   (٢) ل (ء ∩ ب) = ٠,١   (٣) ء ⊂ ب

[٣] ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات ، و كان ء ، ب حدثين من ف فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ء يساوى ١٣ ، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ وكـان :

ل (ء ∪ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ فـأوجـد :

(١) احتمـال وقـوع الحـدث ء .   (٢) احتمـال وقـوع الحدثين ء و ب معـاً .

الـوحـدة الـرابعـة : الهندســة

الزاويـــة المـركـزيـــة وقيـاس الأقــــواس

الـزاويـة المـركـزيـة : هـى الزاوية التى رأسها مـركز الدائـرة ، ويحمل كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة .

قيـــاس القـــوس : هـو قياس الزاوية المركزية المقابلة له ويقاس بنفس وحدات قياس الزاوية (درجات – دقائق – ثوانى)

قياس نصف الدائرة = ١٨٠° ، قياس الدائرة = ٣٦٠° ، طـول الـدائـرة = ٢ ط نق

طـول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$ × محيط الدائـرة ⇐ ل = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق

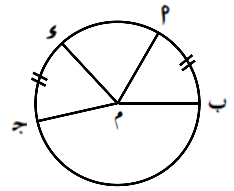
نتــائـــج هـــامـــة

١- فى **الدائرة** الواحدة (أو فى الدوائر **المتطابقة**) **الأقواس** المتساوية فى **القياس** متساوية فى **الطول والعكس** صحيح .

٢- فى **الدائرة** الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس **أوتارها متساوية** فى الطول والعكس صحيح .

٣- **الوتـران المتـوازيـان** فى الدائرة يحصـران **قوسين متساويين** فى القياس .

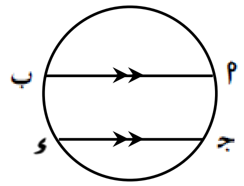
٤- **القوسـان** المحصـوران بين **وتـر ومـمـاس يوازيـه** فى الدائرة **متسـاويـان** فى القيـاس .



طـول (أب) = طـول (جـ د)

(١) ق (أب) = ق (جـ د)

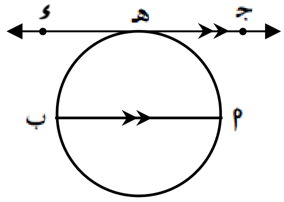
(٢) أ ب = جـ د



أ ب // جـ د

(١) ق (أ جـ) = ق (ب د)

(٢) أ جـ = ب د



أ ب // جـ د

(١) ق (أ هـ) = ق (ب هـ)

(٢) أ هـ = ب هـ

مثال ١ **أوجد قياس وطـول القوس الـذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ من الدائرة حيث طول قطر الدائرة ١٤ سم . (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)**

الحـل

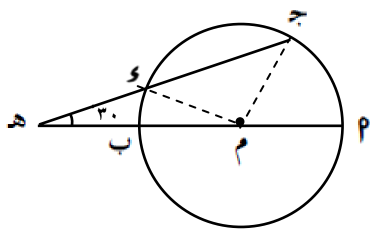
قياس القوس = $\frac{٢}{٥}$ قيـاس الـدائـرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠° = ١٤٤°

طـول القوس = $\frac{١٤٤°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٧,٦ سم

مثال ٢ **فى الشكل المقابل : أ ب قطـر فى الـدائـرة م ، أ ب ∩ جـ د = { هـ } .**

ق (∠ أ هـ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ) = ٨٠° أوجـد : ق (جـ د)

الحـل



∵ ق (أ جـ) = ٨٠° ∴ ق (∠ أ م جـ) = ٨٠°

∵ ∠ أ م جـ خـارجة عن Δ م جـ هـ ∴ ق (∠ م جـ هـ) = ٥٠°

∵ م جـ = م د = نق ∴ Δ م جـ د متسـاوى الساقين

∴ ق (∠ جـ م د) = ٨٠° ∴ ق (جـ د) = ٨٠°

أكمـــل مــــا يــأتى : -

(١) الـوتـران المتـوازيان فى الـدائـرة يحصـران قوسين ....

(٢) الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الـدائـرة .

(٣) طـول القوس الـذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة = ... ، قياس القوس الـذى يمثل $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة = ...

(٤) قيـاس القوس الذى يساوى ٠,٤ قياس الدائرة = ...°

(٥) قياس القوس الذى طـولـه ٢ ســم فى دائرة محيطها ٢٤ ســم يساوى ....

(٦) طول الدائرة = ... ، قياس الدائرة = ...

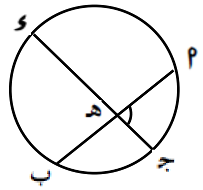
العـلاقــة بين الــزاويتيــن المحيطيــة والمركـزيــة المشتـركتين فى القــوس

الــزاويـــة المحيطية : هـى الزاوية التى رأسهـا على الدائـرة ويحمل كل ضلـــع من ضلعيهـــا وتـــراً فى هـــذه الدائـــرة .
نظـــريــــــــة (١) : قيــاس الزاويـة المحيطيـة يساوى نصف قيـــاس الـزاويـة المركـزيـة المشتـركة معهـا فى القوس .
ملاحظـــة هـامـــة : قيـــاس الـزاويـة المركـزيـة يساوى ضعـف قيـــاس الـزاويـة المحيطيـة المشتـركة معهـا فى القوس .

نتـائـج ومـلاحظـات هـامـة :

(١) **قيـاس** الـزاويـة **المحيطيـة** يسـاوى **نصف** قيـاس **القوس المقـابل** لهـا .
(٢) **قيـاس القوس** يسـاوى **ضعف** قيـاس الـزاويـة **المحيطيـة** المحصـور بين ضلعيهـا .
(٣) الـزاويـة **المحيطية** المرسـومة فى **نصف** دائـرة **قـائمة** .
(٤) قياس الزاوية **المحيطيه** المرسومة في **ربـع** دائـرة = ١٣٥°

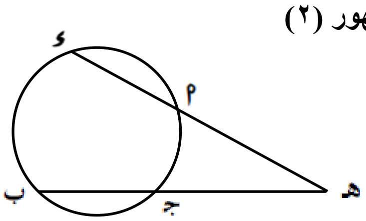
تمرين مشهور (١)



ق (∠ أ هـ ج) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒أ ج) + ق (⌒ب د)]

ق (∠ ب هـ ج) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ب ج) + ق (⌒أ د)]

تمرين مشهور (٢)

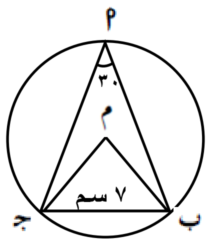


ق (∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (⌒ب د) - ق (⌒أ ج)]

مثال ١ **فى الشكل المقابل :**

ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب ج = ٧ سـم أوجـد : محيـط ومســاحة الـدائـرة م . (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحــل



∵ ق (∠ م) = ٢ ق (∠ أ) = ٦٠° (زاوية مركزية ومحيطية مشتركتان فى نفس القوس)

، ∵ م ب = م ج = نق ∴ Δ م ب ج متســاوى الأضلاع

∴ م ب = م ج = ب ج = نق = ٧ سـم

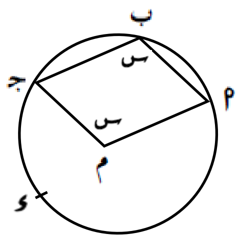
∴ محيط الـدائـرة = ٢ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ ســم

، مسـاحة الـدائـرة = ط نق² = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ ســم²

