الدائـــــــــرة

الدائرة :-هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعد ثابتا عن نقطة ثابتة فى المستوى تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة

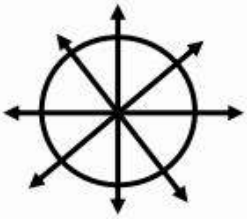
نصف قطر الدائرة :- أى قطعة مستقيمة تصل بين المركز وأى نقطة على الدائرة وكلها متساوية وتساوى نق

وتر الدائرة :- هى أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة

قطر الدائرة :- وتر يمر بالمركز أو أى قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة وتمر بالمركز

التماثل فى الدائرة :-

أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها
ولهذا فإن للدائرة عدد لا نهائى من محاور التماثل



لاثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م نثبت أن

م أ = م ب = م جـ = نق

محيط الدائرة = ٢ ط نق ،،،،،، مساحة الدائرة = ط ق^{٢} ،،،،، طول قطر الدائرة = ٢نق

تدريب ١ :- إثبت أن النقط أ=(٠ ، ١) ، ب=(١ ، ٢) ، جـ =(-٢ ، ٥) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م =(-١ ، ٣) ثم أوجد مساحتها

م أ = $\sqrt{(١+٠)^{٢} + (٣ - ١)^{٢}} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

م ب = $\sqrt{(١+١)^{٢} + (٣ - ٢)^{٢}} = \sqrt{١+٤} = \sqrt{٥}$

م جـ = $\sqrt{(-٢+١)^{٢} + (٣-٥)^{٢}} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

طول نصف قطر الدائرة = $\sqrt{٥}$

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = ط × ٥ = ٥ط

تدريب٢: إذا كانت النقط أ = (-٢ ، ١) تقع على محيط الدائرة التى مركزها (٢ ، ٤) أوجد طول نصف

قطر هذه الدائرة ثم بين ما إذا كانت النقطة ب (١ ، ٣) تقع على هذه أم لا

∵ أ تقع على محيط الدائرة م

نق = م أ = $\sqrt{(٢+٢)^٢ + (٤ - ١)^٢} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طولية

لمعرفة موقع النقطة ب بالنسبة للدائرة نوجد ب م

ب م = $\sqrt{(٢+١)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣} \neq$ نق

∴ ب لا تقع على محيط الدائرة

تدريب٣ : إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزها م حيث أ = (-٥ ، -٣) ، ب = (١ ، ٥) أوجد

(أولا) مركز الدائرة (ثانيا) طول نصف قطر هذه الدائرة (ثالثا) محيط الدائرة

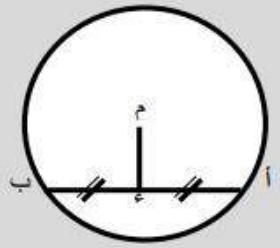
م = منتصف أ ب = ($\frac{-٥+١}{٢}$ ، $\frac{-٣+٥}{٢}$) = ($\frac{-٤}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$) = (-٢ ، ١)

نق = م أ = $\sqrt{(-٥+٢)^٢ + (٣+١)^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات طولية

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ ط × ٥ = ١٠ ط

نتائج هامة على الدائـرة

نتيجة(١)



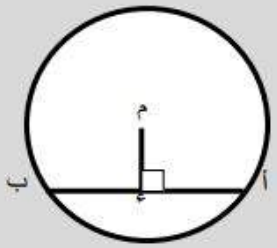
المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

فمثلا إذا كانت ء منتصف $\overline{أ ب}$ فإن $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$

نتيجة(٢)

المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

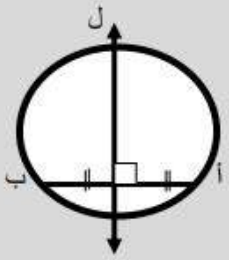
فمثلا إذا كان $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ فإن ء منتصف $\overline{أ ب}$



نتيجة(٣)

المستقيم المرسوم عموديا على الوتر من منتصفه يكون ماراً بالمركز

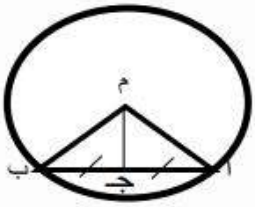
فمثلا إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ عمودى على $\overline{أ ب}$ من منتصفه فإن م $\overleftrightarrow{ل}$



فى الشكل المقابل

إذا كان جـ منتصف أ ب ، ق(أ $\hat{م}$ جـ)= ٥٠°

أوجد ق (م $\hat{ب}$ جـ)



الحـــــــــل

∵ جـ منتصف أ ب

∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ ق(م جـ أ) = ٩٠°

فى Δ م أ ب

∵ م أ = م ب

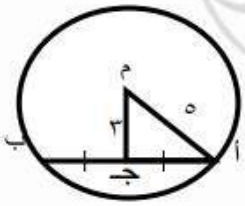
ق(م ب جـ) = ق (م أ جـ) = ٤٠°

ق(م أ جـ) = ٩٠ ـ ٥٠ = ٤٠°

فى الشكل المقابل

إذا كانت جـ منتصف أ ب ، م جـ = ٣سم

، نق = ٥سم أوجد طول أ ب



الحـــــــــل

جـ منتصف أ ب ق(م جـ أ) = ٩٠°

(أ جـ)^{٢} = (أ م)^{٢} - (م جـ)^{٢}=(٥)^{٢} – (٣)^{٢} =١٦

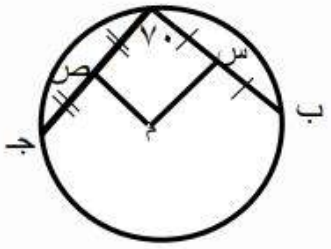
أ جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

أ ب = ٢ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨سم

فى الشكل المقابل

س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ ، ق(أ) = ٧٠°

أوجد ق (س م ص) ، ق (س م ص) المنعكسة



الحـــــــــل

∵ س منتصف أ ب م س ⊥ أ ب

∴ ق (م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أ جـ م ص ⊥ أ جـ

∴ ق(م ص أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى = ٣٦٠°

ق(س م ص) = ٣٦٠° – [٩٠° + ٩٠° + ٧٠°]

ق (س م ص) = ٣٦٠° – ٢٥٠° = ١١٠

ق(س م ص)المنعكسة = ٣٦٠° – ق(س م ص)

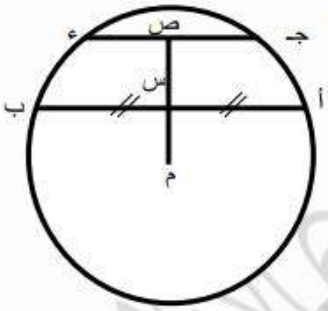
= ٣٦٠° – ١١٠°

= ٢٥٠°

فى الشكل المقابل

س منتصف أ ب ، أ ب // جـ ء

إثبت أن ص منتصف جـ ء



الحـــــــــل

س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

أ ب // جـ ء ، م س ⊥ أ ب

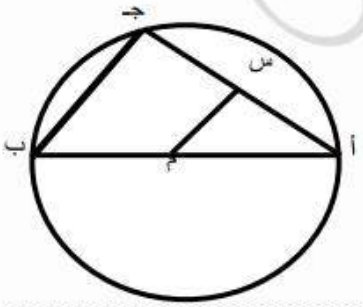
∴ م ص ⊥ جـ ء

∴ ص منتصف جـ ء

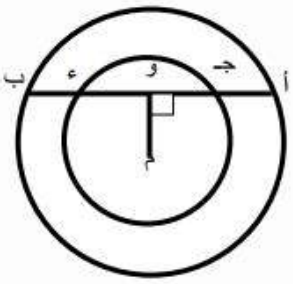
فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، م س ⊥ أ جـ

ب جـ = ١٠ سم أوجد طول س م



متروكـــــــــــــ للطالـــــــــــــب

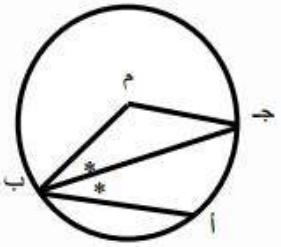


فى الشكل المقابل
دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، م و جـء إثبت أن أ جـ = ب ء

الحـــــــــل

فى الدائرة الصغرى
م و ⊥ جـ ء جـ و = و ء (١)
فى الدائرة الكبرى
م و ⊥ أ ب أ و = و ب (٢)

بطرح ١ من ٢
أ و – جـ و = و ب – و ء
أ جـ = ب ء



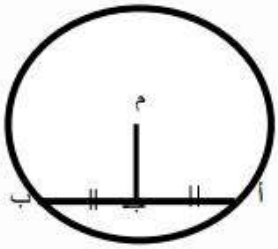
فى الشكل المقابل
أ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ ينصف (أ ب م)
إثبت أن م جـ // أ ب

الحـــــــــل

ب جـ ينصف (أ ب م)
∴ ق(م ب جـ) = ق (أ ب جـ) (١)
م جـ = م ب (أنصاف أقطار)
∴ ق(م جـ ب) = ق (م ب جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن
ق(م جـ ب) = ق (أ ب جـ) [وهما متبادلتان]
∴ جـ م // أ ب

تمـــــــــــارين(١)



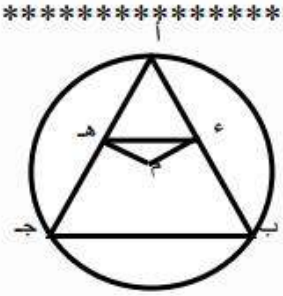
(١) فى الشكل المقابل

م دائرة طول نصف قطرها ١٠سم ، أ ب وتر فيها

طوله ١٢سم ، جـ منتصف أ ب أوجد

(أولا) طول م جـ (ثانيا) مساحة △م أ ب

****



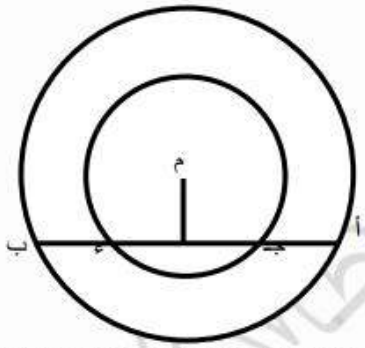
(٢) فى الشكل المقابل

م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ

إثبت أن ء هـ // ب جـ

وإذا كان ء هـ = ٥سم أوجد طول ب جـ

****



(٣) فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة

الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء فإذا

كان أ ب = ٢٠سم ، جـ ء = ١٢سم أوجد

طول أ جـ

****

(٤) فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وترين فى دائرة م ، ق (ب أ جـ) = ٤٥°

ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

رسم ء م فقطع أ جـ فى و إثبت أن م هـ = هـ و

****

(٥) أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة م التى طول نصف قطرها ١٠سم فإذا كان أ ب = ١٦سم

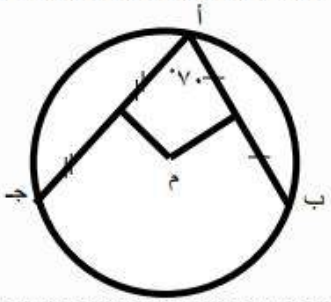
، جـ ء = ١٢سم أوجد البعد بين أ ب ، جـ ء إذا كان أ ب ، جـ ء

(أولا) فى جهة واحدة من م (ثانيا) فى جهتين مختلفتين من م

(٦) أ ب وتر فى الدائرة م ، ب جـ قطر فيها ، ء منتصف أ ب إثبت أن م ء // أ جـ ثم أحسب ق(أ)

****

(٧) فى الشكل المقابل



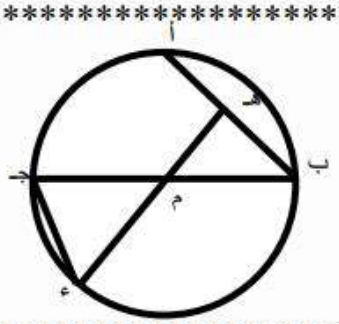
س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

ق(ب أ جـ) = ٧٠°

أوجد ق (س م ص)

****

(٨) فى الشكل المقابل



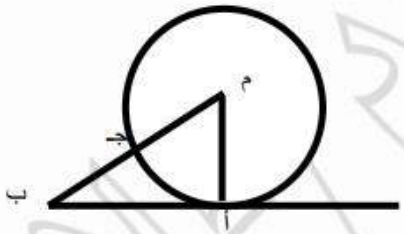
هـ منتصف أ ب ، ب جـ = ٨سم

م هـ = ٢سم

أوجد طول ء جـ

****

(٩) فى الشكل المقابل



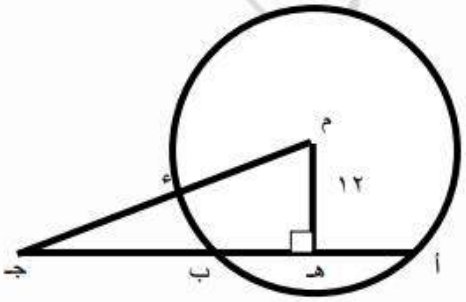
أ ب مماس للدائرة م ، جـ منتصف م ب

أوجد ق (أ م ب)

(١٠) أ ب قطر فى دائرة مركزها م ، أ جـ وتر فيها حيث ق (ب أ جـ) = ٣٠° وصل ب جـ ورسم م ء ⊥ أ جـ يقطعه فى ء إثبت أن

(أ) م ء // ب جـ (ب) ق (أ جـ ب) = ٩٠° (جـ) طول ب جـ = طول نصف قطر الدائرة

(١١) فى الشكل المقابل



م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم ، م جـ يقطع الدائرة فى ء حيث جـ ء = ٥سم

م هـ ⊥ أ جـ حيث م هـ = ١٢ سم

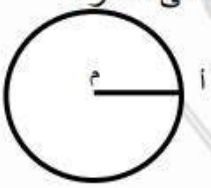
أوجد طول كلا من أ ب ، ب جـ

أوضاع نقطة و مستقيم ودائرة

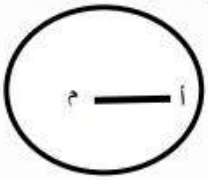
أولا أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

إذا كان م أ > نق
فإن أ تقع خارج الدائرة

إذا كان م أ = نق
فإن أ تقع على الدائرة



إذا كان م أ < نق
فإن أ تقع داخل الدائرة



مثال بين موضع النقط أ =(-٣ ، ٧) ، ب=(-٢ ، ٦) ، جـ=(٣ ، ٥) من الدائرة التى مركزها م=(١ ، ٢) وطول نصف قطرها ٥سم

الحـــــــــل

م أ = $\sqrt{(٣+١)^٢ + (٢-٧)^٢}$ = $\sqrt{١٦ + ٢٥}$ = $\sqrt{٤١}$ > نق — أ تقع خارج الدائرة

م ب = $\sqrt{(٢+١)^٢ + (٢-٦)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ = نق — ب تقع على الدائرة

م جـ = $\sqrt{(١-٣)^٢ + (٢-٥)^٢}$ = $\sqrt{٤ + ٩}$ = $\sqrt{١٣}$ < نق — جـ تقع داخل الدائرة

****

س أكمل العبارات الاتية

١- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٣سم فإن أ تقع ..... الدائرة

٢- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ٧سم فإن أ تقع ..... الدائرة

٣- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = ١٠سم فإن أ تقع ..... الدائرة

٤- دائرة م طول نصف قطرها = ١٠سم فإذا كان م أ = صفرسم فإن أ تنطبق على ..... الدائرة

٥- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = نق سم فإن أ تقع..... الدائرة

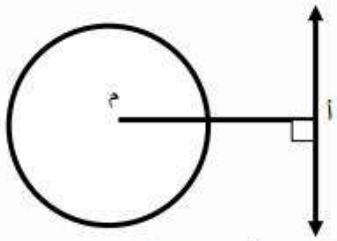
٦- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = نق سم فإن أ تقع..... الدائرة

٧- دائرة م طول نصف قطرها نق سم فإذا كان م أ = نق سم فإن أ تقع ..... الدائرة

٨- دائرة طول قطرها ١٠سم فإذا كان المستقيم ل يمس الدائرة فإنه يبعد عن مركزها ..... سم

٩- إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، أ نقطة تقع على الدائرة فإن م أ = ... سم

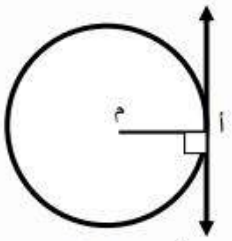
ثانياً أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة



إذا كان م أ > نق فإن

ل يقع خارج الدائرة

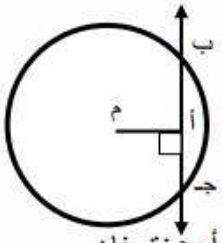
ل ∩ الدائرة = ϕ



إذا كان م أ = نق فإن

ل يكون مماس للدائرة

ل ∩ الدائرة = { أ }



إذا كان م أ < نق فإن

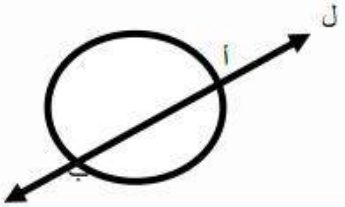
ل يكون قاطع للدائرة

ل ∩ الدائرة = { ب ، جـ}

لاحظ أن

المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ ، ب }

المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{أ ب}}$



س أكمل العبارات الاتية :-

١- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = ٥سم ، أ و ل حيث م أ ل فإذا كان

(أ) م أ = ٧سم فإن ل يقع .....الدائرة

(ب) م أ = ٥سم فإن ل يسمى ..... للدائرة

(جـ) م أ = ٢سم فإن ل يسمى ..... للدائرة

٢- دائرة مركزها م طول نصف قطرها = نق ، أ و ل حيث م أ ل فإذا كان

(أ) م أ = $\frac{٢}{٥}$ نق سم فإن ل يقع .....الدائرة

(ب) م أ = نق سم فإن ل يسمى ..... للدائرة

(جـ) م أ = $\frac{٩}{٥}$ نق سم فإن ل يسمى ..... للدائرة

٣- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = ϕ فإن ل يكون ..... الدائرة

٤- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س } فإن ل يكون ..... الدائرة

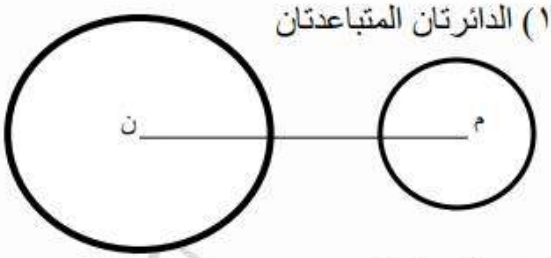
٥- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { س ، ص} فإن ل يكون ..... الدائرة

٦- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ ، ب} فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

٦- إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة = { أ } فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة = ...

أوضاع دائرتين بالنسبة لبعضهما

(١) الدائرتان المتباعدتان

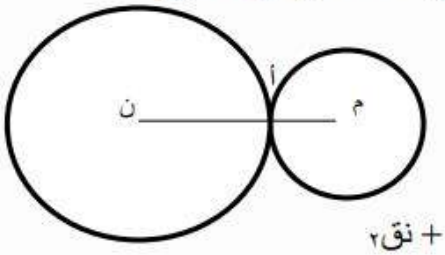


م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ

(٢) الدائرتان المتماستان من الخارج

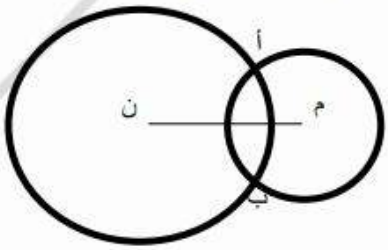


م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

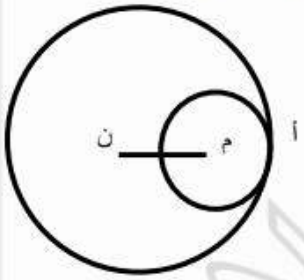
(٣) الدائرتان المتقاطعتان



نق١ – نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }

(٤) الدائرتان المتماستان من الداخل

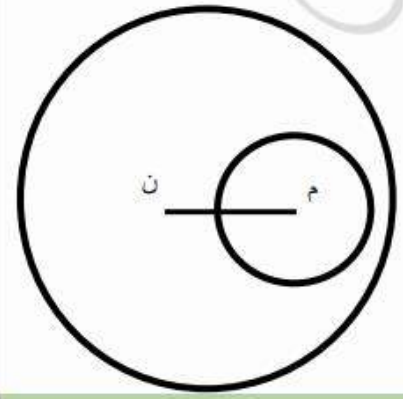


م ن = نق١ – نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن =سطح م

(٥) الدائرتان المتداخلتان



م ن < نق١ – نق٢

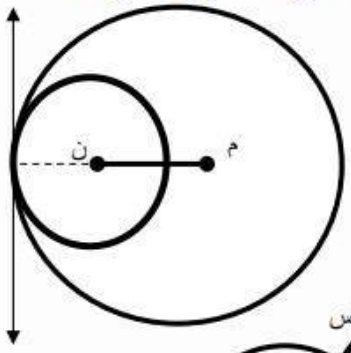
الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ

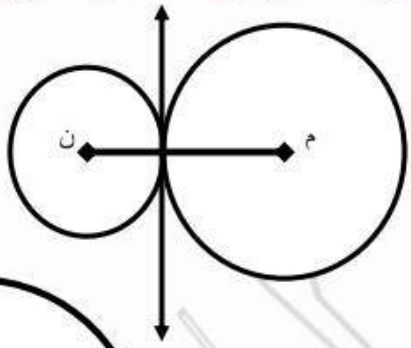
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن =سطح م

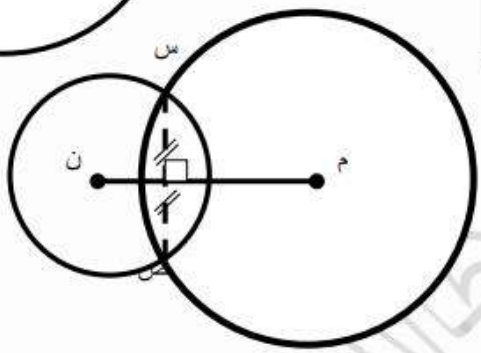
خط المركزين لدائرتين :- هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزيهما ($\overline{\text{م ن}}$)

ملاحظات :-

١- خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج يكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس





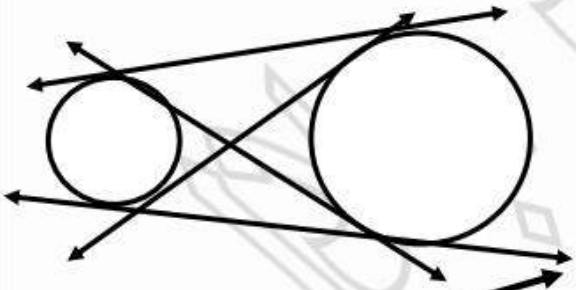


٢- خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه

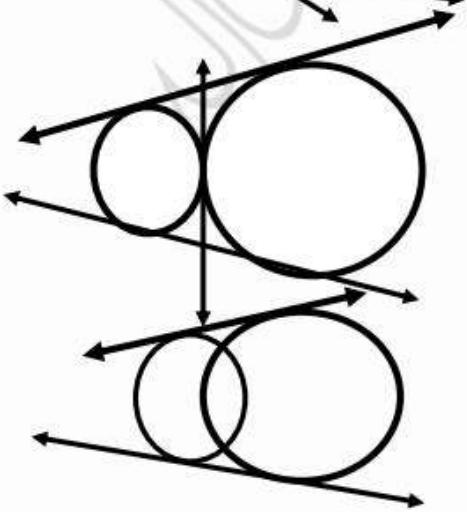
٣- الدائرتان المتداخلتان ليس لهما مماس مشترك

٤- الدائرتان المتماستان من الداخل لهما مماس مشترك واحد

٤- عدد المماس المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متباعدتين = ٤ مماسات



٥- عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متماستين من الخارج = ٣مماسات



٦- عدد المماسات المشتركة التى يمكن رسمها لدائرتين متقاطعتين = ٢

س أكمل العبارات الاتية

١- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٥سم فإن الدائرتان تكونان .....

٢- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١٣سم فإن الدائرتان تكونان .....

٣- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٥سم فإن الدائرتان تكونان .....

٤- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ٣سم فإن الدائرتان تكونان .....

٦- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٥سم فإذا كان م ن = ١سم فإن الدائرتان تكونان .....

٧- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان .....

٨- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان .....

٩- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن < نق$_{١}$ - نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان .....

١٠- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان م ن = نق$_{١}$ - نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان .....

١١- دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ سم ، نق$_{٢}$ سم فإذا كان نق$_{١}$ – نق$_{٢}$ < م ن < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ فإن الدائرتان تكونان .....

١٢- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان ..... أو .....

١٣- إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان ..... أو .....

١٤- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان تكونان ....

١٥- إذا كانت سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن فإن الدائرتان تكونان ..... أو .....

١٦- إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ϕ فإن الدائرتان تكونان .....

١٧- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين = ...

١٨- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج = ...

١٩- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين = ...

٢٠- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الداخل = ...

٢١- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين = ...

حقائق هندسية

١- المماس لدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس
٢- المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايته يكون مماس للدائرة
٣- المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان

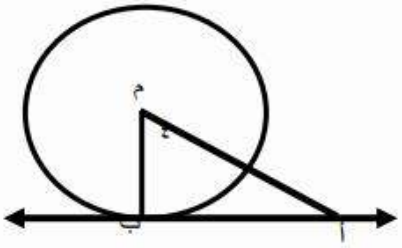
****

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق(أ م ب) = ٤٠°

أوجد ق (م أ ب)



الحـــــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

م ب ⊥ أ ب ق(أ ب م) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

ق (م أ ب) = ١٨٠ – [٤٠+٩٠]

= ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

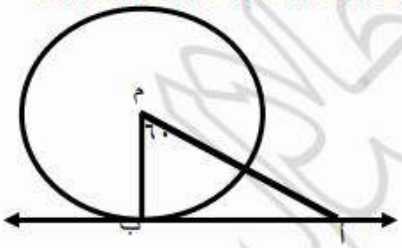
****

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق(أ م ب) = ٦٠°

، أ ب = ١٠سم أوجد طول نصف قطر الدائرة



الحـــــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

م ب ⊥ أ ب ق(أ ب م) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

ق (م أ ب) = ١٨٠ – [٦٠+٩٠]

= ١٨٠° – ١٥٠° = ٣٠°

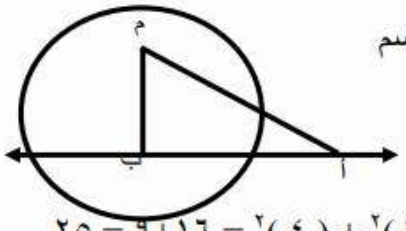
نق = ب م = $\frac{١}{٢}$ أ م = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥سم

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، طول نصف قطر الدائرة = ٣سم

، أ ب = ٤ سم أوجد طول أ م



الحـــــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، م ب نصف قطر

م ب ⊥ أ ب ق(أ ب م) = ٩٠°

(أ م)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢}

(أ م)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ١٦+٩ = ٢٥

أ م = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم

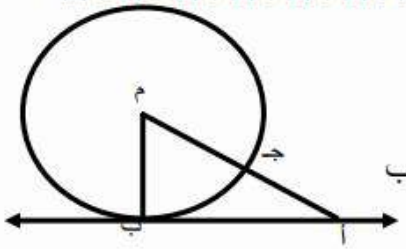
****

مثال

فى الشكل المقابل

دائرة م طول نصف قطر الدائرة = ٦سم

، أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٤سم إثبت أن أ ب مماس للدائرة م عندب



الحـــــــــل

أ م = أ جـ + جـ م = ٤ + ٦ = ١٠سم

(أ م)^{٢} = (١٠)^{٢} = ١٠٠

(أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢} = (٨)^{٢}+(٦)^{٢}=٣٦+٦٤=١٠٠

(أ م)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب م)^{٢}

ق (م ب أ) = ٩٠°

م ب ⊥ أ ب

∴ أ ب مماس للدائرة م عند أ

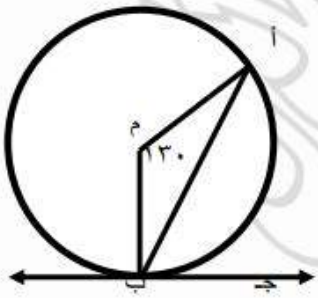
****

مثال

فى الشكل المقابل

جـ ب مماس للدائرة م عند ب ، ق (أ م ب) = ١٣٠°

أوجد ق (أ ب جـ)



الحـــــــــل

ب جـ مماس للدائرة م عند ب ، ب م نصف قطر

م ب ⊥ ب جـ ق(م ب جـ) = ٩٠°

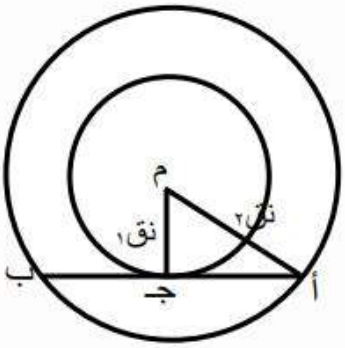
فى △ أ م ب م ب = م أ (أنصاف أقطار)

ق(م ب أ) = ق(م أ ب) = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥°

ق(أ ب جـ) = ٩٠° ـ ٢٥° = ٥٥°

مثال فى الشكل المقابل

دائرتان لهما نفس المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى يمس الدائرة الصغرى عند جـ ، أ ب = ١٠سم احسب المساحة المحصورة بين الدائرتين



الحـــــــــل

أ ب مماس للدائرة الصغرى ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ جـ منتصف أ ب ∴ أ جـ = ٥سم

المساحة المحصورة بين الدائرتين = ط نق٢ ٢ – ط نق١ ٢

= ط [نق٢ ٢ – نق١ ٢]

= ط [(أ م)٢ – (جـ م)٢] = ط (أ جـ)٢

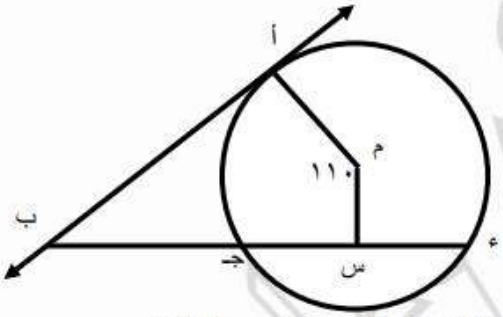
= ط (٥)٢ = ٢٥ ط

****

مثال فى الشكل المقابل

إذا كانت س منتصف ء جـ ، أ ب مماس للدائرة م عند أ ، ق (أ م س) = ١١٠

أوجد ق (ب)



الحـــــــــل

س منتصف ء جـ ∴ ق(م س جـ) = ٩٠°

أ ب مماس ، م أ (نق) ∴ ق(م أ ب)=٩٠°

مجموع قياسات زوايا الرباعى = ٣٦٠°

ق(ب) = ٣٦٠° – [٩٠° +٩٠° + ١١٠]

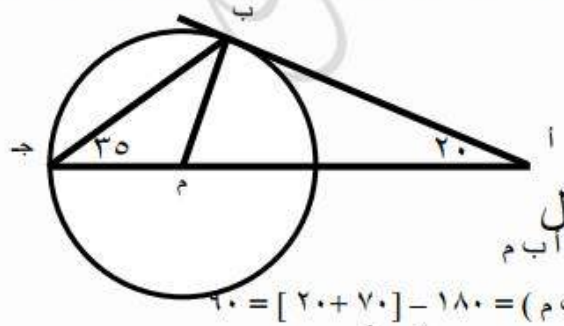
= ٣٦٠ – ٢٩٠ = ٧٠°

****

مثال فى الشكل المقابل

ثبت أن أ ب مماس للدائرة م إذا كان

ق(ب جـ م) = ٣٥° ، ق(أ)=٢٠°



الحـــــــــل

فى△ب م جـ م ب = م جـ (أنصاف أقطار) فى△ أ ب م

∴ ق(م ب جـ) = ق(م جـ ب) = ٣٥°

ق(أ م ب) = ق(م ب جـ) + ق(م جـ ب)

= ٣٥° +٣٥° = ٧٠°

ق(أ ب م) = ١٨٠ – [٧٠ +٢٠] = ٩٠°

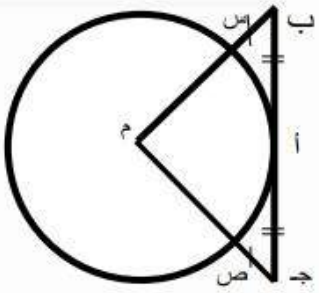
∴ م ب ⊥ أ ب

∴ أ ب مماس للدائرة م عند ب

مثال فى الشكل المقابل

ب س = جـ ص ،، أ ب = أ جـ إثبت أن

(١) م ب = م جـ (٢) ب جـ مماس للدائرة م



الحـــــــــل

م س = م ص = نق ، ب س = جـ ص

م س + س ب = م ص + ص جـ

م ب = م جـ (وهو المطلوب أولا)

فى △ م ب جـ

م ب = م جـ (مثلث متساوى الساقين)

