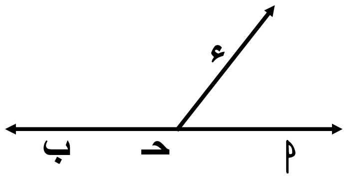
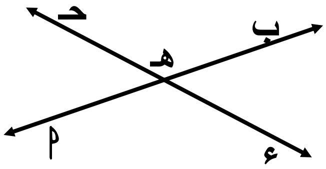
مراجعة على ما سبق



** الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع نقطة بدايته تقع على هذا المستقيم متكاملتان

فى الشكل المقابل :

∵ أب ∩ حـء = { حـ } ∴ ق (∠ أحـء) + ق (∠ ب حـ ء) = ١٨٠°

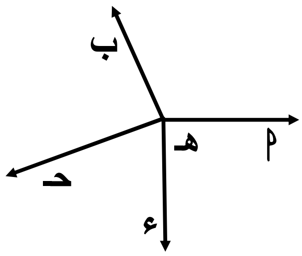


** إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس

فى الشكل المقابل :

∵ أب ∩ حـء = { هـ } ∴ ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ب هـ ء)

، ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ ب هـ حـ)



** مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°

فى الشكل المقابل :

∵ هـ أ ∩ هـ ب ∩ هـ حـ ∩ هـ ء = { هـ }

∴ ق (∠ أ هـ ب) + ق (∠ ب هـ حـ) + ق (∠ حـ هـ ء)

+ ق (∠ ء هـ أ) = ٣٦٠°

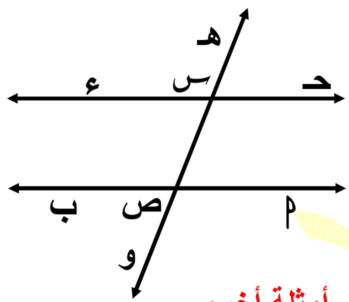
** حالات تطابق مثلثين :

(١) يتطابق المثلثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

(٢) يتطابق المثلثان إذا تطابق زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

(٣) يتطابق المثلثان إذا تطابق كل ضلع فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر

(٤) يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق وتر و أحد ضلعى القائمة فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر



** إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

(١) كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس

(٢) كل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس

(٣) كل زاويتين داخلتين و فى جهة واحدة من القاطع متكاملتان

فى الشكل المقابل :

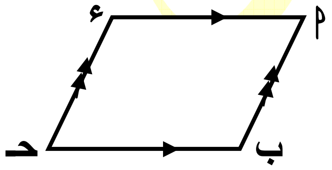
∵ أب // حـء ؛ س ص قاطع لهما

∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ ء س ص) بالتبادل — أذكر أمثلة أخرى

∴ ق (∠ أ ص س) = ق (∠ حـ س هـ) بالتناظر — أذكر أمثلة أخرى

∴ ق (∠ أ ص س) + ق (∠ حـ س ص) = ١٨٠° — أذكر أمثلة أخرى

متوازى الأضلاع :



هو شكل رباعى فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

خواص متوازى الأضلاع : (١) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس

(٣) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان

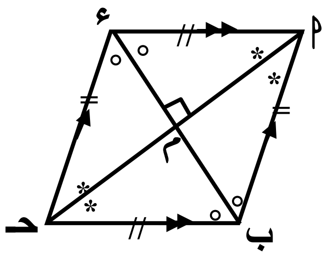
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

ملاحظة : يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا توافر فيه أحد الشروط الآتية :

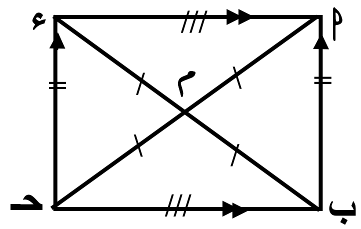
(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان (٢) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول

(٣) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس (٤) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
(٥) القطران ينصف كل منهما الآخر (٦) ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين فى الطول

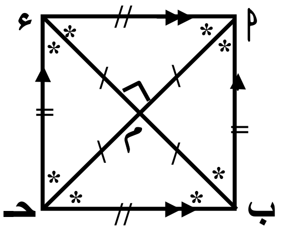
حالات خاصة من متوازى الأضلاع :



(١) المعين : هو متوازى أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول
أ، هو متوازى أضلاع قطراه متعامدان
خواص المعين : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها
بالإضافة إلى الخواص الآتية :
* أضلاعه متساوية فى الطول
* قطراه متعامدان و كل منهما قطر ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما



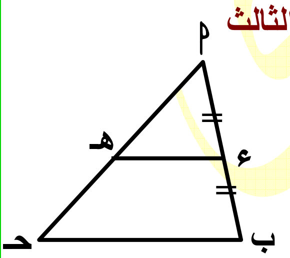
(١) المستطيل : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة
أ، هو متوازى أضلاع قطراه متساويان فى الطول
خواص المستطيل : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها
بالإضافة إلى الخواص الآتية :
* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول



(١) المربع : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول
أ، هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول
أ، هو معين إحدى زواياه قائمة
خواص المربع : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها
بالإضافة إلى الخواص الآتية :
* أضلاعه متساوية فى الطول
* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول و متعامدان و كل من قطراه ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما

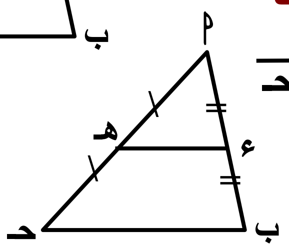
لإثبات أن متوازى الأضلاع معين أو مستطيل أو مربع نثبت أحد خواص الشكل المطلوب إثباته

** مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ١٨٠°
** قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس الزاوية المجاورة لها
** إذا ساوى قياسا زاويتين فى مثلث قياسا زاويتين فى مثلث آخر فإن قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الأول = قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الآخر
** فى أى مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل
** إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية
** الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



فى الشكل المقابل : إذا كان ∆ أ ب حـ فيه ء منتصف أ ب
، ء هـ // ب حـ فإن :
أ هـ = هـ حـ

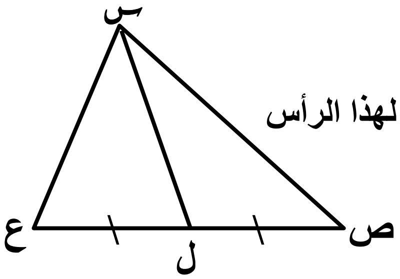
** القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع



فى الشكل المقابل إذا كان : ∆ أ ب حـ فيه ء منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ
فإن : ء هـ // ب حـ
، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

** محيط أى مضلع يساوى مجموع أطوال أضلاع

متوسطات المثلث



متوسط المثلث :

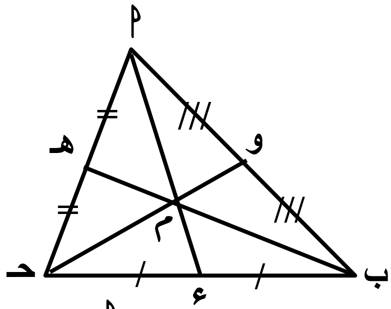
هو القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس

فى الشكل المقابل :

فى ∆ س ص ع ∵ ل منتصف ص ع

∴ س ل متوسط للمثلث

كم عدد متوسطات المثلث ؟؟



نظرية (١) :