مثال ٢ **فى الشكل المقابل : أ ب ، ب ج وتـران فى الدائـرة م ، د ∈ الـدائـرة م**

فـإذا كـان : ق (∠ أ م ج) = ق (∠ ب) = س° فـأوجـد : ق (⌒أ ج) ، ق (⌒أ د ج)

الحــل



∵ ق (∠ أ م ج) = ق (∠ ب) = س°

، ∵ ق (∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ م ج) المنعكسة

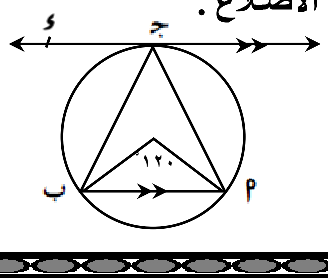
∴ ق (∠ أ م ج) المنعكسة = ٢س° ، ∵ قيـاس الزاويـة + قيـاس المنعكسة لهـا = ٣٦٠°

∴ س° + ٢س° = ٣٦٠° ∴ ٣س° = ٣٦٠° ∴ س° = ١٢٠°

∴ ق (⌒أ ج) = ق (∠ أ م ج) = ١٢٠° ، ق (⌒أ د ج) = ٣٦٠° - ١٢٠° = ٢٤٠°

تمرين **فى الشكل المقابل : د ج ↔ مماس يوازى أ ب أثبت أن : Δ أ ب ج متسـاوى الأضلاع .**

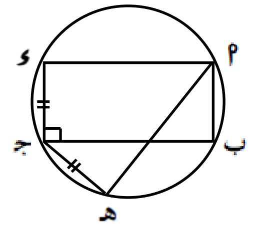
الحــل



مســـائـل متنـــوعـــة

(١) فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة ، رسم الوتر $\overline{\text{جـ هـ}}$

بحيث : جـ هـ = جـ ء　　**أثبت أن :** أ هـ = ب جـ

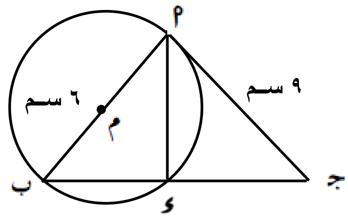


البرهــان

---

(٢) فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ جـ}}$ تمس الدائرة عند أ

فـإذا كـان : أ جـ = ٩ سم ، أ ب = ٦ سم . أوجد طول : $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

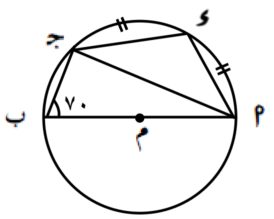


البرهــان

---

(٣) فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطــر فى الدائرة م ، طول ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = طول ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) ،

ق (∠ أ ب جـ) = ٧٠° أوجـد كـلاً مـن : ق (∠ ء جـ أ) ، ق (∠ جـ أ ب)



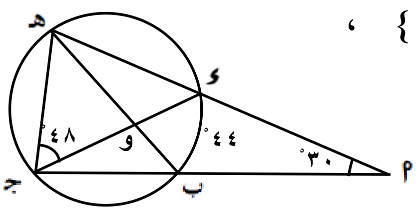
البرهــان

---

(٤) فى الشكل المقابل : $\overleftarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftarrow{\text{ء هـ}}$ = { أ } ، $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{جـ ء}}$ = { و } ،

ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ٤٤° ، ق (∠ هـ جـ ء) = ٤٨°

أوجـد كـلاً مـن : ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$) ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

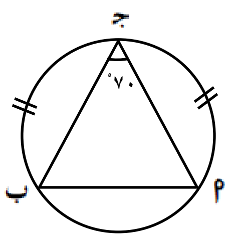


البرهــان

---

(٥) فى الشكل المقـابـل : ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ، ق (∠ أ جـ ب) = ٧٠° . أوجـد : ق (∠ أ ب جـ)

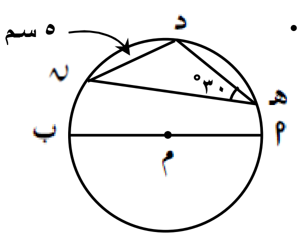
البرهــان



---

(٦) فى الشكل المقـابـل : دائـرة مركـزهـا م ، د ن = ٥ سم ، ق (∠ د هـ ن) = ٣٠° .

أوجـد طـول نصف قطر الـدائـرة م



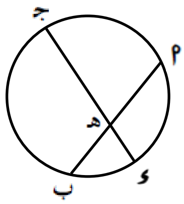
البرهــان

الـزوايـا المحيطيــة المرسـومــة على نفس الـقـوس

نـظـريـة (٢) : الـزوايـا المحيطيـة التى تحصـر نفس القـوس فى الـدائرة الـواحـدة متسـاوية فى القيـاس .

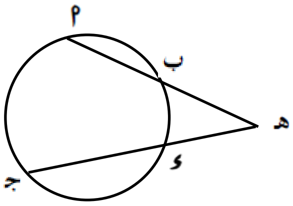
نتيجـــــــة : الـزوايـا المحيطيـة التى تحصـر أقـواسـاً متسـاوية فى القيـاس فى الدائرة الواحدة (أو فى عـدة دوائـر) تكون متساوية فى القياس والعكس صحيح .

تمـرين مشـهور (٣)



هـ ب × هـ أ = هـ د × هـ جـ

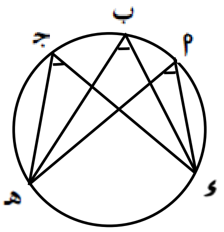
تمـرين مشـهور (٤)



هـ ب × هـ أ = هـ د × هـ جـ

مثال ١ أثبت أن : الـزوايـا المحيطية التى تحصـر نفس القـوس فى الـدائـرة الـواحـدة متسـاويــة فى القيـاس .

البرهـان



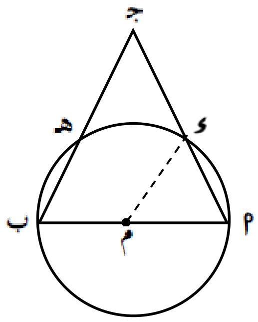
ق(∠ أ) = ١/٢ ق(⌒د هـ)
ق(∠ ب) = ١/٢ ق(⌒د هـ)
ق(∠ جـ) = ١/٢ ق(⌒د هـ)

⟸ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ق(∠ جـ)

مثال ٢ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الـدائـرة م ، ق(⌒أ د) = ق(⌒د هـ) = ق(⌒هـ ب) .

أثبـت أن : أ جـ = ب جـ ثـم **احسـب** : ق(∠ د هـ ب)

البرهـان



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الـدائرة م ∴ ق(⌒أ د) + ق(⌒د هـ) + ق(⌒هـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌒أ د) = ق(⌒د هـ) = ق(⌒هـ ب) = ١٨٠/٣ = ٦٠°

∵ ق(∠ أ) = ١/٢ ق(⌒د هـ ب) = ٦٠° ، ق(∠ ب) = ١/٢ ق(⌒أ د هـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) ∴ أ جـ = ب جـ

ق(∠ د هـ ب) = ١/٢ ق(∠ د م ب) المنعكسة = ١/٢ × ٢٤٠° = ١٢٠°

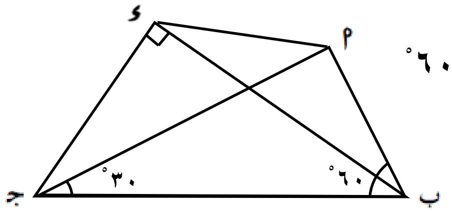
عكس نظرية (٢) : إذا تسـاوى قيـاسـا زاويـتـين مـرسـومـتين علـى قـاعـدة واحـدة وفى جهـة واحـدة منهـا فـإنه تمـر برأسيهما دائـرة واحـدة تكون هـذه القـاعـدة وتـراً فيها .