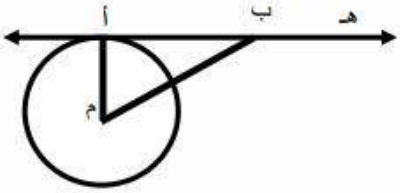
أ منتصف ب جـ

م أ ⊥ ب جـ

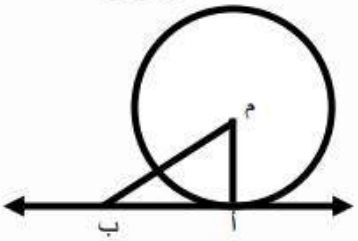
∴ ب جـ مماس للدائرة م عند أ

تمارين

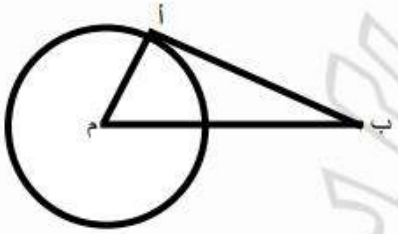
[١] بأستخدام كلا من الاشكال الاتية أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة



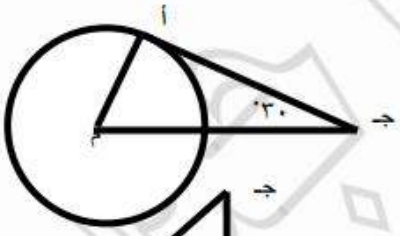
١- إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ
، ق (م ب هـ) = ١٢٠°
فإن ق (أ م ب) = ...
(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٨٠° (ء) ٩٠°



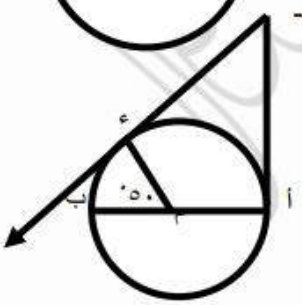
٢- إذا كان أ ب مماسا للدائرة م عند أ
أ ب = أ م
فإن
ق(م) = ...
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°



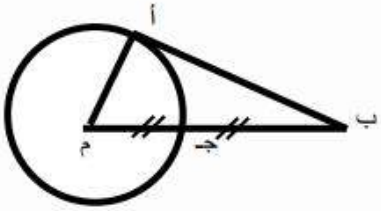
٣- إذا كان أ ب تمس الدائرة م عند أ
أ م = ٦سم ، م ب = ١٠ سم
فإن
أ ب= .....سم
(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (ء) ١٢



٤- جـ أ يمس الدائرة م عند أ
ق(أ جـ م) = ٣٠°
فإذا كان طول نصف قطر الدائرة = ٥سم
فإن م جـ = ... سم
(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ ٣ (ء) ٢,٥



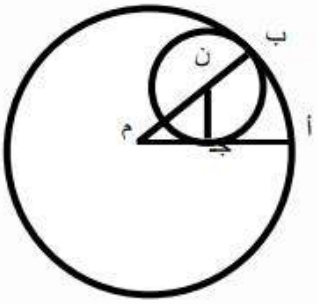
٥- أ ب قطر فى الدائرة م
جـ أ ، جـ ء يمسان الدائرة عند أ ، ء
فإذا كان ق(ء م ب) = ٥٠°
فإن ق(جـ) = ...
(أ) ٥٠° (ب) ١٣٠° (جـ) ٩٠° (ء) ٤٠°



٦- إذا كانت أ ب تمس الدائرة م عند أ
م ب ∩ الدائرة م = { جـ }
حيث م جـ = ب جـ فإن ق(ب) = ...
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

أجب عما يلي :

[٢] فى الشكل المقابل



دائرتان م ، ن متماستان من الداخل فى ب

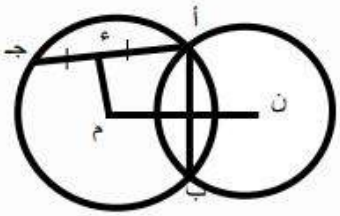
أ م تمس الدائرة ن فى جـ فإذا كان طولا نصفى

قطريهما ٩سم ، ٤سم على الترتيب أوجد طول أ جـ

[٣] دائرة م طول نصف قطرها نق١ = ٤سم تمس دائرة ن فإذا كان م ن = ٧سم أوجد النسب الاتية

(أ) محيط الدائرة م : محيط الدائرة ن (ب) مساحة الدائرة م : مساحة الدائرة ن

[٤] فى الشكل المقابل

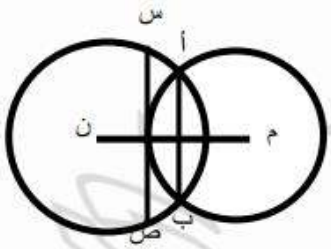


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

أ ب ∩ ن م = { هـ } ، أ جـ وتر فى الدائرة م

ء منتصف أ جـ أوجد ق (ب أ جـ)

[٥] فى الشكل المقابل

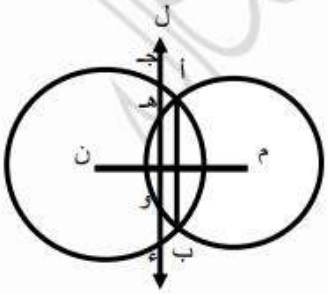


م ، ن دائرتان متقاطعتان ، أ ب الوتر المشترك

للدائرتان م ، ن ، س ص تمس الدائرة م عند جـ

إثبت أن أ ب // س ص

[٦] فى الشكل المقابل

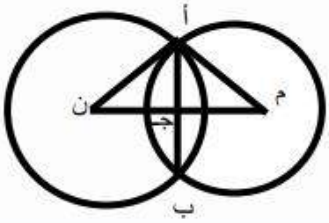


أ ب الوتر المشترك للدائرتين المتقاطعتين م ، ن

المستقيم ل // أ ب ويقطع الدائرة م فى هـ ، و

ويقطع الدائرة ن فى جـ ، ء إثبت أن جـ هـ = و ء

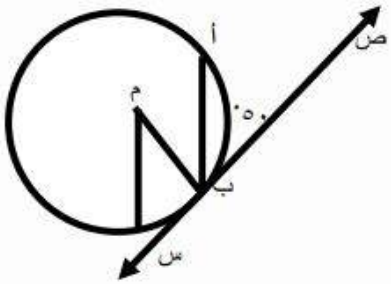
[٧] فى الشكل المقابل



دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

م أ = ٩سم ، أ ن = ١٢سم ، م ن = ١٥سم أوجد طول أ ب

[٨] فى الشكل المقابل



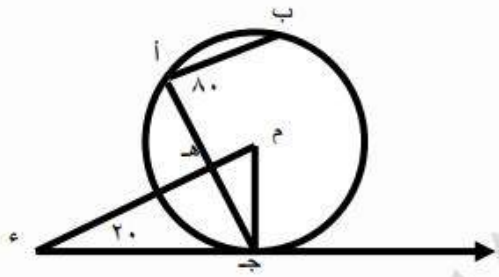
دائرة مركزها م ، الوتر أ ب // م جـ

ص س مماس للدائرة عند ب

فإذا كان ق (أ ب ص) = ٥٠°

أوجد ق (جـ ب س)

[٩] فى الشكل المقابل



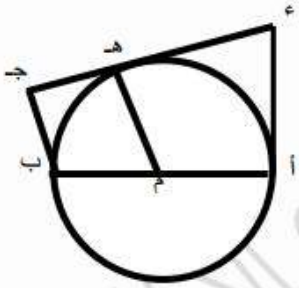
ء جـ يمس الدائرة م عند جـ ، أ ب // م ء

ق(ب أ جـ) = ٨٠° ، ق (م ء جـ) = ٢٠°

أ جـ ∩ م ء = { هـ }

أوجد ق (هـ جـ م)

[١٠] فى الشكل المقابل



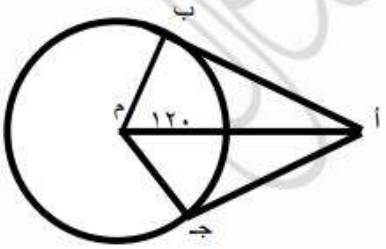
أ ب قطر فى الدائرة م ، أ ء ، ب جـ مماسان للدائرة عند أ ، ب

ء جـ مماس للدائرة عند هـ

إثبت أن (١) ق(أ ء هـ)+ ق(ب جـ هـ) = ١٨٠°

(٢) ق (أ م هـ) = ق (ب جـ هـ)

[١١] فى الشكل المقابل



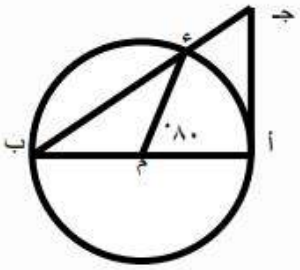
أ ب ، أ جـ مماستان لدائرة مركزها م فإذا كان

ق (ب م جـ) = ١٢٠° أوجد ق(ب أ جـ)

ثم أثبت أن

(١) أ م ينصف أ (٢) م ب = $\frac{١}{٢}$ م أ

[١٢] فى الشكل المقابل

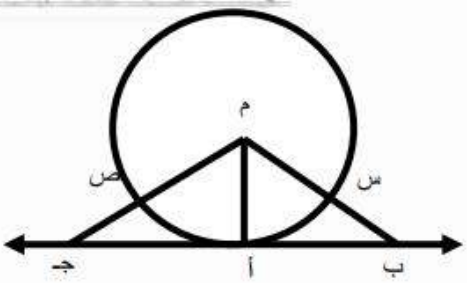


أ ب قطر فى دائرة مركزها م

أ جـ مماس لها عند أ ، ق (أ م ء) = ٨٠° أوجد

(١) ق (جـ أ ء) (٢) ق(أ ب ء) (٣) ق (أ ء ب)

[١٣] فى الشكل المقابل



ب جـ مما للدائرة م عند أ ، م ب ∩ الدائرة م = {س}

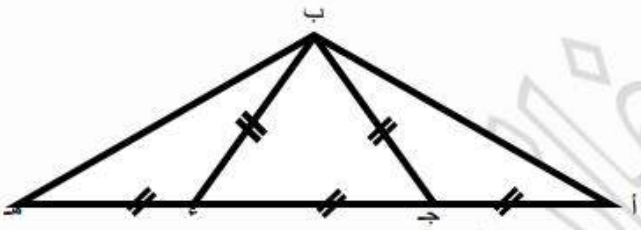
م جـ ∩ الدائرة م = { ص} فإذا كان ب س = جـ ص

فإثبت أن ق(ب م أ) = ق (جـ م أ)

[١٤] أ ب ، جـ ء قطران متعامدان فى دائرة مركزها م ، رسم أ ي ، جـ ص مماسان للدائرة عند أ ،جـ

فإذا كان أ س ∩ جـ ص = { هـ } إثبت أن أ م جـ هـ مربع

[١٥] فى الشكل المقابل



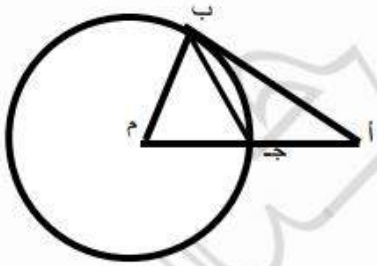
ب جـ ء مثلث متساوى الاضلاع

أ ، هـ ∈ جـ ء بحيث أ جـ = جـ ء = ء هـ

إثبت أن أ ب تمس الدائرة التى تمر برؤوس

المثلث ب جـ هـ

[١٦] فى الشكل المقابل



ب جـ وتر فى الدائرة م ، أ ∈ م جـ

ق(أ) = ق(جـ ب أ) ، ب جـ = ب م

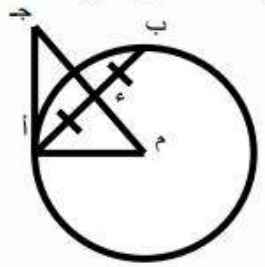
إثبت أن أ ب مماس للدائرة م عند ب

مسائل تربية الترم الأول و الثاني والتراكمي

[١٧] عين مواضع النقط الاتية بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ وحدة طول علما بأن م (٠ ، ٠)

(١) أ (-٣ ، ٤)　　(٢) ب (٢ ، ٣)　　(٣) جـ(٦ ، ٨)

[١٨] أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة بالنقطة (-٣ ، ٤) ومركزها نقطة الاصل

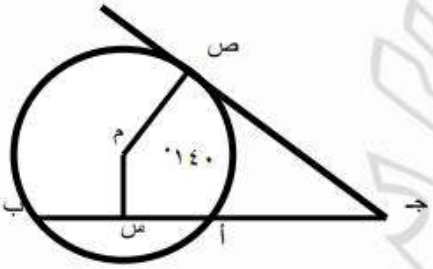


[١٩] إذا كان أ جـ يمس الدائرة م عند أ

ء منتصف الوتر أ ب ،

ق (أ جـ م) = ٥٠°

فإن ق (ب أ م) = ...

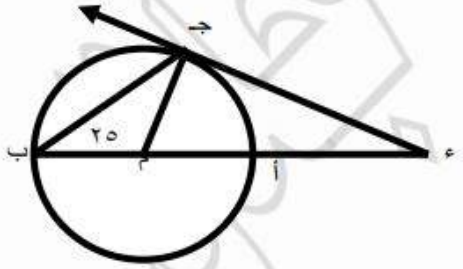


[٢٠] فى الشكل المقابل

جـ ص مماس للدائرة م

س منتصف أ ب

ق (ص م س) = ١٤٠° أوجد ق(جـ)

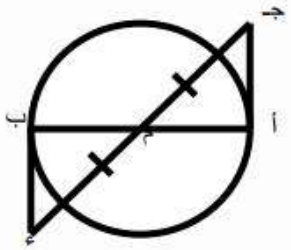


[٢١] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ $\overleftarrow{ب أ}$

فإذا كان ء جـ مماس للدائرة عند جـ

ق(ب) = ٢٥° أوجد ق (ء)



[٢٢] فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ مماس لها عند أ

رسم جـ م وفرضت عليه نقطة ء بحيث جـ م = م ء

إثبت أن ب ء مماس للدائرة عند ب

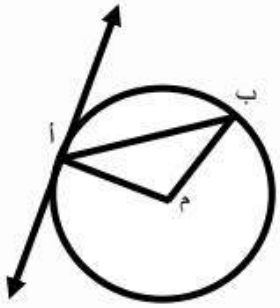
[٢٣] فى الشكل المقابل

أ ب وتر فى دائرة مركزها م بحيث ق(أ م ب) = ٩٠°

أ جـ مماس للدائرة م عند أ

١- إثبت أن أ جـ // م ب

٢- أوجد ق (ب أ جـ)

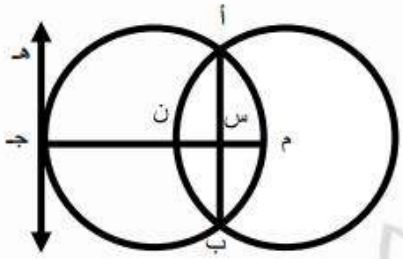


[٢٤] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان حيث م ∈ الدائرة ن

ن ∈ الدائرة م ، جـ هـ مماس للدائرة ن

إثبت أن (١) أ ب // جـ هـ (٢) م س = س ن



[٢٥] فى الشكل المقابل

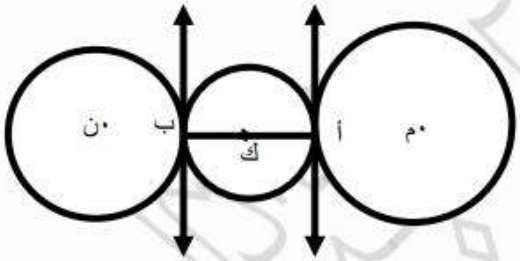
أ ب قطر فى الدائرة ك ، رسمت دائرة م تمس

الدائرة ك عند أ ، رسمت دائرة ن تمس الدائرة ك

عند ب ، ل١ مماس مشترك للدائرتين ك ، م

ل٢ مماس مشترك للدائرتين ك ، ن إثبت أن

(١) ل١ // ل٢ (٢) م ، أ ، ب ، ن على أستقامة واحدة



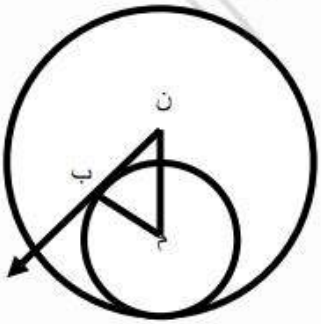
[٢٦] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ

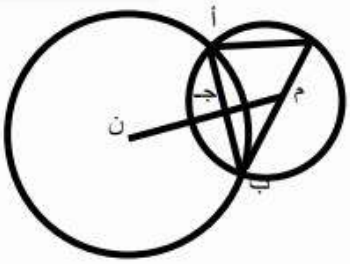
ن ب مماس للدائرة م عند ب

فإذا كان م ب = ٤سم ، ن ب = ٣سم

فأوجد طول نصف قطر الدائرة ن



[٢٧] فى الشكل المقابل

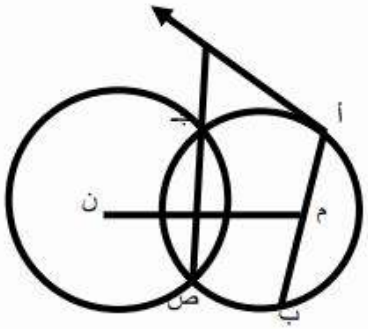


م ، ن دائرتان فى أ ، ب

أ ب ∩ م ن = { جـ } ، ب ء قطر فى الدائرة م

ب جـ = ٤سم ، م ء = ٥سم أوجد طول أ ء

[٢٨]فى الشكل المقابل



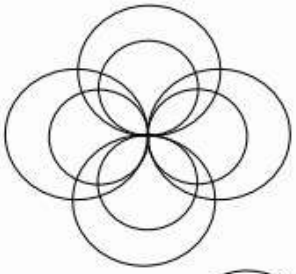
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ص

رسم ب أ قطر فى الدائرة م ، أ س مماس للدائرة م عند أ

أ س ∩ ص جـ = { ء } إثبت أن

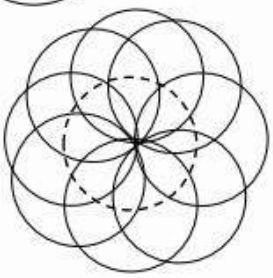
ق(ب م ن) = ق (أ ء ص)

تعيين الدائرة

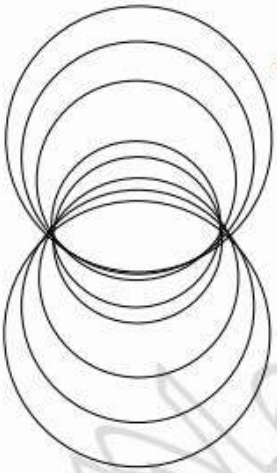


تعيين دائرة تمر بنقطة معلومة

يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطة معلومة فى المستوى (أ)



* إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول فإن مراكزها تقع جميعا على محيط دائرة واحدة



تعيين دائرة تمر بنقطتين معلومتين

يوجد عدد لا نهائى من الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين فى المستوى أ ، ب

(١) مراكز هذه الدوائر على محور أ ب [محور القطعة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها]

(٢) أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بين النقطتين أ ، ب طولها يساوى نصف طول أ ب

[إذا كان طول أ ب = ١٠سم فإن أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يكون طول نصف قطرها =٥سم]

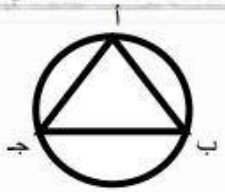
طول نصف قطر الدوائر المارة بنقطتين معلومتين يكون≥ نصف البعد بين النقطتين

تعيين دائرة تمر بثلاث نقط

(أ) تعين دائرة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة:-
لا يمكن رسم دائرة واحدة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة

(ب) تعيين دائرة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة
يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة

الدائرة الخارجة للمثلث :-

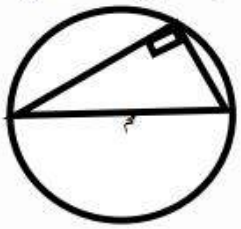


هى الدائرة التى تمر برؤوس المثلث من الخارج

لاحظ أن

١- مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع الاعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها

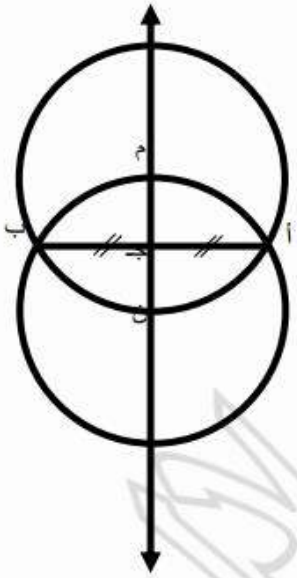
٢- مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم الزاوية هو منتصف الوتر



مثال ارسم القطعة المستقيمة أ ب طولها ٥سم ثم أرسم دائرة يكون أ ب وتر فيها كم دائرة يمكن رسمها ؟

الحـــــــــل

الخطوات :-



١- نرسم أ ب بحيث أ ب = ٥سم ثم ننصف أ ب فى جـ

٢- نرسم محور أ ب وليكن ل

٣- نركز فى احدى نهايتى أ ب بسن الفرجار بفتحة تساوى اكبر من نصف أ ب قليلا

٤- نرسم قوساً يقطع المستقيم ل فى نقطتى م ، ن

٥- نركز بسن الفرجار فى م وبنفس الفتحة نرسم الدائرة م فتمر بالنقطتين أ ، ب ثم نركز فى ن بنفس الفتحة ونرسم الدائرة ن

لاحظ أن :- يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر مختلفة فى طول نصف القطر بحيث يكون أ ب وترا فيها

تمارين (٨) على تعيين الدائرة ورسمها

[١] أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١- يمكن رسم ..... تمر بنقطة معلومة

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتان

(جـ) ثلاث دوائر (ء) عدد لا نهائى من الداوائر

٢- عدد الدوائر المارة بطرفى قطعة مستقيمة

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتان

(جـ) ثلاث دوائر (ء) عدد لا نهائى من الداوائر

٣- أى ثلاث نقط لا تنتمى لمستقيم واحد .....

(أ) لا يمكن رسم دائرة تمر بها (ب) تمر بها دائرة واحدة

(جـ) تمر بها دائرتان (ء) تمر بها عدد لا نهائى من الدوائر

٤- يمكن تعيين دائرة بمعلومية .....

(أ) ثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة (ب) نقطتين

(جـ) ثلاث نقط على أستقامة واحدة (ء) نقطة واحدة

٥- عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأى ثلاث رؤوس لمتوازى أضلاع يساوى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (ء) عدد لا نهائى

٦- جميع الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع مراكزها جميعا على .....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(جـ) محور تماثل أ ب (ء) نقطة منتصف أ ب

٧- مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تقاطع .....

(أ) متوسطاته (ب) أرتفاعاته

(جـ) منصفات زواياه الداخلة (ء) محاور تماثل أضلاعه

٨- إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو .....

(أ) منتصف أ ب (ب) منتصف أ جـ

(جـ) منتصف ب جـ (ء) خارج المثلث

٩- لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .....

(أ) مستطيل (ب) مثلث (جـ) مربع (ء) معين

١٠- إذا كانت أ ، ب نقطتين فى المستوى بحيث أ ب = ٤سم فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب هو .....

(أ) ٢سم (ب) ٣سم (جـ) ٤سم (ء) ٨سم

[٢] أكمل ما يأتى

١- تتعين الدائرة إذا علم مركزها وطول .....

٢- الدائرة التى تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة .....

٣- إذا كانت أ ب = ٦سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٥سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو .....

٤- إذا كانت أ ب = ٥,٤سم فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطرها ٢,٧سم وتمر بالنقطتين أ ، ب هو .....

٥- أكبر طول لقطعة مستقيمة يقع طرفاها على دائرة طول نصف قطرها ٧سم يساوى .....

****

[٣] ل مستقيم فى المستوى ، أ نقطة تبعد عن المستقيم ل بمقدار ٢سم بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم بحيث تمر بالنقطة أ ويقع مركزها على المستقيم ل كم عدد الحلول

[٤] إذا كانت أ ∉ ل فأرسم دائرة تمر بنقطة أ ويكون طول نصف قطرها ٣سم عندما

(١) م تنتمى للمستقيم ل – كم دائرة يمكن رسمها

(٢) م لا تنتمى للمستقيم ل – كم دائرة يمكن رسمها

[٥] أ ب قطعة مستقيمة طولها ٨سم أرسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٥سم ، كم حلا لهذه المسألة

[٦] أ ب قطعة مستقيمة طولها ٦سم أرسم الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها أصغر ما يمكن

[٧] أرسم س ص قطعة مستقيمة طولها ٥سم وأرسم الدائرة ص التى طول نصف قطرها ٣سم ثم أرسم دائرة مركزها يقع على الدائرة ص وتمر بالنقطة س وطول نصف قطرها ٢,٥ سم كم دائرة يمكن رسمها

[٨] أرسم دائرة مركزها ن وطول نصف قطرها ٢سم ثم خذ نقطة أ خارج الدائرة بحيث ن أ = ٣سم بين كيف ترسم دائرة طول نصف قطرها ٢سم بحيث تمر بالنقطة ويقع مركزها على الدائرة ن كم عدد الحلول

[٩] أرسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم تمس مستقيما ل ثم أذكر عدد الحلول للمسألة

[١٠] أرسم ل١ ، ل٢ مستقيمين متوازيين البعد بينهما ٥سم ثم أرسم دائرة مركزها يقع على ل١ وتمس ل٢

[١١] أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٥سم ، جـ أ = ٦سم أرسم الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

[١٢] بأستخدام الادوات الهندسية أرسم المثلث أ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه أ ب = ٣سم ب جـ = ٤سم ثم أرسم دائرة تمر برؤوسه ومن الرسم أوجد طول نصف قطر الدائرة

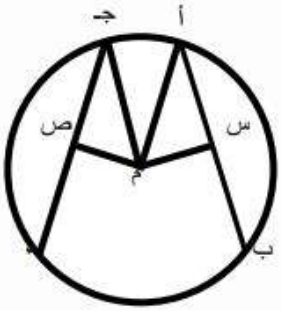
[١٣] بأستخدام الادوات الهندسية أرسم المثلث أ ب جـ متساوى الاضلاع وطول ضلعه ٦سم ثم أرسم الدائرة المارة برؤوسه

[١٤] أرسم المثلث أ ب جـ الذى فيه ب جـ = ٧سم ، ق(ب) = ١٢٠° ، ق (جـ) = ٣٠° ثم أرسم الدائرة التى تمر برؤوس المثلث وأحسب مساحتها

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية (٢ – ١)

الأوتار المتساوية فى الطول فى دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها



المعطيات : أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

المطلوب : إثبات أن م س = م ص

البرهان : م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب ∴ أ س = $\frac{١}{٢}$ أ ب

م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ∴ جـ ص = $\frac{١}{٢}$ أ ب

أ ب = جـ ء ∴ أ س = جـ ص

△ △ أ س م ، جـ ص م ∴ △ أ س م ≡ △ جـ ص م

فيهما { أ س = جـ ص
أ م = جـ م (أنصاف أقطار)
ق(أ س م) = ق(جـ م ص) = ٩٠°

ومن التطابق ينتج أن

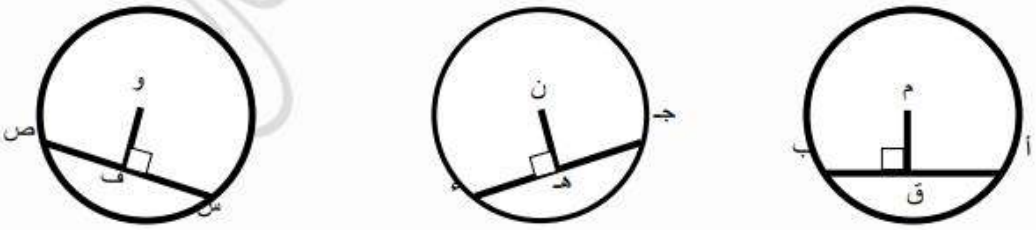
س م = ص م

وهو المطلوب إثباته

****

نتيجة

فى الدوائر المتطابقة الاوتار المتساوية فى الطول تكون على أبعاد متساوية من مراكزها



إذا كانت الدوائر م ، ن ، و متطابقة ، أ ب = جـ ء = س ص فإن م ق = ن هـ = و ف

مثال

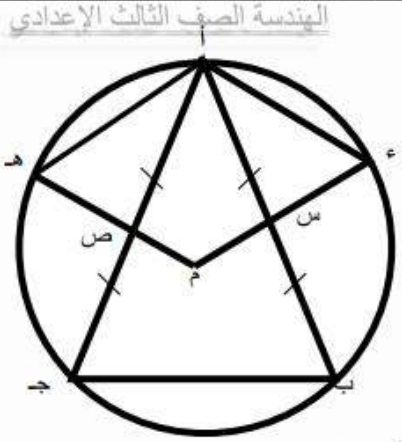
فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

م س يقطع الدائرة فى ء ، م ص يقطع الدائرة فى هـ

إثبت أن(١) س ء = ص هـ

(٢) ق(ء أ س) = ق (هـ أ ص)



الحـــــــــل

س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

أ ب = أ جـ ∴ م س = م ص (١)

م ء = م هـ (أنصاف أقطار) (٢)

بطرح ٢ من ١

م ء – م س = م هـ - م ص

س ء = هـ ص (وهو المطلوب أولا)

△△ أ ء س ، أ هـ ص

فيهما
أ س = أ ص
ء س = هـ ص (مثبت)
ق(أ ء س)=ق(أ ص هـ)=٩٠°

△أ ءس ≡ △أ هـ ص

ومن التطابق ينتج أن

ق(ء أ س) = ق (هـ أ ص) [المطلوب ثانياً]

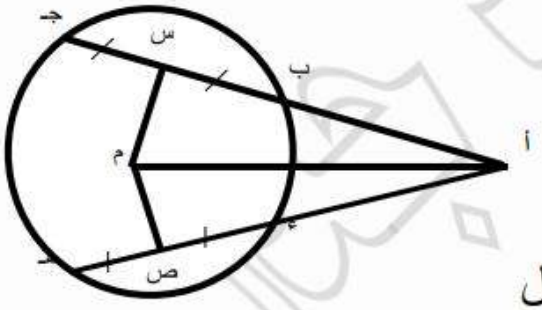
****

مثال

فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، س منتصف ب جـ

ص منتصف ء هـ إثبت أن أ ب = أ ء



الحـــــــــل

س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ

ص منتصف ء هـ ∴ م ص ⊥ ء هـ

ب جـ = ء هـ ∴ م س = م ص

△ △أ م س ، أ م ص

فيهما
أ م ضلع مشترك
م س = م ص
ق(أ س م)=ق(أ ص م) = ٩٠°

△أ س م ≡ △أ ص م

ومن التطابق ينتج أن

أ س = أ ص (١)

ولكن ب س = ء ص (٢)

بطرح ٢ من ١

أ س – ب س = أ ص – ء ص

أ ب = أ ء وهو المطلوب إثباته

مثال

في الشكل المقابل

ق(أ) = ٥٠° ، ق(ب) = ٦٥° ، س ، ص منتصفا

أ ب ، أ جـ على الترتيب

(١) أوجد ق(س م ص) (٢) إثبت أن م س= م ص

الحـــــــــل

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

ق(جـ) = ١٨٠° – [٥٠° +٦٥°] = ٦٥°

ق(ب) = ق(جـ) ∴ أ ب = أ جـ

س منتصف أ ب م س ⊥ أ ب

ق(م س أ) = ٩٠°

ص منتصف أ جـ ∴ م ص أ جـ

∴ ق(م ص أ) = ٩٠°

ق(س م ص) = ٣٦٠ – [٩٠+٩٠+٥٠]=١٣٠

أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

∴ م س = م ص

****

مثال

في الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الدائرة م

س منتصف أ ب ، ص منتصف جـ ء

برهن أن ق(ب س ص) = ق (ء ص س)

الحـــــــــل

س منتصف أ ب ∴ ق(م س ب) = ٩٠°

ص منتصف جـ ء ∴ ق(م ص ء) = ٩٠

∴ ق(م س ب) = ق(م ص ء) (١)

أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

∴ م س = م ص

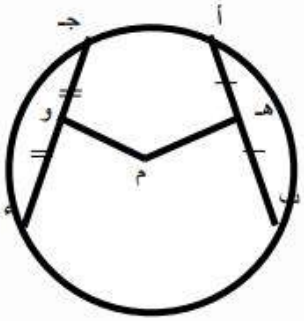
في △م س ص م س = م ص

∴ ق(م س ص) = ق(م ص س) (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن

ق(ب س ص) = ق (ء ص س)

تمـــاري



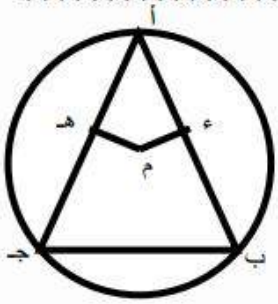
(١) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، هـ منتصف أ ب

و منتصف جـ ء

إثبت أن م هـ = م و

****



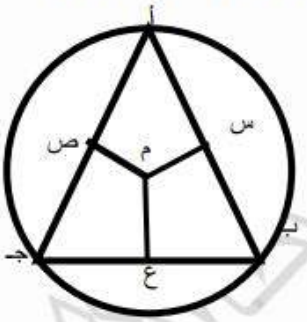
(٢) فى الشكل المقابل

ق(أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)