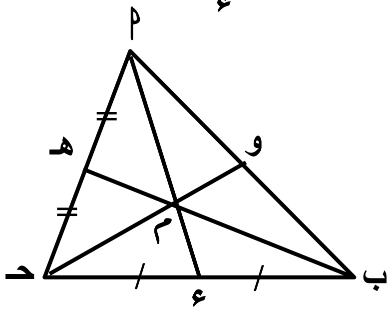
متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة

فى ∆ ٲ ب حـ إذا كانت ء منتصف ب حـ

، هـ منتصف ٲ حـ ، و منتصف ٲ ب

فإن : ب هـ ، ٲ ء ؛ حـ و تتقاطع فى نقطة واحدة

، تسمى نقطة م نقطة تقاطع متوسطات المثلث



ملاحظة :

فى ∆ ٲ ب حـ إذا كان ب هـ ، ٲ ء متوسطان متقاطعان فى نقطة م

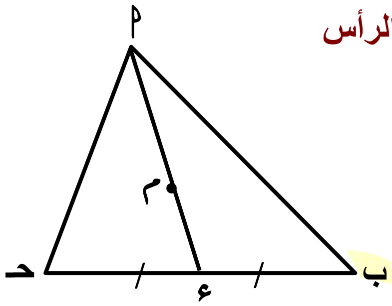
، رسم حـ و يقطع ٲ ب فى نقطة و

فإن : ٲ و = و ب " حـ و المتوسط الثالث للمثلث "

نظرية (٢) :

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

ملاحظات :



** نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

** فى ∆ ٲ ب حـ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطاته فإن :

ٲ م = ٢ م ء ، م ء = $\frac{١}{٢}$ ٲ م

، ٲ م = $\frac{٢}{٣}$ ٲ ء ، م ء = $\frac{١}{٣}$ ٲ ء

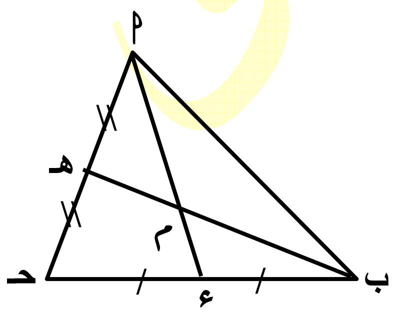
، ٲ ء = ٣ م ء ، ٲ ء = $\frac{٣}{٢}$ ٲ م

** المثلث المتساوى الأضلاع متوسطاته الثلاثة متساوية فى الطول

حقيقة : فى ∆ ٲ ب حـ إذا كان ٲ ء متوسط ، م ∈ ٲ ء بحيث ٲ م = ٢ م ء

فإن : م تكون نقطة تقاطع متوسطات ∆ ٲ ب حـ

تدريب : بإستخدام الشكل المقابل أكمل :



(١) إذا كان : م ء = ٣ سم فإن : ٲ م = ٠٠٠٠٠

(٢) إذا كان : م ء = ٤ سم فإن : ٲ ء = ٠٠٠٠٠

(٣) إذا كان : ٲ م = ١٠ سم فإن : ء م = ٠٠٠٠٠

(٤) إذا كان : ب هـ = ١٨ سم فإن : ب م = ٠٠٠٠٠

(٥) إذا كان : ب هـ = ١٢ سم فإن : ء م = ٠٠٠٠٠

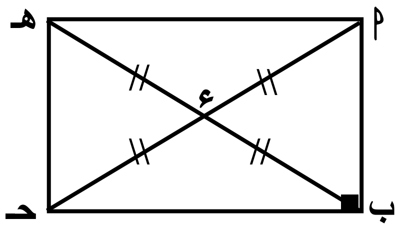
(٦) إذا كان : ب هـ = ١٨ سم ، ٲ ء = ١٥ سم ، ب حـ = ٢٠ سم

فإن محيط ∆ ب م ء = ٠٠٠٠٠ ، محيط الشكل حـ ء م هـ = ٠٠٠٠٠

(٧) إذا رسم من حـ شعاع يمر بنقطة م و يقطع $\overline{\text{ أ ب }}$ فى نقطة و ، كان أ ب = ٨ سم
فإن : ب و = ٠٠٠٠ ، إذا كان : حـ و = ٩ سم فإن : حـ م = ٠٠٠٠

نظرية (٣) :

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ق (∠ ب) = ٩٠ ° ، $\overline{\text{ ب ء }}$ متوسط

المطلوب : إثبات أن ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ

العمـــل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{ ب ء }}$ ، نأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ ب ء }}$ بحيث : ب ء = ء هـ

البرهان : ∵ $\overline{\text{ أ حـ }}$ ، $\overline{\text{ ب هـ }}$ ينصف كل منهما الآخر

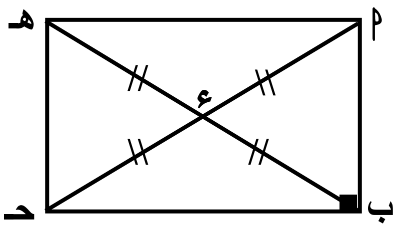
∴ الشكل أ ب حـ هـ متوازى أضلاع

∵ ق (∠ ب) = ٩٠ ° ∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل ∴ ب هـ = أ حـ

، ∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ

عكس نظرية (٣) :

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات : Δ أ ب حـ فيه ، $\overline{\text{ ب ء }}$ متوسط ، ء أ = ء ب = ء حـ

المطلوب : إثبات أن ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠ °

العمـــل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{ ب ء }}$ ، نأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ ب ء }}$ بحيث : ب ء = ء هـ

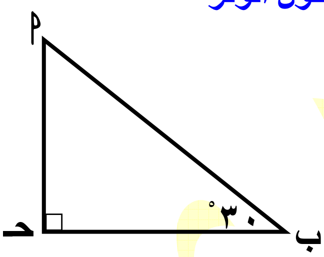
البرهان : ∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ ∴ ب هـ = أ حـ

، ∵ الشكل أ ب حـ هـ فيه $\overline{\text{ أ حـ }}$ ، $\overline{\text{ ب هـ }}$ ينصف كل منهما الآخر ، متساويان فى الطول

∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل ∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠ °

نتيجة :

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠ ° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



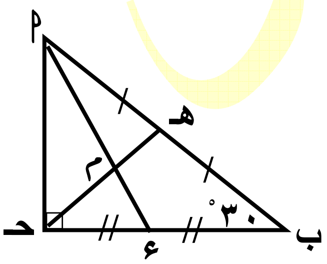
فى الشكل المقابل : إذا كان: Δ أ ب حـ فيه ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠ °

، ق (∠ أ ب حـ) = ٣٠ °

فإن : أ حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب

تدريب :

بإستخدام الشكل المقابل إكمل :



(١) إذا كان : أ ب = ١٠ سم فإن : أ حـ = ٠٠٠٠

(٢) إذا كان : أ حـ = ٦ سم فإن : أ ب = ٠٠٠٠

(٣) إذا كان : أ ب = ٨ سم فإن : حـ هـ = ٠٠٠٠

(٤) إذا كان : حـ هـ = ٣ سم فإن : أ ب = ٠٠٠٠

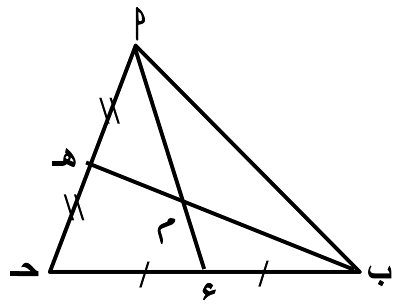
(٥) إذا كان : أ ب = ١٨ سم فإن : حـ م = ٠٠٠٠