مثال ٣ **فى الشكل المقابل :**

ق(∠ ب د جـ) = ٩٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠° ، ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠°

(١) أثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

(٢) احســب : ق(∠ ب د أ)



البرهـان

فى △ أ ب جـ :

ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٣٠°) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ ب د جـ) = ٩٠° وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفى جهة واحدة منها

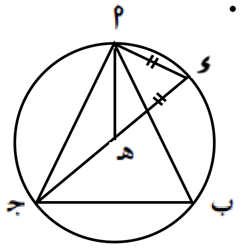
∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تمر بها دائرة واحدة

∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى ∴ ق(∠ ب د أ) = ق(∠ ب جـ أ) = ٣٠°

مســـائـل متنـــوعـــة

(١) فى الشكل المقابل : ؟ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة ، ؟ ء = ءهـ .

أثبـت أن : ∆ ؟ ءهـ متساوى الأضلاع

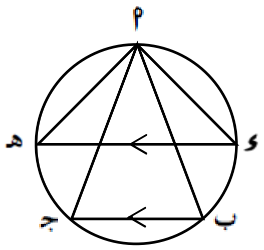


البرهــان

---

(٢) فى الشكل المقابل : ؟ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

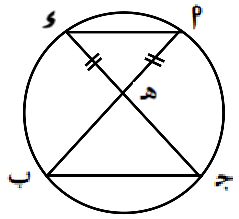
أثبـت أن : ق (∠ ء ؟ جـ) = ق (∠ ب ؟ هـ)



البرهــان

---

(٣) فى الشكل المقابل : $\overline{\text{؟ ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ ء}}$ = {هـ} ، هـ ؟ = هـ ء أثبـت أن : هـ ب = هـ جـ



البرهــان

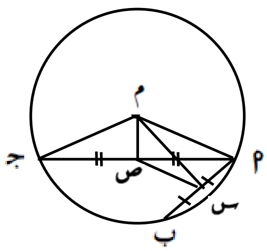
---

(٤) فى الشكل المقابل : دائـرة مـركـزهـا م ، س ، ص منتصفـا $\overline{\text{؟ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب

أثبـت أن : (١) الشكـل ؟ س ص م ربـاعى دائـرى .

(٢) ق (∠ م س ص) = ق (∠ م جـ ص)

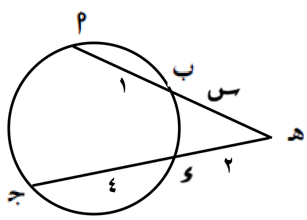
(٣) ؟ م قطـر فى الـدائرة المـارة بالنقـط ؟ ، س ، ص ، م



البرهــان

---

(٥) فى الشكل المقابل : أوجـد قيمـة : س حيث الأطوال مقدرة بالسنتيمترات



البرهــان

الشكــل الربــاعى الدائــرى

هــو شكل ربــاعى تنتمــى رءوسه الأربعة إلى دائرة واحــدة .

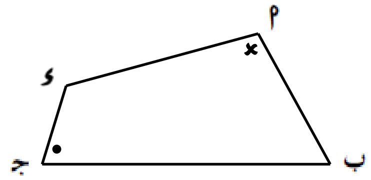
مــلاحظات هــامــة

١- المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين ⇐ **أشكــال رباعيــة دائــريـــة**

٢- متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين ⇐ **ليست أشكــال رباعيــة دائــريــة**

خــواص الشكــل الربــاعى الدائــرى

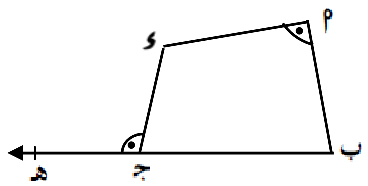
كل زاويتان متقابلتان متكاملتان



ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

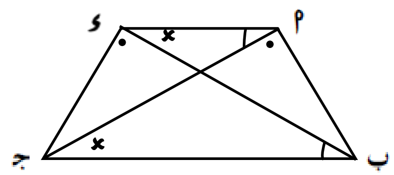
ق (∠ ب) + ق (∠ ى) = ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس الشكل الرباعى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



ق (∠ ى جـ هـ) = ق (∠ أ)

كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس



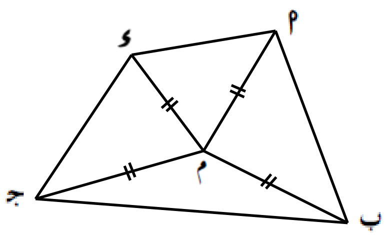
ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب ى جـ)

ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ ى ب)

ق (∠ ى ب جـ) = ق (∠ ى أ جـ)

ق (∠ أ ب ى) = ق (∠ أ جـ ى)

توجد نقطة (م) فى المستوى داخل أو خارج الشكل الرباعى الدائرى تبعد بُعداً ثابتاً عن كل رأس من رءوسه



م أ = م ب = م جـ = م ى

وتكون الدائرة المارة برءوس الشكل مركزها م

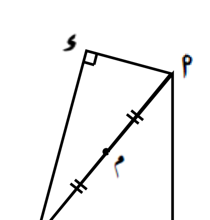
∴ نق = م أ = م ب = م جـ = م ى

ملحوظة هامة : لإثبات أن الشكل رباعى دائرى يكفى إثبات إحدى الحالات السابقة فقط

مــلاحظــة هــامة جــداً

إذا كـانت إحدى زوايا الشكل الرباعى الدائرى قائمة كـان قطـر الشكل المقابل للزاوية القائمة هو قطـر الـدائـرة المارة بـرءوس الشكل ، ومنتصف هـذا القطر هـو مـركز هـذه الـدائـرة .

ففى الشكل المقابل :



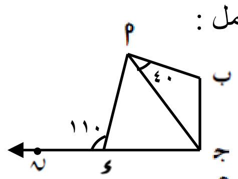
نصـف قطـر الـدائرة المارة برءوس الشكل أ ب جـ ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ

أكمــل مــا يــأتى :

(١) فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتان متقابلتان ....

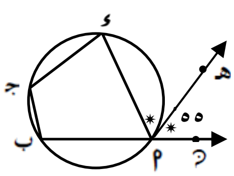
(٢) فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ى إذا كـان : ق (∠ جـ) = ١١٥° فـإن : ق (∠ أ) = ...°

(٣) أكمل :

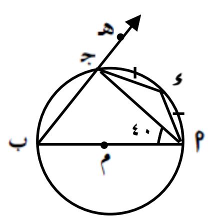


أ ب جـ ى رباعى دائرى

ق (∠ ب جـ أ) = ...°



ق (∠ ب جـ ى) = ...°



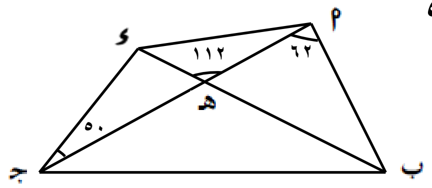
ق (∠ أ جـ ب) = ...°

ق (∠ أ ى جـ) = ...°

ق (∠ ى أ جـ) = ...°

ق (∠ ى جـ هـ) = ...°

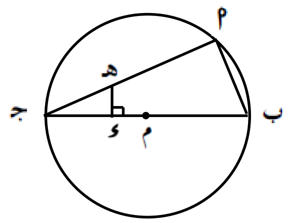
مثال ١ **فى الشكل المقابل : ق (∠ ٩ هـ ى) = ١١٢° ، ق (∠ ٩ جـ ى) = ٥٠°**
، ق (∠ ب ٩ جـ) = ٦٢° . أثبـت أن : الشكل ٩ ب جـ ى رباعى دائرى