م ء ⊥ أ ب ،، م هـ ⊥ أ جـ

إثبت أن م ء = م هـ

****



(٣) فى الشكل المقابل

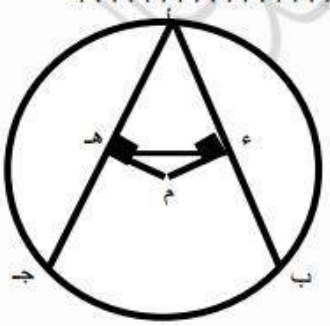
ق(أ) = ق(جـ) = ٦٠° ، س ، ص ، ع منتصفات

أ ب ، أ جـ ، ب جـ على الترتيب

إثبت أن

م س = م ص = م ع

****



(٤) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، م ء ⊥ أ ب

م هـ ⊥ أ جـ إثبت أن

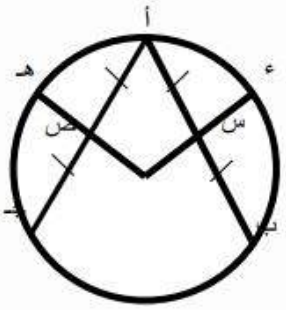
ق(م ء هـ) = ق (م هـ ء)

(٥) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، س منتصف أ ب

ص منتصف أ جـ

إثبت أن س ء = ص هـ



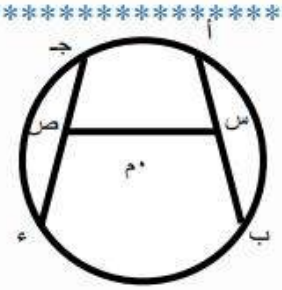
****

(٦) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب

ص منتصف جـ ء

إثبت أن ق (أ س ص) = ق(جـ ص س)



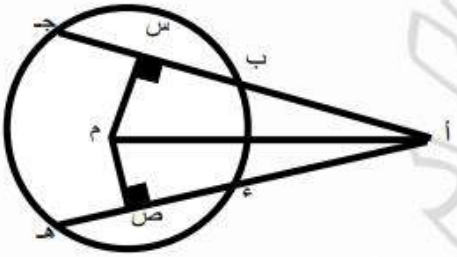
****

(٧) فى الشكل المقابل

ب جـ = ء هـ ، م س ⊥ ب جـ

م ص ⊥ ء هـ أثبت أن

أ ب = أ ء



****

(٨) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، م س ⊥ أ ب

م ص ⊥ أ جـ إثبت أن

(١) أ س = أ ص

(٢) ق (س أ جـ) = ق (ص أ ب)

****

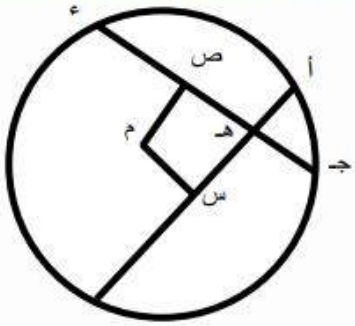
(٩) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س منتصف أ ب

ص منتصف جـ ء

أثبت أن

هـ س ص متساوى الساقين



****

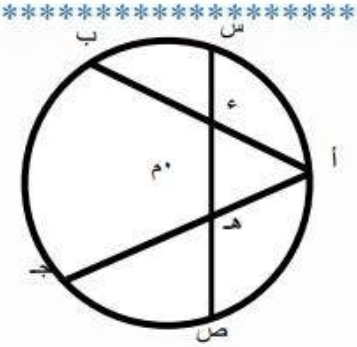
(١٠) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ إثبت أن

(أولا) س ص ⊥ أ م

(ثانيا) س ء = هـ ص



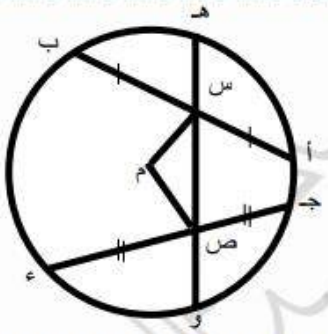
****

(١١) فى الشكل المقابل

أ ب = جـ ء ، س ، ص منتصفات أ ب

، جـ ء على الترتيب أثبت أن

هـ س = ص و



****

(١٢) فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء منتصف أ ب

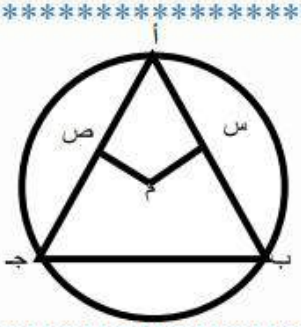
هـ منتصف أ جـ ، ق(ء م هـ) = ١٢٠°

$\overleftarrow{\text{هـ س}}$ ينصف (أ هـ ء)

إثبت أن $\overleftarrow{\text{هـ س}}$ // م ء

****

(١٣) فى الشكل المقابل



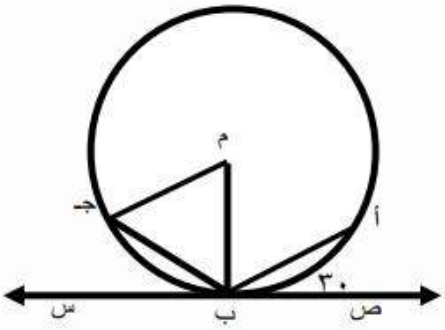
ق(أ) = ٥٠° ، ق (ب) = ٦٥°

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

إثبت أن م س = م ص

****

(١٤) فى الشكل المقابل



س ص مماس للدائرة عند ب ،

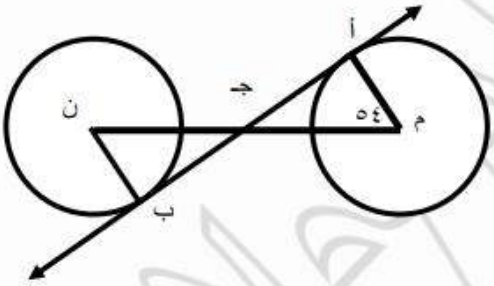
أ ب // م جـ ، ق(أ ب ص) = ٣٠°

(١) أوجد ق(جـ م ب)

(٢) إثبت أن ب جـ = نق

****

(١٥) فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متطابقتان ، أ ب مماس للدائرتين

عند أ ، ب ، ق(أ م ن) = ٥٤° أوجد

(١) ق(ب ن م) (٢) إثبت أن جـ منتصف م ن

عكس نظرية (٢ – ١)

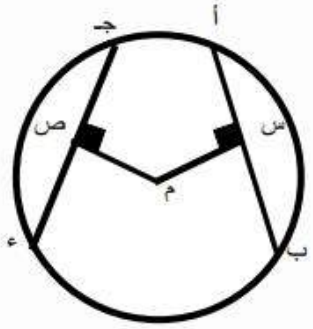
فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية فى الطول

فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

، م س = م ص

فإن أ ب = جـ ء



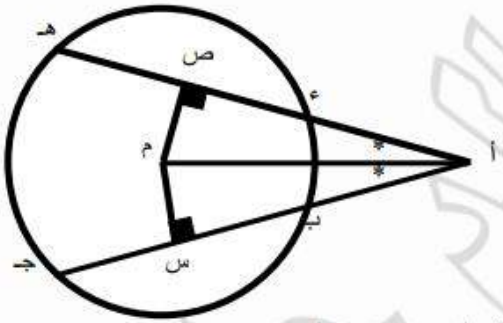
****

مثال

فى الشكل المقابل

دائرة م فيها أ م ينصف (هـ أ جـ)

إثبت أن ب جـ = ء هـ



الحـــــــــل

نرسم م س ⊥ ب جـ ، م ص ⊥ ء هـ

Δ Δ م أ س، م أ ص

فيهما { أ م ضلع مشترك
ق(س أ م) = ق(ص أ م)
ق(أ س م) = ق(أ ص م) }

Δ أ س م ≡ Δ أ ص م

∴ م س = م ص

∴ ب جـ = ء هـ

****

مثال

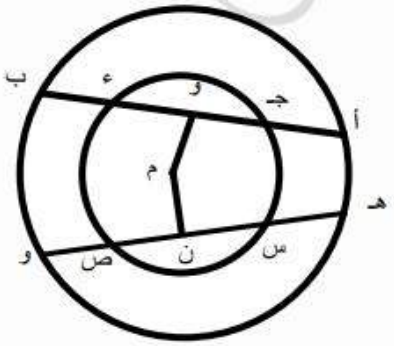
فى الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى جـ ، ء ، هـ و وتر فى الكبرى

يقطع الصغرى فى س ، ص فإذا كان أ ب = هـ و

إثبت أن جـ ء = س ص



الحـــــــــل

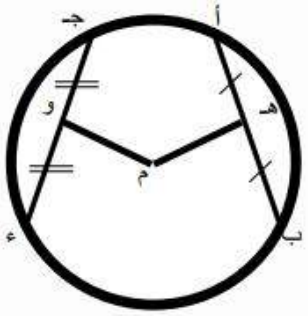
العمل :- نرسم م و أ ب ، م ن هـ و

فى الدائرة الكبرى أ ب = هـ و ∴ م و = م ن

فى الدائرة الصغرى م و = م ن ∴ جـ ء = س ص

****

مثال فى الشكل المقابل



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م حيث م=(٢ ، -٣)

فإذا كان هـ منتصف أ ب ، و منتصف جـ ء حيث

هـ = (-١ ، ١) ، و = (٦ ، ٠) إثبت أن أ ب = جـ ء

الحـــــــــل

م هـ = $\sqrt{(١+٢)^٢ + (-١-٣)^٢} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

م و = $\sqrt{(٢ - ٦)^٢ + (٣+٠)^٢} = \sqrt{١٦+٩} = \sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات طولية

هـ منتصف أ ب ∴ م هـ ⊥ أ ب

و منتصف جـ ء ∴ م و ⊥ جـ ء

م هـ = م و ∴ أ ب = جـ ء

****

مثال فى الشكل المقابل

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

م ء = م هـ ، ق (ء م هـ) = ١٢٠°

إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

الحـــــــــل

ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب (١)

هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ (٢)

م ء = م هـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

أ ب = أ جـ

∴ ق(ب) = ق (جـ)

ق(أ) = ٣٦٠ – [١٢٠+٩٠+٩٠]= ٦٠°

ق(ب) = ق(جـ) = $\frac{١٨٠ - ٦٠}{٢} = \frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)

∴ △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

مثال

فى الشكل المقابل

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

س ء = ص هـ إثبت أن

أ ب = أ جـ

الحـــــــــل

م س = م ص (أنصاف أقطار) (١)

س ء = ص هـ (معطى) (٢)

بطرح ٢ من ١

م س – س ء = م ص – ص هـ

م ء = م هـ (٤)

م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ (٥)

من ٤ ، ٥ ينتج أن

أ ب = أ جـ

****

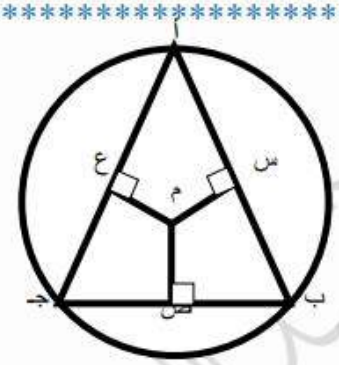
مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان م س = م ص = م ع

أوجد ق(أ) وإذا كان أ ب = ١٠سم

أوجد محيط △ أ ب جـ



الحـــــــــل

م س ⊥ أ ب ، م ع ⊥ أ جـ ، م س = م ع

∴ أ ب = أ جـ (١)

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ ب جـ ، م س = م ص

∴ أ ب = ب جـ (٢)

م ص ⊥ ب جـ ، م ع ⊥ أ جـ ، م ص = م ع

∴ ب جـ = أ جـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

أ ب = ب جـ = أ جـ = ١٠سم

ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ) = ٦٠°

محيط △ أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ١٠ + ١٠ + ١٠ = ٣٠ سم

مثال

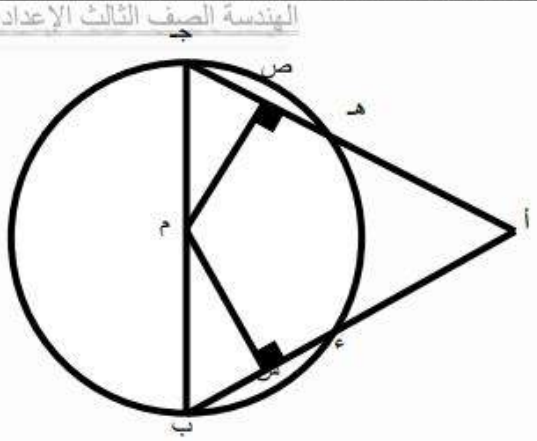
فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث ، ب جـ قطر فى الدائرة م

رسم م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

فإذا كان ب ء = جـ هـ

إثبت أن أ ب = أ جـ



الحـــــــــل

م س ⊥ ء ب ، م ص ⊥ هـ جـ ، ء ب = هـ جـ

∴ م ص = م س

△△ أ ص م ، أ س م

فيهما { أ م ضلع مشترك
م ص = م س
ق(أ س م) = ق(أ ص م) = ٩٠°

△ أ س م ≡ △ أ ص م

∴ أ س = أ ص (١)

م س ⊥ ءب ∴ س منتصف ء ب

ب س = $\frac{١}{٢}$ ء ب

م ص ⊥ هـ جـ ∴ ص منتصف هـ جـ

ص جـ = $\frac{١}{٢}$ هـ جـ

ب ء = هـ جـ ∴ ب س = ص جـ (٢)

بجمع ١ ، ٢

أ س + س ب = أ ص + ص جـ

∴ أ ب = أ جـ

****

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ وتران فى الدائرة م

ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

م ء ، م هـ يقطعان الدائرة فى س ن ص

على الترتيب فإذا كان ءس = هـ ص

إثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــــــــل

ء منتصف أ ب ∴ م ء ⊥ أ ب

هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

م س = م ص ، س ء = ص هـ

م س – س ء = م ص – ص هـ

∴ م ء = م هـ

∴ أ ب = أ جـ

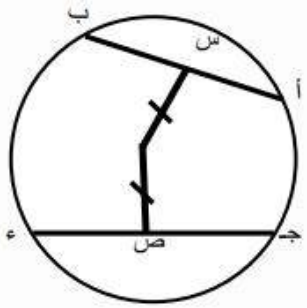
تمارين (٩) على علاقة أوتار الدائرة بمركزها

(١) أكمل ما يأتى

١- الاوتار المتساوية فى الطول فى دائرة على أبعاد .....

٢- فى الدائرة الواحدة إذا كانت الاوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون .....

٣- فى الشكل المقابل



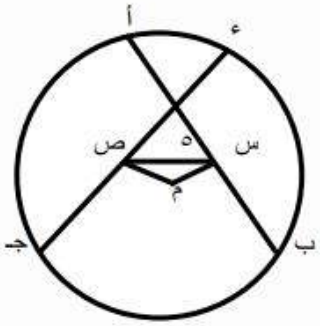
إذا كان أ ب ، جـ ء وترين فى الدائرة م

س ، ص منتصفى أ ب ، جـ ء على الترتيب

وكان م س = م ص ، أ ب = ٧سم

فإن جـ ص = ...

٤- فى الشكل المقابل



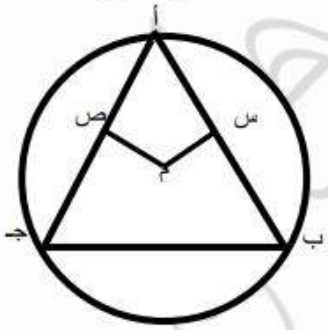
أ ب ، جـ ء وترين متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب

فإذا كان ق(أ س ص) = ٥٠°

فإن ق(س م ص) = ...

٥- فى الشكل المقابل



أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

، م س = م ص ،

ق(أ) = ٧٢° فإن ق(ب) = ...

****

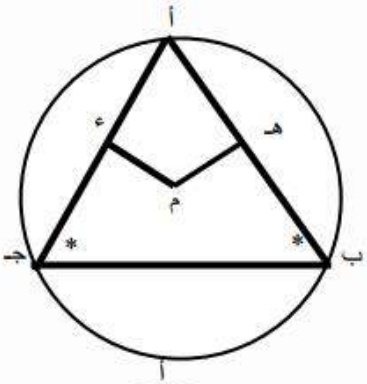
[٢]فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م فيه

ق(ب) = ق (جـ)

ء منتصف أ جـ ، م هـ ⊥ أ ب

إثبت أن م ء = م هـ



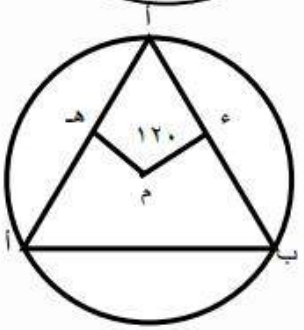
[٣] فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ء منتصف أ ب

هـ منتصف أ جـ ، م ء = م هـ

وكان ق(ء م هـ) = ١٢٠°

إثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الاضلاع



[٤] فى الشكل المقابل

أ ب = أ جـ ، ء ، هـ منتصف أ ب ، أ جـ على الترتيب

ق(م ء هـ) = ٣٠° إثبت أن

١- △م ء هـ متساوى الساقين

٢- △أ ء هـ متساوى الاضلاع

[٥] فى الشكل المقابل

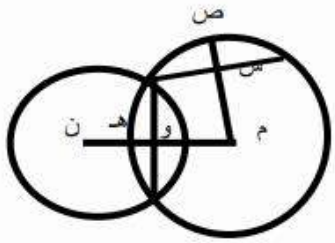
دائرة م ، ب أ⊥س هـ ، جـ ء ⊥ص هـ

أ ب ∩ جـ ء = { م } ، أ ب = جـ ء

أ س = ٣سم أوجد طول هـ ص

[٦] فى الشكل المقابل

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب رسم م س ⊥ أ جـ فقطعه فى س ويقطع الدائرة فى ص ، ورسم م ن يقطع أ ب فى و ويقطع الدائرة فى هـ فإذا كان س ص = و هـ إثبت أن أ جـ = أ ب



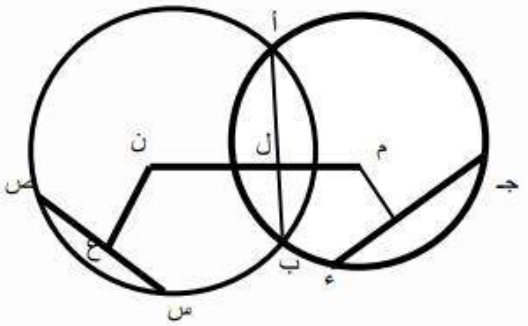
[٧] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م ن ∩ أ ب = { ل } ، و منتصف جـ ء

ع منتصف س ص ، م و = م ل ، ن ل = ن ع

إثبت أن جـ ء = س ص



[٨] فى الشكل المقابل

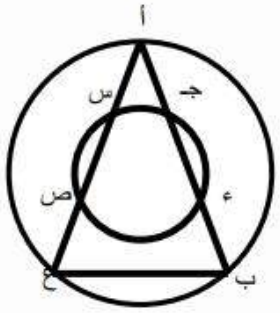
دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب وتر فى الدائرة الكبرى

يقطع الدائرة الصغرى فى جـ ، ء ، أ ع وتر فى الدائرة

الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى س ، ص

فإذا كان ق(أ ب ع) = ق (ا ع ب)

إثبت أن جـ ء = س ص



[٩] فى الشكل المقابل

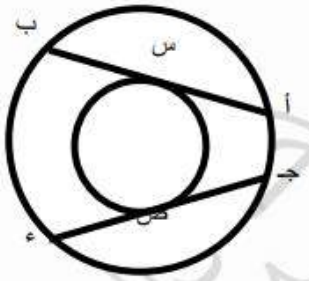
دائرتان متحدتا المركز م ، أ ب ، جـ ء وتران فى

الدائرة الكبرى ويمسان الدائرة الصغرى فى س ، ص

على الترتيب إثبت أن أ ب = جـ ء وإذا كان نصف قطر

الدائرة الكبرى = ٥سم وطول نصف قطر الدائرة الصغرى

٣سم أوجد طول أ ب



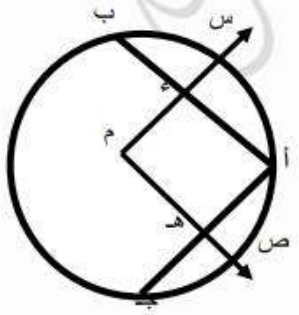
[١٠] فى الشكل المقابل

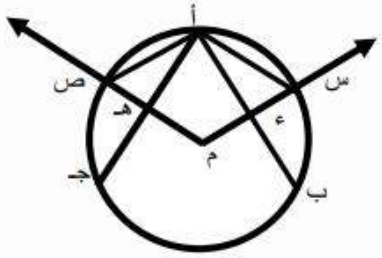
دائرة مركزها م ، أ ب ، أ جـ وتران فيها

ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب

فإذا كان ءس = هـ ص إثبت أن أ ب = أ جـ

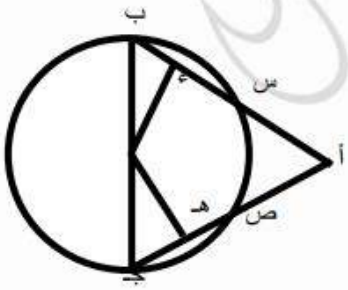




[١١] فى الشكل المقابل
أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ، رسم م ء
فقطع الدائرة فى س ورسم م هـ فقطع الدائرة فى ص
إثبت أن (١) س ء = هـ ص
(٢) ق (س أ ب) = ق (ص أ جـ)

[١٢] فى الشكل المقابل
أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
س ، ص منتصفاهما على الترتيب إذا كان
ق(س م ص) = ١٢٠° ، ص ع ينصف (أ ص س)
إثبت أن ص ع // م س

[١٣] فى الشكل المقابل
أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م
أ ب ∩ جـ ء = { ص } ، ع منتصف أ ب
س منتصف جـ ء ، ق (ع م س) = ١٢٠°
إثبت أن △ ع ص س متساوى الاضلاع



[١٤] فى الشكل المقابل
ب جـ قطر فى الدائرة م ، ب س ، ـ ص وتران فيها
بحيث ب س ∩ جـ ص = { أ } ، ء منتصف س ب
، هـ منتصف ص جـ ، م ء = م هـ إثبت أن أ س = أ ص

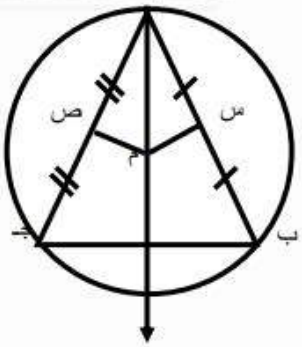
[١٥] فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ، ق(ب أ جـ) = ٦٠°

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ ، م س = م ص

إثبت أن (١) △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

(٢) أ م ⊥ ب جـ



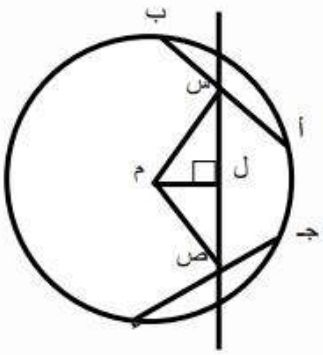
[١٦] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء على الترتيب ، رسم

س ص فقطع الدائرة فى هـ ، و ،

رسم م ل ⊥ س ص برهن أن س هـ = ص و



[١٧] أ م ينصف (س أ ص) رسمت الدائرة م تقطع أ س فى ب ، جـ وتقطع أ ص فى ء ، هـ

إثبت أن ب جـ = ء هـ

[١٨] أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول ى الدائرة م ، النقطتان س ، ص منتصفا أ ب ، جـ ء

بحيث ب ، ء فى جهة واحدة من س ص إثبت أن ق(ب س ص) = ق (ء ص س)

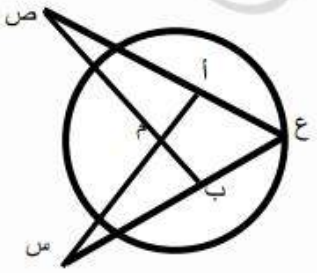
[١٩] فى الشكل المقابل

ع جـ ، ع ء وتران فى الدائرة م ، أ ∈ ع جـ

بحيث أ م ⊥ ع جـ ، أ م ∩ ع ء = { س }

ب ∈ ع ء بحيث ب م ⊥ ع ء ، ب م ∩ ع جـ = {ص}

فإذا كان م أ = م ب إثبت أن جـ ص = ء س

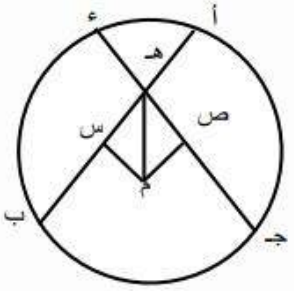


[٢٠] فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م يتقاطعان فى هـ

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

ق(أ هـ م) = ق (ء هـ م) إثبت أن أ ب = جـ ء

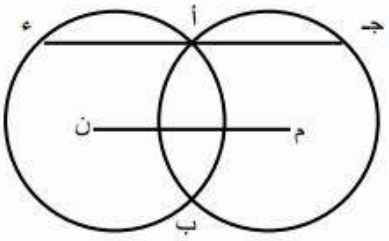


[٢١] فى الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب

جـ ء // م ن ، أ ∈ جـ ء

إثبت أن جـ أ = أ ء



[٢٢] إذا كانت الدائرتان م ، ن متطابقتين ومتماستان من الخارج فى أ ورسم س ص يمر بنقطة أ ويقطع الدائرة م فى س ويقطع الدائرة ن فى ص

إثبت أن أ س ، أ ص على أبعاد متساوية من مركزيهما

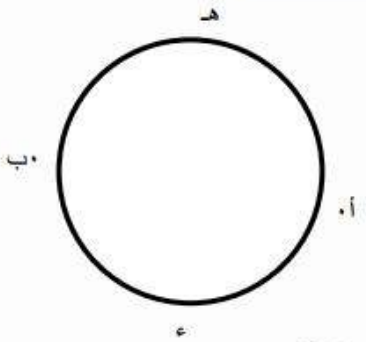
.....

.....

.....

الوحدة الخامسة
الزوايا و الأقواس
الصف الثالث الاعدادي
ا / خالد جلال

الزاوية المركزية و قياس القوس



إذا كانت أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م فإن مجموعة النقط المحصورة بين أ ، ب تسمى قوساً ويرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{أب}$ ونلاحظ أن هناك قوسان يعبر عنهما $\overset{\frown}{أب}$

(١) $\overset{\frown}{أب}$ (الاصغر) = $\overset{\frown}{أ ء ب}$ (٢) $\overset{\frown}{أب}$ (الاكبر) = $\overset{\frown}{أ هـ ب}$

ملاحظات :-

(١) $\overset{\frown}{أب}$ يعبر عن القوس الاصغر إن لم يذكر غير ذلك

(٢) إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م فإن $\overset{\frown}{أ ء ب}$ = $\overset{\frown}{أ هـ ب}$ ويسمى كلا منهما نصف دائرة

الزاوية المركزية

هى زاوية رأسها مركز الدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة

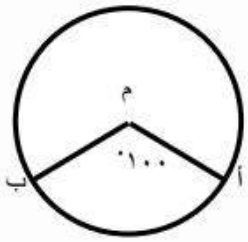
ففى الشكل المقابل الزاوية (أ م $\hat{ب}$) رأسها مركز الدائرة وكلا من ضلعيها أنصاف أقطار فى الدائرة (أ م = ب م = نق)

الزاوية المحيطية

هى زاوية رأسها يقع على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وتراً فى الدائرة

ففى الشكل المقابل الزاوية (أ جـ $\hat{ب}$) رأسها يقع على الدائرة وكلا من ضلعيها أوتاراً فى الدائرة (أ جـ) وتراً ، ب جـ وتراً

قياس القوس



هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) الاصغر = ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ١٠٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) الاكبر = ق (أ م $\hat{\text{ب}}$ المنعكسة) = ٣٦٠° ـ ١٠٠° = ٢٦٠°

طول القوس

هو جزء من محيط الدائرة ويقاس بوحدات الطول (سم ، م ، ...)

ويمكن أستخدام القانون :-

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

القوسان المتجاوران :- هما قوسان من دائرة يشتركان فى نقطة واحدة

ملاحظة

١- طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ط نق

٢- طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٢ط نق = $\frac{١}{٢}$ط نق

٣- طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = $\frac{١}{٣}$ × ٢ط نق = $\frac{٢}{٣}$ ط نق

٤- طول القوس الذى يمثل سدس الدائرة = $\frac{١}{٦}$ × ٢ط نق = $\frac{١}{٣}$ط نق

٥- قياس القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ١٨٠°
٦- قياس القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ٩٠°
٧- قياس القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ١٢٠°
٨- قياس القوس الذى يمثل سُدس الدائرة = ٦٠°
٩- قياس القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ٢٧٠°

١٠- إوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١٢٠° من دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم

الحـــــــ

٦- قياس القوس الذى طوله ٢ سم فى دائرة محيطها ٢٤ سم يساوى .....

٨- طول الدائرة = ... ، قياس الدائرة = ...
٩ – طول القوس الذى يمثل نصف الدائرة = ...
١٠ - طول القوس الذى يمثل خمس الدائرة = ...
١١- طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة = ...
١٢- طول القوس الذى يمثل ثلث الدائرة = ...
١٣- طول القوس الذى يمثل سدس الدائرة = ...
١٤- طول القوس الذى يمثل ثلاث أرباع الدائرة = ...
١٥- طول القوس الذى يمثل خمسين الدائرة = ...
١٦- طول القوس الذى قياسه ١٨٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
١٧- طول القوس الذى قياسه ٩٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
١٨- طول القوس الذى قياسه ٢٧٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
١٩- طول القوس الذى قياسه ٦٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
٢٠- طول القوس الذى قياسه ١٢٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
٢١- طول القوس الذى قياسه ٢٤٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
٢٢- طول القوس الذى قياسه ٣٠° من دائرة محيطها ٣٦ سم = ... سم
٢٣- محيط ربع الدائرة = ...
٢٤- محيط نصف الدائرة = ...
٢٥- محيط ثلاث أرباع الدائرة = ...
٢٦- إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م فإن ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ...
٢٧- قوس من دائرة طوله ط نق فإن قياسه = ...
٢٨- قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٢}$ ط نق فإن قياس زاويته المركزية = ...
٢٩- الزاوية المركزية التى قياسها ٩٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٠- الزاوية المركزية التى قياسها ١٨٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣١- الزاوية المركزية التى قياسها ١٢٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٢- الزاوية المركزية التى قياسها ٦٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٣- الزاوية المركزية التى قياسها ٣٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٤- الزاوية المركزية التى قياسها ٢٤٠° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٥- الزاوية المركزية التى قياسها ٤٥° تقابل قوساً طوله = ... محيط الدائرة
٣٦- إذا كانت أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م وكان طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ = ط نق فإن أ ب يعتبر ..... فى الدائرة م
٣٧- إذا كان أ ب جـ ء مربع فإن ق (أ ب) = ...

٣٨- قياس القوس الذى طوله = $\frac{١}{٦}$ ط نق يساوى .....

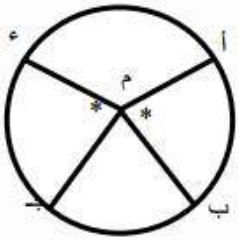
٣٩- قياس القوس الذى طوله = ط نق يساوى .....

٤٠- قياس القوس الذى طوله = $\frac{١}{٢}$ ط نق يساوى .....

نتائج هامة

نتيجة (١)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح



فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{جـء}$) فإن طول ($\overset{\frown}{أب}$) = طول ($\overset{\frown}{جـء}$)

نتيجة (٢)

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

فمثلا فى الشكل المقابل

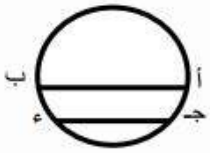
إذا كان ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{جـء}$)

فإن $\overline{أب}$ = $\overline{جـء}$

نتيجة (٣)

الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس

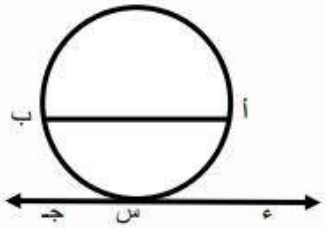
ففى الشكل المقابل



إذا كان أ ب // جـ ء فإن ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{بء}$)

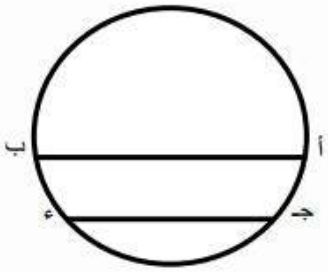
نتيجة (٤)

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه متساويان فى القياس



إذا أ ب وتر فى الدائرة م ، ء جـ يمس الدائرة فى س

وكان أ ب // ء جـ فإن ق($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{س ب}}$)

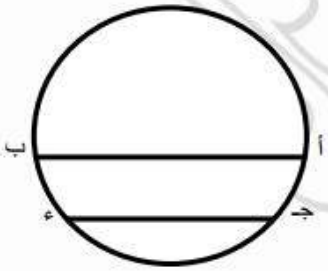


فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب // جـ ء ، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١٥٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ١٠٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ...