(٦) إذا كان : أ ب = ١٦ سم فإن : هـ م = ٠٠٠٠

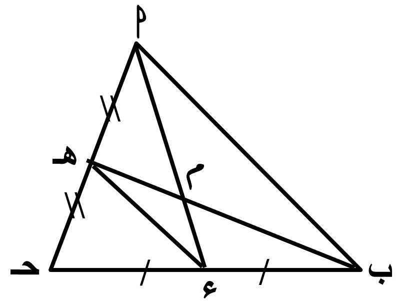
(٧) إذا كان : حـ م = ٤ سم فإن : أ ب = ٠٠٠٠

(٨) إذا كان : أ ب = ١٨ سم ، أ ء = ١٢ سم فإن : محيط Δ أ م حـ = ٠٠٠٠

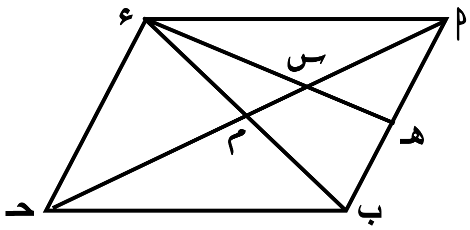
تمارين



(١) فى الشكل المقابل : Δ أ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى ب حـ ، أ حـ على الترتيب فإذا كان ب هـ = ١٢ سم ، م ء = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم أوجد محيط Δ أ م هـ

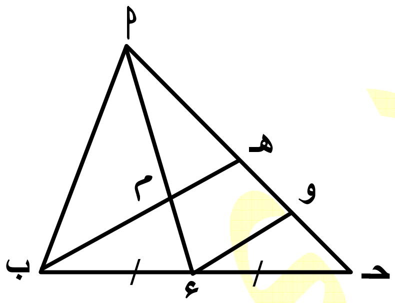


(٢) فى الشكل المقابل : Δ أ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى ب حـ ، أ حـ على الترتيب فإذا كان ب هـ = ١٥ سم ، أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد محيط Δ م هـ ء



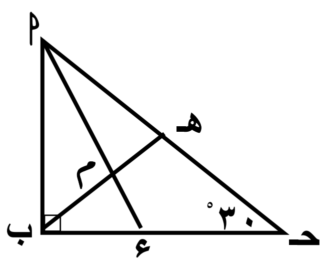
(٣) فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ب حـ = ١٠ سم ، تقاطع قطراه فى م ، هـ منصف أ ب ، أ حـ ∩ ء هـ = { س } ، هـ ء = ١٢ سم ، أ م = ٩ سم أوجد محيط Δ أ س ء

(٤) أ ب حـ مثلث فيه أ ء ، ب هـ متوسطان متقاطعان فى م ، رسم حـ م فقطع أ ب فى و فإذا كانت س منتصف ب م أثبت أن الشكل و س ء م متوازى أضلاع

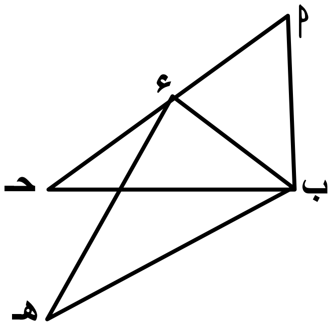


(٥) فى الشكل المقابل : أ ب حـ مثلث فيه أ ء ، ب هـ متوسطان متقاطعان فى م ، و ∋ حـ هـ بحيث ب هـ // ء و ، م هـ = ٤ سم أوجد طول ء و

(٦) أ ب حـ مثلث فيه م نقطة تقاطع متوسطاته أ ء ، ب هـ ؛ حـ و أثبت أن م نقطة تقاطع متوسطاته المثلث ء هـ و

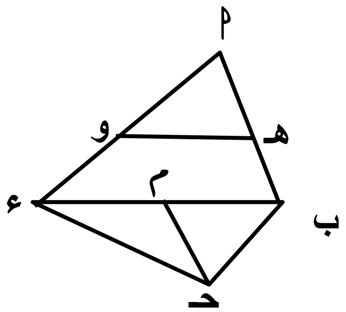


(٧) فى الشكل المقابل : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، أ ء ؛ ب هـ متوسطان متقاطعان فى م ، ق(∠ أ حـ ب) = ٣٠° ، أ ب = ٦ سم ، أ ء = ٧.٥ سم أوجد محيط Δ أ م هـ



(٨) فى الشكل المقابل : ∆ ء ب حـ فيه ء منتصف ء حـ
، ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب هـ ء) = ٣٠°
، ء حـ = ب هـ أثبت أن : ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠°

(٩) ء ب حـ ء مستطيل فيه هـ منتصف ء حـ ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أثبت أن : ء ب = ء هـ



(١٠) فى الشكل المقابل : هـ ، و ، م منتصفات ء ب ، ء ء ؛ ب ء
على الترتيب ، ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠°
أثبت أن : هـ و = حـ م

(١١) ء ب حـ ء مربع فيه هـ ∈ ب حـ بحيث ق (∠ ب ء هـ) = ٣٠° ، و ∈ ء هـ بحيث
ء و ⊥ ء هـ فإذا كان : ء و = ٥ سم أوجد : مساحة المربع ء ب حـ ء

(١٢) ∆ ء ب حـ فيه قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف ء حـ ، رسم ء هـ ⊥ ب حـ يقطعه فى هـ
فإذا كان ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء حـ = ٨ سم أوجد طول ء هـ

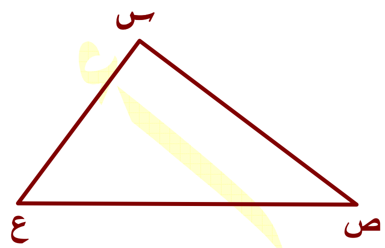
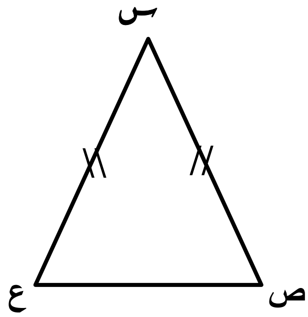
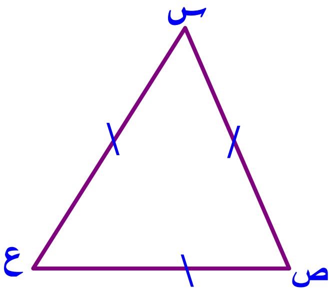
(١٣) ∆ ء ب حـ فيه قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء حـ = ١٦ سم ، ء منتصف ء ب
، هـ منتصف ب حـ ، و منتصف ء هـ أوجد محيط ∆ ب ء و

(١٤) ء ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ ب حـ بحيث ق (∠ ء هـ ء) = ٩٠° ، ء ء = ١٢ سم
، ق (∠ ب ء هـ) = ٣٠° أوجد طول ب هـ

