بسم الله الرحمن الرحيم

وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون

صدق الله العظيم

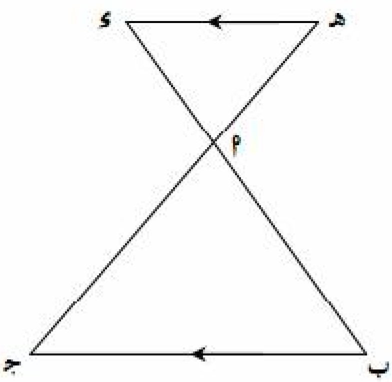
مذكرة
التفوق
فى
الرياضيات
فرع الهندسة

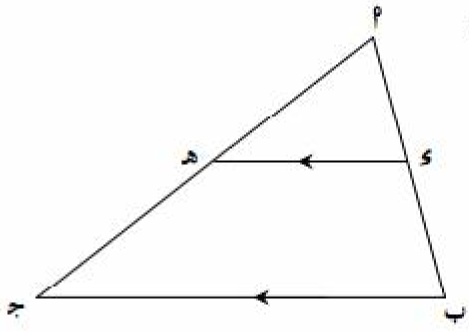
الصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

نظرية (١) بدون برهان

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الاخرين فانه يقسمهما الى قطع أطوالها متناسبة .





فإذا كان : $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فإن :

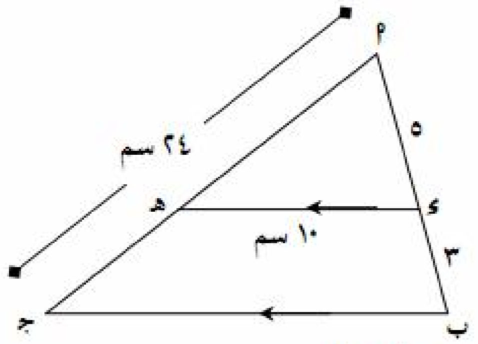
(١) $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

(٢) $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}}$

(٣) $\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ أ}}$

مثال (١) : أ ب جـ Δ فيه : د $\in$ أ ب بحيث أ د = $\frac{5}{8}$ أ ب ، رسم $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ .
فاذا كان أ جـ = ٢٤ سم ، أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ ، وإذا كان د هـ = ١٠سم ، أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل



∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ أ}}$ ∴ $\frac{3}{8} = \frac{\text{جـ هـ}}{24}$

∴ هـ جـ = $\frac{3 \times 24}{8}$ = ٩ سم

∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{5}{8} = \frac{10}{\text{ب جـ}}$ ومنها ب جـ = $\frac{8 \times 10}{5}$ = ١٦ سم .

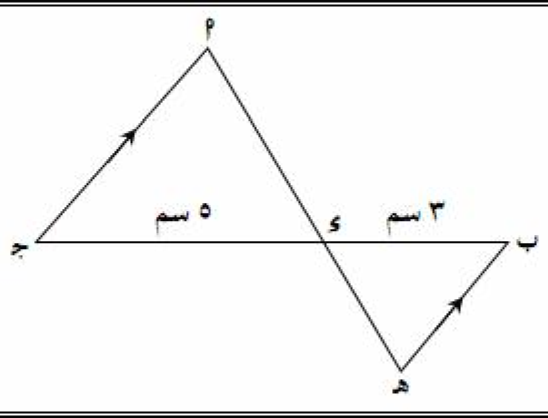
تدريب : أ ب جـ Δ فيه : أ ب = ٧ سم ، د $\in$ أ ب بحيث أ د = ٣ سم ، رسم $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ فاذا كان هـ جـ = ٨ سم ، أوجد طول $\overline{\text{أ هـ}}$.

مثال (٢) : فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{هـ ب}}$ // $\overline{\text{جـ أ}}$

إذا كان : ب د = ٣ سم ، د جـ = ٥ سم

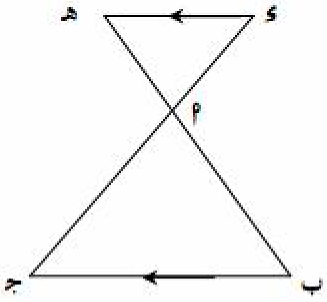
، أ هـ = ١٦ سم ، أوجد طول $\overline{\text{هـ د}}$.



الحل

∵ $\overline{\text{هـ ب}}$ // $\overline{\text{ج أ}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ب ء}}$ ∴ $\frac{\text{١٦}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}}$

∴ هـ ء = $\frac{\text{٣} \times \text{١٦}}{\text{٨}}$ = ٦سم .



تدريب : فى الشكل المقابل $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$:

أ ء = ٤ سم ، أ ج = ٥ سم ، أ ب = ١٠ سم

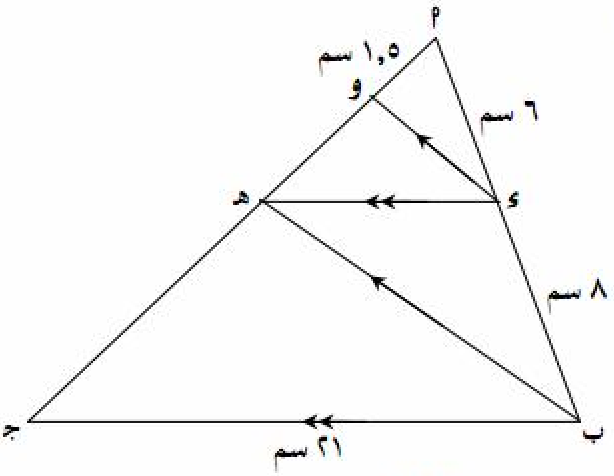
، ء هـ = ١٢ سم .

أوجد طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$.

مثال (٣) : فى الشكل المرسوم : $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

أوجد طول كل من : $\overline{\text{و هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ج}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$.

الحل



فى △ أ ب هـ : ∵ $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و هـ}}$ ∴ $\frac{\text{٦}}{\text{٨}} = \frac{\text{١,٥}}{\text{و هـ}}$

∴ و هـ = $\frac{\text{٨} \times \text{١,٥}}{\text{٦}}$ = ٢ سم .

فى △ أ ب ج : ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$ ∴ $\frac{\text{٦}}{\text{٨}} = \frac{\text{٣,٥}}{\text{هـ ج}}$ ∴ هـ ج = $\frac{\text{٨} \times \text{٣,٥}}{\text{٦}}$ = ٤ $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ سم .