البرهــان

∵ ∠ ٩ هـ ى خــارجة عن المثلث ∠ ى هـ جـ
∴ ق (∠ هـ ى جـ) = ١١٢° - ٥٠° = ٦٢°
∵ ق (∠ هـ ى جـ) = ق (∠ ب ٩ جـ) = ٦٢° وهمـا زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{ب جـ}$ وفى جهة واحدة منها
∴ الشكل ٩ ب جـ ى رباعى دائرى

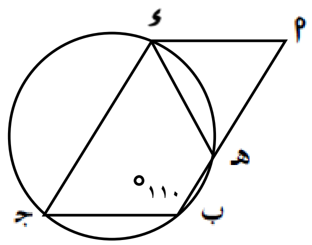
مثال ٢ **فى الشكل المقابل : $\overline{ب جـ}$ قطـر فى الـدائـرة م ، $\overline{هـ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$**
أثبت أن : (١) الشكل ٩ ب ى هـ رباعى دائرى
(٢) ق (∠ جـ هـ ى) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{٩ جـ}$)



البرهــان

∵ $\overline{ب جـ}$ قطـر فى الـدائـرة م ∴ ق (∠ ب ٩ جـ) = ٩٠° (زاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة)
∵ $\overline{هـ ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ ق (∠ هـ ى ب) = ٩٠°
∴ ق (∠ ب ٩ جـ) + ق (∠ هـ ى ب) = ١٨٠° ∴ الشكل ٩ ب ى هـ رباعى دائرى (أولاً)
، ق (∠ جـ هـ ى) = ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{٩ جـ}$) (ثـانيـاً)

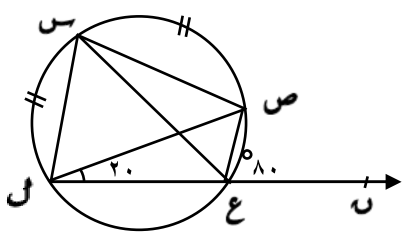
مثال ٣ **فى الشكل المقابل : ٩ ب جـ ى متـوازى أضلاع ، ق (∠ ب) = ١١٠°**
أثبت أن : ٩ ى = هـ ى ثـم احسـب : ق (∠ ٩ ى هـ)



البرهــان

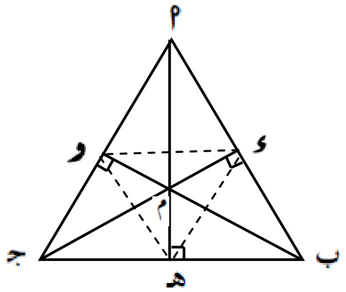
∵ ٩ ب جـ ى متـوازى أضلاع ∴ ق (∠ ٩) = ق (∠ جـ) = ٧٠°
∵ الشكل ى هـ ب جـ ربـاعى دائرى ∴ ق (∠ ٩ هـ ى) = ق (∠ جـ) = ٧٠°
∵ ق (∠ ٩) = ق (∠ ٩ هـ ى)
∴ △ ى ٩ هـ متسـاوى الساقين ∴ ٩ ى = هـ ى
، ق (∠ ٩ ى هـ) = ١٨٠° - (٧٠° + ٧٠°) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠°

مثال ٤ **فى الشكل المقابل : س منتصف $\overset{\frown}{ص ل}$ ، ق (∠ ص ع ن) = ٨٠° ، ق (∠ ص ل ع) = ٢٠°**
أوجـد : ق (∠ ع س ل) ، ق ($\overset{\frown}{س ص ع}$)



البرهــان

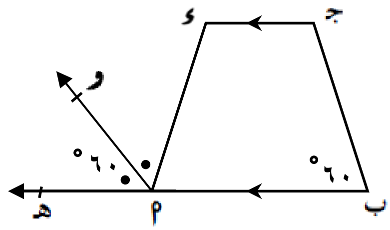
∵ ق (∠ ص ع ن) = ق (∠ ص س ل) = ٨٠°
، ∵ ق (∠ ص ل ع) = ق (∠ ص س ع) = ٢٠°
وهمـا زاويتان محيطيتان مشتركتان فى نفس القوس
∴ ق (∠ ع س ل) = ٨٠° - ٢٠° = ٦٠°
، ∵ س ص = س ل ∴ ق (∠ س ص ل) = ق (∠ س ل ص) = ٥٠°
∴ ق (∠ س ل ع) = ٢٠° + ٥٠° = ٧٠°
∴ ق ($\overset{\frown}{س ص ع}$) = ٢ ق (∠ س ل ع) = ١٤٠°



تَعرف على مثلث المواقع

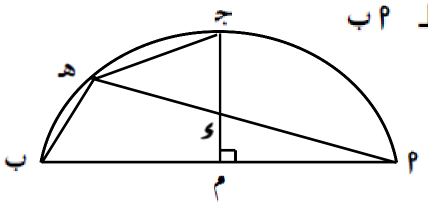
١- ارتفاعات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة .
٢- المثلث ى هـ و يسمى مثلث المواقع .
٣- هناك ٦ أشكال رباعية دائرية هى :
[ى م هـ ب ، و م هـ جـ ، م ى ﻡ و ، ى ﻡ جـ هـ ، ى ب جـ و ، ﻡ و هـ ب]
٤- ق (∠ ى هـ و) = ١٨٠° - ٢ ق (∠ ﻡ)
٥- ارتفاعات المثلث تنصف زوايا مثلث المواقع من الداخل .
٦- إذا كان المثلث ﻡ ب جـ متساوى الأضلاع فإن مساحته = ٤ × مساحة مثلث المواقع ى هـ و

مســائـل متنـوعــة



(١) فى الشكل المقابل : ﻡ و ينصف ∠ ى ﻡ هـ ، هـ ى // ب هـ ،
ق (∠ و ﻡ هـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°
أثبت أن : الشكل ﻡ ب جـ ى رباعى دائرى

البرهــان



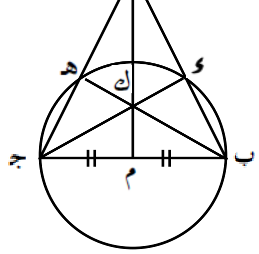
(٢) فى الشكل المقابل : ﻡ ب قطر فى نصف دائرة مركزها م ، م جـ ⊥ ﻡ ب
أثبت أن : (١) الشكل م ى هـ ب رباعى دائرى
(٢) ق (∠ جـ هـ ى) = ٤٥°

البرهــان

---

(٣) فى الشكل المقابل : ب جـ قطر فى الدائرة م . أثبت أن : الشكل ك م ب ى رباعى دائرى

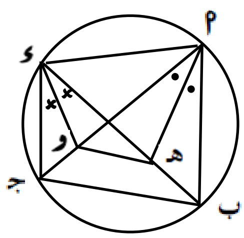
البرهــان



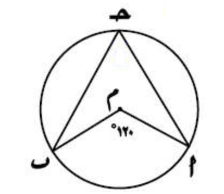
---

(٤) فى الشكل المقابل : ﻡ هـ ينصف ∠ ب ﻡ جـ ، ى و ينصف ∠ ب ى جـ
أثبت أن : (١) الشكل ﻡ هـ و ى رباعى دائرى . (٢) هـ و // ب جـ