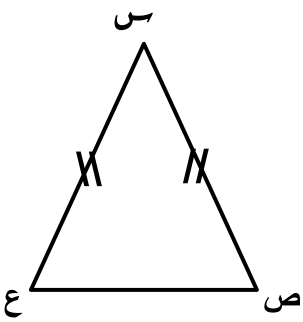
المثلث المتساوى الساقين

نعلم أن :

تصنف المثلثات حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هى :

مثلث مختلف الأضلاع	مثلث متساوى الساقين (متطابق الضلعين)	مثلث متساوى الأضلاع (متطابق الأضلاع)
		
سـ ص ≠ ص ع ≠ سـ ع	سـ ص = سـ ع	سـ ص = ص ع = ع سـ

فى الشكل المقابل :



Δ سـ ص ع فيه : سـ ص = سـ ع

لذا يسمى Δ سـ ص ع متساوى الساقين

، و تسمى نقطة سـ رأس المثلث ، سـ ص قاعدة المثلث

، كل من سـ ع ، ص ع الساقين

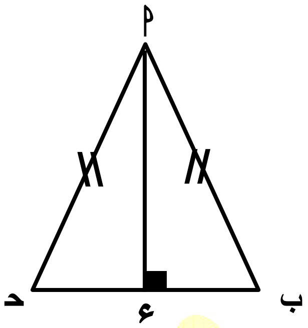
، ∠ ص ، ∠ ع زاويتا قاعدة المثلث و نوع كل منها حادة لماذا ؟؟

، ∠ س زاوية رأس المثلث وتكون إما حادة أو منفرجة أو قائمة

لذا قد يكون المثلث المتساوى الساقين حاد الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية

نظرية (١)

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان



المعطيات : Δ أ ب حـ فيه أ ب ≡ أ حـ

المطلوب : إثبات أن : ∠ ب ≡ ∠ حـ

العمـــل : نرسم أ ء ⊥ ب حـ

البرهـان : المثلثان أ ء ب ، أ ء حـ قائما الزاوية فيهما :

أ ب ≡ أ حـ " معطى " ، أ ء " ضلع مشترك "

∴ Δ أ ء ب ≡ Δ أ ء حـ و ينتج من التطابق ∠ ب ≡ ∠ حـ وهو المطلوب

تدريب : أكمل ما يأتى :

** إذا كان : Δ أ ب حـ فيه أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب) = ٥٠° فإن : ق (∠ أ) = ٠٠٠٠

** إذا كان : Δ أ ب حـ فيه أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٧٠° فإن : ق (∠ حـ) = ٠٠٠٠

نتيجة :

إذا كان المثلث المتساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة و يكون قياس كل منها ٦٠°

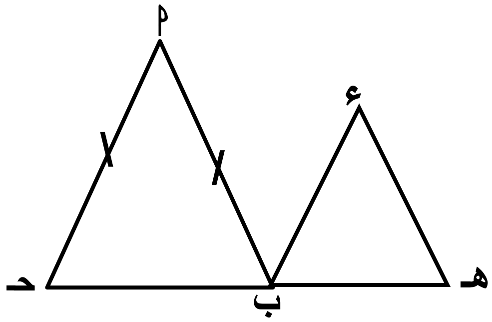
أحمد الشنتوري
a_shantory٢٠٠٧@yahoo.com

تدريب :

فى الشكل المقابل : ∆ ٲ ب حـ فيه ٲ ب = ٲ حـ

، ق (∠ ٲ) = ٧٠ ْ ، ∆ ء هـ ب متساوى الأضلاع

أوجد : ق (∠ ٲ ب ء)



المعطيات :

المطلـوب :

البرهـان : ∵ ∆ ٲ ب حـ فيه ٲ ب = ٲ حـ

، ق (∠ ٲ) = ٧٠ ْ

∴ ق (∠ ٲ ب حـ) =

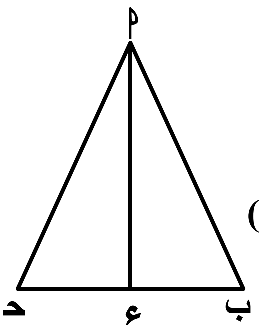
، ∵ ∆ ء هـ ب متساوى الأضلاع

∴ ق (∠ ء ب هـ) =

∴ ق (∠ ٲ ب ء) =

نظرية (١)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ، ويكون المثلث متساوى الساقين



المعطيات : ∆ ٲ ب حـ فيه ∠ ب ≡ ∠ حـ

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{ٲ ب}}$ ≡ $\overline{\text{ٲ حـ}}$

العمـــل : ننصف ∠ ب ٲ حـ بالمنصف $\overline{\text{ٲ ء}}$ يقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء

البرهـان : ∵ ∠ ب ≡ ∠ حـ ∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، ∵ $\overline{\text{ٲ ء}}$ ينصف ∠ ب ٲ حـ ∴ ق (∠ ب ٲ ء) = ق (∠ حـ ٲ ء)

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠ ْ

∴ ق (∠ ٲ ء ب) = ق (∠ ٲ ء حـ)

∴ المثلثان ٲ ء ب ، ٲ ء حـ قائما الزاوية فيهما :

ٲ ء ضلع مشترك

ق (∠ ب ٲ ء) = ق (∠ حـ ٲ ء)

ق (∠ ٲ ء ب) = ق (∠ ٲ ء حـ)

∴ ∆ ٲ ء ب ≡ ∆ ٲ ء حـ و ينتج من التطابق

$\overline{\text{ٲ ب}}$ ≡ $\overline{\text{ٲ حـ}}$ ، و يكون ∆ ٲ ب حـ متساوى الساقين وهو المطلوب

نتيجة :

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع

ملاحظة :

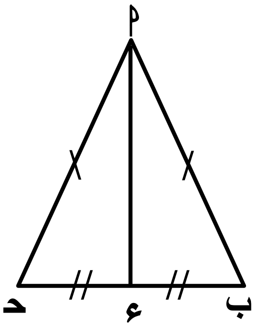
المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠ ْ يكون متساوى الأضلاع

تدريب :

مثلث قياسات زواياه هى : (٢ س + ٢٠) ْ ، (٣ س) ْ ، (٤ س – ٢٠) ْ

أوجد قيمة س و أذكر نوعه بالنسبة لزواياه

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين



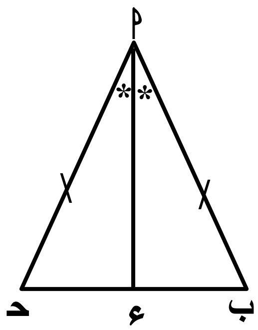
نتيجة (١) :

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة

فى الشكل المقابل : إذا كان ∆ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ا ء متوسط فيه

فإن : ا ء ينصف ∠ ب ا حـ ، ا ء ⊥ ب حـ

ملاحظة : ∆ ا ء ب ≡ ∆ ا ء حـ لماذا ؟؟



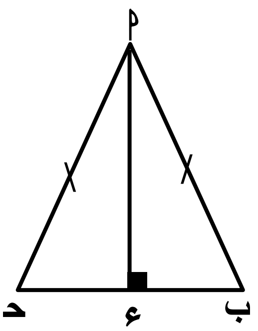
نتيجة (٢) :