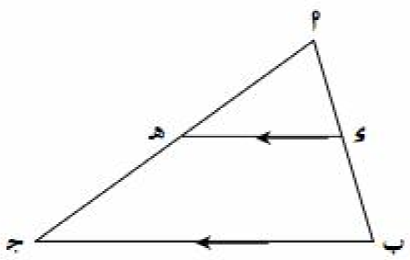
، $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب ج}}$ ∴ $\frac{\text{٦}}{\text{١٤}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{٢١}}$ ∴ ء هـ = $\frac{\text{٦} \times \text{٢١}}{\text{١٤}}$ = ٩ سم .

عكس نظرية (١)

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما الى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث

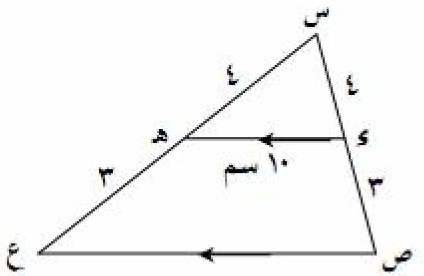
ففى الشكل المقابل إذا كان :

$\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$ فإن : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$



مثال (٤) : س ص ع $\triangle$: ء $\in$ $\overline{\text{س ص}}$ بحيث كان ٣ س ء = ٤ ء ص ، هـ $\in$ $\overline{\text{س ع}}$ بحيث كان س هـ = $\frac{٤}{٧}$ س ع أثبت أن $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ واذا كانت ء هـ = ١٠ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ص ع}}$.

الحل



∵ $\frac{\text{س ء}}{\text{ء ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ع}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

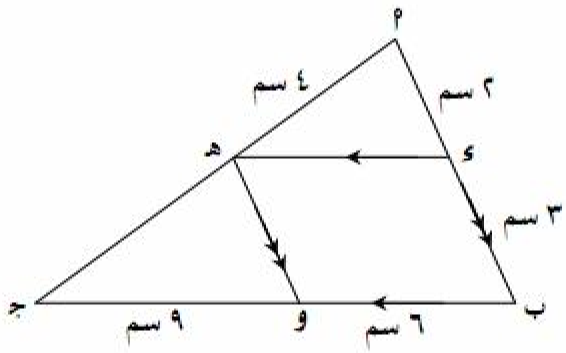
∴ $\frac{\text{س ء}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ص ع}}$ ∴ $\frac{٤}{٧} = \frac{١٠}{\text{ص ع}}$

∴ ص ع = $\frac{٧ \times ١٠}{٤}$ = ١٧,٥ سم .

تدريب : س ص ع $\triangle$ فيه : س ص = ١٠سم ، ء $\in$ $\overline{\text{س ص}}$ بحيث س ء = ٤ سم ، رسم $\overline{\text{ء و}}$ فقطع $\overline{\text{س ع}}$ فى و ، فإذا كان س و = ٣ سم ، و ص = ٤,٥ سم ، إثبت أن :
$\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، وإذا كان ء و = ٦ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ص ع}}$.

مثال (٥) : ٢ ب جـ $\triangle$ فيه : ٢ ب = ٥ سم ، ء $\in$ $\overline{\text{٢ ب}}$ بحيث ٢ ء = ٢ سم ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فقطع $\overline{\text{٢ جـ}}$ فى هـ بحيث ٢ هـ = ٤ سم . أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$. وإذا رسم $\overline{\text{هـ و}}$ فقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى و بحيث ب و = ٦ سم ، و جـ = ٩ سم ، أثبت أن : $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{٢ ب}}$.

الحل



∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{٢ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{٢ هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{\text{هـ جـ}}$ ومنها هـ جـ = $\frac{٣ \times ٤}{٢}$ = ٦ سم

، ∵ $\frac{\text{٢ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ .... (١) ، ∵ $\frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{٢ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و جـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{٢ ب}}$

تدريب : ٢ ب جـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overline{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ فقطع $\overline{\text{٢ ب}}$ فى س ، ورسم $\overline{\text{هـ ص}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ فقطع $\overline{\text{٢ ء}}$ فى ص أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

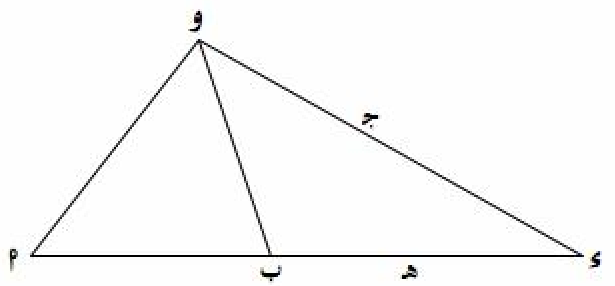
إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه ....

مثال (٦) : فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{هـ ج}} \,//\, \overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{ب ج}} \,//\, \overline{\text{أ و}}$

إثبت أن : $(\text{ء ب})^2 = \text{ء هـ} \times \text{ء أ}$

الحل



نلاحظ أن المطلوب هو : $\text{ء ب} \times \text{ء ب} = \text{ء هـ} \times \text{ء أ}$

يمكن كتابته على الصورة : $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء ب}}$

فى $\triangle$ ء أ و :

$\because$ $\overline{\text{ب ج}} \,//\, \overline{\text{أ و}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ء ج}}{\text{ء و}}$ .... (١)

فى $\triangle$ ء ب و :

$\because$ $\overline{\text{هـ ج}} \,//\, \overline{\text{ب و}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ء ج}}{\text{ء و}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء ب}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء ب}}$ ومنها $(\text{ء ب})^2 = \text{ء هـ} \times \text{ء أ}$ وهو المطلوب .

عن أبي هريرة رضي الله عنه أن رسول الله صلى الله عليه وسلم قال : من قال سبحان الله في يوم مائة مرة غُفرت ذنوبه وإن كانت مثل زبد البحر.