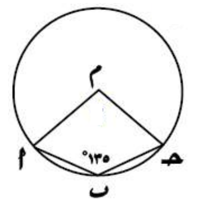
البرهــان



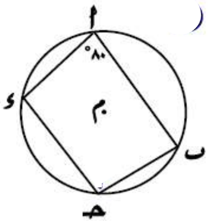
انظــر إلــى الأشكــال الآتيــة ثــم أكمــل



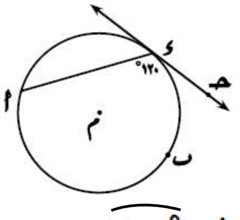
ق (∠ جـ) = ... °



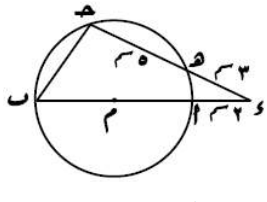
ق (∠ م) = ... °



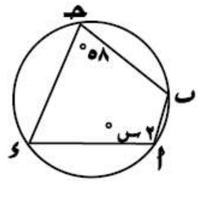
ق (∠ جـ) = ... °



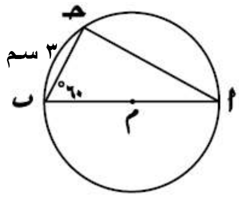
ق (⌒أ ب ء) = ... °



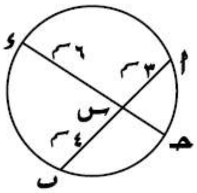
نق = ... سم



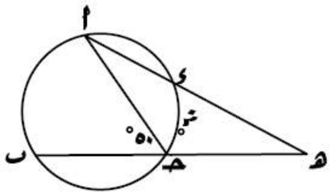
قيمة : س = ... °



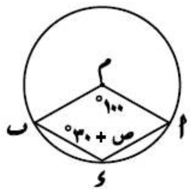
نق = ... سم



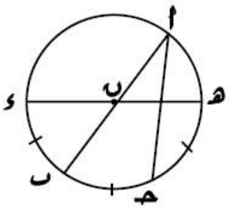
جـ س = ... سم



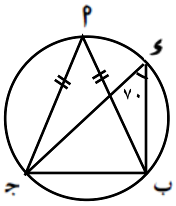
ق (∠ هـ) = ... °



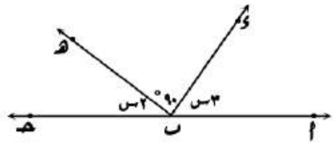
قيمة : ص = ... °



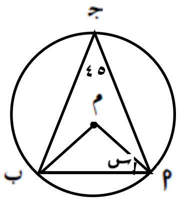
ق (∠ ب أ جـ) =......... °



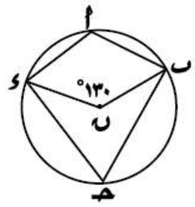
ق (∠ أ ب جـ) =......... °



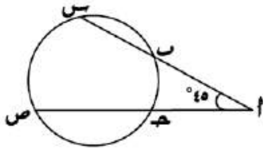
قيمة : س = ... °



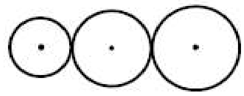
قيمة : س = ... °



ق (∠ ب أ ء) =....... °



ق (⌒س ص) - ق (⌒ب جـ) = ... °



عدد محاور تماثل الشكل = ...

عدد محاور تماثل

المثلث المتساوى الساقين = ...

المثلث المتساوى الأضلاع = ...

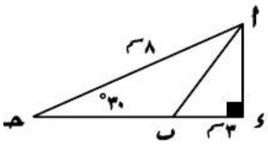
المثلث المختلف الأضلاع = ...

قياس نصف الدائرة = ... °

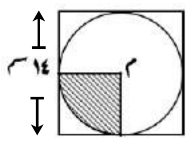
قياس الدائرة = ... °

طول نصف الدائرة = ...

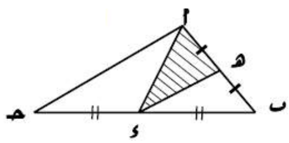
طول الدائرة = ...



أ ب = ... سم



محيط المنطقة المظللة = ... سم



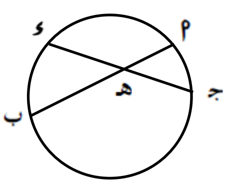
مساحة Δ أ ء هـ = ... مساحة Δ أ ب جـ

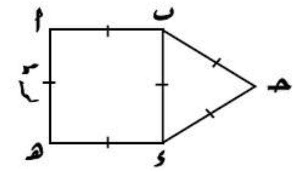
فى الشكل المقابل :

ق (⌒أ جـ) = ٤٠° ،

ق (⌒ء ب) = ٧٠°

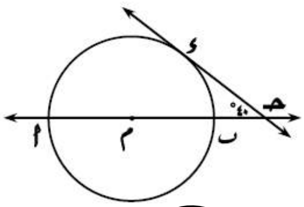
ق (∠ ب هـ ء) = ... °





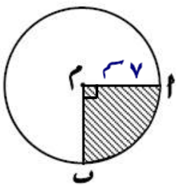
محيط الشكل

أ ب جـ ء هـ = ... سم



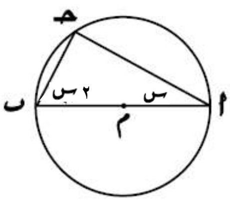
ق (⌒أ ء) = ... °

ق (⌒ء ب) = ... °



محيط الشكل المظلل = ...

مساحة الشكل المظلل = ...



قيمة : س = ... °

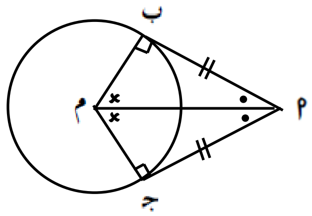
العلاقـة بين ممـاسـات الـدائـرة

(١) **الممـاسـان** المرسـومـان من نهايتى **قطر** فى دائـرة يكـونـان **متـوازيـان** .
(٢) **الممـاسـان** المرسـومـان من نهايتى **وتـر** فى دائـرة يكـونـان **متقـاطعـان** .

نظريــة : القطعتــان المماستــان المرســومتــان من نقطــة خارج الــدائــرة متســاويتان فى الطــول .

نتــائج هــامــة

١- المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محوراً لـوتر التماس لهـذين المماسين .
٢- المستقيم المار بمركز الـدائـرة ونقطـة تقاطـع مماسين لها ينصـف الـزاويـة بين هـذين المماسين كما ينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التمـاس .

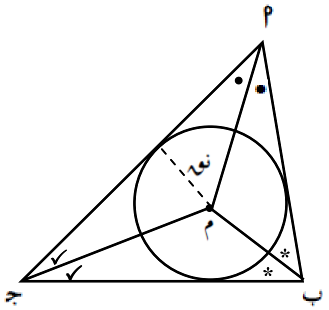


ويمكن تلخيص النظريــة والنتائج كالآتى :

(١) أ ب = أ جـ
(٢) م ب = م جـ = نق
(٣) الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى
(٤) ق (∠ ب أ م) = ق (∠ جـ أ م)
(٥) ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ م جـ)
(٦) △ أ جـ م ≡ △ أ ب م

تعــريــف

الدائرة **الداخلـة** لمضلع هى الـدائرة التى **تمس** جميع أضـلاعـه من **الـداخل** .