منصف زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها

فى الشكل المقابل : إذا كان ∆ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ا ء ينصف ∠ ب ا حـ

فإن : ء منتصف ب حـ ، ا ء ⊥ ب حـ

ملاحظة : ∆ ا ء ب ≡ ∆ ا ء حـ لماذا ؟؟



نتيجة (٣) :

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة و زاوية الرأس

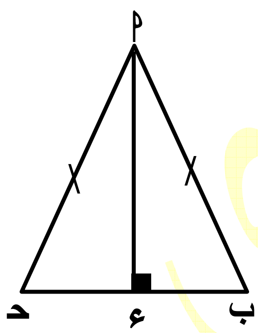
فى الشكل المقابل : ∆ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ا ء ⊥ ب حـ

فإن : ء منتصف ب حـ ،

ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ حـ ا ء)

ملاحظة : ∆ ا ء ب ≡ ∆ ا ء حـ لماذا ؟؟

محاور التماثل



(١) محور تماثل المثلث المتساوى الساقين :

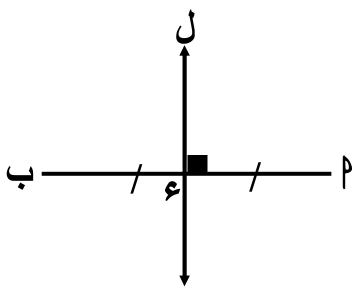
محور تماثل المثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عمودياً على قاعدته

فى الشكل المقابل : ∆ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ، ا ء ⊥ ب حـ

فإن : ا ء ↔ هو محور تماثل للمثلث ا ب حـ المتساوى الساقين

ملاحظة :

** المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد فقط
** المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل
** المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل



(١) محور تماثل القطعة المستقيمة : " محور القطعة المستقيمة "

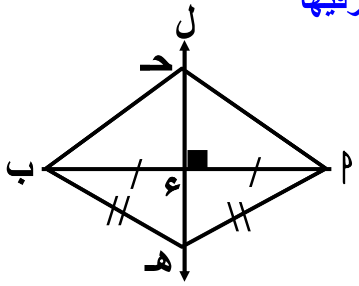
محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

فى الشكل المقابل : إذا كانت : ء منتصف ا ب ، المستقيم ل ⊥ ا ب

حيث ء ∈ ل فإن المستقيم ل هو محور ا ب

خاصية هامة :

أى نقطة على محور القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها



فى الشكل المقابل :

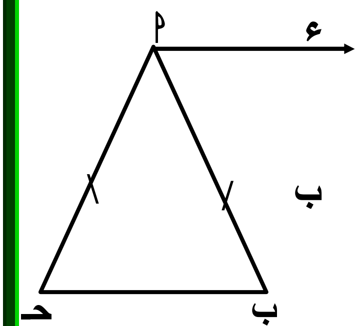
** إذا كان : المستقيم ل محور أ ب ، حـ ∈ ل

فإن : أ حـ = ب حـ

** إذا كان : أ هـ = هـ ب

فإن : هـ ∈ ل

تدريبات :



(١) فى الشكل المقابل : أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب أ ء) = ٥٥˚

، أ ء // ب حـ أوجد ق (∠ ب أ حـ)

الحل

المعطيات :

المطلوب :

البرهـان : ∵ أ ء // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

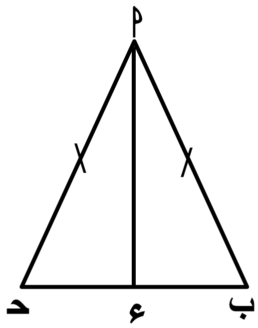
∴ ق (∠ أ ب حـ) = بالـ

، ∵ أ ب = أ حـ

∴ ق (∠ أ حـ ب) =

، ∵ مجموع قياسات

∴ ق (∠ ب أ حـ) =



(٢) فى الشكل المقابل : أ ب = أ حـ ، أ ء محور تماثل Δ أ ب حـ

، ب ء = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٥٥˚ أوجد :

طول ب حـ ، ق (∠ ب أ حـ)

تمارين

١ ــ أكمل ما يأتى :

(١) فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٤٥˚ كان المثلث ....

(٢) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(٣) إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين = ٧٠˚ فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة = ...

(٤) إذا كان قياس إحدى زاويتى قاعدة مثلث متساوى الساقين ٥٣˚ فإن قياس زاوية رأسه = ...

(٥) إذا كان قياسا زاويتين فى مثلث ٦٥˚ ، ٥٠˚ كان المثلث ....

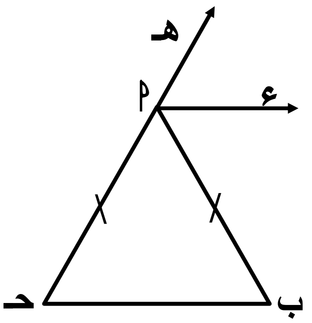
(٦) عدد محاولا تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(٧) يسمى المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها ....

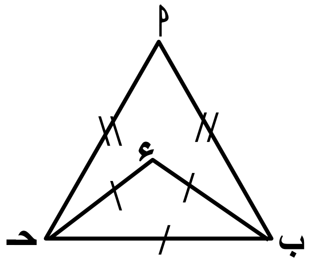
(٨) إذا كان ﻡ ب حـ ء شكل رباعى فيه ﻡ ب = ﻡ ء ، ب حـ = حـ ء فإن ﻡ حـ ↔ .... ب ء ↔

(٩) إذا كان △ ﻡ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٤٥° فإن عدد محاور تماثله ....

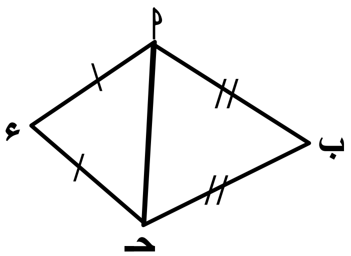
(١٠) إذا كان △ ﻡ ب حـ له محجور تماثل واحد ، كان ق (∠ حـ) = ١٢٠° فإن :
ق (∠ ب) = ...



٢ – فى الشكل المقابل : ﻡ ء ← // ب حـ ، هـ ∈ حـ ﻡ ←
، ﻡ ب = ﻡ حـ ، ق (∠ ء ﻡ هـ) = ٥٧°
أوجد ق (∠ ب ﻡ حـ)

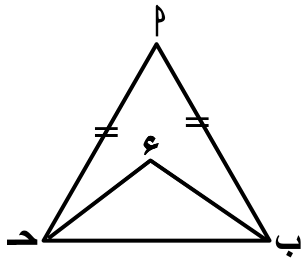


٣ – فى الشكل المقابل : ﻡ ب = ﻡ حـ ، ء ب = ب حـ = ء حـ
، ق (∠ ب ﻡ حـ) = ٣٠° أوجد : ق (∠ ﻡ ب حـ)
، ق (∠ ﻡ ب ء)

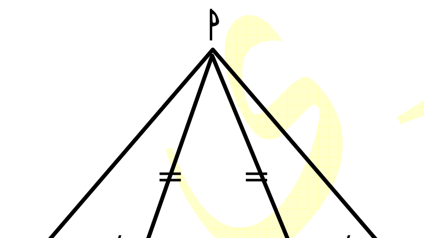


٥ – فى الشكل المقابل : ﻡ ب = ب حـ ، ﻡ ء = حـ ء ،
ق (∠ ء ﻡ ب) = ١٢٠° ، ق (∠ ء) = ٨٠°
أوجد ق (∠ ب)