اللهم أنت ربي لا إله إلا أنت، خلقتني وأنا عبدك وأنا على عهدك ووعدك ما استطعت أعوذ بك من شر ما صنعت أبوء لك بنعمتك علي وأبوء لك بذنبي فاغفر لي فإنه لا يغفر الذنوب إلا أنت

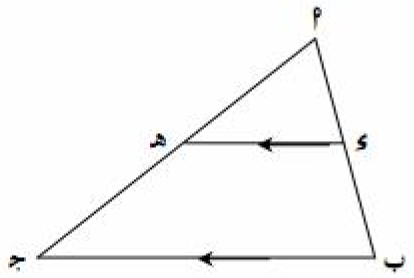
تمارين (١١) على نظرية ١ وعكسها

(١) فى الشكل المقابل

إذا كان ءهـ // بجـ

ا ء = ٤ سم ، ء ب = ٦ سم ، ا هـ = ٦ سم .

أوجد طول هـ جـ . [٩ سم]



(٢) ا ب جـ Δ فيه : ءهـ // بجـ ، ا ء = ٤ سم ، ء ب = ٦ سم ، ا جـ = ٢٠ سم ، أوجد طول ا هـ ، هـ جـ

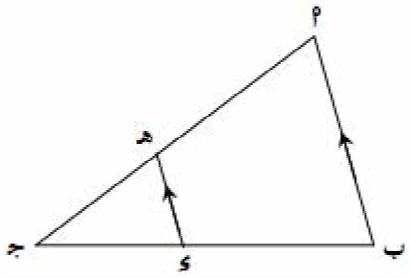
[٨ سم ، ١٢ سم]

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان ءهـ // ا ب ،

ب ء = ٨ سم ، ء جـ = ٦ سم ، جـ هـ = ٩ سم ،

أوجد طول ا هـ . [١٢ سم]



(٤) فى الشكل السابق : إذا كان ءهـ // ا ب ، ب ء = ٨ سم ، ء جـ = ٦ سم ، ا جـ = ٢١ سم .

أوجد طول ا هـ ، هـ جـ [١٢ سم ، ٩ سم]

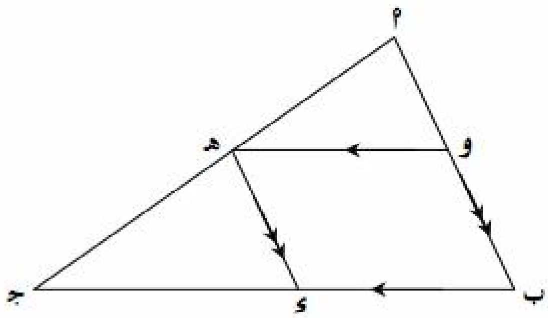
(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان وهـ // بجـ ، ءهـ // ا ب ،

ا و = ٦ سم ، وب = ٩ سم ، ا هـ = ٨ سم ،

ب ء = ٤ سم . أوجد طول هـ جـ ، ء جـ .

[١٢ سم ، ٦ سم]



(٦) ا ب جـ Δ فيه : ءهـ // بجـ ، ب جـ = ٢٠ سم ، ء ب = ا هـ ، ا ء = ٤ سم ، هـ جـ = ٩سم

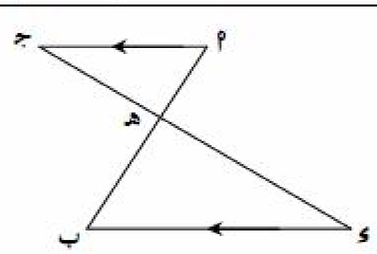
أوجد طول ء ب ، ءهـ [٦ سم ، ٨ سم]

(٧) فى الشكل المقابل : إذا كان ا جـ // ء ب ، ا هـ = ٣ سم ،

هـ ب = ٥ سم ، ء هـ = ١٠ سم ، ا جـ = ٩ سم .

أوجد طول هـ جـ ، ء ب .

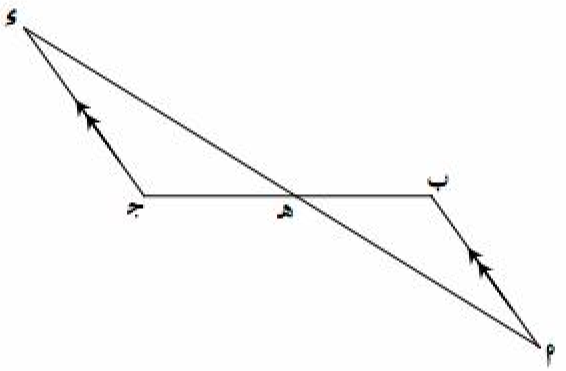
[٦ سم ، ١٥ سم]



(٨) فى الشكل السابق : إذا كان : ا هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٤ سم فإذا علم أن ء جـ = ٢١ سم . أوجد طول :

جـهـ ، ءهـ . [٩ سم ، ١٢ سم]

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان أب // جـ ء ،

أ ء ∩ ب جـ = {هـ}

، ب هـ = ٤ سم ، هـ جـ = ٥ سم ، أ ء = ٢٧ سم

أوجد طول أ هـ ، هـ ء . [١٢ سم ، ١٥سم]

---

(١٠) أ ب جـ △ فيه : ء هـ // ب جـ ، هـ جـ = ٩ سم ، ء هـ = ٨ سم ، أ ء = ٤ سم ، ء ب = ٦ سم

، أ هـ = ٦ سم ، إثبت أن ء هـ // ب جـ ، وأوجد طول ب جـ . [٢٠ سم]

(١١) أ ب جـ △ فيه : هـ ∈ أ جـ بحيث أ هـ = ٩ سم ، هـ جـ = ١٢ سم ، ء ∈ أ ب بحيث أ ء = ٦ سم ،

ء ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٠,٥ سم . إثبت أن ء هـ // ب جـ وأوجد طول ء هـ . [٤,٥ سم]

---

(١٢) أ ب جـ △ فيه : ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ جـ ، فإذا كان أ ء = ٣سم ، ء ب = ٤ سم ، أ هـ = $\frac{٣}{٧}$ أ جـ .

إثبت أن ء هـ // ب جـ وإذا كان ء هـ = ٦ سم ، أوجد طول ب جـ [١٤ سم]

---

(١٣) س ص ع ل شكل رباعى دائرى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم هـ و // س ص فقطع ص ع فى و ،

رسم هـ ء // س ل فقطع ل ع فى ء ، إثبت أن و ء // ص ل .