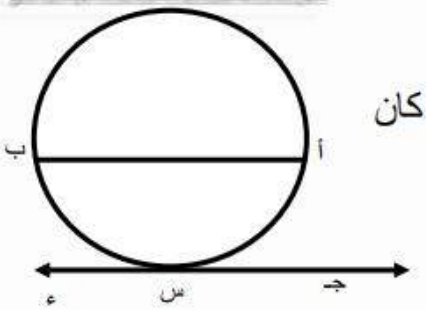
فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب // جـ ء ، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ١٥٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٥٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ...

فى الشكل المقابل

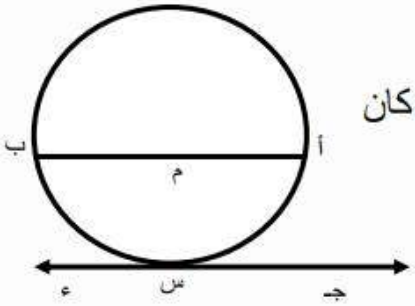


إذا كان أ ب // جـ ء ، حيث جـ ء يمس الدائرة م فى س فإذا كان

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٢٠٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ...، ق ($\overset{\frown}{\text{س ب}}$) = ...

فى الشكل المقابل

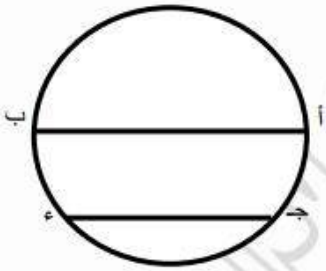


إذا كان أ ب // جـ ء ، حيث جـ ء يمس الدائرة م فى س فإذا كان

أ ب قطر فى الدائر ة م

ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ...، ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب س}}$) = ...

فى الشكل المقابل

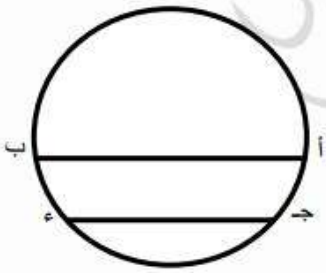


إذا كان أ ب // جـ ء ، حيث أ ب قطر فى الدائرة م

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ٥٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ...

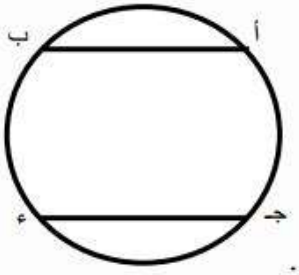
فى الشكل المقابل



إذا كان أ ب // جـ ء ، أ ب قطر فى الدائرة م

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ٨٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ...

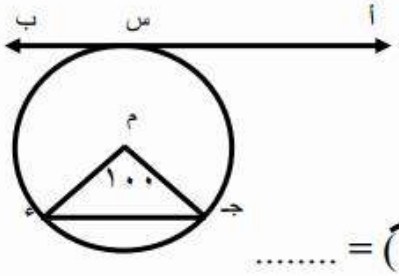


فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب // جـ ء ، أ ب = جـ ء

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ١١٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ... ، ق($\overset{\frown}{\text{ء ب}}$) = ... ، ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ...

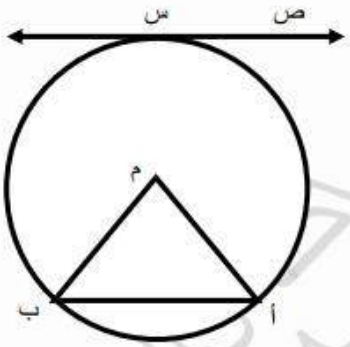


فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب // جـ ء ، حيث أ ب مماس للدائرة عند س

ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ء) = ١٠٠° فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{س جـ}}$) = ... ، ق($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ... ، ق ($\overset{\frown}{\text{س ء}}$) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ١١٠° فإن

وكان س ص مماس حيث س ص // أ ب فإن

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{س أ ب}}$) = ...

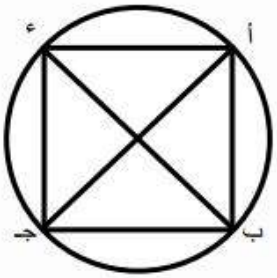
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل

دائرة فإذا كان أ ء = ب جـ

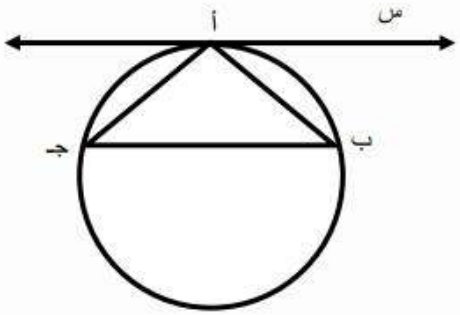
إثبت أن أ جـ = ب ء



الحـــــــ

مثال

فى الشكل المقابل



أ س مماس للدائرة عند أ ، ب جـ // أ س

ق(ب̂) = ٥٠° أوجد ق (ب أ̂ جـ)

الحـــــــــــــــــل

أ س // ب جـ

ق (أب ⌒) = ق (أجـ ⌒)

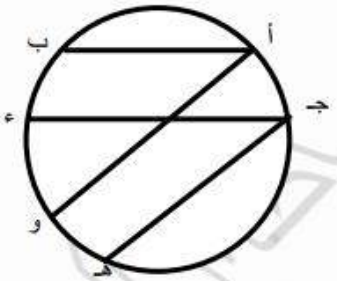
∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (ب̂) = ق (جـ̂) = ٥٠°

∴ ق (ب أ̂ جـ) = ١٨٠ − [٥٠+٥٠]

= ١٨٠ − ١٠٠ = ٨٠°

فى الشكل المقابل



أ ب // جـ ء ، أ و // جـ هـ

إثبت أن ق (ب ء ⌒) = ق (هـ و ⌒)

الحـــــــــــــــــل

أ ب // جـ ء

∴ ق (أجـ ⌒) = ق (ب ء ⌒) (١)

أ و // جـ هـ

∴ ق (أجـ ⌒) = ق (هـ و ⌒) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

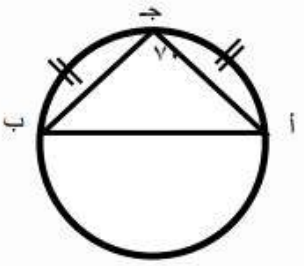
ق (ب ء ⌒) = ق (هـ و ⌒)

مثال فى الشكل المقابل

إذا كان ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

، ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٧٠°

أوجد ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ)



الحـــــــــــــل

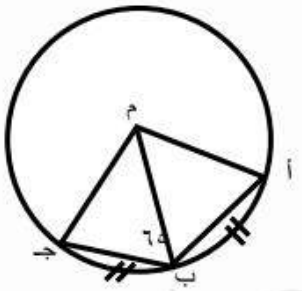
ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ∴ أ جـ = ب جـ

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{ب}}$) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

مثال فى الشكل المقابل

إذا كانت دائرة م فيها ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

ق (م $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٦٥° أوجد ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)



الحـــــــــــــل

فى △ م ب جـ

م ب = م جـ

∴ ق (م $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (م $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٦٥°

ق(ب $\hat{\text{م}}$ جـ) = ١٨٠ − [٦٥+٦٥]

= ١٨٠ − ١٣٠° = ٥٠°

ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ق (ب $\hat{\text{م}}$ جـ) = ٥٠°

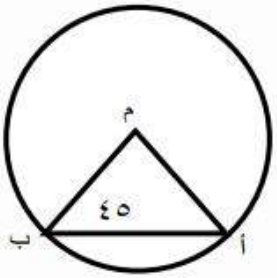
ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٥٠°

مثال فى الشكل المقابل

أ ، ب نقطتان تنتميان للدائرة م بحيث

ق (م $\hat{ب}$ أ) = ٤٥° ، أ م = ٧ سم أوجد طول ($\overset{\frown}{أب}$)



الحـــــــــــــل

م أ = م ب ∴ ق (م $\hat{أ}$ ب) = ق (م $\hat{ب}$ أ) = ٤٥°

∴ ق ($\hat{م}$) = ١٨٠ − [٤٥ + ٤٥] = ١٨٠ − ٩٠ = ٩٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ٩٠°

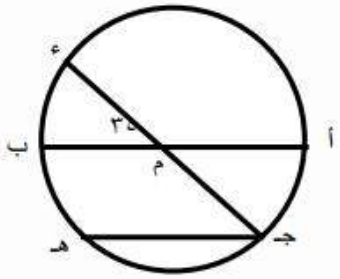
طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم

مثال فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء قطران فى الدائرة م بحيث

ق (ء $\hat{م}$ ب) = ٣٥° ، جـ هـ // أ ب

أوجد ق ($\overset{\frown}{جـ هـ}$)



الحـــــــــــــل

ق (أ $\hat{م}$ جـ) = ق (ب $\hat{م}$ ء) = ٣٥° [متقابلتان بالرأس]

∴ ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٣٥°

أ ب // جـ هـ ∴ ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب هـ}$) [محصوران بين وتران متوازيان]

∴ ق ($\overset{\frown}{ب هـ}$) = ٣٥°

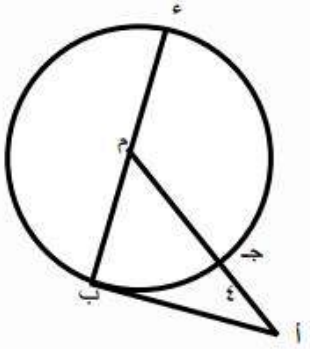
ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ١٨٠ − [٣٥ + ٣٥] = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠

مثال فى الشكل المقابل

ء ب قطر فى الدائرة م ، أ ب تمس الدائرة م

عند ب ، ق ($\hat{أ}$) = ٤٠°

أوجد ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) ، ق ($\overset{\frown}{ء جـ}$)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب مماس ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

∴ ق (أ $\hat{م}$ ب) = ١٨٠ − [٩٠ + ٤٠]

= ١٨٠ − ١٣٠ = ٥٠°

ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق (أ م ب) = ٥٠°

ق ($\overset{\frown}{ء جـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ١٨٠°

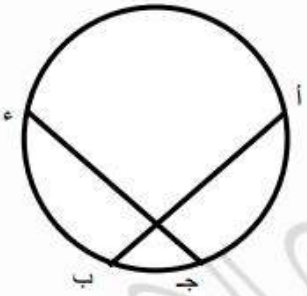
ق ($\overset{\frown}{ء جـ}$) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

مثال فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م

أ ب = جـ ء

إثبت أن ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب = جـ ء ∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$) ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) − ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) =

ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$) − ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$)

بطرح ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) من الطرفين ∴ ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

[وهو المطلوب إثباته]

مثال

فى الشكل المقابل

ء هـ قطر فى الدائرة م ، ب منتصف ء ب هـ

طول $\overset{\frown}{ءأ}$ = طول $\overset{\frown}{أجـ}$ = طول $\overset{\frown}{جـهـ}$

أوجد ق ($\overset{\frown}{أءب}$)

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ء هـ قطر ∴ ق ($\overset{\frown}{أء}$) + ق ($\overset{\frown}{أهـ}$) = ١٨٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{أء}$) = ق ($\overset{\frown}{أهـ}$) = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠°

ء هـ قطر ∴ ق ($\overset{\frown}{ءأ}$) + ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـهـ}$) = ١٨٠°

ق ($\overset{\frown}{ءأ}$) = ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{جـهـ}$) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

ق ($\overset{\frown}{أءب}$) = ق ($\overset{\frown}{أء}$) + ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = ٩٠+٦٠ = ١٥٠°

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م

ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{جـء}$) = ق ($\overset{\frown}{ءب}$)

إثبت أن △ م جـ ء متساوى الاضلاع

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـء}$) + ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = ١٨٠° [وهما متساويين]

∴ ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{جـء}$) + ق ($\overset{\frown}{ءب}$) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق (جـ $\hat{م}$ ء) = ق ($\overset{\frown}{جـء}$) = ٦٠°

فى △ م جـ ء

م جـ = م ء ∴ ق (م $\hat{جـ}$ ء) = ق (م $\hat{ء}$ جـ) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

∴ ق (جـ م̂ ء) = ق (م جـ̂ ء) = ق (م ء جـ)

∴ △ م جـ ء متساوى الاضلاع

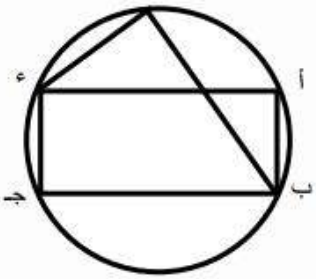
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

ء هـ = ء جـ إثبت أن

ب هـ = أ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ء هـ = ء جـ (١)

من خواص المستطيل أ ب = ء جـ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ء هـ = أ ب

ق (ء هـ) = ق (أ ب)

بأضافة ق (أ هـ) للطرفين

ق(ء هـ) + ق (أ هـ) = ق(أ ب)+ق (أ هـ)

∴ ق (أ ء) = ق (ب هـ)

∴ أ ء = ب هـ

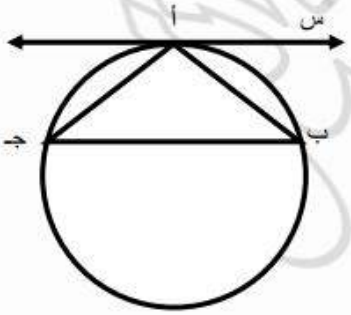
مثال

فى الشكل المقابل

أ س مماس للدائرة عند أ

ب جـ // أ س ، ق (ب̂) = ٣٥°

أوجد ق (ب أ̂ جـ)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ س // ب جـ ∴ ق (أ ب) = ق (أ جـ)

∴ أ ب = أ جـ ∴ ق (ب̂) = ق (جـ̂) = ٣٥°

∴ ق (ب أ̂ جـ) = ١٨٠ – [٣٥ + ٣٥] = ١٨٠ – ٧٠ = ١١٠°

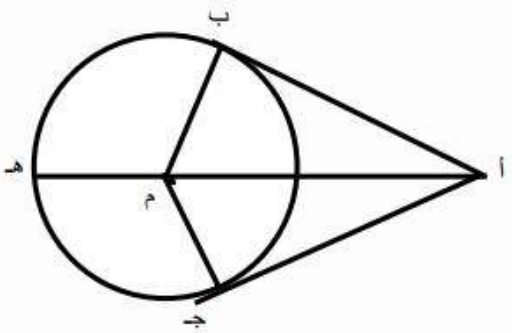
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

عند ب ، جـ

إثبت أن ق ($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$)



الحـــــــــــــــــــل

أ ب مماس ∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ م) = ٩٠°

أ جـ مماس ∴ ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ م) = ٩٠°

△ △ أ ب م ، أ جـ م

فيهما { أ م ضلع مشترك
م ب = م جـ
ق(أ $\hat{\text{ب}}$ م) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ م) = ٩٠° }

∴ △ أ ب م ≡ △ أ جـ م

∴ ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ م)

∴ ق (ب $\hat{\text{م}}$ هـ) = ق (جـ $\hat{\text{م}}$ هـ) (١)

ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) = ق (ب $\hat{\text{م}}$ هـ) (٢)

ق($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$) = ق (جـ $\hat{\text{م}}$ هـ) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$)

مثال

أ ب جـ ثلاث نقط تنتمى الى الدائرة م فإذا كان

ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) : ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) : ق ($\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$) = ٣ : ٤ : ٥ أوجد قياس كلا من الاقواس الثلاثة .

الحـــــــــــــــــــــــل

نفرض أن ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٣س ،، ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) = ٤ س ، ق ($\overset{\frown}{جـأ}$) = ٥ س

ق ($\overset{\frown}{أب}$) + ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـأ}$) = ٣٦٠°

٣س +٤ س + ٥ س = ٣٦٠

١٢س = ٣٦٠

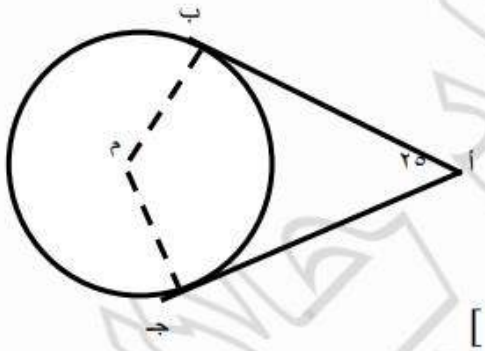
س = $\frac{٣٦٠}{١٢}$ = ٣٠°

ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ٣ × ٣٠ = ٩٠° ، ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) = ٤ × ٣٠ = ١٢٠°

ق ($\overset{\frown}{جـأ}$) = ٥ × ٣٠° = ١٥٠°

مثال أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان لدائرة مركزها م عند ب ، جـ ، ق (ب أ جـ) = ٢٥°

أوجد ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) الاكبر



الحـــــــــــــــــــــــل

أ ب مماس ∴ ق (أ $\hat{ب}$ م) = ٩٠°

أ جـ مماس ∴ ق (أ $\hat{جـ}$ م) = ٩٠°

∴ ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٢٥°]

= ٣٦٠° − ٢٠٥° = ١٥٥°

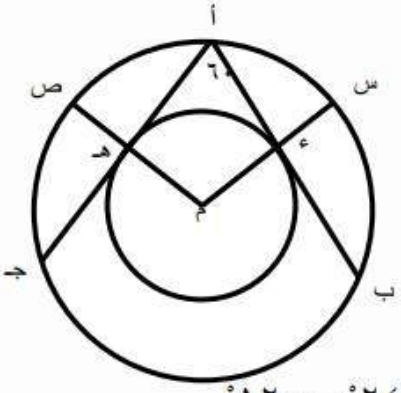
ق (ب $\hat{م}$ جـ) المنعكسة = ٣٦٠° − ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٣٦٠° − ١٥٥° = ٢٠٥°

ق ($\overset{\frown}{بجـ}$) الاكبر = ق (ب $\hat{م}$ جـ) المنعكسة = ٢٠٥°

مثال دائرتان متحدتا المركز م وطولا نصفى قطريهما ٢سم ، ٤سم ، أ ب ، أ جـ تمسان الدائرة الصغرى فى ء ، هـ رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة الكبرى فى س ، ص على الترتيب فإذا كان ق (ب أ̂ جـ) = ٦٠° أوجد

(١) ق ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) ، طول ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) (٢) ق($\overset{\frown}{\text{س ب ص}}$) ، طول ($\overset{\frown}{\text{س ب ص}}$)

الحـــــــــــــــــــل



أ ب مماس للدائرة الصغرى ∴ ق (أ ء̂ م) = ٩٠°

أ جـ مماس للدائرة الصغرى ∴ ق (أ هـ̂ م) = ٩٠°

مجموع قياسات الشكل الرباعى أ ء م هـ = ٣٦٠°

ق (ء م̂ هـ) = ٣٦٠° − [٩٠° + ٩٠° + ٦٠°] = ٣٦٠° − ٢٤٠° = ١٢٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = ق (ء م̂ هـ) = ١٢٠°

طول ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ط × ٢ = $\frac{٤}{٣}$ ط

ق (س أ̂ ص) = ق (س م̂ ص) = ١٢٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{س ب ص}}$) = ٣٦٠° − ق ($\overset{\frown}{\text{س م ص}}$) = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

طول ($\overset{\frown}{\text{س ب ص}}$) = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × ٢ ط نق = $\frac{٢٤٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ط × ٤ = $\frac{١٦}{٣}$ ط

مثال إذا كان أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م وكان

ق (أ م̂ ب) = $\frac{١}{٤}$ ق (أ م̂ ب المنعكسة) أوجد ق (أ ب)

الحـــــــــــــــــــل

بفرض أن ق (أ م̂ ب) = س

، ق (أ م̂ ب المنعكسة) = ٤س

ق(أ ب) = ق (أ م̂ ب) = ٧٢°

∴ س = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢°

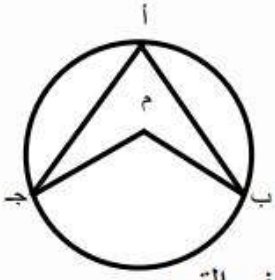
ق (أ م̂ ب) + ق (أ م̂ ب المنعكسة) = ٣٦٠°

س + ٤ س = ٣٦٠ ٥س = ٣٦٠°

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

نظرية (١ – ١)

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس

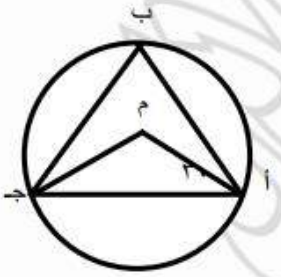


زاوية ب أ جـ زاوية محيطية ، زاوية ب م جـ مركزية تشتركان فى القوس ب جـ فيكون

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب $\hat{م}$ جـ)

ملاحظة :-

قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس



مثال

فى الشكل المقابل

أوجد ق ($\hat{ب}$)

الحـــــل

فى △ أ م جـ

م أ = م جـ

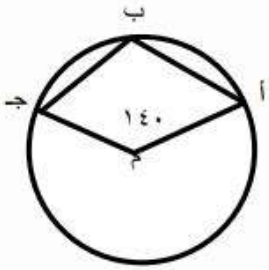
∴ ق (م $\hat{أ}$ جـ) = ق (م $\hat{جـ}$ أ) = ٣٠°

∴ ق ($\hat{م}$) = ١٨٠° – [٣٠° + ٣٠°] = ١٢٠

ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ $\hat{م}$ جـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°°

مثال فى الشكل المقابل



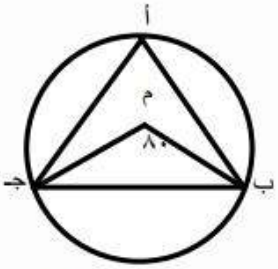
أوجد ق (أ $\hat{ب}$ جـ)

الحـــــل

ق (أ $\hat{م}$ جـ) المنعكسة = ٣٦٠° ـ ١٤٠° = ٢٢٠°

ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ م جـ $\hat{}$ المنعكسة) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٢٠° = ١١٠°

مثال فى الشكل المقابل



إذا كان أ ب = أ جـ ، ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٨٠°

أوجد ق (أ $\hat{جـ}$ ب)

الحـــــل

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب $\hat{م}$ جـ)

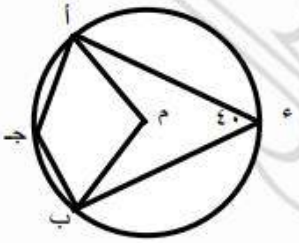
= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ = ٤٠°

أ ب = أ جـ

∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$

= $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

مثال فى الشكل المقابل



إذا كان ق (أ $\hat{ء}$ ب) = ٤٠°

أوجد ق (أ $\hat{جـ}$ ب)

الحـــــل

ق (أ $\hat{م}$ ب) = ٢ ق ($\hat{ء}$)

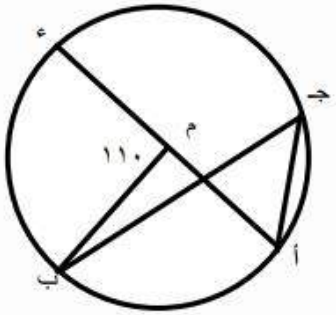
= ٢ × ٤٠° = ٨٠°

ق(أ $\hat{م}$ ب) المنعكسة = ٣٦٠° ـ ٨٠°

= ٢٨٠°

ق(أ $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ $\hat{م}$ ب) المنعكسة

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٨٠° = ١٤٠°



مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ق(ء م̂ ب) = ١١٠°

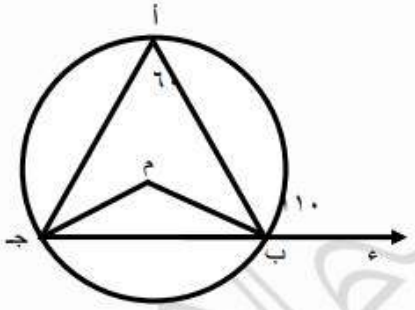
أوجد ق (أ جـ̂ ب)

الحـــــل

ق (أ م̂ ب) + ق (ء م̂ ب) = ١٨٠°

ق(أ م̂ ب) = ١٨٠° ـ ١١٠° = ٧٠°

ق (أ جـ̂ ب)= $\frac{١}{٢}$ ق (أ م̂ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٧٠° = ٣٥°



مثال

فى الشكل المقابل

ق (أ ب̂ ء) = ١١٠° ،

ق (ب أ̂ جـ)= ٦٠°أوجد ق (أ ب̂ م)

الحـــــــــــــــــل

ق (ب م̂ جـ) = ٢ ق (أ̂) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

فى △ ب م جـ

م ب = م جـ ∴ ق (م ب̂ جـ) = ق (م جـ̂ ب) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

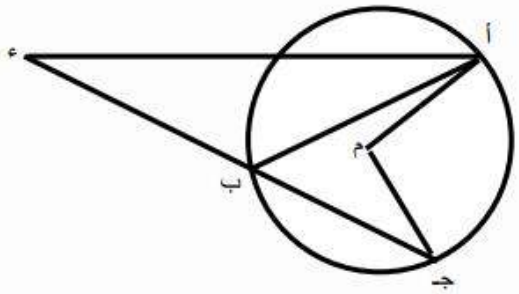
ق (ء ب̂ أ) + ق (أ ب̂ جـ) = ١٨٠° [متجاورتان حادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع]

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ١٨٠ ـ ١١٠ = ٧٠°

∴ ق (أ ب̂ م) = ٧٠ ـ ٣٠ = ٤٠°

مثال

فى الشكل المقابل



م دائرة ، ق (أ م̂ جـ) = ١١٢°

أ ب = ء ب

أوجد ق (ء̂)

الحـــــــــــــــــــل

ق (أ ب̂ م) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ م̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١١٢ = ٥٦°

ق (أ ب̂ جـ) + ق (أ ب̂ ء) = ١٨٠°

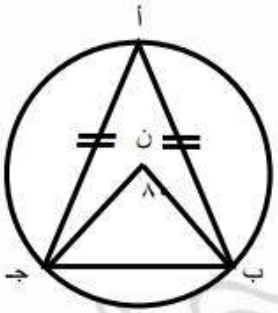
∴ ق (أ ب̂ ء) = ١٨٠ ـ ٥٦ = ١٢٤°

فى △ أ ب ء أ ب = ب ء

∴ ق (ب أ̂ ء) = ق (ء̂) = $\frac{١٨٠ - ١٢٤}{٢}$ = $\frac{٥٦}{٢}$ = ٢٨°

مثال

فى الشكل المقابل



دائرة ن فيها أ ب = أ جـ

، ق (ب ن̂ جـ) = ٨٠° أوجد

ق (أ ب̂ جـ) ، ق (ب جـ ⌒) الاكبر

الحـــــــــــــــــــل

ق (ب أ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب ن̂ جـ) [محيطية ومركزية]

∴ ق (ب أ̂ جـ) = ٤٠°

أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠° وهو المطلوب أولاً

ق (ب جـ ⌒) الاصغر = ق (ب ن̂ جـ) = ٨٠°

∴ ق (ب جـ ⌒) الاكبر = ٣٦٠° ـ ٨٠° = ٢٨٠°

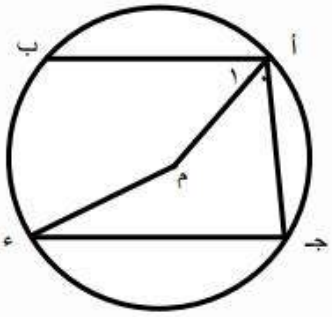
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ١٠٠° ، أ ب // جـ ء

أوجد ق (أ $\hat{م}$ ء)



الحـــــــــــــــــــل

أ ب // جـ ء

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ء) + ق (جـ $\hat{أ}$ ب) = ١٨٠ [داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع]

∴ق (أ $\hat{جـ}$ ء) = ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠°

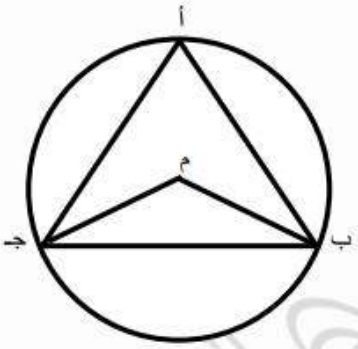
ق (أ $\hat{م}$ ء) = ٢ ق (أ $\hat{جـ}$ ء) = ٢ × ٨٠ = ١٦٠°

مثال

فى الشكل المقابل

دائرة مركزها م ، أ ب جـ مثلث متساوى

الاضلاع أوجد ق (ب $\hat{م}$ جـ)



الحـــــــــــــــــــل

أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع

∴ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٦٠°

ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٢ ق (ب $\hat{أ}$ جـ) [محيطية ومركزية مشتركتان فى القوس]

∴ ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

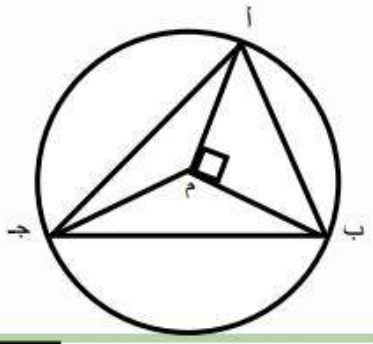
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

ق (أ $\hat{م}$ ب) = ٩٠° ، ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٦٠°

أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



الحـــــــــــــــــــل

مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°

∴ ق (أ م̂ جـ) = ٣٦٠ − [٩٠ + ٦٠] = ٣٦٠ − ١٥٠ = ٢١٠°

ق (ب أ̂ جـ) = ½ ق (ب م̂ جـ) = ½ × ٦٠ = ٣٠°

ق (أ ب̂ جـ) = ½ ق (أ م̂ جـ) = ½ × ٢١٠ = ١٠٥°

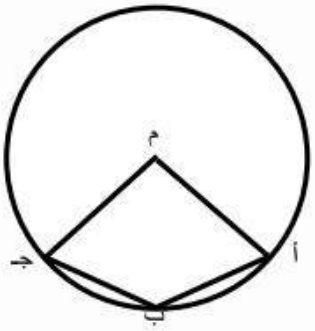
ق (أ جـ̂ ب) = ½ ق (أ م̂ ب) = ½ × ٩٠ = ٤٥°

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان م مركز الدائرة

ق (أ م̂ جـ) = ق (ب̂) أوجد ق (ب̂)



الحـــــــــــــــــــل

ق (ب̂) = ½ ق (أ جـ)

ق (أ م̂ جـ) = ق (أ ب جـ)

ق (أ م̂ جـ) = ق (ب)

ق (أ ب جـ) = ½ ق (أ جـ)

بفرض أن ق (أ جـ) الاكبر = ٢س

ق (أ ب جـ) = س

ق (أ ب جـ) + ق (أ جـ) = ٣٦٠°

س + ٢ س = ٣٦٠°

٣س = ٣٦٠° س = ١٢٠°

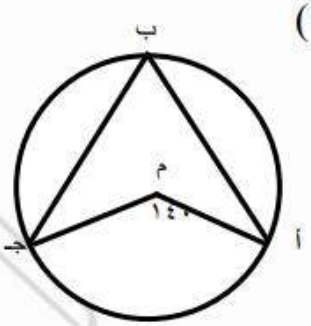
ق (أ جـ) الاكبر = ٢س = ٢ × ١٢٠ = ٢٤٠°

ق (ب) = ½ ق (أ جـ) = ½ × ٢٤٠ = ١٢٠°

تمارين على العلاقة بين المحيطية والمركزية

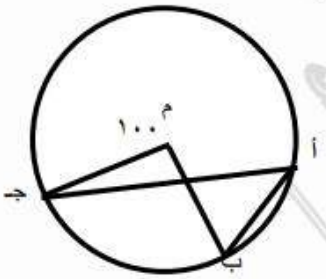
س فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب

(١)



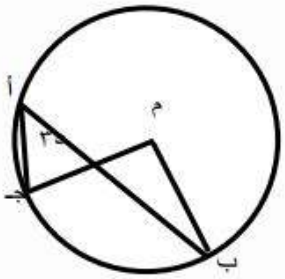
ق(ب̂) = ...

(٢)



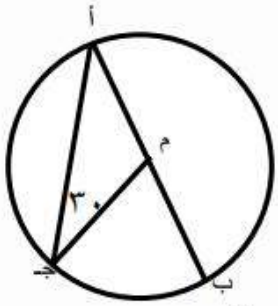
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(٣)



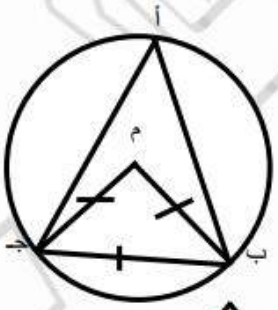
ق(أ م̂ ب) = ...

(٤)



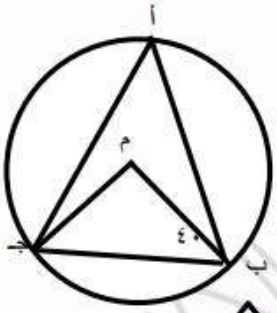
ق(ب م̂ جـ) = ...