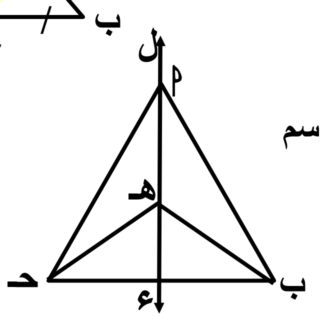
٦ – △ ﻡ ب حـ فيه س ∈ ﻡ ب ، ص ∈ ﻡ حـ بحيث ﻡ س = ﻡ ص ، ب حـ // س ص
أثبت أن : ﻡ ب = ﻡ حـ



٧ – فى الشكل المقابل : ﻡ ب = ﻡ حـ ، ق (∠ ﻡ) = ٥٠°
، ق (∠ ﻡ ب ء) = ق (∠ ﻡ حـ ء) = ٣٥°
أثبت أن : ب ء = حـ ء ، أوجد : ق (∠ ء)



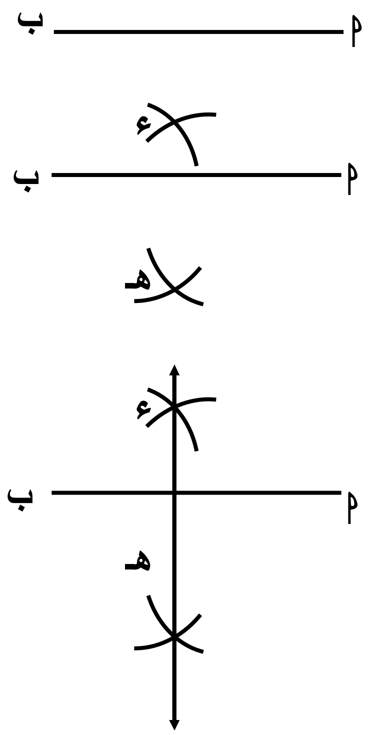
٨ – فى الشكل المقابل : ﻡ ء = ﻡ هـ ، ب ء = حـ هـ
أثبت أن : ﻡ ب = ﻡ حـ



١٠ – فى الشكل المقابل : ل محور تماثل ب حـ ، حـ ء = ٥ سم
، ب هـ = ٦ سم ، ق (∠ هـ حـ ب) = ٣٥°
أوجد طول كل من : ب ء ، حـ هـ
، ق (∠ هـ ب حـ)

إنشاءات هندسية

تنصيف قطعة مستقيمة



المعطيات : ٍ ب قطعة مستقيمة معلومة

المطلوب : تنصيف ٍ ب

خطوات العمل : * نرسم ٍ ب

* نركز بسن الفرجار عند ٍ ، بفتحة مناسبة أكبر من نصف طول ٍ ب تقريباً نرسم قوسين من دائرة فى جهتين مختلفتين من ٍ ب

* نركز بسن الفرجار عند ب و بنفس الفتحة السابقة نرسم قوسين من دائرة فى جهتى ٍ ب يتقاطعان مع القوسين السابقين فى ء ، هـ

* نرسم ء هـ فيقطع ٍ ب فى حـ فتكون نقطة حـ منتصف ٍ ب

البرهـــان : ∵ ء ٍ = ء ب ∴ ء ∈ لمحور ٍ ب

∵ هـ ٍ = هـ ب ∴ هـ ∈ لمحور ٍ ب

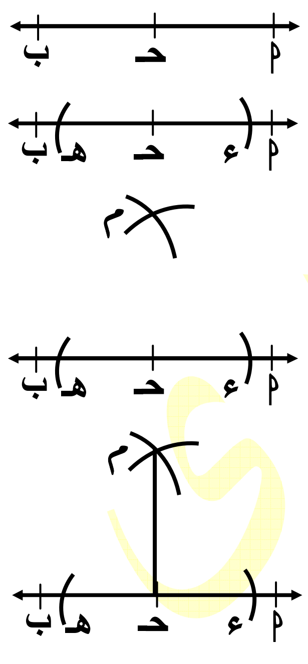
∴ ء هـ هو محور ٍ ب

، ∵ حـ ∈ ء هـ ∴ حـ ٍ = حـ ب

تدريب :

إرسم ٍ ب طولها ٧ سم ثم قسمها إلى أربعة قطع مستقيمة متساوية فى الطول بإستخدام المسطرة والفرجار " لا تمح الأقواس " " غير مطلوب كتابة خطوات العمل "

إنشاء عمود على مستقيم مار بنقطة تنتمى إلى مستقيم



المعطيات : ٍ ب مستقيم معلوم ، حـ ∈ ٍ ب

المطلوب : رسم عمود على ٍ ب من نقطة حـ

خطوات العمل : * نرسم ٍ ب ، نحدد النقطة حـ ∈ ٍ ب

* نركز بسن الفرجار عند حـ و بفتحة مناسبة نرسم قوسين من دائرة فى جهتين مختلفتين من حـ يقطعان ٍ ب فى ء ، هـ

* نركز بسن الفرجار عند كل من ء ، هـ و بفتحة مناسبة أكبر من طول حـ ء نرسم قوسين يتقاطعان فى م

* نرسم م حـ فيكون م حـ ⊥ ٍ ب

البرهـان : ∵ حـ ء = حـ هـ ∴ حـ ∈ محور ء هـ

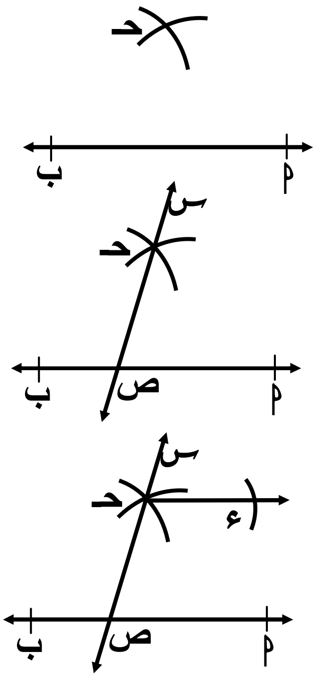
، ∵ م ء = م هـ ∴ م ∈ محور ء هـ

∴ م حـ هو محور ء هـ

، ∵ م حـ ⊥ ء هـ ، ∵ ء هـ ⊂ ٍ ب ∴ م حـ ⊥ ٍ ب

تدريب :

إرسم ب حـ طولها ٦ سم ، نصف ب حـ فى نقطة ء ثم إرسم ء هـ ⊥ ب حـ خذ ٍ ∈ ء هـ بحيث ٍ ء = ٤ سم أوجد بالقياس طول ٍ ب " لا تمح الأقواس " " غير مطلوب كتابة خطوات العمل "



رسم مستقيم من نقطة معلومة مواز لمستقيم معلوم

المعطيات : أ ب مستقيم معلوم ، حـ ∉ أ ب

المطلوب : رسم مستقيم من نقطة حـ يوازى أ ب

خطوات العمل : * نرسم أ ب ، نحدد النقطة حـ ∉ أ ب

* نرسم س ص يمر بنقطة حـ و يقطع أ ب في ص
* نرسم عند حـ الزاوية س حـ ء في وضع تناظر
مع ∠ أ ص س بحيث يكون :