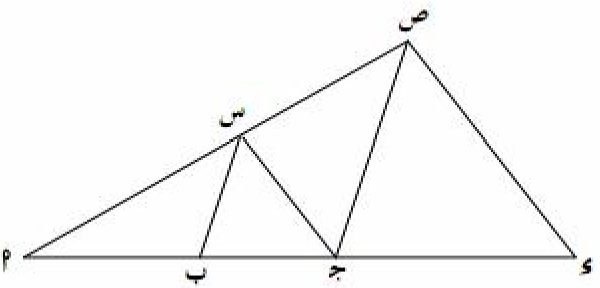
---

(١٤) س ص ع ل شكل رباعى دائرى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم هـ و // ل ع فقطع ص ع فى و ، رسم

هـ ء // ل س فقطع ص س فى ء . إثبت أن: و ء // س ع .

---

(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان ب س // جـ ص ، ء ص // جـ س

إثبت أن :

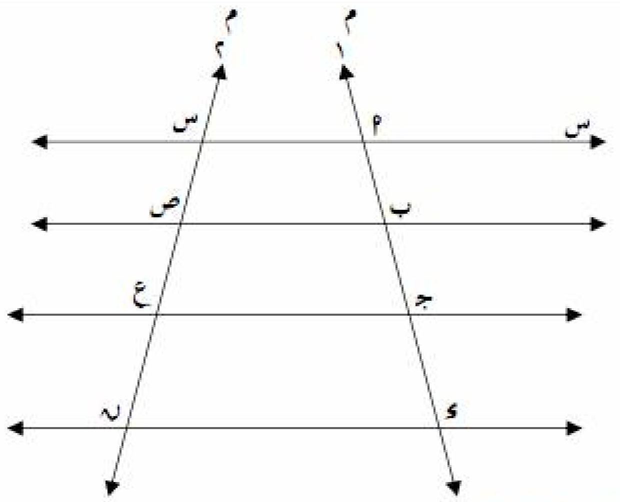
(أ جـ)^{٢} = أ ب × أ ء

اللهم إنا نسألك موجبات رحمتك وعزائم مغفرتك والسلامة من كل إثم والغنيمة من كل بر والفوز بالجنة والنجاة من النار

عن عبد الله بن عمرو رضى الله عنهما قال : قال رسول الله صلى الله عليه وسلم : ما على الأرض أحدٌ يقول لا إله إلا الله والله أكبر ولا حول ولا قوة إلا بالله إلا كفِّرت عنه خطاياه ولو كانت مثل زبد البحر

نظرية (٢) : نظرية تاليس العامة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الاخر.



في الشكل المقابل

إذا كان $\text{ل}_1 // \text{ل}_2 // \text{ل}_3 // \text{ل}_4$ ،

المستقيمان : م_1 ، م_2 قاطعان لهما فإن :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} \quad \frac{\text{ب ج}}{\text{ص ع}} \quad \frac{\text{ج ء}}{\text{ع ل}}$$

ملاحظات هامة :

يمكن إستنتاج التناسبات التالية :

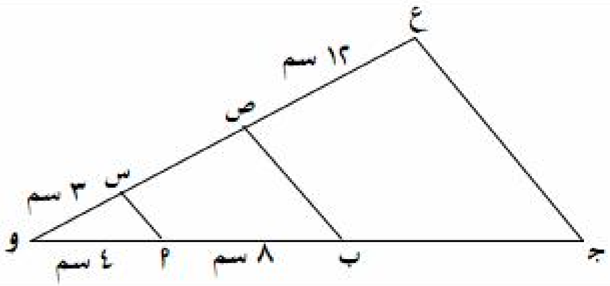
$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س ع}} \quad ، \quad \frac{\text{ب ج}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ص ل}} \quad ، \quad \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ص ل}}$$

مثال (١) : في الشكل المقابل :

الأطوال كما مبين بالرسم ،

$\overline{\text{أ س}} // \overline{\text{ب ص}} // \overline{\text{ج ع}}$

أوجد طول كل من : $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$.



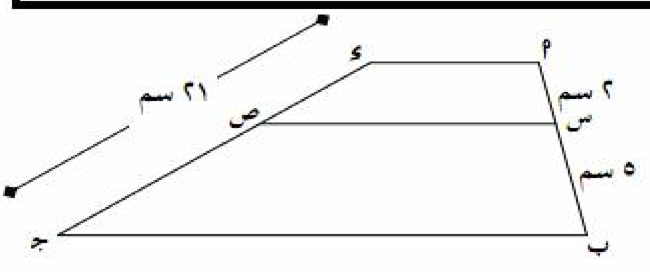
الحل

$\because \overline{\text{أ س}} // \overline{\text{ب ص}} // \overline{\text{ج ع}}$

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و س}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ص ع}} \qquad \therefore \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ج}}{١٢}$$

$\therefore$ س ص $= \frac{٣ \times ٨}{٤} =$ ٦سم ، ب ج $= \frac{٤ \times ١٢}{٣} =$ ١٦سم .

مثال (٢) : أ ب ج ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{ب ج}}$ ، أ ب = ٧ سم ، س $\in \overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ س = ٢ سم ، رسم $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب ج}}$ فقطع $\overline{\text{ء ج}}$ في ص فاذا كان ء ج = ٢١ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ء ص}}$.



$\because \overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{ب ج}}$ ، $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب ج}}$

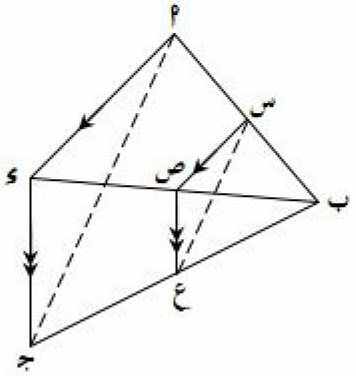
$\therefore \overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{س ص}} // \overline{\text{ب ج}}$

$$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{٢١} = \frac{٢}{٧} \qquad \therefore \text{ء ص} = \frac{٢ \times ٢١}{٧} = ٦ \text{ سم .}$$

مثال (٣) : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ فقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى ص ثم رسم $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ فقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ع . أثبت أن : $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$.

الحل



∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س أ}} = \boxed{\frac{\text{ب ص}}{\text{ص ء}}}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$

∴ $\boxed{\frac{\text{ب ص}}{\text{ص ء}}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ع جـ}}$ .... (٢)

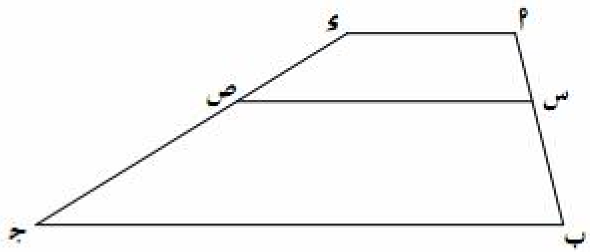
من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{\text{ب س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ع جـ}}$ ∴ $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

نتيجة :

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الاخر تكون متساوية فى الطول أيضا .