(٥)



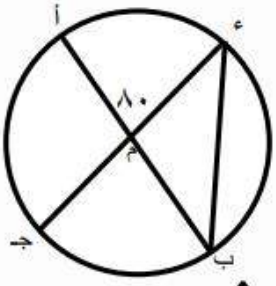
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(٦)



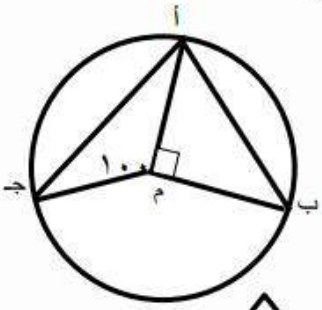
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(٧)



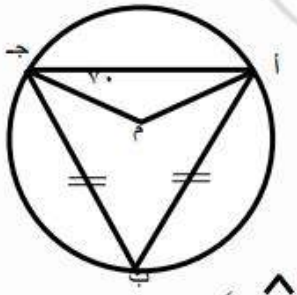
ق(ب ء̂ جـ) = ...

(٨)



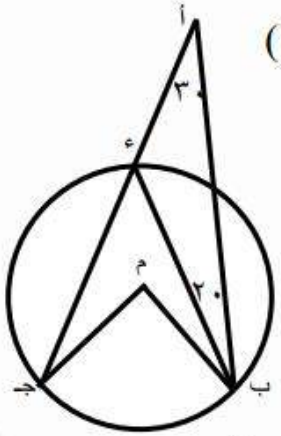
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(٩)



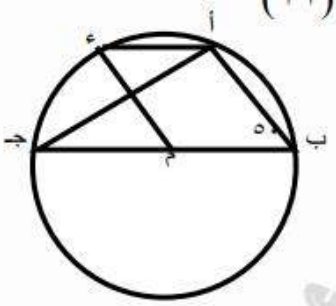
ق(أ م̂ جـ) = ...

(١٠)



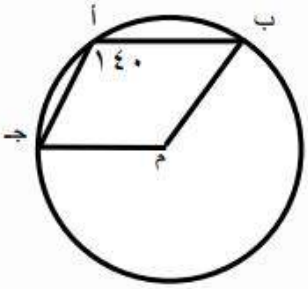
ق(ب م̂ جـ) = ...

(١١)



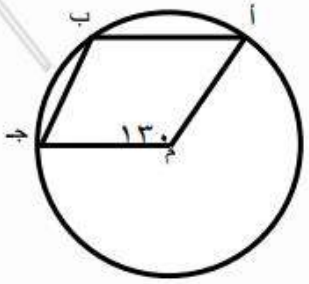
ق(جـ أ̂ ء) = ...

(١٢)



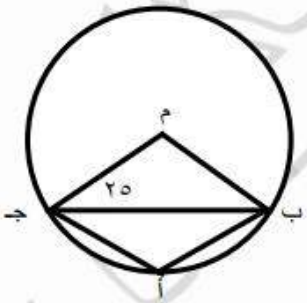
ق(ب م̂ جـ) = ...

(١٣)



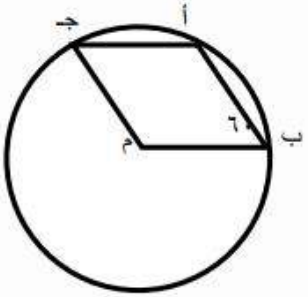
ق(أ ب̂ جـ) = ...

(١٤)



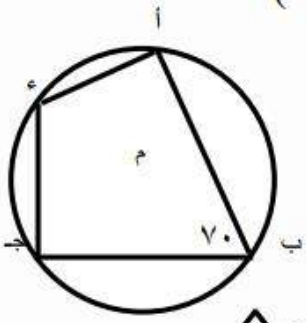
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(١٥)



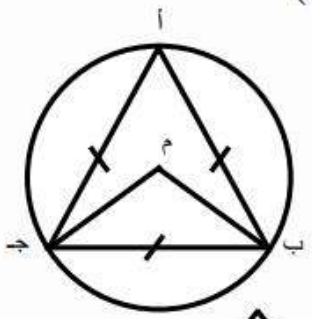
ق(ب أ̂ جـ) = ...

(١٦)



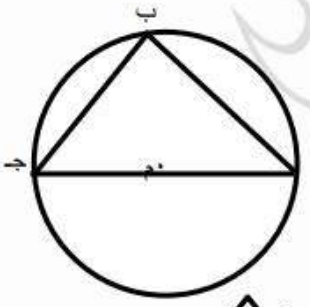
ق(أ ء̂ جـ) = ...

(١٧)



ق(ب أ̂ جـ) = ...

(١٨)

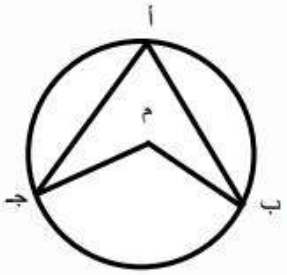


ق (أ ب̂ جـ) = ...

نتائج هامة

نتيجة(١)

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها



ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) ،، ق ($\hat{أ}$) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب $\hat{م}$ جـ)

∴ ق ($\hat{أ}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

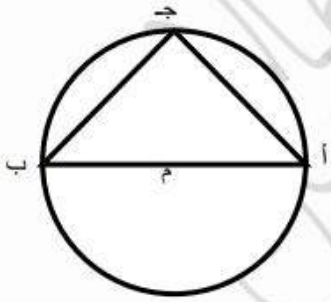
ملاحظة

قياس القوس يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية المحصورة بين ضلعيه

نتيجة(٢)

الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة

أى أن قياس الزاوية المحيطية المقامة فى نصف دائرة(على القطر) = ٩٠°



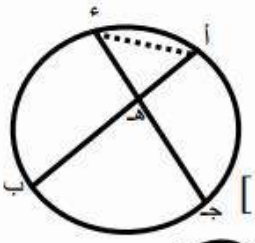
إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م

جـ نقطة تقع على محيط الدائرة م

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ٩٠°

تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة فإن زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها



ق (أ هـ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)]

المعطيات: أ ب ، جـ ء وتران متقاطعان من الداخل فى هـ

المطلوب: إثبات أن ق (أ هـ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)]

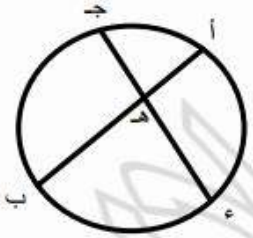
البرهان: ق (أ ء̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) ،، ق (ب أ̂ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

ق (أ هـ̂ جـ) = ق (أ ء̂ جـ) + ق (ب أ̂ ء) [لانها خارجة عن △ أ هـ ء]

ق (أ هـ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) + $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{ب ء}$)

ق(أ هـ̂ جـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)]

فى الشكل المقابل



إذا كان ق($\overset{\frown}{أ ء}$) + ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ١١٠°

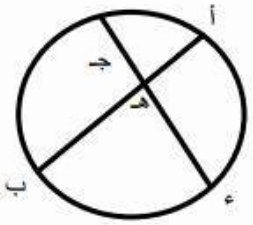
فإن ق (أ هـ̂ جـ) = ...

فى الشكل المقابل

إذا كان ق(أ هـ̂ جـ) = ٨٠° ، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٦٠°

فإن ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ...

فى الشكل المقابل

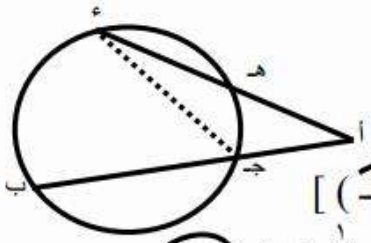


إذا كان ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٨٠° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٦٠°

فإن ق (أ هـ̂ جـ) = ...

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع وتران فى نقطة خارج دائرة فإن زاوية تقاطعهما يساوى نصف حاصل طرح قياسى القوسين المقابلين لها



ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{ءب}$) - ق ($\overset{\frown}{جـهـ}$)]

المعطيات: أ ء ، أ ب وتران متقاطعان من الخارج فى أ

المطلوب: إثبات أن ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{ءب}$) - ق ($\overset{\frown}{جـهـ}$)]

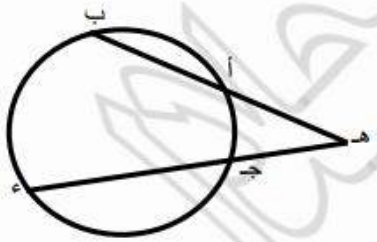
البرهان: ق (ء جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{ءب}$) ،، ق (أ ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{هـجـ}$)

ق (ء جـ ب) = ق (أ) + ق (أ ء جـ) [لانها خارجة عن △ أ جـ ء]

ق (أ) = ق(ء جـ ب) - ق(أ ء جـ)

ق(أ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{ءب}$) - $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{هـجـ}$)

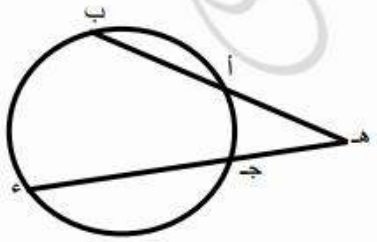
ق(أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{ءب}$) - ق ($\overset{\frown}{جـهـ}$)]



فى الشكل المقابل

إذا كان ق ($\overset{\frown}{بء}$) – ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ١٠٠°

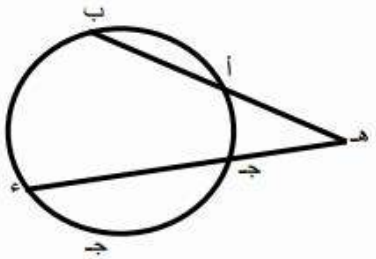
فإن ق ($\hat{هـ}$) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق ($\overset{\frown}{بء}$) = ١٠٠° ، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٢٠°

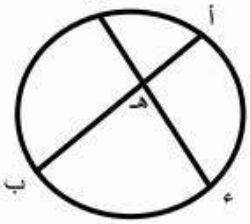
فإن ق ($\hat{هـ}$) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق ($\hat{هـ}$) = ٦٠° ، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٤٠°

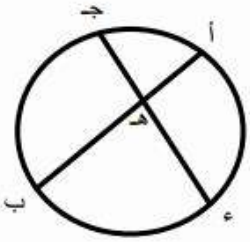
فإن ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق(ء هـ ب) = ٨٠° ، ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ٦٠°

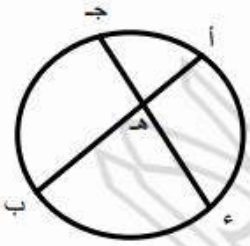
فإن ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق($\overset{\frown}{أ ء}$) = ٨٠° ، ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ٦٠°

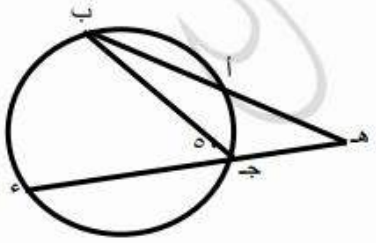
فإن ق (أ هـ جـ) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ٢٠٠°

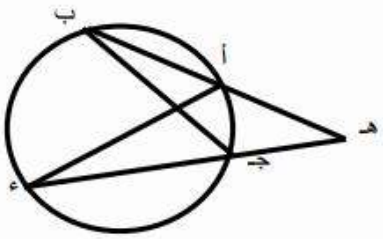
فإن ق (أ هـ ء) = ...



فى الشكل المقابل

إذا كان ق (ب ء جـ) = ٥٠° ، ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٣٠

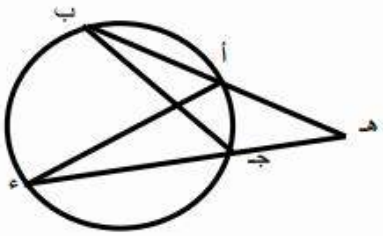
فإن ق (هـ) = ...



فى الشكل المقابل

ق (أ ب جـ) = ٢٠° ، ق (ب جـ ء) = ٦٠°

ق (هـ) = ...



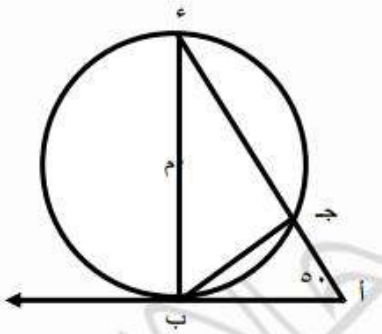
فى الشكل المقابل

ق (أ ب جـ) = ٢٠° ، ق (هـ) = ٣٠°

ق (ب أ ء) = ...

مثال

فى الشكل المقابل



ء ب قطر فى الدائرة م ، أ ب يمس الدائرة

م عند ب ، أ ء يقطع الدائرة فى جـ ، ء

ق (جـ أ ب) = ٥٠° أوجد ق (ء ب جـ)

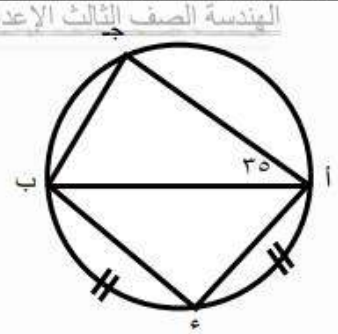
الحـــــــــــــــل

ء ب قطر ، أ ب مماس ∴ ق (أ ب ء) = ٩٠°

∴ ق (ء) = ١٨٠ – [٥٠ + ٩٠] = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠°

ء ب قطر ∴ ق (ء جـ ب) = ٩٠° [محيطية مقامة فى نصف دائرة]

∴ ق (ء ب جـ) = ١٨٠ – [٩٠ + ٤٠] = ١٨٠ – ١٣٠ = ٥٠°



مثال

فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م ، طول أ ء = طول ب ء

ق (جـ أ ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان ق (جـ ب ء)

الحـــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ ق (أ ء ب) = ٩٠°

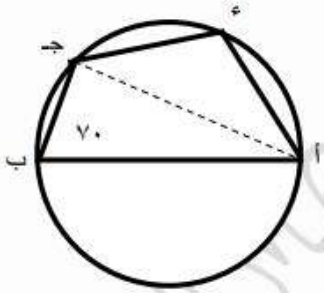
طول $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$ ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) ∴ أ ء = ب ء

∴ ق (ء أ ب) = ق (ء ب أ) = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥°

أ ب قطر ∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق (جـ ب أ) = ١٨٠ ـ [٣٥+٩٠] = ١٨٠ ـ ١٢٥ = ٥٥°

∴ ق (جـ ب ء) = ٥٥ + ٤٥ = ١٠٠°



مثال

فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة م ، طول $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$

ق(أ ب جـ) = ٧٠° أوجد

ق(ء جـ أ) ، ق (جـ أ ب)

الحـــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠°

∴ق (جـ أ ب) = ١٨٠ ـ [٩٠ + ٧٠] = ١٨٠ ـ ١٦٠ = ٢٠°

ق (أ ب جـ) = ٧٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) = ١٤٠° (١)

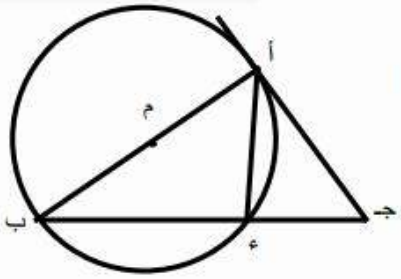
طول $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$ ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) = ٧٠°

ق (أ جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = $\frac{١}{٢}$ × ٧٠ = ٣٥°

مثال

فى الشكل المقابل



أب قطر فى الدائرة م ، أ جـ تمس الدائرة عند أ

أ جـ = ٩ سم ، ب م = ٦ سم

أوجد طول ب جـ ، أ ء

الحـــــــــــــــــل

أ جـ مماس ، أ ب قطر ∴ ق (جـ أ ب) = ٩٠°

(ب جـ)^{٢} = (جـ أ)^{٢} + (أ ب)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٢)^{٢} = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

ب جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

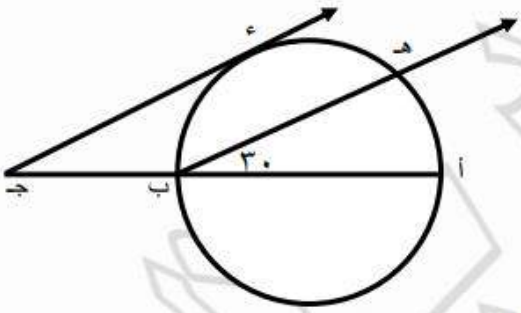
أ ب قطر ∴ ق (أ ء ب) = ٩٠°

من أقليدس أ ء × ب جـ = أ ب × أ جـ أ ء × ١٥ = ٩ × ١٢

أ ء = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧,٢ سم

مثال

فى الشكل المقابل



جـ ء مماس للدائرة م ، أ ب قطر لها

جـ ء // ب هـ ، ق (أ ب هـ) = ٣٠°

أوجد بالبرهان ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

الحـــــــــــــــــــــــــل

ق (أ ب هـ) = ٣٠° ∴ ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) = ٦٠°

ب هـ // جـ ء ∴ ق ($\overset{\frown}{هـ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) (١)

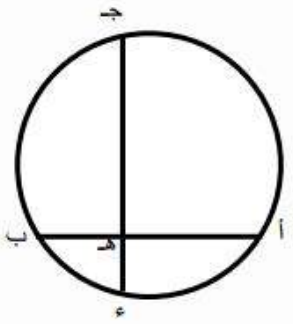
أ ب قطر ∴ ق ($\overset{\frown}{أ هـ}$) + ق ($\overset{\frown}{هـ ء}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٨٠°

٦٠° + ق ($\overset{\frown}{هـ ء}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٨٠°

ق ($\overset{\frown}{هـ ء}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٢٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ق ($\overset{\frown}{هـ ء}$) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

مثال فى الشكل المقابل



أ ب ، جـ ء وتران فى الدائرة م ، أ ب ∩ جـ ء = {هـ}

فإذا كان ق(ب ء) = ٦٠° ، ق (أ ء) = ١٠٠°

، ق(أ جـ) = ١٢٠° أوجد

(١) ق (جـ ب) (٢) ق (جـ هـ ب)

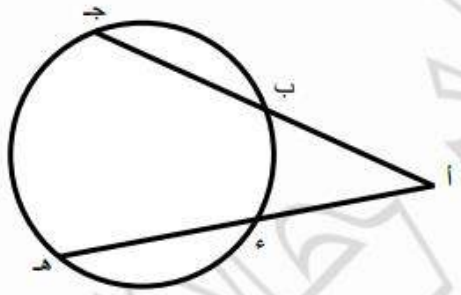
الحـــــــــــــل

ق (جـ ب) = ٣٦٠ – [٦٠ + ١٠٠ + ١٢٠] = ٣٦٠ – ٢٨٠ = ٨٠°

ق (جـ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق (أ ء) + ق (ب جـ)]

= $\frac{١}{٢}$ [١٠٠ + ٨٠] = $\frac{١}{٢}$ × ١٨٠ = ٩٠°

مثال فى الشكل المقابل



ق(أ) = ٤٠° ، ق (ب ء) = ٦٠°

ق (ب جـ) = ق (ء هـ) أوجد

(١) ق (هـ جـ) (٢) ق (ب جـ)

الحـــــــــــــل

ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (جـ هـ) – ق (ب ء)] ،، ق (أ) = ٤٠°

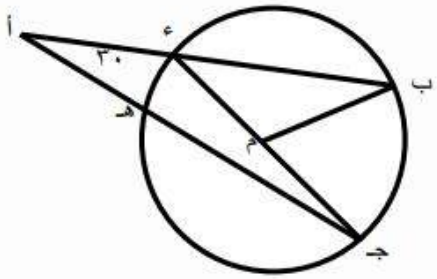
∴ ق (جـ هـ) – ق (ب ء) = ٨٠°

ق (جـ هـ) – ٦٠° = ٨٠° ∴ ق (جـ هـ) = ٨٠° + ٦٠° = ١٤٠°

ق (ب جـ) + ق (ء هـ) = ٣٦٠ - [١٤٠ + ٦٠] = ٣٦٠ – ٢٠٠ = ١٦٠°

ق (ب جـ) = ق (ء هـ)

∴ ق (ب جـ) = $\frac{١٦٠}{٢}$ = ٨٠°



مثال

فى الشكل المقابل

ء جـ قطر فى الدائرة م ، ق(أ) = ٣٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = ٢٠°

أوجد ق (ب ء جـ)

الحـــــــــــــــــــل

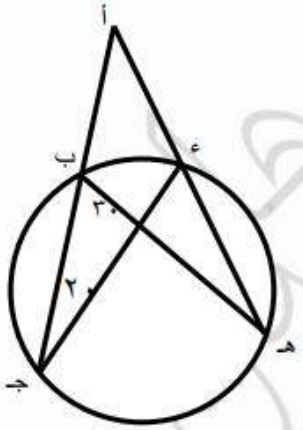
ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) − ق ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$)] ،،، ق (أ) = ٣٠

ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) − ق ($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) = ٦٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) − ٢٠° = ٦٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ٦٠° + ٢٠° = ٨٠°

∴ ق (ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°



مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ق (هـ ب جـ) = ٥٠°

ق (ء جـ ب) = ٢٠° أوجد

ق (هـ أ جـ)

الحـــــــــــــــــــل

ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ٢ ق (ء ب جـ) = ٢ × ٢٠ = ٤٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{هـ جـ}}$) = ٢ ق (هـ ب جـ) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

ق (هـ أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{\text{هـ جـ}}$) − ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$)] = $\frac{١}{٢}$ [٦٠° − ٤٠°]

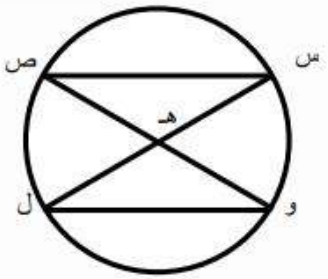
= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠° = ١٠°

مثال فى الشكل المقابل

س ص // و ل إثبت ان

(١) س ل = و ص

(٢) ق(س هـ و) = ق ($\overset{\frown}{\text{س و}}$)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

س ص // و ل

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{س و}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ص ل}}$) (١)

بأضافة ق ($\overset{\frown}{\text{و ل}}$) للطرفين

ق ($\overset{\frown}{\text{س و}}$)+ق($\overset{\frown}{\text{و ل}}$)=ق($\overset{\frown}{\text{ص ل}}$)+ ق($\overset{\frown}{\text{و ل}}$)

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{س ل}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{و ص}}$)

∴ س ل = و ص [وهو المطلوب أولاً]

ق(س هـ و) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{\text{س و}}$)+ق($\overset{\frown}{\text{ص ل}}$)]

بالتعويض من ١ نجد أن

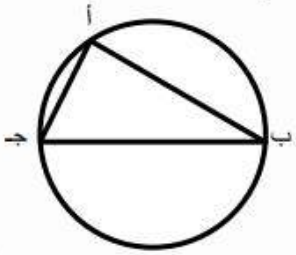
ق(س هـ و) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{\text{س و}}$)+ ق($\overset{\frown}{\text{س و}}$)]

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ ق ($\overset{\frown}{\text{س و}}$)

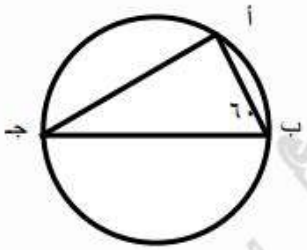
= ق ($\overset{\frown}{\text{س و}}$)

تمارين على نظرية (١-١)

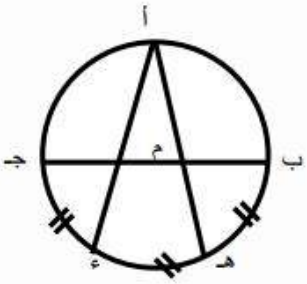
[١] فى كل شكل من الأشكال الأتية أكمل حسب المطلوب



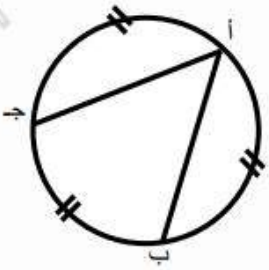
ق (ب أ جـ) = ...



ق (أ جـ ب) = ...

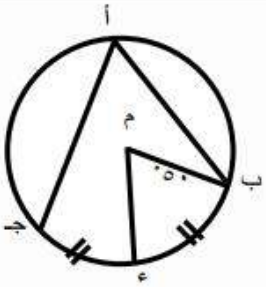


ق(هـ أ ء) = ...

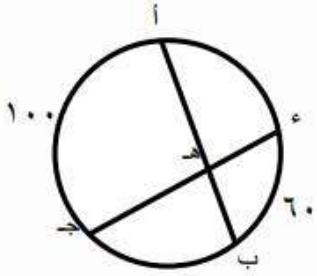


ق(ب أ جـ) = ...

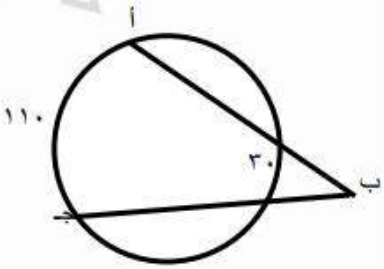
ق(ء م جـ) = ...



ق(ب أ جـ) = ...



ق (أ هـ جـ) = ...



ق (أ ب جـ) = ...

ق (هـ أ جـ) = ...

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

نظرية (١ – ٣)

الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

المعطيات: جـ ، ء ، هـ زوايا محيطية مشتركة فى أ ب

المطلوب: أثبات أن ق(جـ) = ق(ء) = ق (هـ)

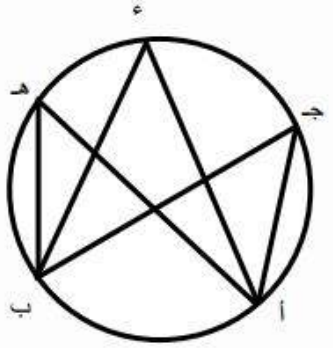
البرهان:

ق(جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أب}$)

ق(ء) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

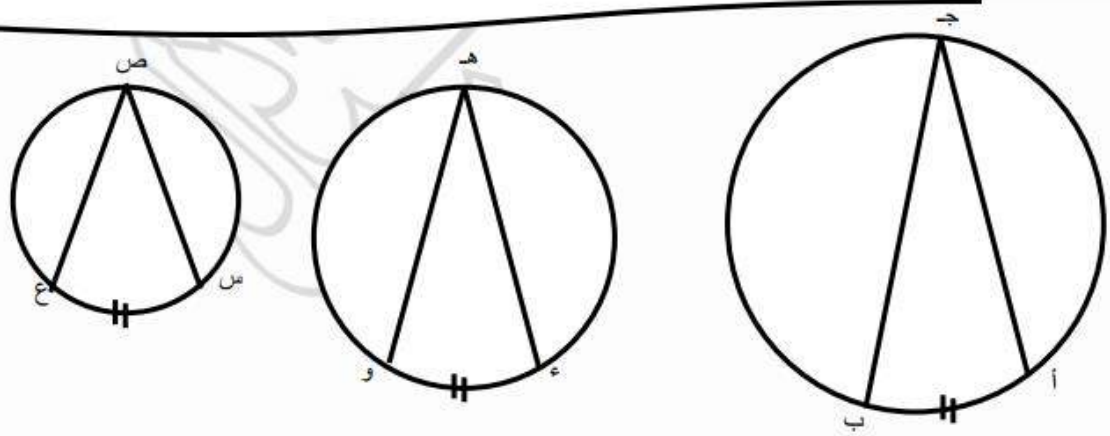
ق(هـ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق(جـ) = ق (ء) = ق (هـ)



نتيجة

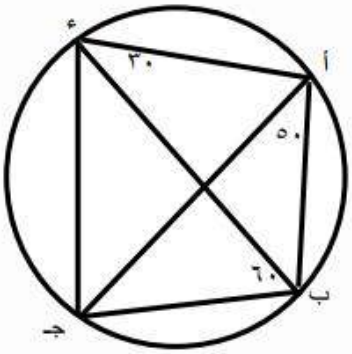
فى الدائرة الوحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً متساوية فى القياس تكون متساوية فى القياس



عكس نتيجة	فى الدائرة الوحدة (أو فى عدة دوائر) الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس تحصر بين ضلعيها أقواساً متساوية فى القياس

فى الشكل المقابل

أكمل



(١) ق (أ جـ ب) = ...

(٢) ق (ء أ جـ) = ...

(٣) ق(ب ء جـ) = ...

(٤) ق (أ ب ء) = ...

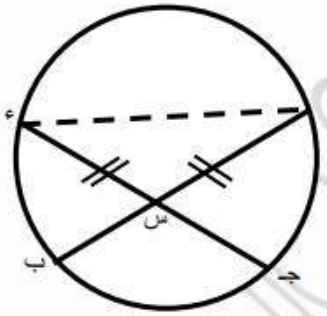
(٥) ق (أ جـ ء) = ...

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان أ س = س ء

إثبت أن أ ب = جـ ء



الحـــــــــــــــــل

س أ = س ء

∴ ق (أ) = ق (ء)

∴ ق ($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

بأضافة ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) للطرفين

ق($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) + ق ($\overset{\frown}{جـ ب}$)

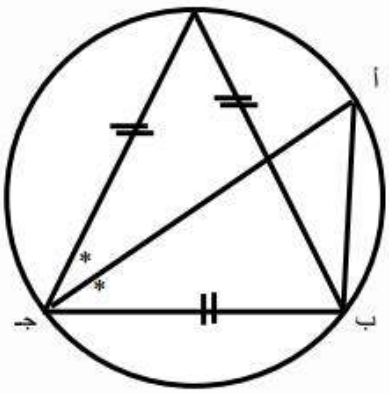
∴ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$)

∴ أ ب = جـ ء

ء

فى الشكل المقابل إذا كان ب ء = ء جـ = ب جـ

جـ أ ينصف (ب جـ ء) أكمل



(١) ق (ب أ جـ) = ...

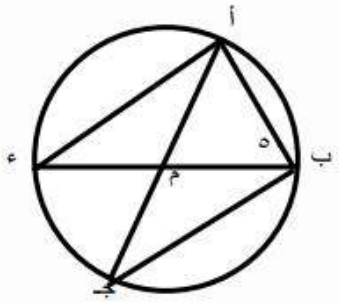
(٢) ق (أ ب ء) = ...

(٣) ق (أ ب جـ) = ...

مثال

فى الشكل المقابل

دائرة مركزها م أكمل



(١) ق (جـ ب ء) = ...

(٢) ق(ب جـ أ) = ...

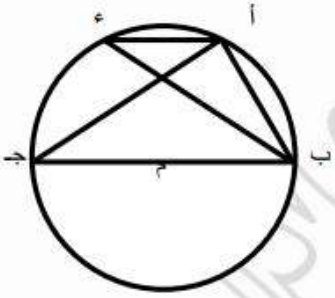
(٣) ق(ب ء أ) = ...