مــلاحظــات هــامــة

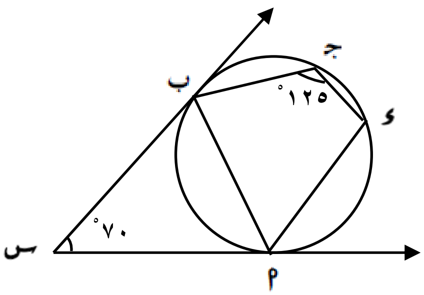
١- **مـركـز** الـدائـرة **الـداخلـة لأى** مثلث هـى **نقطة** تقاطع **منصفات** زوايـاه الداخلـة .
٢- **مـركـز** الـدائـرة **الخارجة لأى** مثلث هـى **نقطة** تقاطـع **محـاور تماثل** أضـلاعـه .
٣- طـول نصف قطـر الـدائرة الداخلـة (نق) = $\frac{٢ \times \text{مسـاحـة المثلث أ ب جـ}}{\text{محيـط المثلث أ ب جـ}}$
٤- **مـركـز** الـدائـرة الـداخلـة للمثلث **المتساوى الأضلاع** هى :

نقطة تقاطع منصفات زوايـاه الداخلـة ، نقطة محاور أضلاعه ، نقطة تقاطع ارتفاعاته ، نقطة تقاطع متوسطاته

المـمــاســات المشتــركــة لــدائــرتين

وضــع الـدائــرتيـن	متباعدتان	متماستان من الخارج	متقاطعتـان	متماستان من الداخـل	متـداخلتـان
عدد المماسات المشتركة	٤	٣	٢	١	صفر

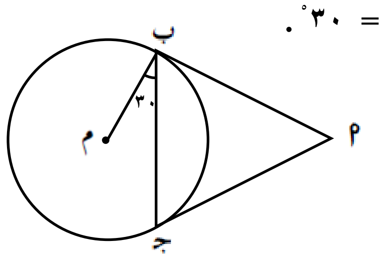
مثال ١ **فى الشكل المقابل :** $\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ب}}$ **مماسان للدائرة عند** أ ، ب
، ق (∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق (∠ د جـ ب) = ١٢٥°
أثبت أن : (١) أ ب **ينصف** ∠ د أ س (٢) $\overleftarrow{\text{أ د}}$ // $\overleftarrow{\text{س ب}}$



البرهــان

∵ $\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة ∴ س أ = س ب
∴ ق (∠ س أ ب) = ق (∠ س ب أ) = ٥٥° (١)
∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى ∴ ق (∠ د أ ب) = ٥٥° (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ س أ ب) = ق (∠ د أ ب) = ٥٥°
∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ينصف ∠ د أ س (أولاً)
∵ ق (∠ س ب أ) = ق (∠ د أ ب) = ٥٥° وهما فى وضع تبادل ∴ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ // $\overleftarrow{\text{س ب}}$ (ثانياً)

مثال ٢ **فى الشكل المقابل :** $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ **قطعتين مماستين للـدائـرة** م ، ق (∠ م ب جـ) = ٣٠° .
أثبت أن : △ أ ب جـ **متساوى الأضلاع**



البرهــان

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ تمس الـدائرة عند ب ∴ ق (∠ أ ب م) = ٩٠°
∴ ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° - ٣٠° = ٦٠°
، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتين مماستين للدائـرة م ∴ أ ب = أ جـ
∴ △ أ ب جـ متسـاوى الأضـلاع

تمـــاريــن عــامــة على العــلاقــة بيـن ممــاســات الــدائــرة

[أ] أكمــــل مــــا يــأتى : -

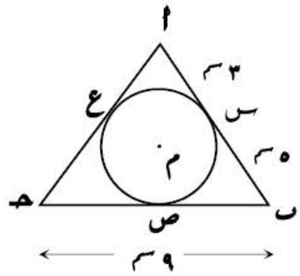
١- القطعتان المماستان المرسـومتـان من نقطـة خـارج دائـرة ....

٢- مـركـز الـدائـرة الـداخـلـة لأى مثلث هـو نقطـة تقـاطـع ....

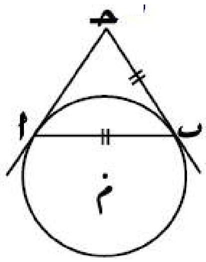
٣- عـدد المماسات المشتركـة للدائرتين المتباعدتين ....

٤- المماسـان المـرسـومـان من نـهايتى قطـر فـى دائرة ....

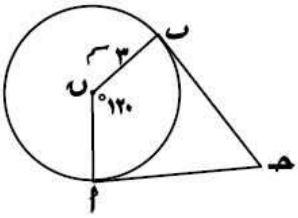
[ب] فى كل من الأشكـال الآتية أوجـــد المطلــوب : -



محيط Δ أ ب جـ = ... سم



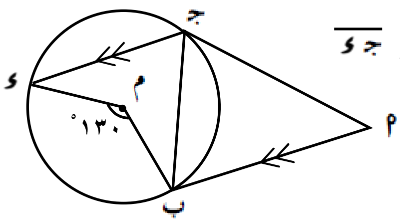
ق (∠ جـ) = ... °



ق (∠ جـ) = ... °

ن جـ = ... سم

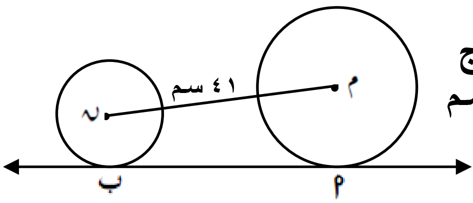
[جـ] أجــب عـــن الأسئلة الآتيــة : -



(١) فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتـان مماستان للدائـرة م ، $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، ق (∠ ب م ء) = ١٣٠°

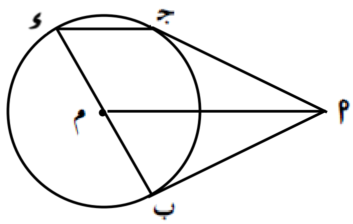
**(١) أثبت أن : $\overrightarrow{جـ ب}$ ينصف ∠ أ جـ ء		(٢) أوجــد : ق (∠ أ)**

البرهـــان



(٢) فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن من الخـارج عنـد أ ، ب على الترتيب ، طولا نصفى قطرى الدائرتين ١٧ سم ، ٨ سم على الترتيب ، م ن = ٤١ سم . احسب طـول $\overline{أ ب}$

البرهـــان



(٣) فى الشكل المقابل : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ قطعتان مماستان للدائـرة م ، $\overline{ب ء}$ قطر فى الـدائـرة . أثبت أن : $\overline{أ م}$ // $\overline{جـ ء}$

البرهـــان

الـزاويــة الممــاسـيــة

هـى الـزاويـة المكونـة من اتحـاد شعاعين أحـدهما مماس للدائـرة ، والآخـر يحمل وتـراً فى الدائـرة يمر بنقطة التماس

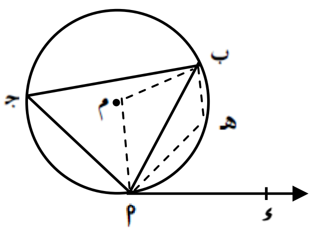
قياس الـزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المحصـور بين ضلعيها .

نظــريــة : قيــاس الــزاوية المماسيــة يســاوى قيــاس الــزاوية المحيطيــة المشتــركــة معها فى القــوس

نتائج وملاحظات هامة

١- قيـاس الزاويـــة المماسيـة يساوى نصــف قيـاس الـزاوية المركزية المشتركـــة معهـا فى القـــوس .
٢- الـزاويـة المماسيـة تكمل الـزاوية المحيطية المرسـومـة على وتـر الـزاوية المماسيـة وفى جهة واحدة منـه .