تمارين (١٢) على نظرية تاليس العامة



(١) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

أ س = ٤ سم ، س ب = ٥ سم ، ء ص = ٨ سم

أوجد طول $\overline{\text{ص جـ}}$ [١٠ سم]

(٢) فى الشكل السابق :

إذا كان : أ س = ٤ سم ، س ب = ٣ سم ، ء جـ = ١٤ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ص جـ}}$

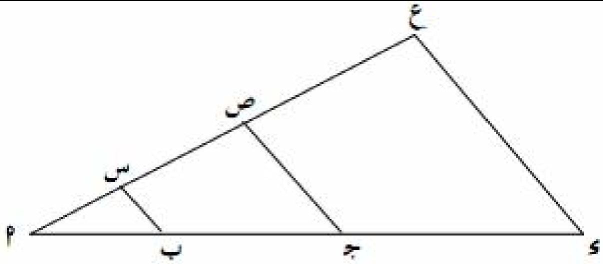
[٦ سم]

(٣) فى الشكل السابق :

إذا كان : أ س = ٨ سم ، ص جـ = ١٨ سم ، س ب = ء ص ، أوجد طول $\overline{\text{س ب}}$

[١٢ سم]

(٤) فى الشكل المقابل :



ب س // ج ص // ء ع

أ ب = ٣ سم ، أ س = ٥ سم ، ب ج = ٦ سم

، ص ع = ١٥ سم .

أوجد طول كل من : س ص ، ج ء .

[١٠ سم ، ٩ سم]

---

(٥) فى الشكل السابق :

إذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ س = ٩ سم ، ب ج = ٤ سم ، ص ع = ١٢ سم .

أوجد طول كل من : س ص ، ج ء

[٦سم ، ٨ سم]

---

(٦) أ ب ج ء شكل رباعى فيه أ ب // ج ء ، ب ج = ١٢ سم ، هـ ∈ أ ء بحيث أ هـ = ٣ سم ، هـ ء = ٦ سم ، رسم هـ ى // ء ج ويقطع ب ج فى ى . أحسب طول ب ى .

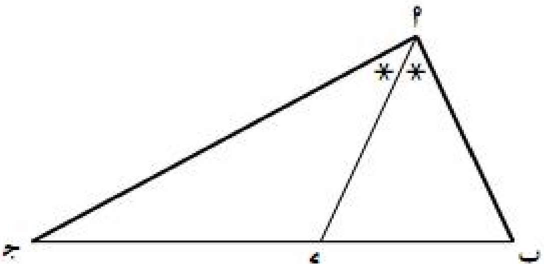
---

(٧) أ ب ج ء شبة منحرف فيه أ ء // ب ج ، ج ء = ٣٥ سم ، س ∈ أ ب بحيث أ س = $\frac{3}{4}$ س ب ، رسم س ص // ب ج ويقطع ج ء فى ص . أوجد طول كل من : ء ص ، ص ج .

نظرية (٣)

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج الى جزئين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الاخرين .

(١) فى الشكل المقابل :



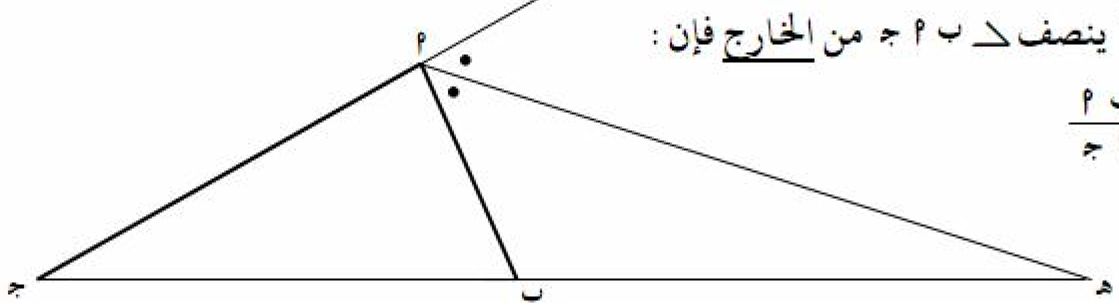
إذا كان أ ء ينصف ∠ ب أ ج من الداخل فإن :

$$\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ هـ ينصف ∠ ب أ ج من الخارج فإن :

$$\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

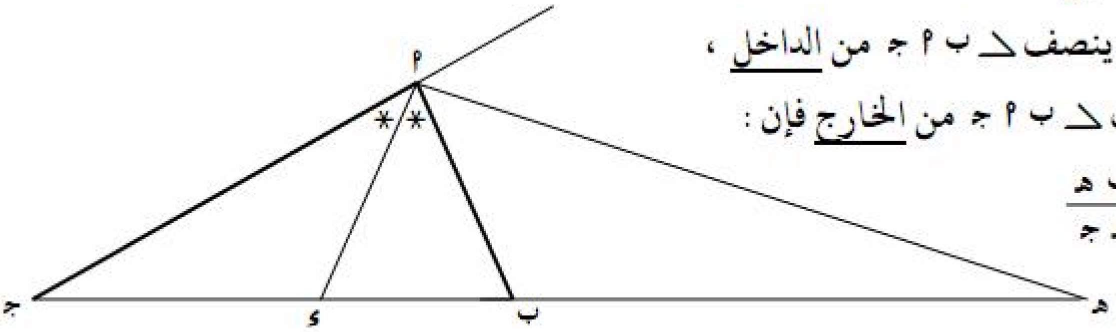


(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ ج من الداخل ،

$\overline{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ج من الخارج فإن :

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ج}}$$



مثال (١) : أ ب ج Δ ، نصفت ∠ ب أ ج بالمنصف $\overline{\text{أ د}}$ الذى لاقى $\overline{\text{ب ج}}$ فى د بحيث كان ب د : د ج = ٢ : ٣ ، فإذا كان أ ب = ٦ سم فما طول $\overline{\text{أ ج}}$.