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ق (ب أ ء) = ١٢٠°

أوجد ق (ء ب جـ)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

ب جـ قطر ∴ ق (ب أ جـ) = ٩٠°

ق (ب أ ء) = ١٢٠°

∴ ق (جـ أ ء) = ١٢٠° ـ ٩٠° = ٣٠°

ق (ء ب جـ) = ق (جـ أ ء) = ٣٠° [محيطيتان مشتركتان فى القوس]

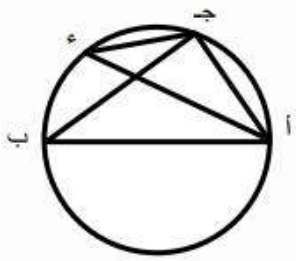
مثال

فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة م

ق (أ جـ ء) = ١٢٠°

أوجد ق (ب أ ء)



الحـــــــــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠° [محيطية مقامة فى نصف دائرة]

ق (أ جـ ء) = ١٢٠° ∴ ق (ب جـ ء) = ١٢٠° ـ ٩٠° = ٣٠°

ق (ب أ ء) = ق (ب جـ ء) [محيطيتان مشتركتان فى القوس]

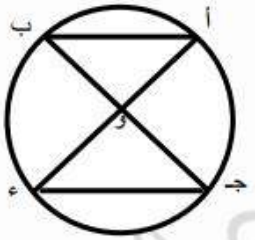
∴ ق (ب أ ء) = ٣٠°

مثال

فى الشكل المقابل

أ ء ∩ ب جـ = { و }

أ و = و ب إثبت أن و جـ = و ء



الحـــــــــــــــــــــــــــل

فى △ أ و ب أ و = و ب ∴ ق (أ) = ق (ب) (١)

ق (أ) = ق (جـ) [محيطيتان تشتركان فى القوس] (٢)

ق (ب) = ق (ء) [محيطيتان تشتركان فى القوس] (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (جـ) = ق (ء)

∴ و جـ = و ء

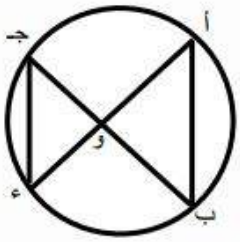
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء وتران متوازيان فى الدائرة م

أ ء ∩ جـ ب = { و }

إثبت أن أ و = و ب



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب // جـ ء ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) (١)

ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) (٢)

ق (ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (أ) = ق (ب) ∴ و أ = و ب

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب = ء جـ

إثبت أن ق (ب) = ق (جـ)

الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب = ء جـ ∴ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$)

بطرح ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) من الطرفين

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) – ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) – ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$)

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) (١)

ق(ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) (٢)

ق (جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) (٣)

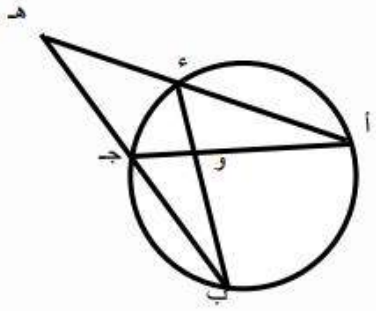
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (ب) = ق (جـ)

مثال فى الشكل المقابل

ق (ء ب جـ) = ٢٥° ، ق (هـ) = ٣٦°

أوجد (١) ق (ء أ جـ)

(٢) ق (أ و ب)



الحـــــــ

الحـــــــــــــــــــــــــل

ق (ب أ ء) = ق (ب هـ جـ) [محيطيتان تشتركان فى القوس]

∴ ق (ب أ ء) = ٣٥°

أ ب قطر ، جـ ب مماس ∴ ق (أ ب جـ) = ٩٠°

∴ ق (ب ء أ) = ١٨٠ – [٩٠ + ٣٥] = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥°

ق (ب ن جـ) = ٢ ق (ب هـ جـ) [محيطية ومركزية تشتركان فى القوس]

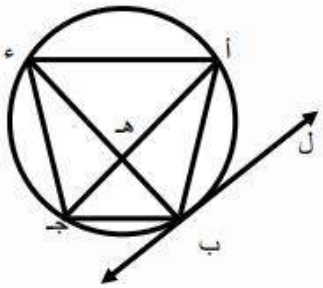
∴ ق (ب ن جـ) = ٢ × ٣٥° = ٧٠°

∴ ق (ب جـ ن) = ١٨٠ – [٩٠ + ٧٠] = ١٨٠ – ١٦٠ = ٢٠°

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ب جـ // أ ء ، ب ل مماس للدائرة



عند ب حيث ب ل // أ جـ إثبت أن

(١) ء ب ينصف أ ء جـ

(٢) ق (جـ ب ء) = ق (جـ ء ب)

الحـــــــــــــــــــــــــل

ل ب // أ جـ ∴ ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) (١)

ق (أ ء ب) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أب}$) ،، ق (ب ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (أ ء ب) = ق (ب ء جـ)

∴ ء ب ينصف أ ء جـ

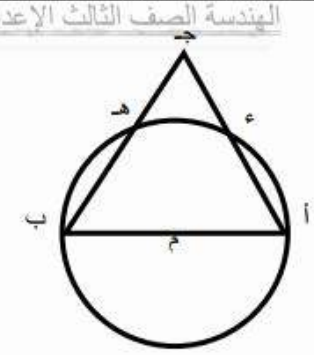
أ ء // ب جـ ∴ ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$) (٣)

من ١ ، ٣ ينتج أن ق ($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$)

∴ ق (جـ ب ء) = ق (جـ ء ب)

مثال فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م



ق(أ ء) = ق (ء هـ) = ق (هـ ب)

إثبت أن جـ أ = جـ ب ثم أوجد ق (ء هـ ب)

الحـــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ ق (أ ء) + ق (ء هـ) + ق (هـ ب) = ١٨٠°

ق(أ ء) = ق (ء هـ) = ق (هـ ب)

∴ ق(أ ء) = ق (ء هـ) = ق (هـ ب) = $\frac{١٨٠}{٣}$ = ٦٠°

ق (أ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ء هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠°

ق (ب)= $\frac{١}{٢}$ ق (أ ء هـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠ = ٦٠°

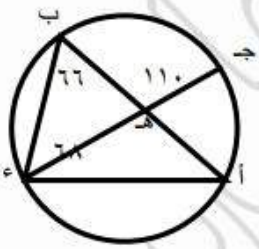
ق (أ) = ق (ب) ∴ أ جـ = جـ ب

ق (ء هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (ء أ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤٠° = ١٢٠°

مثال فى الشكل المقابل

ق(ب) = ٦٦° ، ق (ب هـ جـ) = ١١٠°

ق (أ ء ب) = ٦٨° إثبت أن ء جـ قطر فى الدائرة



الحـــــــــــــــــــــل

ق (ب أ ء) = ١٨٠ ـ [٦٦ +٦٨] = ١٨٠ ـ ١٣٤ = ٤٦°

∴ ق (ب ء) = ٢ ق (ب أ ء) = ٢ × ٤٦ = ٩٢°

ق (ب هـ جـ) = ق (أ ب ء) + ق (ب جـ ء)

∴ ق (ب جـ ء) = ١١٠ ـ ٦٦ = ٤٤°

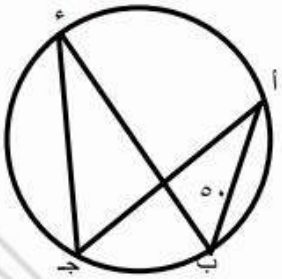
∴ ق (ب جـ) = ٢ ق (ب جـ ء) = ٢ × ٤٤ = ٨٨°

ق (ب ء) + ق (ب جـ) = ٩٢° +٨٨° = ١٨٠°

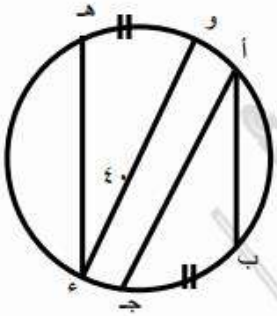
∴ ء جـ قطر

تمارين على الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

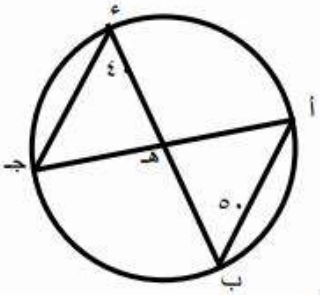
[١] فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب [علما بأن م هى مركز الدائرة]



ق (أ جـ ء) = ...

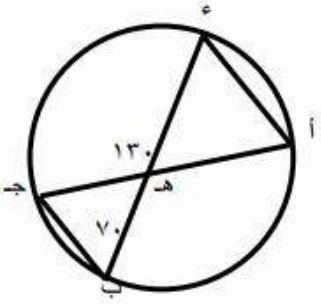


ق (ب أ جـ) = ...

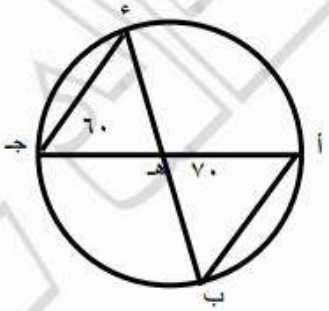


ق(أ جـ ء) = ...

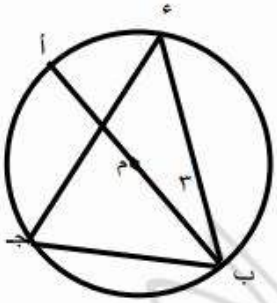
ق (ب أ جـ) = ...



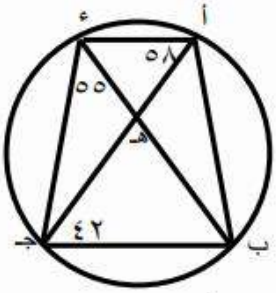
ق(أ ء ب) = ...



ق(ب أ جـ) = ...

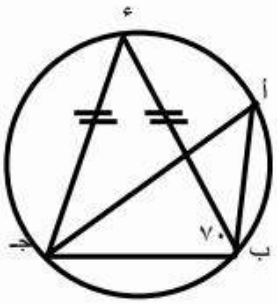


ق (ب جـ ء) = ...



ق(ب أ جـ) = ...

ق(أ ء ب) = ...



ق(ب أ جـ) = ...

من الصعب
أن تظل الأول
ما لم تكن
الأفضل

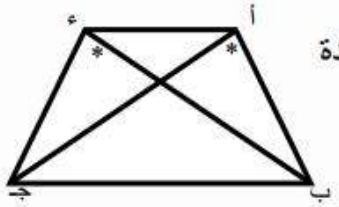
ق (ء ب جـ) = ...

الزوايا المرسومة على قطعة مستقيمة واحدة

عكس نظرية (١ – ٣)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها فإنه يمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتراً فيها

فى الشكل المقابل



إذا كان ق (ب أ جـ) = ق (ب ء جـ) [المرسومتان على القاعدة ب جـ وفى جهة واحدة منها] فإن

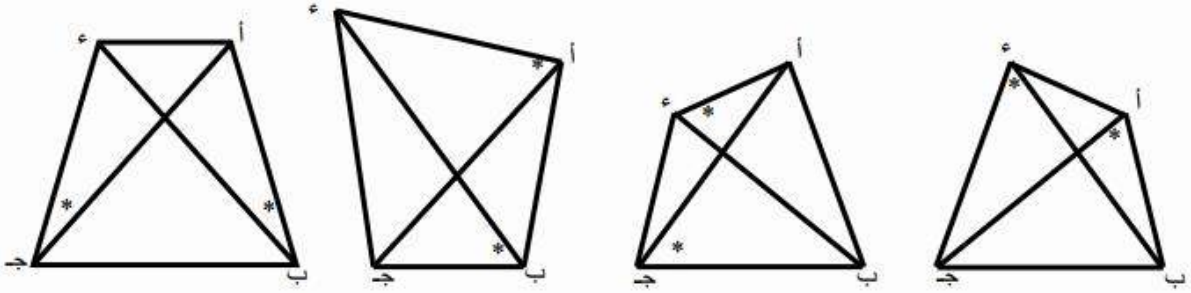
النقط أ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة تكون ب جـ وتراً فيها

أى أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على محيط دائرة واحدة وفى هذه الحالة يسمى الشكل

الرباعى أ ب جـ ء **(رباعى دائرى)**

تعريف الشكل الرباعى الدائرى

هو شكل رباعى تقع رؤوسه الاربعة على محيط دائرة واحدة
أو شكل رباعى يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الاربعة



ملاحظات

(١) المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية

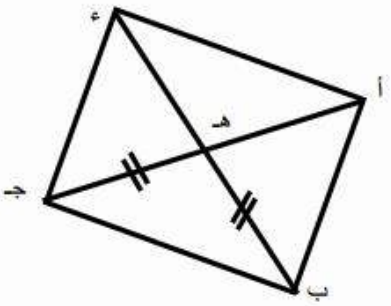
(٢) متوازى الاضلاع والمعين وشبه المنحرف الغير متساوى الساقين رباعية غير دائرية

مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان أ ء // ب جـ ، هـ ب = هـ جـ

إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــل

فى Δ هـ ب جـ

ب هـ = هـ جـ

∴ ق (هـ ب جـ) = ق (هـ جـ ب) (١)

أ ء // ب جـ

∴ ق (ء أ جـ) = ق (هـ جـ ب) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (هـ ب جـ) = ق (ء أ جـ)

وهما على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

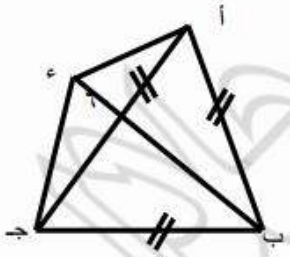
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع

ق (ب ء جـ) = ٦٠°

إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــل

المثلث أ ب جـ متساوى الاضلاع

∴ ق (ب أ جـ) = ٦٠° (١)

ق (ب ء جـ) = ٦٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

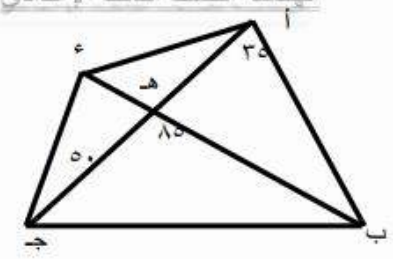
ق (ب أ جـ) = ق (ب ء جـ)

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

مثال

فى الشكل المقابل

إثبت أن الشكل أب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــل

ب هـ جـ زاوية خارجة عن Δ ء هـ جـ

∴ ق (ب هـ جـ) = ق (ب ء جـ) + ق(ء جـ هـ)

∴ ق (ب ء جـ) = ٨٥° ـ ٥٠° = ٣٥°

∴ ق (ب أ جـ) = ق (ب ء جـ)

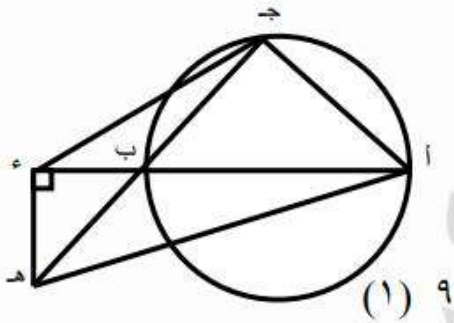
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

مثال

فى الشكل المقابل

أب قطر فى الدائرة م ، ء هـ ⊥ أ ب

إثبت أن أ جـ ء هـ رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــل

أ ب قطر فى الدائرة م ∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠ (١)

ء هـ ⊥ أ ب ∴ ق (أ ء هـ) = ٩٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (أ جـ ب) = ق (أ ء هـ)

∴ الشكل أ جـ ء هـ رباعى دائرى

مثال

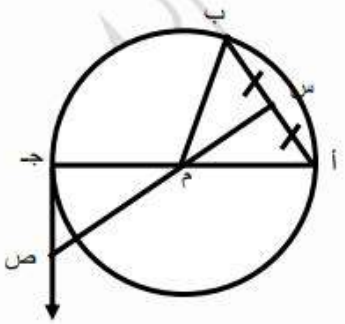
فى الشكل المقابل

أ جـ قطر فى الدائرة م ، جـ ء مماس لها

س منتصف أ ب إثبت أن

(١) الشكل أ س جـ ص رباعى دائرى

(٢) ق (ب م جـ) = ٢ ق (م ص جـ)



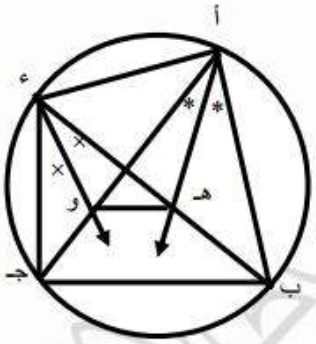
الحـــــــــــــــــــــل

في △ أ م ب
م أ = م ب ، س منتصف أ ب
∴ م س ⊥ أ ب
∴ ق (أ س م) = ٩٠° (١)
أ جـ قطر ، جـ ص مماس
∴ق (أ جـ ص) = ٩٠° (٢)
من ١ ، ٢ ينتج أن
الشكل أ س جـ ص رباعي دائري

في △ أ م ب
م أ = م ب
∴ ق (أ) = ق (ب)
ق(ب م جـ) = ق(أ) + ق(ب)
∴ ق (ب م جـ) = ٢ ق (أ)
الشكل أ س جـ ص رباعي دائري
∴ ق (أ) = ق (م ص جـ)
∴ ق(ب م جـ) = ٢ ق (م ص جـ)

مثال

في الشكل المقابل
أ ب جـ ء رباعي دائري فيه
أ هـ ينصف ب أ جـ
ء و ينصف ب ء جـ إثبت أن
أ هـ و ء رباعي دائري



الحـــــــــــــــــــــل

الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري ∴ق (ب أ جـ) = ق (ب ء جـ) (١)

أ هـ ينصف ب أ جـ ∴ ق (ب أ هـ) = ق (هـ أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب أ جـ) (٢)

ء و ينصف ب ء جـ ∴ ق (ب ء و) = ق (و ء جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب ء جـ) (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق (هـ أ جـ) = ق (ب ء و) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ الشكل أ هـ و ء رباعي دائري

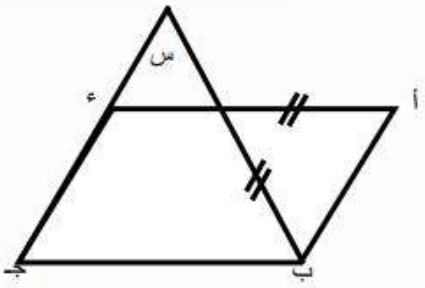
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ جـ ء

بحيث س ب = أ ء

إثبت أن الشكل أ ب ء س رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ء = ب جـ من خواص متوازى أضلاع

أ ء = س ب معطى

∴ ب س = ب جـ

∴ ق (س) = ق (جـ) (١)

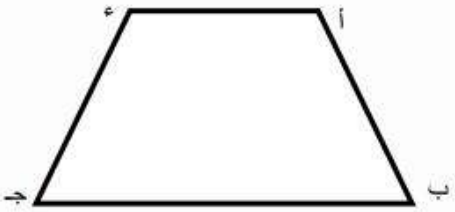
من خواص متوازى الاضلاع ق (أ) = ق (جـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق (س) = ق (أ) ∴ الشكل أ ب ء س رباعى دائرى

خواص الشكل الرباعى الدائرى

نظرية(١- ٣)

إذا كان الشكل الرباعى دائريا فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان (مجموعهم = ١٨٠°)



إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى فإن

ق (أ) + ق (جـ) = ١٨٠°

ق (ب) + ق (ء) = ١٨٠°

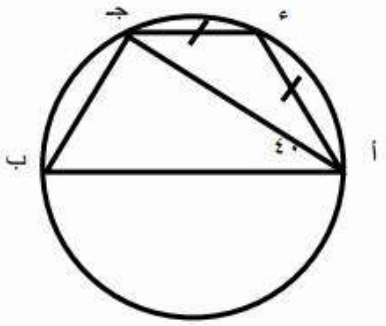
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء رباعى دائرى ، أ ب قطر فيها

أ ء = ء جـ ، ق (جـ أ ب) = ٤٠°

أوجد ق (ء) ، ق (ب جـ ء)



الحـــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ ق (أ جـ ب) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق (أ ب جـ) = ١٨٠° − [٤٠° + ٩٠°] = ٥٠°

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (ء) + ق (ب) = ١٨٠°

∴ق (ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

أ ء جـ فيه أ ء = ء جـ

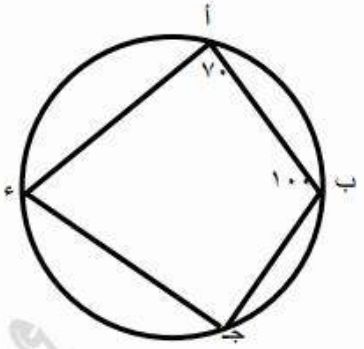
ق(ء أ جـ) = ق(ء جـ أ) = $\frac{٥٠}{٢}$

= ٢٥°

ق(ب جـ ء) = ٩٠° + ٢٥° = ١١٥°

س فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب

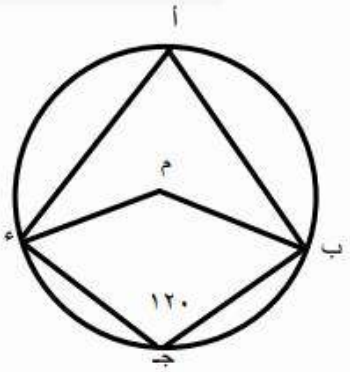
(١)



ق (جـ) = ...

ق (ء) = ...

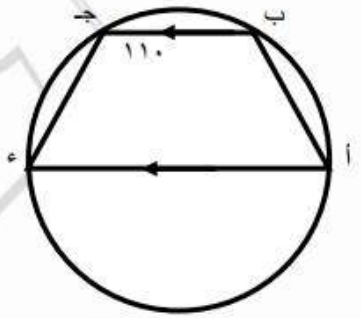
(٢)



ق (أ) = ...

ق(ب م ء) = ...

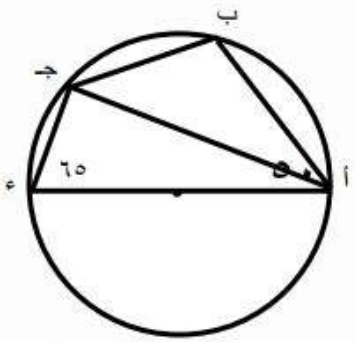
(٣)



ق(أ) = ... ، ق (ب) = ...

ق (ء) = ...

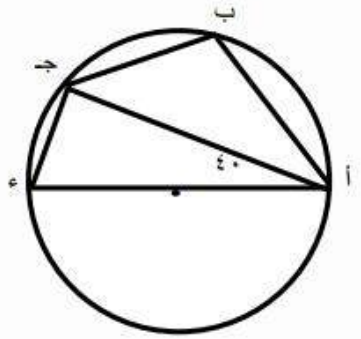
(٤)



ق(ب) = ... ،،، ق (أ جـ ء) = ...

ق (أ جـ ب) = ...

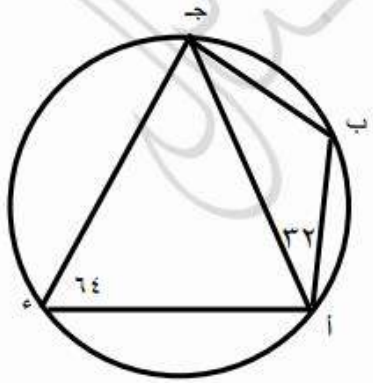
(٥)



ق (أ جـ ء) = ... ، ق (ء) = ...

ق (ب) = ... ،

(٦)

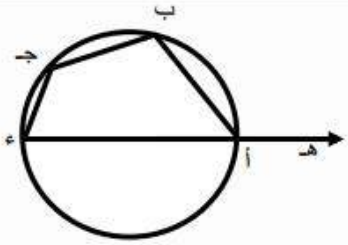


ق(أ جـ ب) = ...

ق (ب) = ...

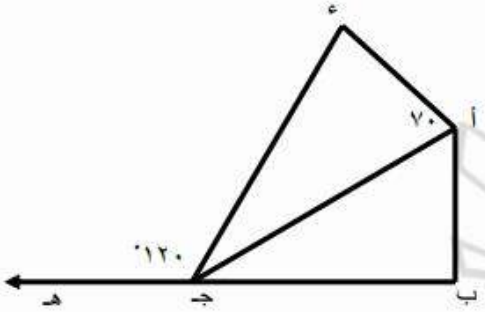
نتيجة(١)

قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة



فى الشكل المقابل

ق (ب أ هـ) = ق (جـ)



مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب جـ ء رباعياً دائرياً

، ق (ء جـ هـ) = ١٢٠° ، ق(جـ أ ء) = ٧٠°

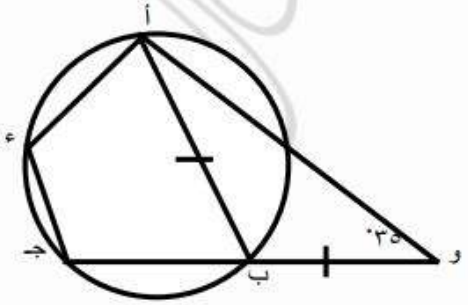
أحسب ق (ب أ جـ)

الحـــــــــــــــــــل

ء جـ هـ زاوية خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ ء

ق (ء جـ هـ) = ق (ب أ ء) = ١٢٠°

ق (ب أ جـ) = ١٢٠° ـ ٧٠° = ٥٠°



مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ب و = أ ب

، ق (و) = ٣٥°

أوجد ق (أ ء جـ)

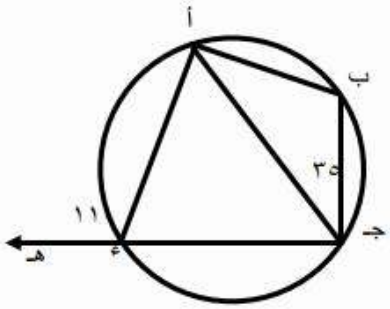
الحـــــــــــــــــــــــــل

فى Δ أ ء ب
و ب = أ ب
ق (و) = ق (ء أ ب) = ٣٥°
ق (أ ب و) = ١٨٠° – [٣٥° + ٣٥°] = ١١٠°

(أ ب و) خارجة عن الرباعى الدائرى
∴ ق(أ ب و) = ق (أ ء جـ)
∴ ق (أ ء جـ) = ١١٠

مثال

فى الشكل المقابل
أب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دارة
ق(أ ء هـ) = ١١٠° ، ق (أ جـ ب) = ٣٥°
إثبت أن Δ أ ب جـ متساوى الساقين

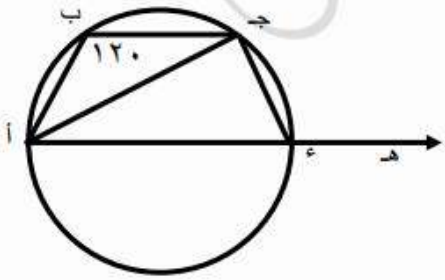


الحـــــــــــــــــــــــــل

أ ء هـ زاوية خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ ء
∴ ق (ب) = ق (أ ء هـ) = ١١٠°
فى Δ أ ب جـ
ق (ب أ جـ) = ١٨٠° – [١١٠° + ٣٥°] = ١٨٠° – ١٤٥° = ٣٥°
∴ ق (ب جـ أ) = ق (ب أ جـ)
∴ Δ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م
ق(ب) = ١٢٠° ، أ ء قطر فيها
(١) أوجد ق (جـ ء هـ) ، ق (جـ أ ء)
(٢) إذا كان ء جـ = ٧سم أوجد طول أ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (جـ ء هـ) = ق (ب) = ١٢٠°

ق (جـ ء هـ) + ق (جـ ء أ) = ١٨٠°

∴ ق (جـ ء أ) = ١٨٠° ـ ١٢٠° = ٦٠°

أ ء قطر فى الدائرة م

∴ق (أ جـ ء) = ٩٠°

∴ ق (جـ أ ء) = ١٨٠ ـ [٦٠+٩٠]=٣٠

فى △ أ ء جـ القائم الزاوية فى جـ

ق (جـ أ ء) = ٣٠°

∴ جـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ء

جـ ء = ٧سم ∴ أ ء = ١٤سم

٢ نق = ١٤ سم ∴ نق = ٧ سم

طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = ط نق = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٧ سم

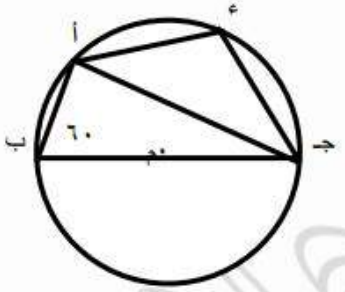
مثال

فى الشكل المقابل

أب جـ ء رباعى دائرى ، جـ ب قطر فيها

ق(أ ب جـ) = ٦٠° ، طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

إثبت أن جـ أ ينصف ء جـ ب



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

طول $\overset{\frown}{أ ء}$ = طول $\overset{\frown}{جـ ء}$

∴ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{جـ ء}$)

∴ أ ء = جـ ء

أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (ء) + ق (ب) = ١٨٠°

∴ ق (ء) = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠°

أ ء = جـ ء

∴ ق (ء جـ أ) = ق (ء أ جـ) = ٣٠°

فى △ أ جـ ب

ب جـ قطر ∴ ق (جـ أ ب) = ٩٠°

∴ ق (أ جـ ب) = ١٨٠ ـ [٦٠+٩٠]= ٣٠°

ق (ء جـ أ) = ق (أ جـ ب)

∴ جـ أ ينصف ء جـ ب

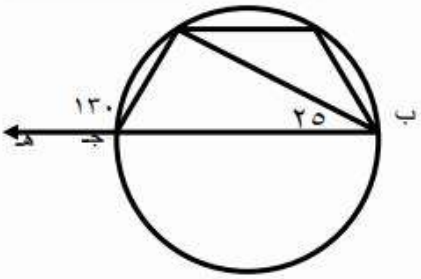
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة

فيه أ ب = أ ء ، ق (جـ ب ء) = ٢٥°

ق (هـ جـ ء) = ١٣٠° إثبت أن أ ء = ء جـ



الحـــــــــــــل

أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (أ) = ق (ء جـ هـ) = ١٣٠°

فى △ أ ب ء

أ ب = أ ء

∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = ٢٥°

ق (أ ب ء) = ٢٥° ∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ٥٠°

فى △ ء ب جـ

ق (ء ب جـ) = ٢٥°

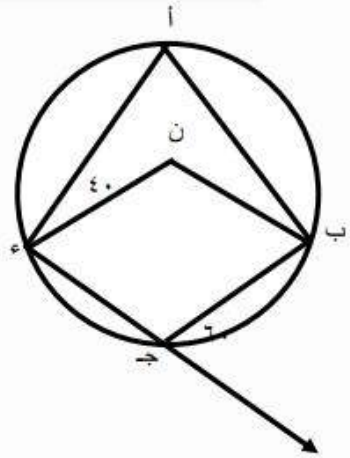
∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$) = ٥٠°

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ء جـ}}$)

∴ أ ء = ء جـ (وهو المطلوب إثباته)

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء رباعى مرسوم داخل دائرة
ن ء // ب جـ ، ق (ب جـ س) = ٦٠°
ق (ن ء أ) = ٤٠° إثبت أن الشكل
ن ء جـ ب معين وأوجد ق (أ ب ن)



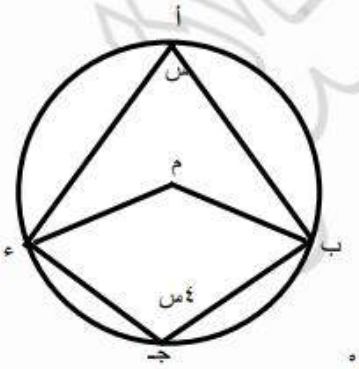
الحـــــــــــــــــــــــــل

ق (ب جـ ء) + ق (ب جـ س) = ١٨٠°
∴ ق (ب جـ ء) = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠°
أ ب جـ ء رباعى دائرى
∴ ق (أ) + ق (ب جـ ء) = ١٨٠°
∴ ق (أ) = ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠°
ق (ب ن ء) = ٢ ق (أ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°
ن ء // جـ ب
∴ ق (ن ء جـ) + ق (ب جـ ء) = ١٨٠°
∴ ق (ن ء جـ) = ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠°
فى الشكل الرباعى ن ب جـ ء
ق(ن ب جـ) = ٣٦٠ - [٦٠+١٢٠+١٢٠]
= ٣٦٠ ـ ٣٠٠ = ٦٠°

ق (ن ب جـ) = ق (ب جـ س)
∴ ب ن // ء جـ
فى الشكل ن ب جـ ء
ن ء// جـ ب ، ب ن // ء جـ ، ن ب=ن ء
∴ الشكل ن ب جـ ء معين
فى الشكل الرباعى أ ب جـ ء
ق(ب)= ٣٦٠ - [١٢٠+١٠٠+٦٠]=٨٠
∴ق(أ ب ن)= ٨٠ ـ ٦٠ = ٢٠°

مثال

فى الشكل المقابل
إذا كان م مركز الدائرة أوجد
(١) قيمة س بالدرجات
(٢) ق (ب م ء)



الحـــــــــــــــــــــــــل

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى
∴ ق (أ) + ق (جـ) = ١٨٠°
∴ س + ٤ س = ١٨٠°
∴ ٥ س = ١٨٠°
س = ٣٦°

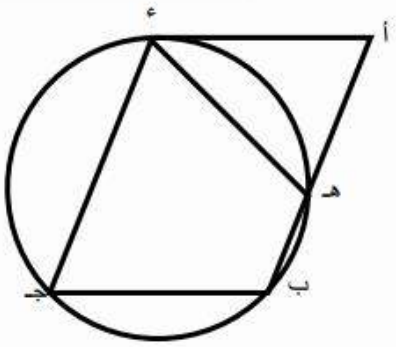
∴ ق (أ) = س = ٣٦°
ق (ب م ء) = ٢ ق (أ)
= ٢ × ٣٦° = ٧٢°

مثال فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

إثبت أن

أ ء = هـ ء



الحـــــــــــــل

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق (أ) + ق (ب) = ١٨٠° (١)

ء هـ ب جـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ء هـ) + ق (ب) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ) = ق (جـ ء هـ) (٣)

أ ب // جـ ء ، ء هـ قاطع لهما

∴ ق (جـ ء هـ) = ق (ء هـ أ) (٤)

من ٣ ، ٤ ينتج أن

ق (أ) = ق (ء هـ أ)

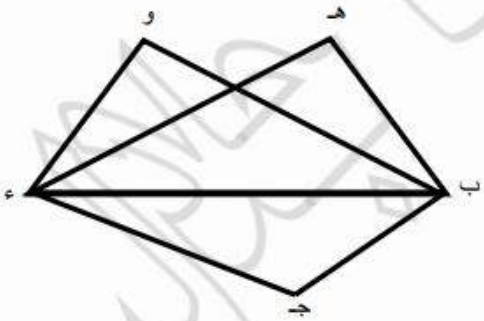
∴ أ ء = هـ ء

مثال فى الشكل المقابل

هـ ب جـ ء رباعى دائرى

و ب جـ ء رباعى دائرى

إثبت أن هـ ب ء و رباعى دائرى



الحـــــــــــــل

هـ ب جـ ء رباعى دائرى

ق (هـ) + ق (جـ) = ١٨٠° (١)

و ب جـ ء رباعى دائرى

ق (و) + ق (جـ) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (هـ) = ق (و) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة هى ب ء

∴ الشكل هـ ب ء و رباعى دائرى

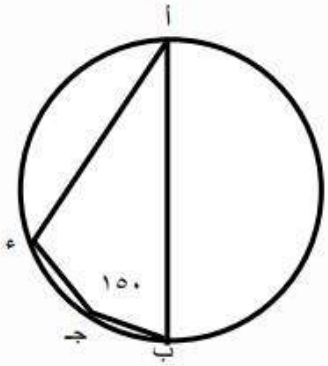
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء رباعى مرسوم داخل دائرة