ويمكن تلخيص النظريــة والنتائج كالآتى :



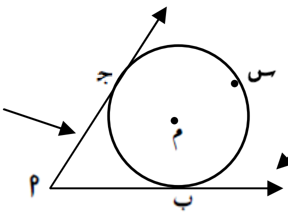
(١) ∠ ب أ ء تسمى زاويـة مماسيـة

(٢) ق (∠ ب أ ء) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$)

(٣) ق (∠ ب أ ء) المماسية = ق (∠ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ب م أ) المركزية

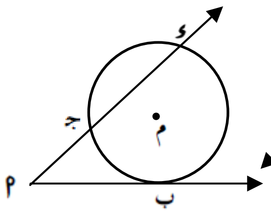
(٤) ق (∠ ب أ ء) + ق (∠ أ هـ ب) = ١٨٠°

تمارين مشهورة



ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{ب س جـ}$) - ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)]

أ ب = أ جـ



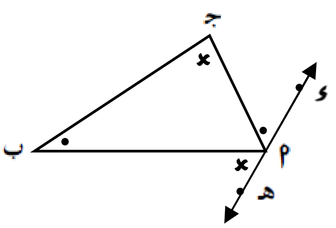
ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) - ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)]

$($أ ب$)^2$ = أ جـ × أ ء

عكــس النظــريــة

إذا رُسـم شعــاع من إحـدى نقطتى النهايـة لـوتــر فى دائــرة بحيث كــان قيــاس الــزاويــة المحصورة بين هــذا الشعــاع والــوتــر يســاوى قيــاس الــزاويــة المحيطية المــرســومــة على نفس الــوتــر من الجهــة الأخــرى فــإن هــذا الشعــاع يكون مماســاً للــدائــرة

إثبـات أن شـعاعـاً مرسـومـاً من أحـد رءوس مثلث يكون مماسـاً للدائـرة المـارة بـرءوس هـذا المثلث

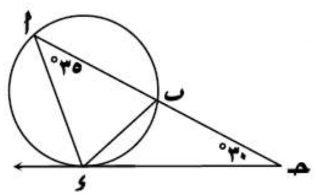


لإثبـات أن $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائـرة المـارة بـرءوس المثلث أ ب جـ نحـاول إثبات أن :

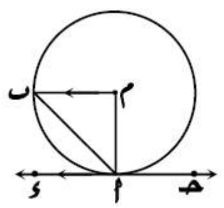
ق (∠ ء أ جـ) = ق (∠ ب) أو ق (∠ هـ أ ب) = ق (∠ جـ)

والعكس صحيح

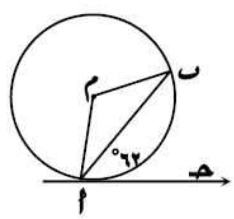
أكمل مــا يــأتى :



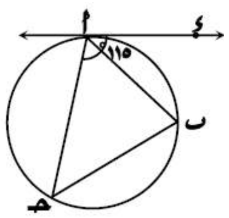
ق (∠ أ ب ء) = ...



ق (∠ ب أ ء) = ...

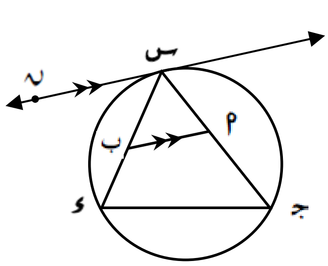


ق (∠ أ م ب) = ...



ق (∠ ب) = ...

مثال ١ فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{س ن}}$ مماس للدائرة عند س ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ن}}$
أثبت أن : الشكل أ جـ ء ب رباعى دائرى



البرهـــان

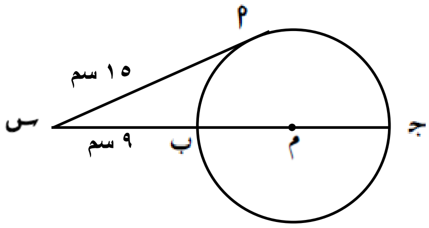
∵ ق (∠ ن س ء) المماسية = ق (∠ جـ) المحيطية (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ن}}$ ∴ ق (∠ ن س ء) = ق (∠ أ ب س) بالتبادل (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ أ ب س) = ق (∠ جـ)

∴ الشكل أ جـ ء ب رباعى دائرى

مثال ٢ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{س أ}}$ مماسة للدائرة م حيث :
س أ = ١٥ سم ، س ب = ٩ سم احسب نصف قطر الدائرة



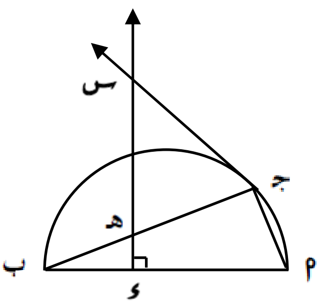
البرهـــان

∵ $(\text{س أ})^2$ = س ب × س جـ

∴ $\cancel{9}^{1}$ × (٩ + ٢ نق) = $\cancel{225}^{25}$

∴ ٩ + ٢ نق = ٢٥ ∴ ٢ نق = ١٦ ∴ نق = ٨ سم

مثال ٣ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى نصف دائرة ، $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ مماس لها عند جـ
، $\overleftarrow{\text{ء س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$. برهن أن :
(١) الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى . (٢) Δ س جـ هـ متساوى الساقين
(٣) عين مركز الدائرة المارة برءوس الشكل أ ء هـ جـ



البرهـــان

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى نصف دائرة ∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠° (١)

∵ $\overleftarrow{\text{ء س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق (∠ أ ء هـ) = ٩٠° (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ أ جـ ب) + ق (∠ أ ء هـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

∵ ق (∠ س جـ هـ) المماسية = ق (∠ أ) المحيطية

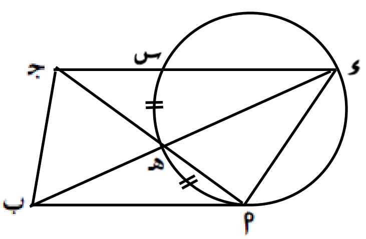
، ∵ ق (∠ س هـ جـ) الخارجة = ق (∠ أ)

∴ ق (∠ س جـ هـ) = ق (∠ س هـ جـ) ∴ Δ س جـ هـ متساوى الساقين (المطلوب ثانياً)

∵ ق (∠ أ جـ هـ) = ٩٠° ∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ قطر فى الدائرة المارة برءوس الشكل أ ء هـ جـ

∴ مركز الدائرة المارة برءوس الشكل أ ء هـ جـ هو منتصف $\overline{\text{أ هـ}}$ (المطلوب ثالثاً)

مثال ٤ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند أ ، هـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ س}}$
أثبت أن : (١) الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى
(٢) $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة المارة برءوس النقط ء ، هـ ، جـ



البرهـــان

∵ هـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ س}}$ ∴ ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ س ء هـ) (١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند أ ∴ ق (∠ هـ أ ب) = ق (∠ أ ء هـ) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق (∠ س ء هـ) = ق (∠ هـ أ ب)

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وفى جهة واحدة منها ∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

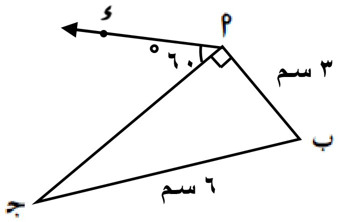
∵ ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ س ء هـ)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة المارة برءوس النقط ء ، هـ ، جـ

تمــاريــن عــامــة على الـزاويــة المماسيــة

(١) فى الشكل المقابل : أ ب ⊥ أ جـ . أثبت أن : أ ء مماساً للدائرة المارة برءوس Δ أ ب جـ

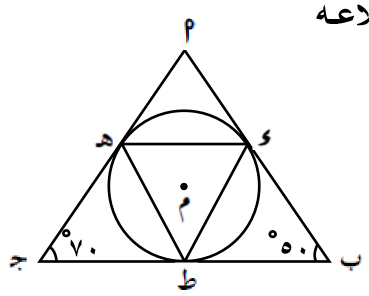
البرهــان



---

(٢) فى الشكل المقابل : دائرة مركزها م مرسومة داخل مثلث أ ب جـ وتمس أضلاعه فى ء ، هـ ، ط حيث : ق(∠ب) = ٥٠° ، ق(∠جـ) = ٧٠° .
أوجد بالبرهان قياسات زوايا المثلث ء هـ ط .