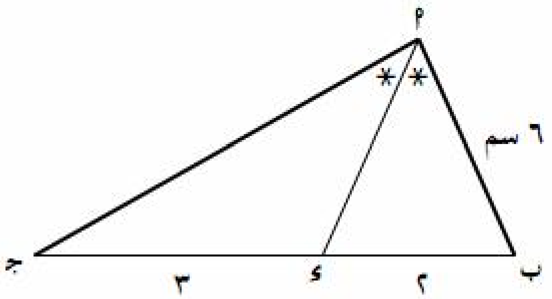
الحل

∵ $\overline{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ ج

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٦}{\text{أ ج}}$

∴ أ ج = $\frac{٣ \times ٦}{٢}$ = ٩ سم .



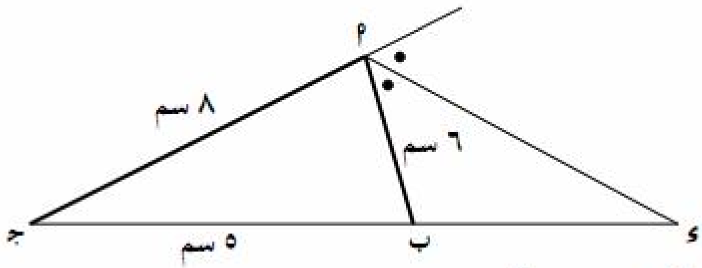
مثال (٢) : أ ب ج Δ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ ج من الخارج ، أ ب = ٦ سم ، أ ج = ٨ سم ، ب ج = ٥ سم . أوجد طول $\overline{\text{ب د}}$.

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ ج من الخارج

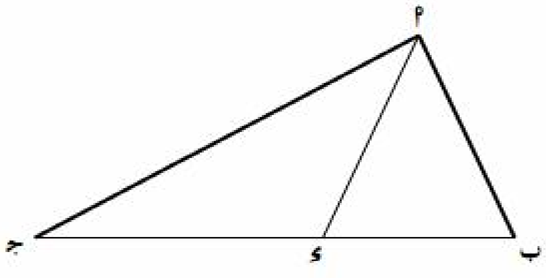
∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}}$

∴ $\frac{٥}{\text{د ج}} = \frac{٦}{٨}$



∴ د ج = $\frac{٥ \times ٨}{٦}$ = $٦\frac{٢}{٣}$ ∴ د ب = $٦\frac{٢}{٣}$ − ٥ = $١\frac{٢}{٣}$ سم .

عكس نظرية (٣)



فى الشكل المقابل :

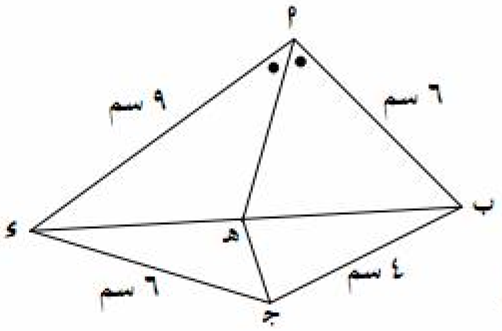
إذا كان $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}}$

فان $\overline{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ د .

مثال (٣) : أ ب ج ء شكل رباعى فيه أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٤ سم ، ج أ = ٦ سم ، أ ء = ٩ سم ،
$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ج فقطع $\overline{\text{ب ج}}$ فى ء . أوجد :

<u>أولاً</u> : النسبة $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$ ثانياً : إثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{ج هـ}}$ ينصف ∠ ب ج ء .

الحل



أولا) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ء}}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

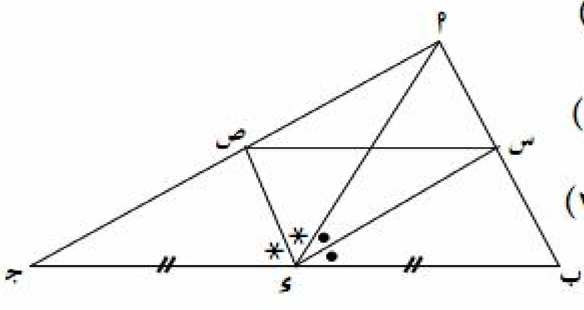
ثانيا) ∵ $\frac{\text{ب ج}}{\text{ج ء}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ج هـ}}$ ينصف ∠ ب ج ء

تدريب : أ ب ج ء شكل رباعى فيه س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ س = ٣ سم ، س ب = ٦ سم ، رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$
فقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى ص فاذا كان ب ج = ١٠ سم ، ج ء = ٥ سم إثبت أن $\overline{\text{ج ص}}$ ينصف ∠ ب ج ء .

مثال (٤) : $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى المثلث أ ب ج يقطع $\overline{\text{ب ج}}$ فى ء رسم $\overleftrightarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ أ ء ب فقطع $\overline{\text{أ ب}}$
فى س ورسم $\overleftrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ أ ء ج فقطع $\overline{\text{أ ج}}$ فى ص . إثبت أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$.

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ أ ء ب ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ ...... (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ أ ء ج ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص ج}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ج}}$ ...... (٢)

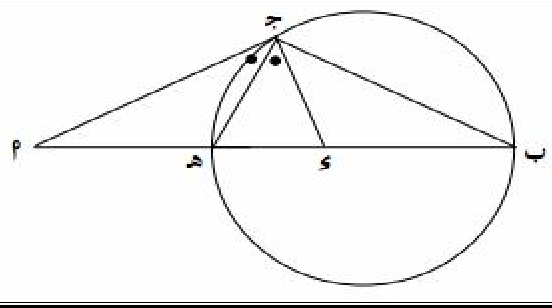
∵ $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى △ أ ب ج ∴ ب ء = ء ج .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

$\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص ج}}$ ∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ج}}$

ملحوظة هامة : المنصفان الداخلى والخارجى لزاوية ما يكونان متعامدان .