∠ س حـ ء ≡ ∠ س ص أ

" تذكر خطوات رسم زاوية مطابقة لزاوية قياسها معلوم "

البرهان : ∵ س ص قاطع للمستقيمين أ ب ، حـ ء

، ∠ س حـ ء تناظر ∠ س ص أ

، ق (∠ س حـ ء) = ق (∠ س ص أ)

∴ أ ب // حـ ء

تدريب :

إرسم Δ أ ب حـ الذى فيه أ ب = ٦ سم ، ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠°

، من نقطة أ إرسم أ ء // ب حـ " لا تمح الأقواس "

" غير مطلوب كتابة خطوات العمل "

تمارين

فى كل التمارين : " لا تمح الأقواس " " غير مطلوب كتابة خطوات العمل "

١ – إرسم Δ أ ب حـ الذى فيه أ ب = أ حـ = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم ، نصف أ ب فى ء
، أ حـ فى هـ ، إرسم ء هـ ، و أوجد طولها

٢ – إرسم Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع ، و الذى طول ضلعه ٤ سم ، إرسم حـ ء ⊥ ب حـ
ليقطع ب أ فى ء أوجد بالبرهان طول أ ء

٣ – إرسم أ ب طولها ٨ سم ، إرسم المستقيم ل محور أ ب حيث أ ب ∩ ل = { حـ }
عين النقطة ء ∈ ل بحيث حـ ء = ٣ سم أوجد بالقياس طول كل من أ ء ، ب ء

٤ – إرسم Δ أ ب حـ الذى فيه ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° ، ق (∠ حـ) = ٧٠°
نصف كل من أ ب ، أ حـ فى ء ، هـ على الترتيب أوجد بالبرهان طول ء هـ
، ق (∠ أ ء هـ) ، ق (∠ أ هـ ء)

٥ – إرسم Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب ، نصف أ حـ فى ء أثبت أن : ء أ = ء ب = ء حـ

التبايـن

نعلم أن :

** تسمى كل من : < ، > علامة تباين

** تسمى العلاقة : س ص > ع ل أ؛ ق (∠ ب) > ق (∠ حـ) متباينة

أو علاقة تباين وتستخدم للمقارنة بين الأطوال و القياسات المختلفة

فإذا كان : س ص = ٧ سم ، ء هـ = ٥ سم فإن : س ص > ء هـ أ؛ ء هـ < س ص

، إذا كان : ق (∠ س) = ٧٠ ° ، ق (∠ ص) = ٥٠ °

فإن : ق (∠ س) > ق (∠ ص) أ؛ ق (∠ ص) < ق (∠ س)

مسلمات التباين :

لأى ثلاثة أعداد س ، ص ، ع :

إذا كان : س > ص فإن : س + ع > ص + ع

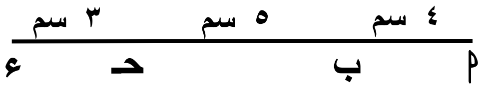
إذا كان : س > ص فإن : س – ع > ص – ع

إذا كان : س > ص ، ع عدداً موجباً فإن : س ع > ص ع

إذا كان : س > ص ، ص > ع فإن : س > ع

إذا كان : س > ص ، ء > هـ فإن : س + ء > ص + هـ

تدريب (١) : فى الشكل المقابل إكمل مستخدماً > أو <



** ٲ ب ..... حـ ء

** ٲ ب ..... حـ ب

** ٲ حـ ..... ب ء

تدريب (٢) : ∆ ٲ ب حـ فيه ق (∠ ب) = ٥٠ ° ، ق (∠ حـ) = ٦٠ ° إكمل مستخدماً > أو <

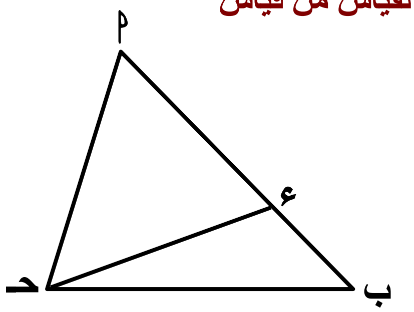
** ق (∠ ب) ..... ق (∠ ٲ)

** ق (∠ ٲ)..... ق (∠ حـ)

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

نظرية :

إذا أختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر



المعطيات : Δ أ ب حـ فيه أ ب > أ حـ

المطلوب : إثبات أن : ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ أ ب حـ)

العمـــل : نأخذ ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = أ حـ

البرهـان : Δ أ حـ ء فيه أ ء = أ حـ

∴ ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ أ ء حـ) (١)

، ∵ ∠ أ ء حـ خارجة عن Δ ب حـ ء ∴ ق (∠ أ ء حـ) > ق (∠ ب) (٢)

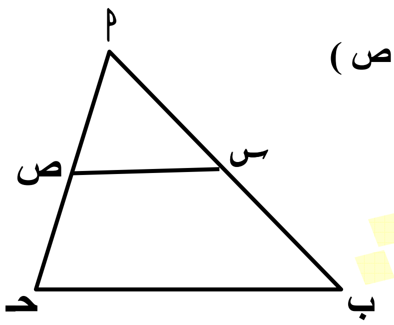
من (١) ، (٢) ينتج : ق (∠ أ حـ ء) > ق (∠ ب)

∴ ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ أ حـ ء)

∴ ق (∠ أ حـ ب) > ق (∠ أ ب حـ) وهو المطلوب

تدريب : فى الشكل المقابل : أ ب > أ حـ ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ص منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ أثبت أن : ق (∠ أ ص س) > ق (∠ أ س ص)



المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ Δ أ ب حـ فيه أ ب > أ حـ

∴ ق (∠) > ق (∠)

، ∵ س ، ص منتصفى ،

∴ //

∴ ق (∠) = ق (∠)

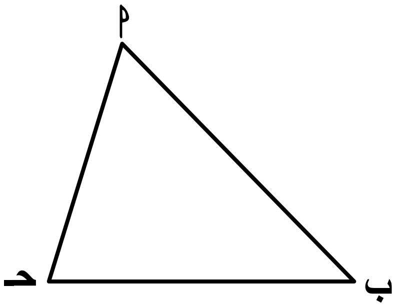
، ق (∠) = ق (∠) بالـ

∴

المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

نظرية :

إذا أختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى



المعطيات : ∆ أ ب حـ فيه ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

المطلوب : إثبات أن : أ ب > أ حـ

البرهان : ∵ أ ب ، أ حـ قطع مستقيمة

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات :

(١) أ ب > أ حـ　(٢) أ ب = أ حـ　(١) أ ب < أ حـ

إذا لم تكن أ ب > أ حـ

فإما أ ب = أ حـ　　أو　أ ب < أ حـ

إذا كان أ ب = أ حـ　فإن　ق (∠ حـ) = ق (∠ ب)

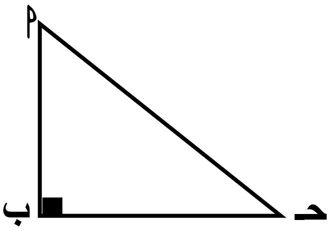
و هذا يخالف المعطيات　حيث أن　ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