مركزها ن ، جـ ب = جـ ء

أوجد ق (أ) ، ق (ب) ، ق(ء)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ق(أ) + ق (جـ) = ١٨٠°

∴ق (أ) = ١٨٠° ـ ١٥٠° = ٣٠°

∴ ق (ب جـ ء) = ٦٠°

جـ ب = جـ ء

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ٣٠°

ق (أ ب جـ) = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

ق (ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٢١٠

= ١٠٥°

ق (ب) = ٣٦٠ - [١٠٥ + ١٥٠ + ٣٠]

= ٣٦٠° ـ ٢٨٥ = ٧٥°

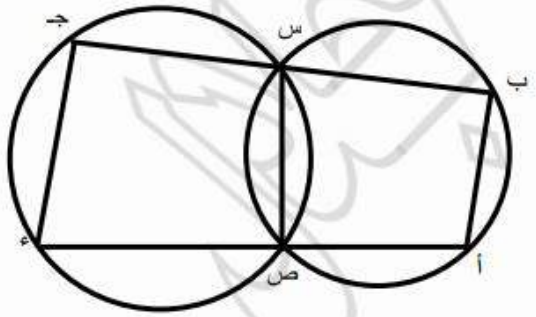
مثال

فى الشكل المقابل

دائرتان متقاطعتان فى س ، ص

س ∈ ب جـ ، ص ∈ أ ء

ق (ء) = ٨٠° أوجد ق(أ)



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

الشكل س ص ء جـ رباعى دائرى

∴ق(جـ س ص) + ق (ء) = ١٨٠°

∴ ق (جـ س ص) = ١٨٠ ـ ٨٠° = ١٠٠°

الشكل أ ب س ص رباعى دائرى

∴ ق(أ) + ق(ب س ص) = ١٨٠

∴ ق(أ) = ١٨٠ ـ ٨٠ = ١٠٠°

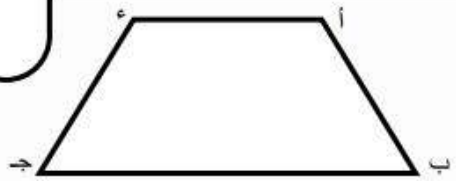
ق (ب س ص) + ق (جـ س ص) = ١٨٠

ق (ب س ص) = ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠°

عكس نظرية(١ – ٣)

إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان هذا الشكل رباعياً دائريا

فى الشكل المقابل



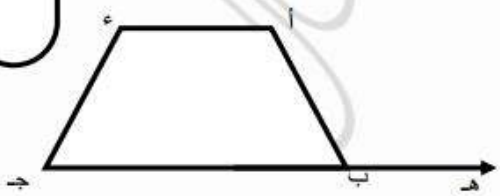
إذا كان ق(أ) + ق (جـ) = ١٨٠°

فإن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

عكس نتيجة(١)

إذا وجدت زاوية خارجة عن عند رأس من رؤوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعياً دائرياً

فى الشكل المقابل



إذا كان ق(أ ب هـ) = ق (ء)

فإن الشكل أ ب جـ ء يكون رباعياً دائرياً

ملخص الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً

يكون الشكل الرباعى دائريا إذا تحققت إحدى الشروط الأتية

١- إذا وجدت نقطة فى مستوى الشكل تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه
٢- إذا وجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع
٣- إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان (مجموع قياسهم = ١٨٠°)
٤- إذا وجدت زاوية خارجة عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

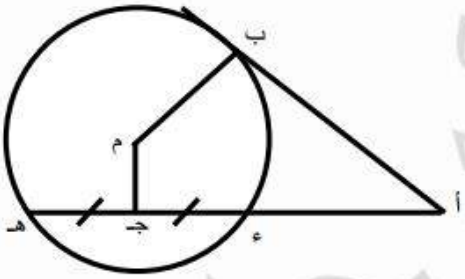
مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان أ ب مماس للدائرة م ،

جـ منتصف ء هـ

إثبت أن الشكل أ ب جـ م رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــل

أ ب مماس للدائرة م ∴ ق (أ ب م) = ٩٠° (١)

جـ منتصف ء هـ ∴ ق (أ جـ م) = ٩٠° (٢)

ق(أ ب م) + ق (أ جـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى

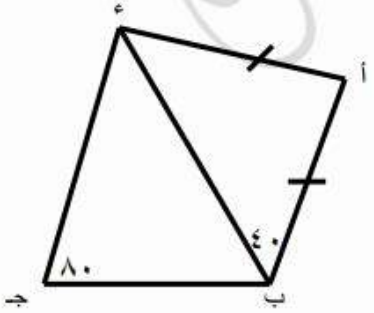
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب = أ ء ، ق(أ ب ء) = ٤٠°

ق (جـ) = ٨٠° إثبت أن

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــل

فى △ أ ب ء

أ ب = أ ء

∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = ٤٠°

∴ ق(أ) = ١٨٠° − [٤٠° + ٤٠°]= ١٠٠°

ق(أ) + ق (جـ) = ١٠٠° + ٨٠°

= ١٨٠°

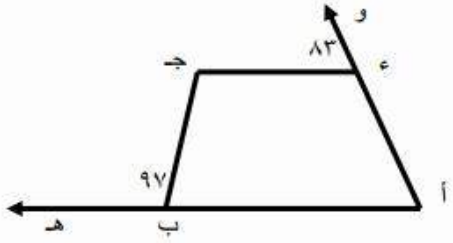
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

مثال

فى الشكل المقابل

إثبت أن الشكل

أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــل

ق(أ ء جـ) = ١٨٠ − ٨٣ = ٩٧°

∴ ق (جـ ب هـ) = ق (أ ء جـ)

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

مثال

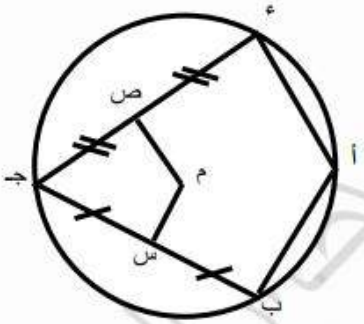
فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء رباعى مرسوم داخل دائرة م

س منتصف ب جـ ، ص منتصف جـ ء

إثبت أن (١) الشكل م س جـ ص رباعى دائرى

(٢) ق (س م ص) = ق (ب أ ء)



الحـــــــــــــــــــل

س منتصف ب جـ ∴ ق (م س جـ) = ٩٠°

ص منتصف ء جـ ∴ ق (م ص جـ) = ٩٠°

ق (م س جـ) + ق (م ص جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل م س جـ ص رباعى دائرى (وهو المطلوب أولاً)

∴ ق(س م ص) + ق (جـ) = ١٨٠° (١)

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

∴ ق (ب أ ء) + ق (جـ) = ١٨٠° (٢)

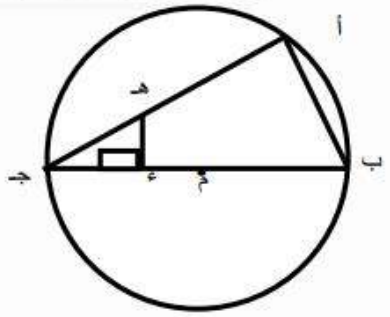
من ١ ، ٢ ينتج أن ق (س م ص) = ق (ب أ ء) (وهو المطلوب ثانياً)

مثال فى الشكل المقابل

ب جـ قطر فى الدائرة م ، هـ ء ⊥ ب جـ

إثبت أن (١) أ ب ء هـ رباعى دائرى

(٢) ق (جـ هـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ جـ)



الحـــــــــــــــــــــــــل

ب جـ قطر فى الدائرة م

∴ ق (أ) = ٩٠° [محيطية مقامة فى نصف دائرة]

هـ ء ⊥ ب جـ ∴ ق (هـ ء ب) = ٩٠°

ق(أ) + ق (هـ ء ب) = ٩٠+٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى

ق (ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ جـ)

ق(جـ هـ ء) = ق (ب)

الخارجة تساوى المقابلة للمجاورة

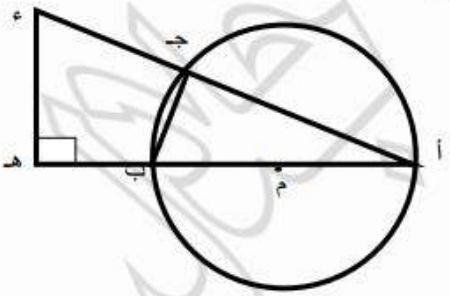
∴ ق (جـ هـ ء) = $\frac{١}{٢}$ق(أ جـ)

مثال فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م

ء هـ ⊥ أ ب

إثبت أن ب هـ ء جـ رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ∴ق (أ جـ ب) = ٩٠°

∴ ق (ب جـ ء) = ١٨٠° ـ ٩٠° = ٩٠°

ء هـ ⊥ أ ب ∴ ق (ء هـ ب) = ٩٠°

ق(ب جـ ء) + ق(ء هـ ب)=٩٠+٩٠

= ١٨٠°

∴ الشكل ب هـ ء جـ رباعى دائرى

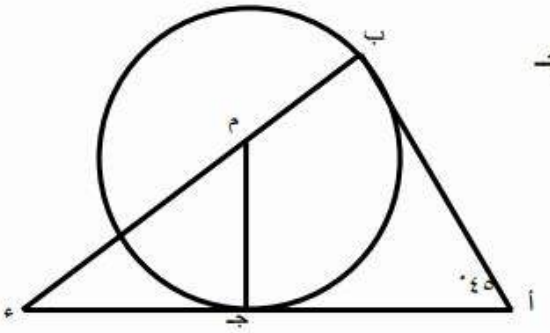
مثال فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ تمسان الدائرة م عند ب ،جـ

ق (أ) = ٤٥° إثبت أن

(١) الشكل أ ب م جـ رباعى دائرى

(٢) المثلث م جـ ء متساوى الساقين



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب مماس ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

أ جـ مماس ∴ ق (أ جـ م) = ٩٠°

ق(أ ب م) + ق (أ جـ م) = ٩٠+٩٠

= ١٨٠°

مجموع قياسات الرباعى = ٣٦٠°

ق (ب م جـ) = ٣٦٠ – [٤٥+٩٠+٩٠]

= ١٣٥°

∴ ق (جـ م ء) = ١٨٠ – ١٣٥ = ٤٥°

ق (م جـ ء) = ١٨٠ – ق (م جـ أ)

= ١٨٠ – ٩٠ = ٩٠°

فى Δ م جـ ء

ق (ء) = ١٨٠ – [٤٥+٩٠]= ٤٥°

ق (جـ م ء) = ق (ء)

∴ جـ م = جـ ء

∴ المثلث م جـ ء متساوى الساقين

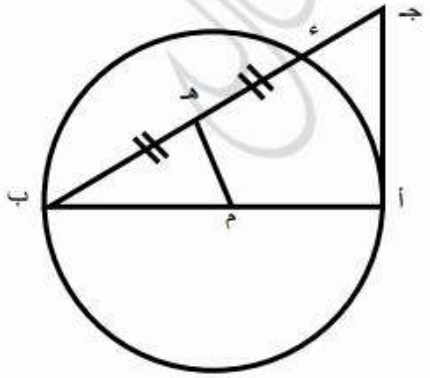
مثال فى الشكل المقابل

أ ب قطر فى الدائرة م

أ جـ مماس للدائرة عند أ

هـ منتصف ب ء

إثبت أن الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب قطر ، أ جـ مماس

∴ ق (جـ أ ب) = ٩٠°

هـ منتصف ء ب

∴ ق (م هـ جـ) = ٩٠°

ق(جـ أ ب) + ق (م هـ جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل م أ جـ هـ رباعى دائرى

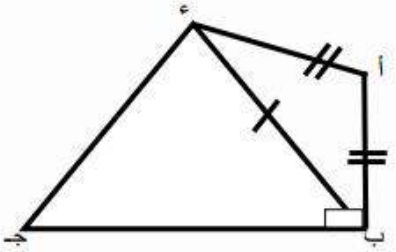
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب ⊥ ب جـ

، أ ب = أ ء ، ب جـ = جـ ء = ء ب

إثبت أن أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

فى △ ء ب جـ

ء ب = ب جـ = ء جـ

∴ق(جـ) =ق(ء ب جـ) = ق(ب ء جـ) = ٦٠°

أ ب ⊥ ب جـ ∴ ق (أ ب جـ) = ٩٠°

∴ ق (أ ب ء) = ٩٠° ـ ٦٠° = ٣٠°

فى △ أ ب ء

أ ب = أ ء

∴ ق(أ ب ء) = ق (أ ء ب) = ٣٠°

∴ ق(أ) = ١٨٠ - [٣٠+٣٠]=١٢٠°

ق(أ) + ق (جـ) = ٦٠+١٢٠=١٨٠°

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

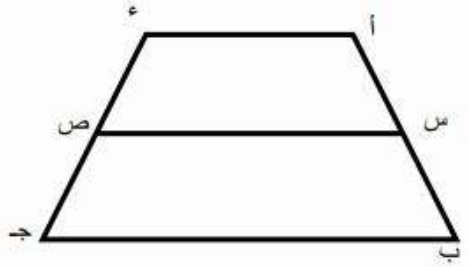
مثال

فى الشكل المقابل

أ ء // ب جـ

أ س ص ء رباعى دائرى إثبت أن

الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــل

أ ء // ب جـ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق (أ) + ق (ب) = ١٨٠° (١)

الشكل أ س ص ء رباعى دائرى

∴ ق(أ) + ق (س ص ء) = ١٨٠ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(س ص ء) = ق (ب)

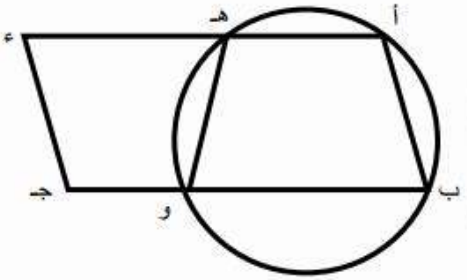
∴ الشكل س ب جـ ص رباعى دائرى

مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

إثبت أن الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــل

أ ب و هـ رباعى دائرى

∴ ق(ب) + ق (أ هـ و) = ١٨٠° (١)

أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(ب) + ق (جـ) = ١٨٠° (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ هـ و) = ق (جـ)

∴ الشكل جـ ء هـ و رباعى دائرى

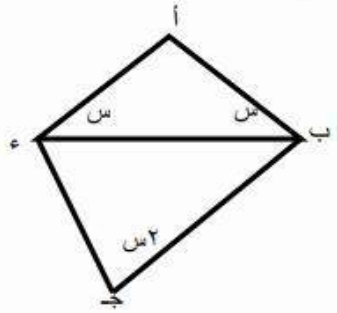
مثال

فى الشكل المقابل

إذا كان ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = س

ق (جـ) = ٢ س

إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

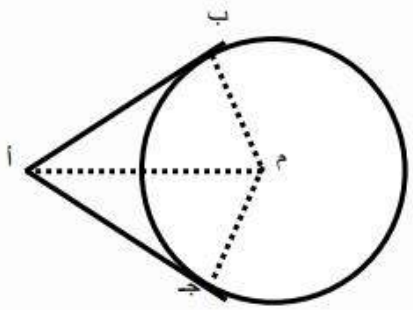
فى △ أ ب ء
ق (أ) = ١٨٠ – [س +س]
= ١٨٠ – ٢ س

ق(أ) + ق (جـ) = ١٨٠ – ٢ س + ٢ س = ١٨٠°
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

العلاقة بين مماسات الدائرة

نظرية (٣ – ١)

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول



المعطيات: أ نقطة خارج الدائرة م ،
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

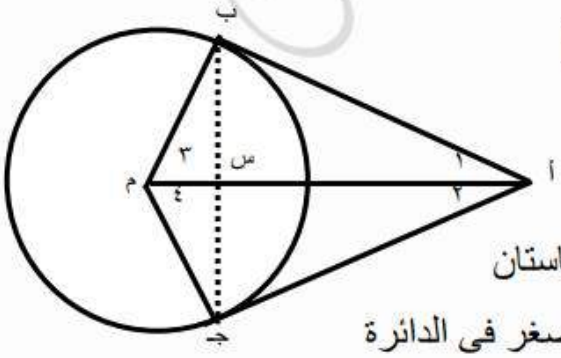
المطلوب: إثبات أن أ ب = أ جـ

العمل: نرسم م ب ، م جـ ، م أ

البرهان:
أ ب مماس للدائرة ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°
أ جـ مماس للدائرة ∴ ق (أ جـ م) = ٩٠°
أ ب م ، أ جـ م
فيهما:
م ب = م جـ (أنصاف أقطار
أ م ضلع مشترك
ق(أ ب م) = ق (أ جـ م) = ٩٠°
∴ △ أ ب م ≡ △ أ جـ م
∴ أ ب = أ جـ

نتائج نظرية (١-٣)

إذا كان أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان فإن



(١) ق (١) = ق (٢) [أ م ينصف ب أ جـ]

(٢) ق (٣) = ق (٤) [م أ ينصف ب م جـ]

(٣) أ م محور ب جـ [س منتصف ب جـ]

(٤) قوس الدائرة المحصور بين القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة قوس أصغر فى الدائرة

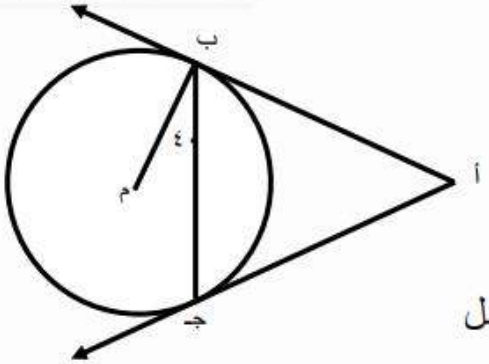
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق(م ب جـ) = ٤٠°

أوجد ق (أ)



الحـــل

أ ب مماس للدائرة م

∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

∴ ق (أ ب جـ) = ٩٠° − ٤٠° = ٥٠°

فى △ أ ب جـ

أ ب = أ جـ

∴ ق(أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(أ) = ١٨٠° − [٥٠° + ٥٠°]

= ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

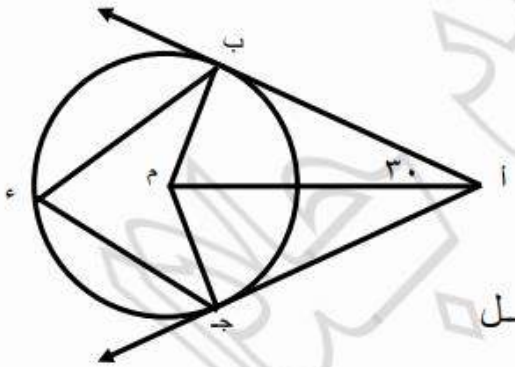
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب أ م) = ٣٠° أوجد

ق (جـ أ م) ، ق (ء)



الحـــل

أ ب مماس ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

فى △ أ ب م

ق (أ م ب) = ١٨٠ − [٣٠+٩٠]= ٦٠°

∴ق (ب م جـ) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠°

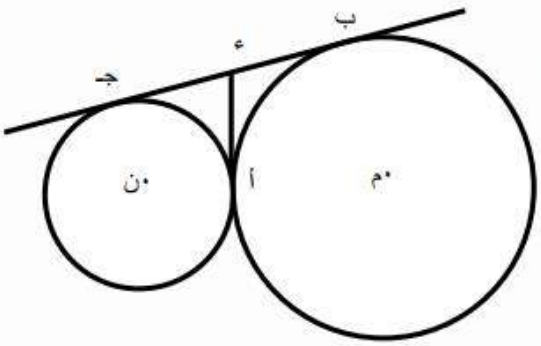
ق(ء) = $\frac{١}{٢}$ ق (ب م جـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°

ق(جـ أ م) = ق (ب أ م) = ٣٠°

مثال

فى الشكل المقابل
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ
ب جـ مماس للدائرتين عند ب ، جـ
أ ء مماس مشترك لهما عند أ
إثبت أن ء منتصف ب جـ



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

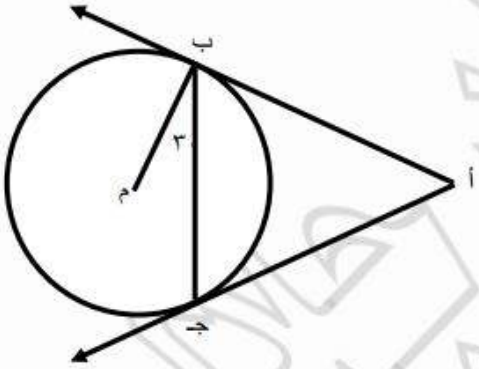
ء ب ، ء أ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ء ب = ء أ (١)

ء أ ، ء جـ قطعتان مماستان للدائرة ن ∴ ء جـ = ء أ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ب ء = ء جـ ∴ ء منتصف ب جـ

مثال

فى الشكل المقابل
إذا كان أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان
للدائرة م ، ق(م ب جـ) = ٣٠°
إثبت أن △ أ ب جـ متساوى الاضلاع



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب مماس للدائرة م عند ب
∴ ق (أ ب م) = ٩٠°
∴ ق (أ ب جـ) = ٩٠ ـ ٣٠° = ٦٠°
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان
∴ أ ب = أ جـ

فى △ أ ب جـ
ق(أ) = ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)
∴ △ أ ب جـ متساوى الاضلاع

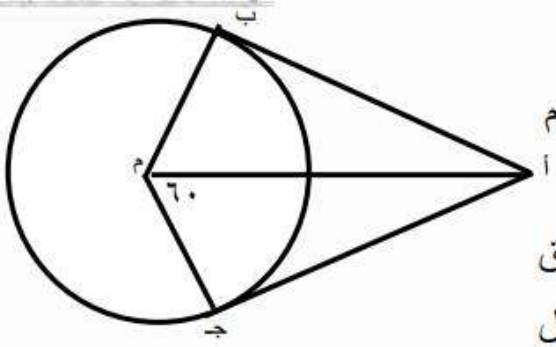
∴ ق (أ جـ ب) = ق (أ ب جـ) = ٦٠° مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°
ق (أ) = ١٨٠° ـ [٦٠° + ٦٠°] = ١٨٠° ـ ١٢٠° = ٦٠°

مثال فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

ق (أ م جـ) = ٦٠°

(١) أوجد ق (أ) (٢) إثبت أن أ م = ٢ نق



الحـــــــــــــــــــل

أ جـ مماس للدائرة م عند جـ

∴ ق (أ جـ م) = ٦٠°

∴ ق (جـ أ م) = ١٨٠ − [٦٠+٩٠] = ٣٠°

ق (ب أ م) = ق (جـ أ م) = ٣٠°

∴ ق (أ) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

فى △ أ ب م

أ ب مماس ∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

ق (ب أ م) = ٣٠°

∴ ب م = $\frac{١}{٢}$ أ م

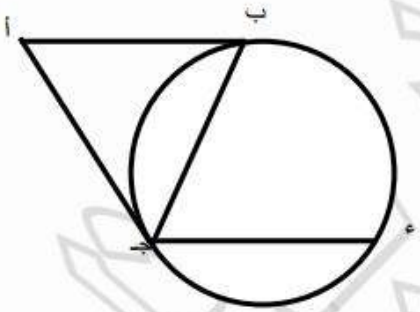
∴ أ م = ٢ ب م = ٢ نق

مثال فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

جـ ء // أ ب إثبت أن

جـ ب ينصف أ جـ ء



الحـــــــــــــــــــل

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) (١)

جـ ء // أ ب

∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب جـ ء) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ جـ ب) = ق (ب جـ ء)

∴ جـ ب ينصف أ جـ ء

مثال

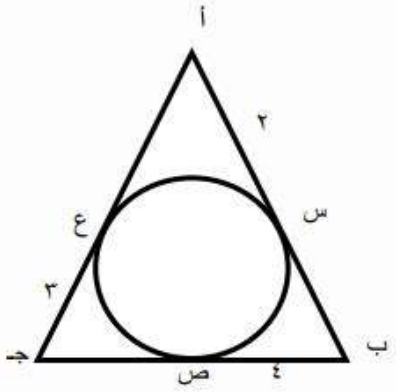
فى الشكل المقابل

أ ب جـ يمس الدائرة من الخارج

فى س ، ص ، ع فإذا كان أ س=٢سم

، ب ص = ٤سم ، جـ ع = ٣ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ



الحـــــــــــــــــــل

أ س ، أ ع قطعتان مماستان ∴ أ س = أ ع = ٢ سم

ب س ، ب ص قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص = ٤سم

جـ ع ، جـ ص قطعتان مماستان ∴ جـ ص = جـ ع = ٣ سم

محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٧ + ٥ = ١٨ سم

مثال

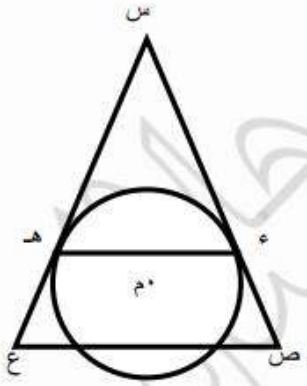
فى الشكل المقابل

س ص ع مثلث ، س ص ، س ع

تمسان الدائرة م عند ء ، هـ فإذا كان

ء هـ // ص ع إثبت أن

الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــل

س ء ، س هـ قطعتان مماستان

∴ س ء = س هـ

∴ ق (س ء هـ) = ق (س هـ ء) (١)

ء هـ // ص ع

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق(س هـ ء) = ق (ص)

∴ الشكل ء ص ع هـ رباعى دائرى

∴ ق (س ء هـ) = ق (ص) (٢)

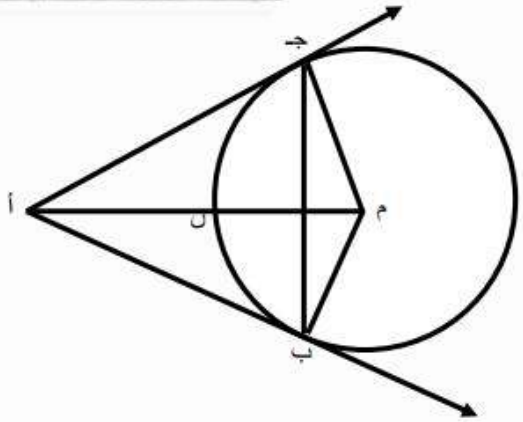
مثال

فى الشكل المقابل

أ جـ ، أ ب يمسان الدائرة م

ب أ = ب جـ أوجد

ق (م أ ب)



أ ب ، أ جـ مماسا

∴ أ ب = أ جـ (١)

أ ب = ب جـ (معطى) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

أ ب = ب جـ = أ جـ

∴ أ ب جـ متساوى الاضلاع

∴ ق (أ ب جـ) = ق(أ جـ ب) = ق(أ) = ٦٠°

أ م ينصف ب أ جـ

∴ق (م أ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

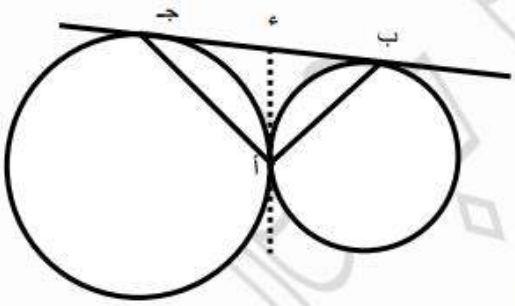
مثال

فى الشكل المقابل

دائرتان متماستان من الخارج فى أ

ب جـ مماس مشترك لهما

إثبت أن ق (ب أ جـ) = ٩٠°



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

العمل : نرسم مماس مشترك لهما يقطع ب جـ فى ء

ء ب ، ء أ مماسان للدائرة م

∴ ء ب = ء أ

∴ ق (ء ب أ) = ق (ء أ ب)(١)

ء جـ ، ء أ مماسان للدائرة ن

∴ ء جـ = ء أ

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

ق(ء أ ب) + ق (ء أ جـ) = ق(ء ب أ)+ق(ء جـ أ)

ق (ب أ جـ) = ق(ء ب أ)+ق(ء جـ أ)

∴ ق (ب أ جـ) = ٩٠°

∴ ق (ء جـ أ) = ق (ء أ جـ)(٢)

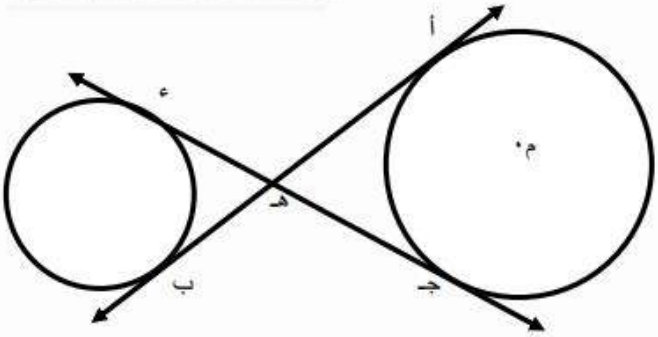
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء مماسان للدائرتين

م ، ن إثبت أن

أ ب = جـ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

هـ أ ، هـ جـ مماسان للدائرة م ∴ هـ أ = هـ جـ (١)

هـ ب ، هـ ء مماسان للدئرة ن ∴ هـ ب = هـ ء (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

هـ أ + هـ ب = هـ جـ + هـ ء

∴ أ ب = جـ ء (وهو المطلوب إثباته)

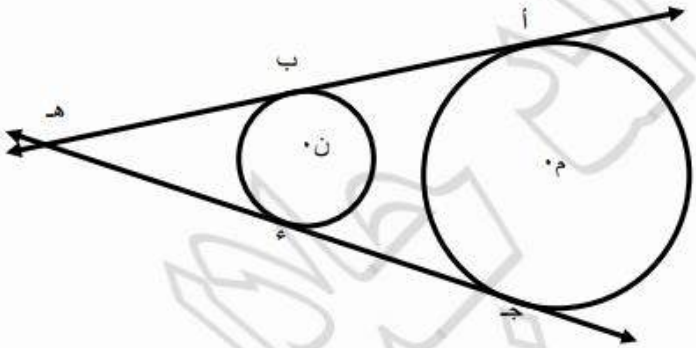
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ، جـ ء مماسان للدائرتين

م ، ن إثبت أن

أ ب = جـ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

هـ ب، هـ ء مماسان للدائرة ن ∴ هـ ب = هـ ء (١)

هـ أ ، هـ جـ مماسان للدائرة م ∴ هـ أ = هـ جـ (٢)

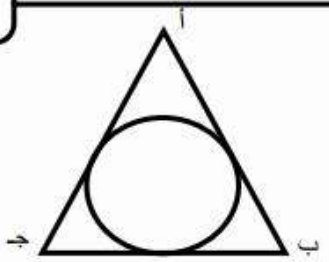
بطرح ١ من ٢ ينتج أن

هـ أ – هـ ب = هـ جـ - هـ ء

∴ أ ب = جـ ء

الدائرة الداخلة للمثلث

الدائرة الداخلة لمثلث هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل

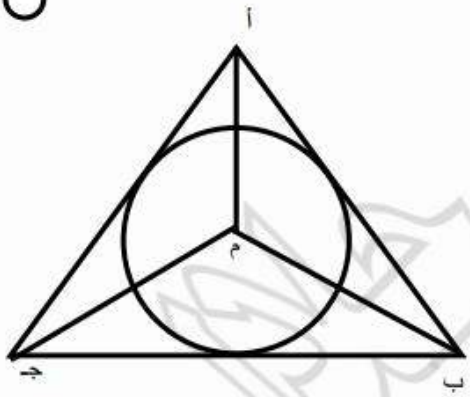


إذا كانت الدائرة م تمس أضلاع المثلث أ ب جـ من الداخل

فإنها تسمى دائرة داخلة للمثلث

تمرين مشهور

مركز الدائرة الداخلة لاى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه



المعطيات: الدائرة م داخلة للمثلث أ ب جـ

المطلوب: إثبات أن م هى نقطة تقاطع منصفات زواياه

البرهان: أ ء ، أ و قطعتان مماستان

∴ أ م ينصف ب أ جـ (١)

ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان

∴ ب م ينصف أ ب جـ (٢)

جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان

∴ جـ م ينصف أ ب جـ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

م هى نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب جـ الداخلة

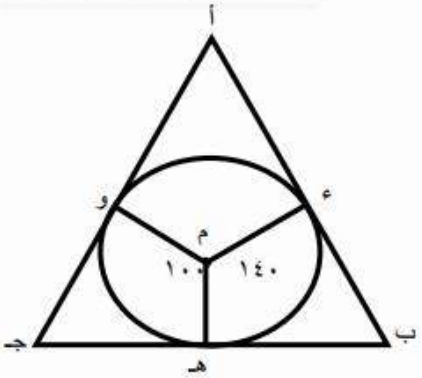
مثال

فى الشكل المقابل

إذا كانت الدائرة م الداخلة للمثلث

أ ب جـ تمس أضلاعه فى ء ، هـ ، و

أوجد قياسات زوايا △أ ب جـ



الحـــــــــــــــــــل

ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان

∴ ق (م ء هـ) = ٩٠° ، ق (م هـ ب) = ٩٠°

∴ الشكل ء ب هـ م رباعى دائرى

∴ ق (ب) + ق (ء م هـ) = ١٨٠°

∴ ق (ب) = ١٨٠ ـ ١٤٠ = ٤٠°

جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان

∴ ق (جـ هـ م) = ٩٠° ، ق (جـ و م) = ٩٠°

∴ الشكل م هـ جـ و رباعى دائرى

∴ق(م هـ جـ) + ق (جـ) = ١٨٠°

∴ ق (جـ) = ١٨٠ ـ ١٠٠ =٨٠°

مجموع زوايا المثلث أ ب جـ = ١٨٠

∴ ق (أ) = ١٨٠ ـ [٨٠ +٤٠]

= ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠°

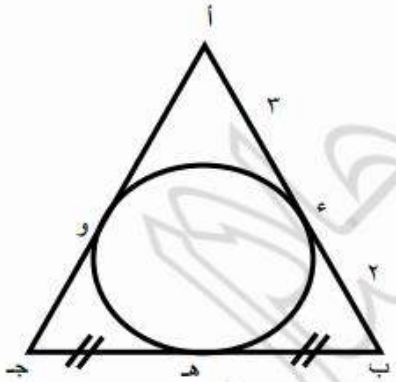
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث خارج دائرة تمس

أضلاعه فى ء ، هـ ، و

أحسب طول ب جـ ، أ جـ



الحـــــــــــــــــــل

ب ء ، ب هـ قطعتان مماستان ∴ ب ء = ب هـ = ٢ سم

أ ء ، أ و قطعتان مماستان ∴ أ ء = أ و = ٣ سم

جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ∴ جـ هـ = جـ و = ٢سم

ب جـ = ٢سم + ٢ سم = ٤ سم

أ جـ = ٣ سم + ٢ سم = ٥ سم

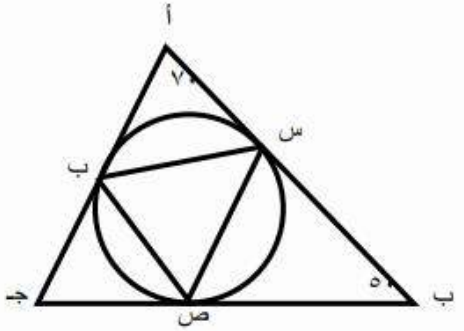
مثال

فى الشكل المقابل

دائرة م مرسومة داخل △ أ ب جـ

ق (أ) = ٧٠° ، ق (ب) = ٥٠°

أوجد ق (ص س ع)



الحـــــــــــــــــــــل

ب س ، ب ص قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص

∴ ق (ب س ص) = ق (ب ص س) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥°

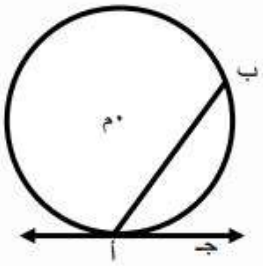
أ س ، أ ع قطعتان مماستان ∴ أ س = أ ع

∴ ق (أ س ع) = ق (أ ع س) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

ق(ص س ع) = ١٨٠ – [٦٥° + ٥٥°] = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

الزاوية المماسية

الزاوية المماسية هى الزاوية المكونة من أتحاد شعاعين أحدهما مماس للدائرة والاخر يحتوى وتراً فى الدائرة يمر بنقطة التماس



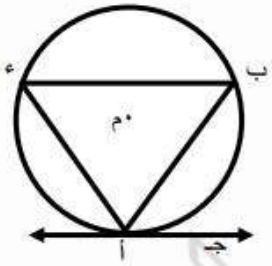
إذا كان أ جـ مماس ، أ ب وتراً فإن

الزاوية ب أ جـ تسمى زاوية مماسية

ملاحظات هامة

(١) الزاوية المماسية حالة خاصة من حالات الزاوية المحيطية

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

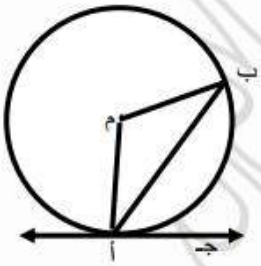


(٣) قياس الزاوية المماسية يساوى

قياس الزاوية المحيطية المرسومة

على وتر التماس

ق (ب أ جـ) = ق (ب ء أ)



(٤) قياس الزاوية المماسية يساوى

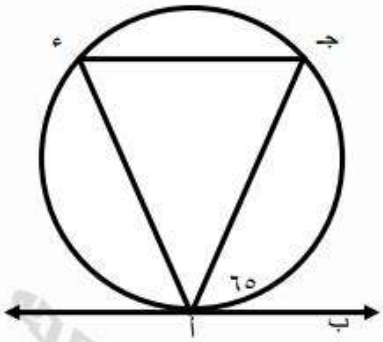
نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة

معها فى القوس

ق (ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب م أ)

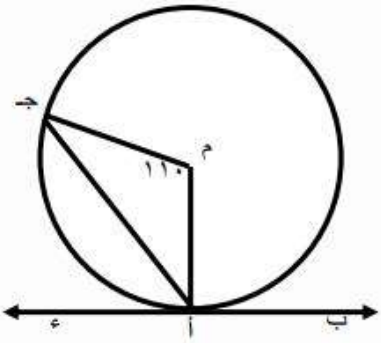
فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب

(١)



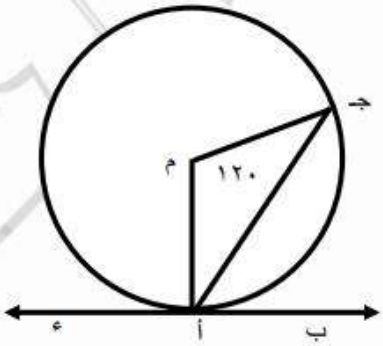
ق (ء) = ...

(٢)



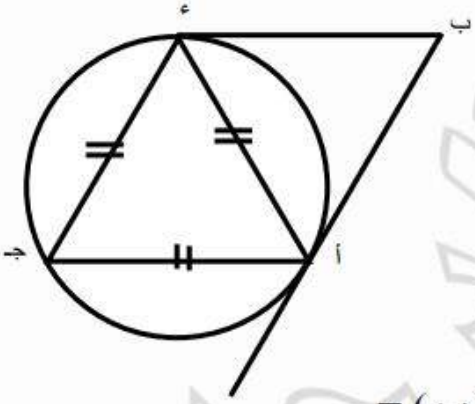
ق (م أ جـ) = ...

(٣)



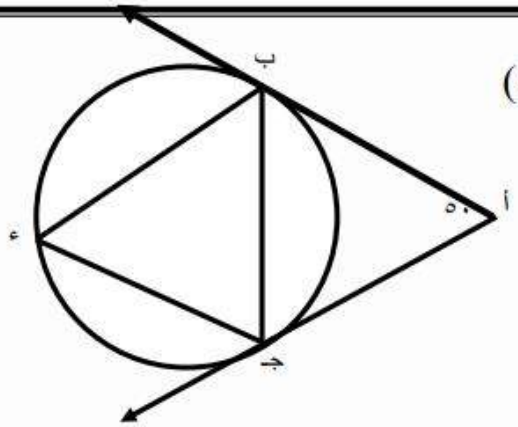
ق (جـ أ ء) = ...

(٤)



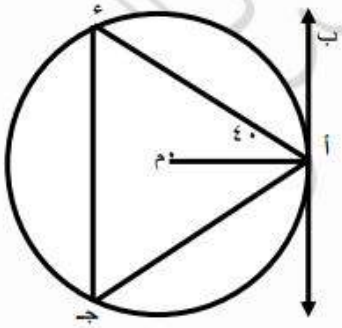
ق (ب) = ...

(٥)



ق (ء) = ...

(٦)



ق (جـ) = ...

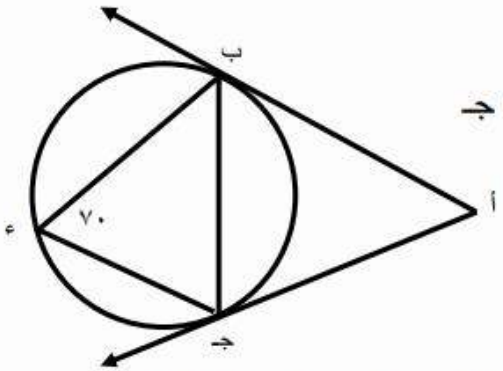
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب ،أ جـ مماسان للدائرة م عند ب ، جـ

ق (ب ء جـ) = ٧٠°

أوجد بالبرهان ق (أ)



الحـــــــــــــــــل

ق (أ جـ ب) = ق (ب ء جـ) [مماسية ومحيطية مرسومة على وتر التماس]

∴ ق (أ جـ ب) = ٧٠°

أ ب ، أ جـ مماسان ∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ جـ ب) = ق (أ ب جـ) = ٧٠°

∴ ق (أ) = ١٨٠° – [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

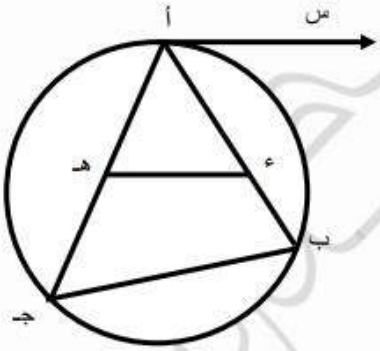
مثال

فى الشكل المقابل

أ س مماس للدائرة عند أ ، ء هـ // أ س

إثبت أن الشكل ء ب جـ هـ

رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــل

أ س مماس ∴ ق (س أ ب) = ق (جـ) (١)

أ س // ء هـ ∴ ق (س أ ب) = ق (أ ء هـ) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ ء هـ) = ق (جـ) [خارجة تساوى المقابلة للمجاورة لها]

∴ الشكل ء ب جـ هـ رباعى دائرى

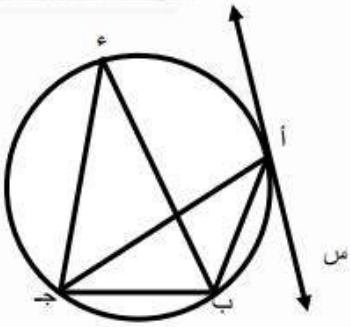
مثال

فى الشكل المقابل

أ س مماس ، ق (س أ ب) = ٤٠°

ق (أ ب جـ) = ١١٠°

أوجد ق (جـ ء ب)



الحـــــــــــــــــــل

أ س مماس ∴ ق (أ جـ ب) = ق (س أ ب) = ٤٠°

مجموع قياسات زوايا △ أ ب جـ = ١٨٠°

ق (ب أ جـ) = ١٨٠ – [١١٠ + ٤٠] = ١٨٠ – ١٥٠ = ٣٠°

ق (جـ ء ب) = ق (ب أ جـ) [محيطيتان تشتركان فى القوس]

∴ ق (جـ ء ب) = ٣٠°

مثال

فى الشكل المقابل

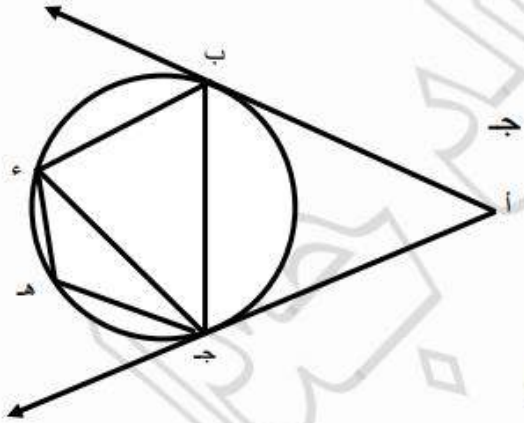
أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

جـ ب = جـ ء إثبت أن

ق(أ ب جـ) = ق (ء ب جـ)

وإذا كان ق (جـ هـ ء) = ١١٠°

أوجد ق (أ)



الحـــــــــــــــــــل

أ ب مماس

∴ ق (أ ب جـ) = ق (جـ ء ب) (١)

جـ ب = جـ ء

∴ ق (ء ب جـ) = ق (جـ ء ب) (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (أ ب جـ) = ق (ء ب جـ) وهو المطلوب ١

إذا كان ق (جـ هـ ء) = ١١٠°

∴ ق (جـ ب ء) = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

لان ب جـ هـ ء رباعى دائرى

أ ب ، أ جـ مماسان

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = ٧٠

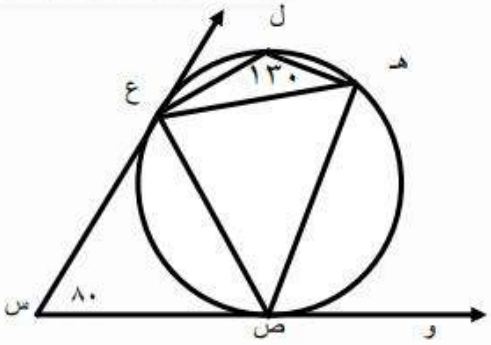
∴ ق (أ) = ١٨٠ – [٧٠+٧٠]

= ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠°

∴ ق (أ ب جـ) = ٧٠°

مثال

فى الشكل المقابل
س ص ، س ع مماسان للدائرة
عند ص ، ع ، ق (ص س ع) = ٨٠°
ق (هـ ل ع) = ١٣٠° إثبت أن
(١) ع هـ = ع ص (٢) س ع // ص هـ

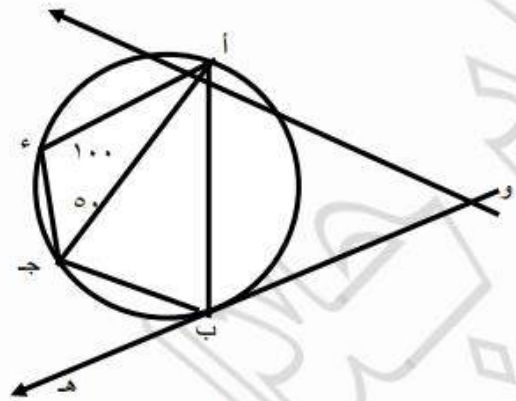


الحـــــــــــــــــــل

س ص ، س ع مماسان ∴ ق (س ص ع) = ق (س ع ص) = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°
ق (ص هـ ع) = ق (س ع ص) = ٥٠°
الشكل ل هـ ص ع رباعى دائرى ∴ ق (ل) + ق (هـ ص ع) = ١٨٠°
∴ ق (هـ ص ع) = ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠
ق (ص هـ ع) = ق (هـ ص ع) ∴ ع هـ = ع ص
ق (س ع ص) = ق (هـ ص ع) = ٥٠° [وهما متبادلتان]
∴ س ع // ص هـ

مثال

فى الشكل المقابل
و أ ، و ب يمسان الدائرة عند أ ، ب
أ ب // جـ ء ، ق (أ ء جـ) = ١٠٠°
ق (أ جـ ء) = ٥٠ أوجد ق(أ ب جـ)
، ق (جـ ب هـ) ، ق (أ و ب)



الحـــــــــــــــــــل

الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى
∴ ق (أ ء جـ) + ق (أ ب جـ) = ١٨٠°
∴ ق (أ ب جـ) = ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠°
فى Δ أ جـ ء
ق (ب أ ء) = ١٨٠ ـ [٥٠+١٠٠]=٣٠°
أ ب // جـ ء
∴ ق (ب أ جـ) = ق (أ جـ ء) [متبادلتان]

ق(جـ ب هـ) = ق (ب أ جـ) = ٥٠°
ق(أ ب و) = ١٨٠ ـ [٥٠+٨٠]=٥٠°
و أ = و ب
∴ ق (و أ ب) = ق (و ب أ) = ٥٠°
∴ق (أ و ب) = ١٨٠ ـ [٥٠+٥٠]
= ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠°

مثال

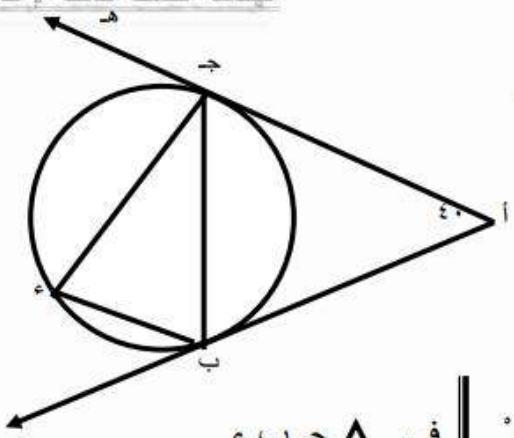
فى الشكل المقابل

أ ب ، أ جـ يمسان الدائرة عند ب ، جـ

أ جـ // ب ء ، ق (أ) = ٤٠° أوجد

ق (أ جـ ب) ، ق (هـ جـ ء) ،

ثم أثبت أن جـ ب = جـ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ ب ، أ جـ مماسان ∴ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ جـ ب) = ق (أ ب جـ) = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

ق (جـ ء ب) = ق (أ ب جـ) = ٧٠°

أ جـ // ب ء

∴ ق (جـ ب ء) = ق (أ جـ ب) [متبادلتان]

∴ ق (جـ ب ء) = ٧٠°

ق (هـ جـ ء) = ق (جـ ب ء) [مماسية ومحيطية]

∴ ق (هـ جـ ء) = ٧٠°

فى Δ جـ ب ء

ق(جـ ب ء) = ق (جـ ء ب) = ٧٠

∴ جـ ب = جـ ء

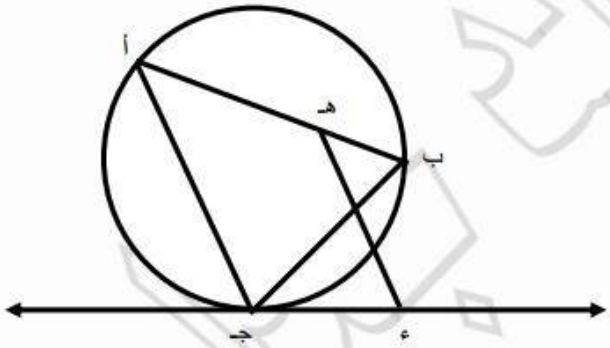
مثال

فى الشكل المقابل

جـ ء مماس للدائرة عند جـ

ء هـ // أ جـ إثبت أن

ب هـ جـ ء رباعى دائرى



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ جـ مماس

∴ ق (ب جـ ء) = ق (أ) [مماسية ومحيطية] (١)

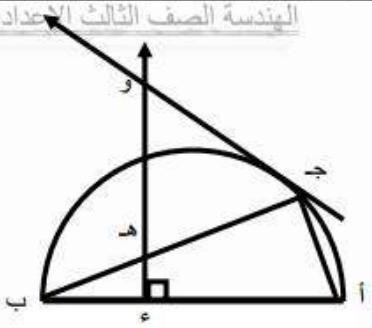
ء هـ // أ جـ

∴ ق (ب هـ ء) = ق (أ) [متناظرتان] (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (ب جـ ء) = ق (ب هـ ء) [وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة]

∴ الشكل ب هـ جـ ء رباعى دائرى



مثال فى الشكل المقابل
أب قطر فى نصف دائرة ، جـ و مماس
ء و ⊥ أ ب برهن أن
(١) الشكل أ ء هـ جـ رباعى دائرى
(٢) Δ و جـ هـ متساوى الساقين
(٣) عين مركز الدائرة المارة برؤوس الشكل أ ء هـ جـ

الحـــــــ

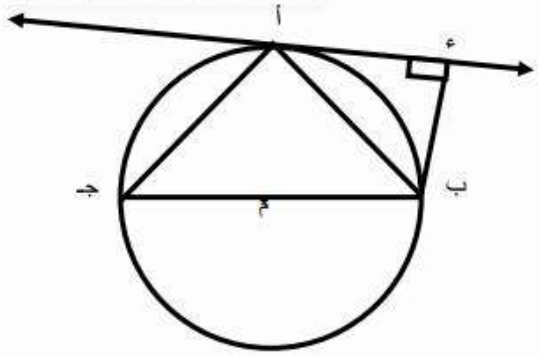
مثال

فى الشكل المقابل

أ ء مماس للدائرة م عند أ

ب جـ قطر ، ب ء ⊥ أ ء

إثبت أن ق (أ ب ء) = ق (أ ب جـ)



الحـــــــــــــــــــل

ب جـ قطر ∴ ق (ب أ جـ) = ٩٠°

أ ء مماس ∴ ق (ء أ ب) = ق (أ جـ ب)

أ ء ب ، أ ب جـ فيهما

(١) ق (أ ء ب) = ق (ب أ جـ) = ٩٠ (٢) ق (ء أ ب) = ق (أ جـ ب)

∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ب جـ)

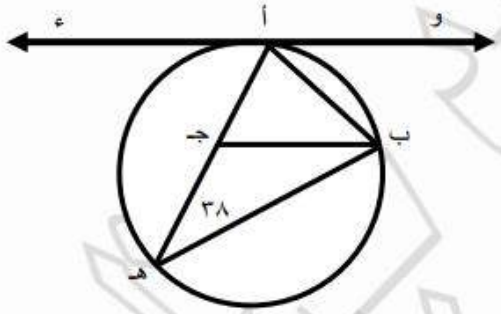
مثال

فى الشكل المقابل

أ ء مماس للدائرة م عند أ ،

ق(هـ) = ٣٨°

أ ء // ب جـ أوجد ق(أ ب جـ)



الحـــــــــــــــــــل

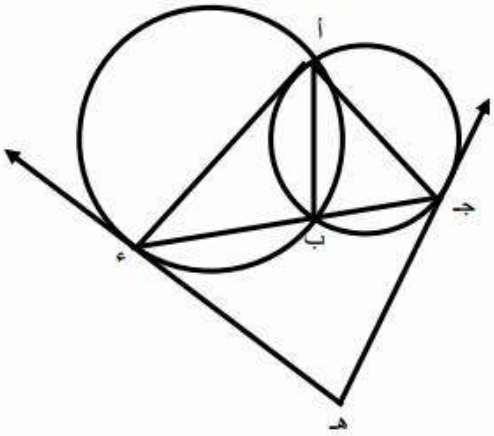
أ ء مماس ∴ ق (و أ ب) = ق (هـ) = ٣٨°

أ ء // ب جـ ∴ ق (أ ب جـ) = ق (و أ ب) [متبادلتان]

∴ ق (أ ب جـ) = ٣٨°

مثال

فى الشكل المقابل



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

هـ جـ ، هـ ء مماسان إثبت أن

(١) ق(هـ جـ ء) + ق (هـ ء جـ) = ق(جـ أ ء)

(٢) الشكل أ جـ هـ ء رباعى دائرى

الحـــــــــــــــــل

هـ جـ مماس ∴ ق (هـ جـ ء) = ق (جـ أ ء) (١)

هـ ء مماس ∴ ق (هـ ء جـ) = ق (ء أ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن

ق (هـ جـ ء) + ق (هـ ء جـ) = ق (جـ أ ء) + ق (ء أ ب)

∴ ق(هـ جـ ء) + ق (هـ ء جـ) = ق(جـ أ ء) [وهو الطلوب أولاً] (٣)

ق (هـ) + ق (هـ جـ ء) + ق (هـ ء جـ) = ١٨٠ (٤)

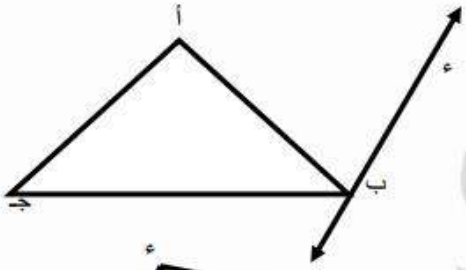
بالتعويض من ٣ فى ٤

ق (هـ) + ق (جـ أ ء) = ١٨٠°

∴ الشكل أ جـ هـ ء رباعى دائرى

عكس نظرية (٣ – ٣)

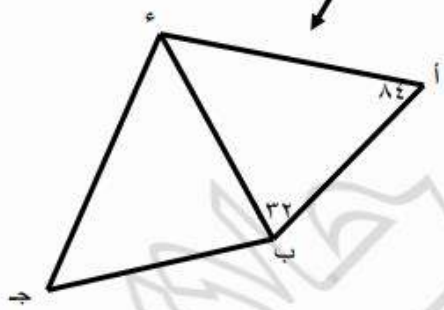
إذا رسم من أحدى نقطتى النهاية لوتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الاخرى فإن هذا الشعاع يكون مماساً للدائرة



إذا كان ق (أ ب ء) = ق (أ جـ ء)
فإن ب ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ من الخارج

مثال

فى الشكل المقابل
أب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = أ ء
ق(أ) = ٨٤° ، ق(أ ب جـ) = ١٣٢°
إثبت أن ب جـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



الحـــــــــــــــــــــــل

فى △ أ ب ء

أ ب = أ ء

∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = $\frac{٩٦}{٢}$ = ٤٨°

ق (أ ب جـ) = ١٣٢°

∴ ق (ء ب جـ) = ١٣٢° – ٤٨° = ٨٤°

ق (ء ب جـ) = ق (أ)

∴ ب جـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ء

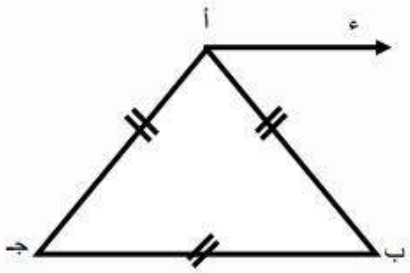
مثال

فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوى الاضلاع

أ ء // جـ ب إثبت أن

أ ء مماساً للدائرة المارة برؤوس △أ ب جـ



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

فى △أ ب جـ

أ ب = ب جـ = أ جـ

∴ ق (ب أ جـ) = ق (ب) = ق (جـ) = ٦٠

أ ء // جـ ب

∴ ق (ء أ ب) = ق (ب) [متبادلتان]

∴ ق (ء أ ب) = ٦٠°

∴ ق (ء أ ب) = ق (جـ)

∴ أ ء مماساً للدائرة المارة برؤوس △أ ب جـ

مثال

فى الشكل المقابل

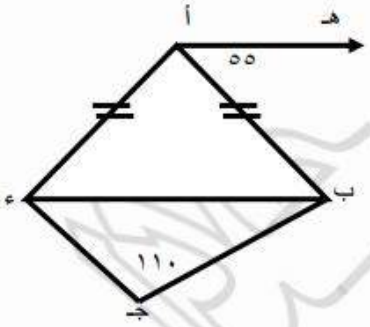
أ هـ // ء ب ، ق (ب أ هـ) = ٥٥°

ق(جـ) = ١١٠° ، أ ب = أ ء

إثبت أن

(١) الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

(٢) أ هـ مماساً للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء



الحـــــــــــــــــــــــــــــل

أ هـ // ء ب ∴ ق (هـ أ ب) = ق (أ ب ء) [متبادلتان]

∴ ق (أ ب ء) = ٥٥°

أ ب = أ ء ∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = ٥٥

∴ ق (ب أ جـ) = ١٨٠ − [٥٥ + ٥٥] = ١٨٠ − ١١٠ = ٧٠°

ق (ب أ ء) + ق (جـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

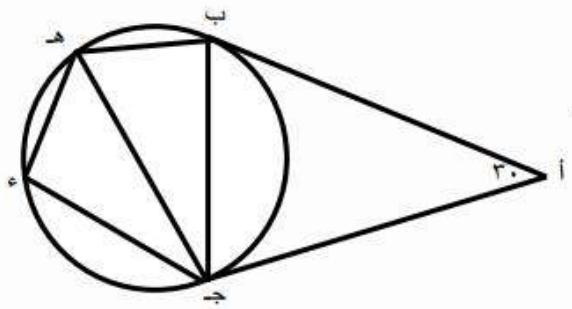
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى

ق (هـ أ ب) = ق (أ ء ب)

∴ أ هـ مماساً للدائرة المارة برؤوس الشكل أ ب جـ ء

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان
ق(أ) = ٣٠° ، جـ ب = جـ هـ
(١) إثبت أن ب هـ // أ جـ
(٢) أوجد ق (جـ ء هـ)
(٣) إثبت أن جـ هـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ



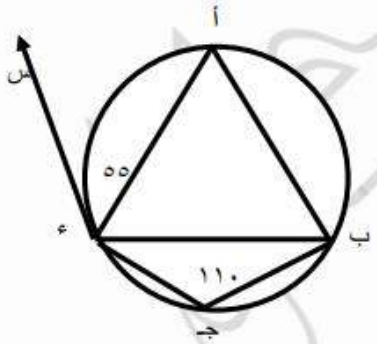
الحـــــــــــــــــــل

أ ب = أ جـ
∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = $\frac{١٥٠}{٢}$ = ٧٥°
ق (ب هـ جـ) = ق (أ ب جـ)[مماسية ومحيطية]
∴ ق (ب هـ جـ) = ٧٥°
جـ ب = جـ هـ
∴ ق (جـ ب هـ) = ق (جـ هـ ب) = ٧٥
ق (هـ ب جـ) = ق (أ جـ ب)
∴ ب هـ // أ جـ [وهو المطلوب أولا]

الشكل ب جـ ء هـ رباعى دائرى
∴ق(جـ ب ء) + ق(جـ ء هـ)=١٨٠
∴ق(جـ ء هـ)=٧٥-١٨٠=١٠٥°
ق(ب جـ هـ)=١٨٠-[٧٥+٧٥]=٣٠
ق(ب جـ هـ) = ق (أ)
∴جـ هـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة
أ ب = أ ء ، ق (جـ) = ١١٠°
ق (أ ء س) = ٥٥° إثبت أن
ء س مماساً للدائرة عند ء



الحـــــــــــــــــــل

أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى
∴ ق (أ) + ق (جـ) = ١٨٠°
∴ ق (أ) = ١٨٠° – ١١٠° = ٧٠°
فى △أ ب ء أ ب = أ ء
∴ ق (أ ب ء) = ق (أ ء ب) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

ق (أ ب ء) = ق (أ ء س)
∴ ء س مماس للدائرة عند س

مثال

فى الشكل المقابل

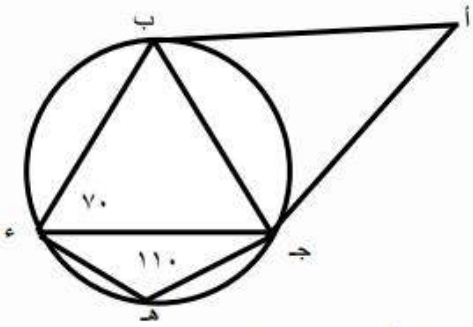
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق(هـ) = ١١٠° ، ق(ب ء جـ) = ٧٠°

إثبت أن

(١) ب جـ ينصف أ ب ء

(٢) جـ ء مماس للدائرة المارة برؤوس △أب جـ



الحـــــــــــــــــــــل

ب جـ هـ ء شكل رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب ء) + ق (هـ) = ١٨٠°

ق (جـ ب ء) = ١٨٠ – ١١٠ = ٧٠°

أ ب مماس

∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب ء جـ) = ٧٠°

ق (أ ب جـ) = ق (جـ ب ء)

∴ ب جـ ينصف أب ء

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

∴ ق(أ ب جـ) = ق (أ جـ ب)

∴ ق (أ جـ ب) = ٧٠°

ق(أ) = ١٨٠ – [٧٠+٧٠]= ٤٠°

فى △ ب جـ ء

ق(ب جـ ء) = ١٨٠ – [٧٠+٧٠]=٤٠°

ق (ب جـ ء) = ق (أ)

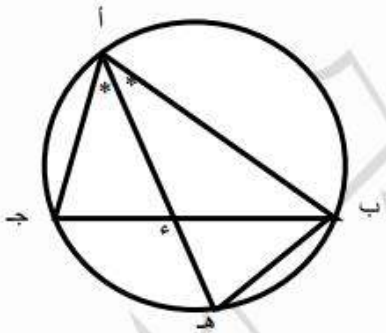
∴ جـ ء مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

مثال

فى الشكل المقابل

أ ء ينصف ب أ جـ

إثبت أن ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



الحـــــــــــــــــــــل

أ هـ ينصف ب أ جـ ∴ ق (ب أ هـ) = ق (جـ أ هـ) (١)

ق (هـ ب جـ) = ق (جـ أ هـ) [محيطيتان مرسومتان على نفس القوس] (٢)

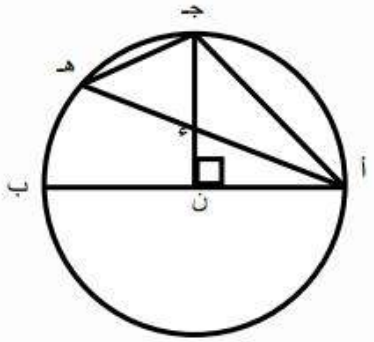
من ١ ، ٢ ينتج أن

ق (هـ ب جـ) = ق (ب أ هـ)

∴ ب هـ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء

مثال

فى الشكل المقابل
أ ب قطر فى الدائرة ن
ن جـ نصف قطر عمودى على أ ب
إثبت أن أ جـ مماس للدائرة
الخارجة عن △ جـ ء هـ



الحـــــــــــــــــــل

فى △أ ن جـ
ن أ = ن جـ ، ق (أ ن جـ) = ٩٠°

∴ ق (أ جـ ن) = ق (ن أ جـ) = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥°

ق (أ ن جـ) = ٩٠° ∴ ق (أ جـ) = ٩٠°

ق (أ هـ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ ق (أ جـ ن) = ق (جـ هـ أ)

∴ أ جـ مماس للدائرة الخارجة عن △جـ ء هـ