مثال (٥) : فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب هـ}}$ قطر فى الدائرة ،

$\overleftrightarrow{\text{ج هـ}}$ ينصف ∠ ء ج أ ،

أثبت أن : $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب أ}}$

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ ء جـ أ

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ أ}}$ .... (١)

، ∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ قطر ∴ ق (∠ ب جـ هـ) = ٩٠ [زاوية مقامة فى نصف دائرة]

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{جـ هـ}}$

ولكن $\overline{\text{جـ هـ}}$ منصف داخلى ∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ منصف خارجى

∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{جـ أ}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب أ}}$

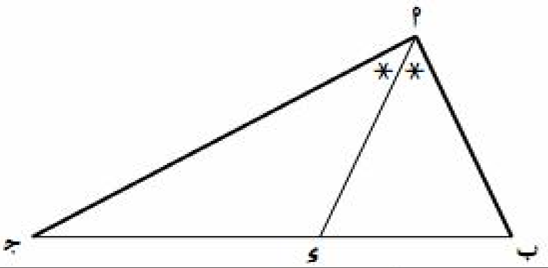
تمارين (١٣) على نظرية ٣

(١) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

أ ب = ٩ سم ، ب ء = ٦ سم ، ء جـ = ٨ سم .

أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$. [١٢ سم]



(٢) فى الشكل السابق : إذا كان أ جـ = ٩ سم ، ب ء = ٤ سم ، ء جـ = ٦ سم . أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$. [٦ سم]

(٣) فى الشكل السابق : إذا كان أ ب = ٩ سم ، أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم . أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$. [٦ سم]

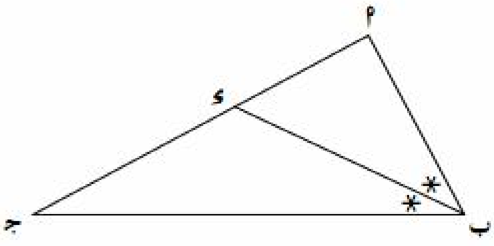
(٤) فى الشكل السابق : إذا كان أ جـ = ٨ سم ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٢١ سم . أوجد طول $\overline{\text{ء جـ}}$. [١٢ سم]

(٥) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

أ ء = ٨ سم ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم

أوجد طول $\overline{\text{ء جـ}}$. [١٢ سم]



(٦) س ص ع ل شكل رباعى فيه : $\overline{\text{س هـ}}$ ينصف ∠ ص س ل ويقطع $\overline{\text{ص ل}}$ فى هـ ، وكان س ص = ٦ سم ،

س ل = ١٠ سم ، ص ع = ٩ سم ، ع ل = ١٥ سم ، أوجد :

(أولاً) النسبة ص هـ : هـ ل (ثانياً) إثبت أن $\overline{\text{ع هـ}}$ ينصف ∠ ص ع ل

(٧) س ص ع ل شكل رباعى فيه : $\overline{\text{ع هـ}}$ ينصف ∠ ص ع ل ويقطع ص ل فى هـ ، وكان س ص = ٦ سم ،

س ل = ٩ سم ، ص ع = ٤ سم ، ع ل = ٦ سم . أوجد :

(أولاً) النسبة ص هـ : هـ ل (ثانياً) إثبت أن $\overline{\text{س هـ}}$ ينصف ∠ ص س ل

(٨) س ص ع ل شكل رباعى فيه : س هـ ينصف ∠ ص س ل ويقطع ص ل فى هـ ، رسم هـ و يقطع ص ع فى و بحيث كان ص و = ٨ سم ، و ع = ٦ سم ، فإذا كان س ص = ٦ سم ، س ل = ٤,٥ سم ، فأوجد :

(أولاً) النسبة ص هـ : هـ ل (ثانياً) إثبت أن : و هـ // ع ل

---

(٩) س ص ع ل شكل رباعى ، أخذت نقطة و ∈ ص ع بحيث كان ص و = ٤ سم ، و ع = ٦ سم ، ثم رسم و هـ // ع ل ، فإذا كان س ص = ٦ سم ، س ل = ٩ سم ، فأوجد :

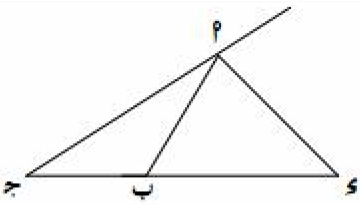
(أولاً) النسبة ص هـ : هـ ل (ثانياً) إثبت أن س هـ ينصف ∠ ص س ل

---

(١٠) فى الشكل المقابل : إذا كان ٢ ٤ ينصف ∠ ب ٢ جـ من الخارج

، ٢ ب = ٦ سم ، ٢ جـ = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم

أوجد طول ب ٤ [١٠ سم]



---

(١١) فى الشكل السابق : إذا كان ٢ ٤ ينصف ∠ ب ٢ جـ من الخارج ، ٢ ب = ٦ سم ، ٢ جـ = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أوجد طول ٤ جـ . [٣٢ سم]

---

(١٢) فى الشكل السابق : إذا كان ٢ ٤ ينصف ∠ ب ٢ جـ من الخارج ، ٢ ب = ١٠ سم ، ب ٤ = ٣٥ سم ، ٢ جـ = ٦ سم ، أوجد طول ب جـ ، جـ ٤ [١٤ سم ، ٢١ سم]

---

(١٣) فى الشكل السابق : إذا كان ب ٤ = ٣٠ سم ، ٢ ب = ٩ سم ، ٢ جـ = ١٢ سم ، ب جـ = ١٠ سم

إثبت أن ٢ ٤ ينصف ∠ ب ٢ جـ من الخارج .

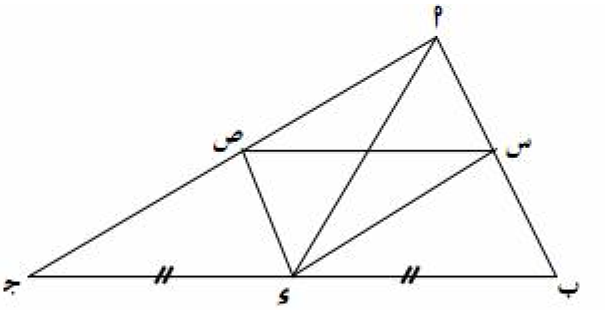
---

(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان ٤ ص ينصف ∠ ٢ ٤ جـ

س ص // ب جـ

إثبت أن : ٤ س ينصف ∠ ٢ ٤ ب



---

(١٥) فى الشكل السابق : إذا كان ٤ س ينصف ∠ ٢ ٤ ب ، ٢ ٤ = ٩ سم ، ب ٤ = ٤ جـ = ٦ سم ، ٢ ص = ٦ سم ، ص جـ = ٤ سم . إثبت أن :

(أولاً) س ص // ب جـ (ثانياً) ٤ ص ينصف ∠ ٢ ٤ جـ .

المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث يكونان ....