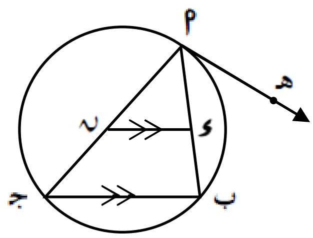
البرهــان



---

(٣) فى الشكل المقابل : أ هـ مماس للدائرة ، ء ن // ب جـ .
أثبت أن : أ هـ مماساً للدائرة المارة بالنقط أ ، ء ، ن

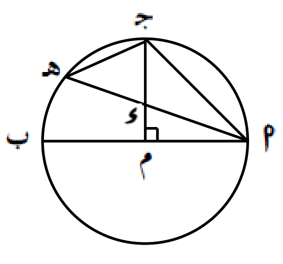
البرهــان



---

(٤) فى الشكل المقابل : أ ب قطر فى الدائرة م ، م جـ نصف قطر عمودى على أ ب
أثبت أن : أ جـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث جـ ، ء ، هـ

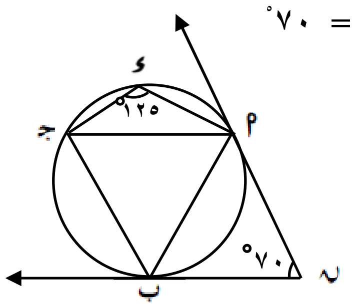
البرهــان



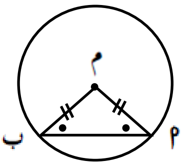
---

(٥) فى الشكل المقابل : ن أ ، ن ب مماسان للدائرة عند أ ، ب ، ق(∠ن) = ٧٠°
، ق(∠أ ء جـ) = ١٢٥° . أثبت أن : أ ب = أ جـ

البرهــان



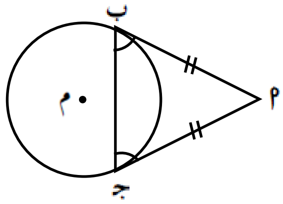
حالات عـامـة يكون فيهـا المثلث متساوى السـاقين



$م أ = م ب = نق$

△ م أ ب متساوى الساقين

ق(∠أ) = ق(∠ب)

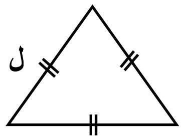


أ ب = أ جـ

△ أ ب جـ متساوى الساقين

ق(∠ب) = ق(∠جـ)

محيط ومساحة المثلث المتساوى الأضلاع



بفرض أن طول ضلعه = ل

محيطه = ٣ ل

مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}

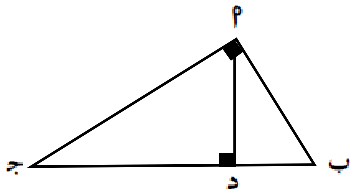
مثـال : مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٠ سم

مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ١٠٠ = ٢٥\sqrt{٣}$ سم^{٢}

نصف قطر الدائرة **الداخلة** للمثلث = $\frac{ل}{٢\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

نصف قطر الدائرة **الخارجة** عن المثلث = $\frac{ل}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

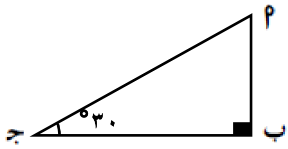
نظريـة إقليدس



$(أ د)^{٢} = ب د \times د جـ$

$أ د = \frac{أ ب \times أ جـ}{ب جـ}$

نتيجة هـامـة



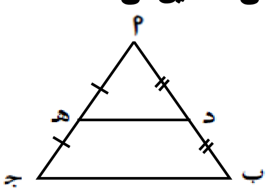
ق(∠ب) = ٩٠°

ق(∠جـ) = ٣٠°

أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

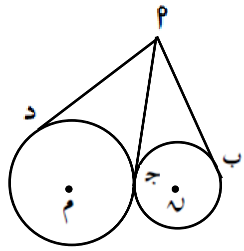
القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث

فى الشكـــل المقابـل نجــد أن :



(١) $\overline{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

(٢) دهـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



أ ب = أ جـ (نظرية)

أ جـ = أ د (نظرية)

∴ أ ب = أ جـ = أ د

∴ أ مركز الدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، د

ثـلاثيـات فيثـاغـورثيـة مشهـورة

(٣ ، ٤ ، ٥) ، (٦ ، ٨ ، ١٠)

(٥ ، ١٢ ، ١٣) ، (٧ ، ٢٤ ، ٢٥)

(١٢ ، ١٦ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٢٠ ، ٢٥)

قـوانين مسـاحات بعض الأشكال الهندسيـة

١- مسـاحة أى مثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

٢- مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولى قطريـه

٣- محيـط المعين = طـول الضلـع × ٤

٤- محيط الدائرة = ٢ ط نق

٥- مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

٦- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

٧- عـدد أقطار أى مضلـع = $\frac{ن(ن - ٣)}{٢}$

٨- قياس الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$

٩- مجمـوع قيـاسـى الزاويتـــان المتتامتـان = ٩٠°

١٠- مجموع قيـاسـى الزاويتـان المتكـاملتـان = ١٨٠°

١١- زاويتـا القاعـدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتـان .

قـانـون الـزاويـة بين عقربى السـاعـة

س / ما قياس الزاوية بين عقربى الساعة عند ٥ : ٢٠

الجـواب

قياس الزاوية بين عقربى الساعة =

$$\left| \text{قراءة عقرب الساعات} \times ٣٠ - \text{قراءة الدقائق} \times \frac{١١}{٢} \right|$$

$$= \left| ٥ \times ٣٠ - ٢٠ \times \frac{١١}{٢} \right| = ١٥٠ - ١١٠ = ٤٠°$$

قــاعـدة NR

$$\frac{١}{ن} = \frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن(ن + ١)}$$

أمثلـة

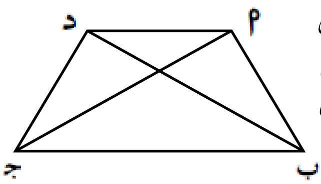
$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٥} + \frac{١}{٢٠}$

$\frac{١}{٧} = \frac{١}{....} + \frac{١}{....}$

$\frac{١}{٤} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{١٢}$

$\frac{١}{١٠} = \frac{١}{....} - \frac{١}{....}$

نظريـة بطليمـوس



تنص هذه النظريـة على أنـه إذا كـان الشكـل أ ب جـ د ربـاعـى دائـــرى فإن حـاصل ضرب طولى القطرين يســاوى مجمــوع حاصـل ضــرب طـولـى كـل ضلعين متقابلـين

أى أن : أ جـ × ب د = أ د × ب جـ + أ ب × د جـ

مـع تمنيـاتى لكـم بالنجـاح

أ / نجــاح