و إذا كان أ ب < أ حـ　فإن　ق (∠ حـ) < ق (∠ ب)　حسب النظرية السابقة

و هذا يخالف المعطيات　حيث أن　ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

∴ يجب أن يكون أ ب > أ حـ　　وهو المطلوب

نتيجة (١) : فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث



فى الشكل المقابل : ∆ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∵ ∠ أ حادة　∴ ق (∠ ب) > ق (∠ أ)

∴ أ حـ > ب حـ

∵ ∠ حـ حادة　∴ ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

∴ أ حـ > أ ب

ملاحظة :

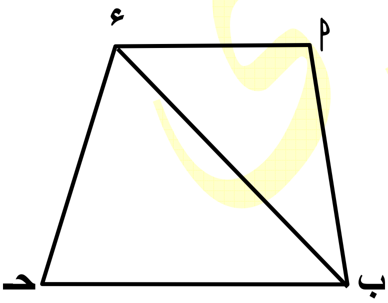
فى المثلث المنفرج الزاوية يكون الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أكبر أضلاع المثلث طولاً

نتيجة (٢) :

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم

تعريف :

بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم



تدريب : فى الشكل المقابل : أ ء // ب حـ

، ق (∠ أ ء ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٥٥°

أثبت أن : ب ء > حـ ء

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ أ ء // ب حـ　،　ب ء قاطع لهما

∴ ق (∠　　) < ق (∠　　) =　　°　بالـ

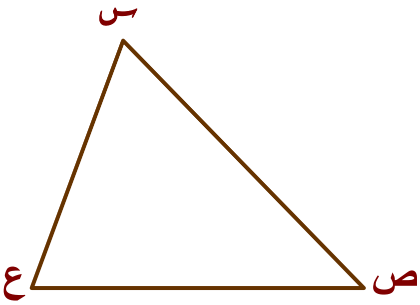
فى ∆ ب حـ ء : ∵ ق (∠ أ ء ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٥٥°

∴ ق (∠　　) < ق (∠　　)　∴

متباينة المثلث

حقيقة :

في أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث



أى أن : فى أى Δ س ص ع يكون :

س ص + ص ع > ع س

ص ع + ع س > س ص

س ص + س ع > ص ع

فمثلاً :

الأعداد : ٣ ، ٤ ، ٨ لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

لأن : ٣ + ٤ = ٧ ، ٧ < ٨ " لا يحقق متباينة المثلث "

تدريب :

أى من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث

(١) ٢ ، ٧ ، ٤ (٢) ٥ ، ٨ ، ٣

(٣) ٣ ، ٦ ، ٨ (٤) ٥ ، ٥ ، ٥

الحل

تمارين

١ ــ أكمل ما يأتى :

(١) فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم

فإن : ق (∠ ٠٠٠٠) > ق (∠ ٠٠٠٠)

(٢) إذا كان Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن : ٠٠٠٠٠ > ا ب

(٣) فى Δ ا ب حـ إذا كان ا ب > ا حـ ، ق (∠ ب) = ٤٠° فإن ق (∠ حـ) ٠٠٠٠٠ ٤٠°

(٤) إذا كان Δ س ص ع منفرج الزاوية فى س ، $\overline{\text{س ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ فإن

ق (∠ ص) ٠٠٠٠٠ ق (∠ ص س ء)

(٥) فى Δ ا ب حـ إذا كان ق (∠ ا) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن ا ب > ٠٠٠٠٠

(٦) إذا كان Δ ا ب حـ منفرج الزاوية فى ب فإن أكبر الأضلاع طولاً هو

(٧) إذا كان Δ س ص ع فيه س ص = ٧ سم ، ص ع = ٦ سم ، ع س = ٥ سم فإن

أصغر زواياه الداخلة فى القياس هى ٠٠٠٠

(٨) فى Δ ا ب حـ إذا كان ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٥٠° فإن ا ب > ٠٠٠٠٠

(٩) فى Δ ا ب حـ يكون : ا ب + ا حـ ٠٠٠٠٠ ب حـ

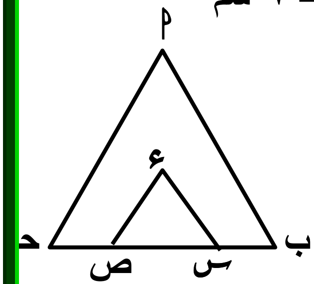
(١٠) إذا كان ٤ سم ، ٩ سم طولا ضلعين فى مثلث فإن أصغر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ...

(١١) إذا كان ٥ سم ، ٨ سم طولا ضلعين فى مثلث فإن أكبر عدد صحيح يمثل طول الضلع الثالث = ...

(١٢) إذا كان ٣ سم ، ٧ سم طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين طول الضلع الثالث = ...

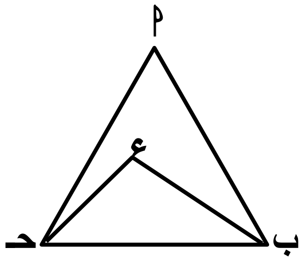
(١٣) فى Δ أ ب حـ إذا كان أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٥ سم فإن : ب حـ ∈] ..... ، ..... [

٢ – أ ب حـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ١١ سم ، أ ء = ٧ سم
أثبت أن : ق (∠ ب أ ء) < ق (∠ ب حـ ء)



٣ – فى الشكل المقابل : أ ب > أ حـ ، $\overline{\text{س ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ص ء}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$
، أثبت أن : ق (∠ ء ص س) < ق (∠ ء س ص)

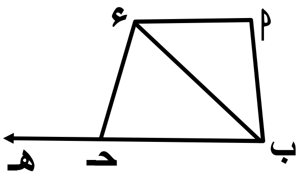
٤ – أ ب حـ ء شكل رباعى فيه ب ء = حـ ء ، أ ب > أ حـ
أثبت أن : ق (∠ أ حـ ء) < ق (∠ أ ب ء)



٥ – فى الشكل المقابل : أ ب = أ حـ ، ء نقطة داخل المثلث
بحيث ء ب > ء حـ أثبت أن :
ق (∠ أ ب ء) < ق (∠ أ حـ ء)

٦ – Δ أ ب حـ فيه ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ب ء > ء حـ ، أ ء > ب ء أثبت أن :
ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) < ق (∠ ب أ حـ)

٧ – Δ أ ب حـ فيه ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ب ء = ء حـ = أ ء ، ق (∠ حـ) = ٦٦°
أثبت أن : ب حـ > أ ب



٨ – فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٤٠°
، ق (∠ ء حـ هـ) = ١٢٠° أثبت أن : ء ب > ء حـ

٩– أى من هذه الأعداد يصلح أطوالاً لأضلاع مثلث مع ذكر السبب

(١) ٢ ، ٤ ، ٥ (٢) ٣ ، ٥ ، ٧ (٣) ٦ ، ٧ ، ١٣

(٤) ٦ ، ٦ ، ٦ (٥) ٧ ، ١٤ ، ٧ (٦) ٦ ، ٤ ، ١١

١٠– أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات الآتية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما : (١) ٦ سم ، ٩ سم (٢) ٥ سم ، ١٢ سم

(٣) ٧ سم ، ١٥ سم (٤) ٨.٥ سم ، ١٠ سم

١١– Δ أ ب حـ فيه ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ أثبت أن : محيط Δ أ ب حـ > ٢ أ ء