المنصف للزاوية الخارجة عند رأس المثلث المتساوي الساقين ....

إذا قسمت نقطة أحد أضلاع مثلث من الداخل إلى جزءين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين كان الشعاع الذي مبدؤه الرأس مارا بنقطة التقسيم هو ....

التشابه

تعريف تطابق مضلعين :

يقال لمضلعين $م_{١}$ ، $م_{٢}$ أنهما متطابقان إذا تحقق الشرطان الآتيان :

(١) قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .   (٢) أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية .

ويقال أن $م_{١} \equiv م_{٢}$ (المضلع $م_{١}$ يطابق المضلع $م_{٢}$)

تعريف تشابه مضلعين :

يقال لمضلعين $م_{١}$ ، $م_{٢}$ أنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان الآتيان :

(١) قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .   (٢) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

ويقال أن $م_{١} \sim م_{٢}$ (المضلع $م_{١}$ يشابه المضلع $م_{٢}$)

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان : $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ س ص ع فإن :

ق($\angle$ أ) = ق($\angle$ س) ،

ق($\angle$ ب) = ق($\angle$ ص) ،

ق($\angle$ جـ) = ق($\angle$ ع)

، $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ع س}}$

(٢) **يجب ترتيب رؤوس المضلعين بترتيب رؤوسهما المتناظرة :**

فإذا كان : ق($\angle$ أ) = ق($\angle$ د)
ق($\angle$ ب) = ق($\angle$ هـ)
ق($\angle$ جـ) = ق($\angle$ و)

فإن :
$\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ د هـ و
$\triangle$ ب أ جـ $\sim$ $\triangle$ هـ د و
$\triangle$ ب جـ أ $\sim$ $\triangle$ هـ و د

(٣) **المضلعان المشابهان لثالث يكونان متشابهان .**

إذا كان $م_{١} \sim م_{٣}$ ، $م_{٢} \sim م_{٣}$ فإن $م_{١} \sim م_{٢}$

(٤) **المضلعان المتطابقان يكونان متشابهان والعكس غير صحيح .**

(٥) **أي مضلعين منتظمين (لهما نفس العدد من الاضلاع) يكونان متشابهان .**

مثل : مثلثين متساويا الأضلاع ، مربعين ، مخمسين ، مسدسين ، ...... وهكذا

مثال (١) : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، فإذا كان : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، س ص = ٦ سم ، س ع = ١٤ سم ، فأوجد طول : $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$.

الحل

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ع س}}$ ∴ $\frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{٥}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{١٤}}$

∴ ص ع = $\frac{\text{٥} \times \text{٦}}{\text{٣}}$ = ١٠ سم ، أ جـ = $\frac{\text{٣} \times \text{١٤}}{\text{٦}}$ = ٧ سم

مثال (٢) : Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و ، وكان : ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، ء هـ = ٦ سم ، أوجد طول كل من : $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$.

الحل

فى Δ أ ب جـ : (أ جـ)^{2} = ٩ + ١٦ = ٢٥ ∴ أ جـ = ٥ سم

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

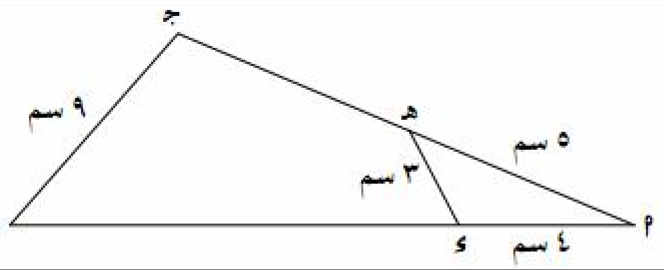
∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}}$ ∴ $\frac{\text{٣}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{٥}}{\text{ء و}}$

∴ هـ و = $\frac{\text{٤} \times \text{٦}}{\text{٣}}$ = ٨ سم ، ء و = $\frac{\text{٥} \times \text{٦}}{\text{٣}}$ = ١٠ سم

مثال (٣) : فى الشكل المقابل :

Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب ،

أوجد طول كل من : $\overline{\text{هـ جـ}}$ ، $\overline{\text{ء ب}}$.



الحل

∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ جـ ب

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{٤}} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{٥}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{٤} \times \text{٩}}{\text{٣}}$ = ١٢سم ∴ هـ جـ = ١٢ − ٥ = ٧ سم

، أ ب = $\frac{\text{٥} \times \text{٩}}{\text{٣}}$ = ١٥سم ∴ ء ب = ١٥ − ٤ = ١١ سم

تشابه المثلثات

مراجعة سريعة لبعض العلاقات هامة :

(١) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :

ⓐ كل زاويتين متناظرتين متساويتان فى القياس .

ⓑ كل زاويتين متبادلتين متساويتان فى القياس .

ⓒ كل زاويتين داخلتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان (مجموع قياسهما = ١٨٠°) .

(٢) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة (قاعدتها القطر) قياسها = ٩٠° .

(٣) الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى دائرة أو تحصر أقواساً متساوية تكون متساوية .

(٤) قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس من الجهة التى لا تقع فيها الزاوية المماسية .

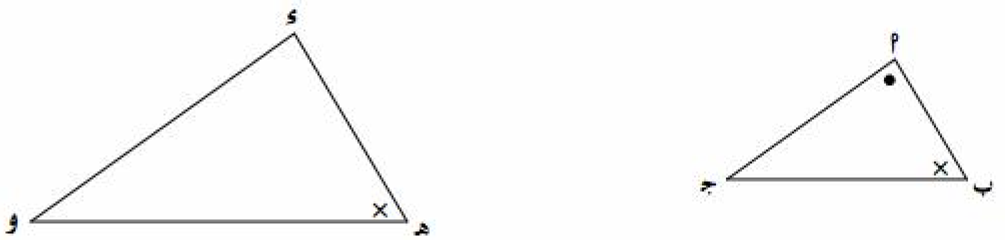
(٥) فى الشكل الرباعى الدائرى :

ⓐ كل زاويتين متقابلتين متكاملتان .

ⓑ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس .

نظرية (٤)

يتشابه المثلثات إذا ساوت قياسات زوايا أحد المثلثان قياسات نظائرها فى المثلث الاخر .



أى أن : إذا كانت ق(∠ أ) = ق(∠ س) ، ق(∠ ب) = ق(∠ ص) ، ق(∠ جـ) = ق(∠ ع)

فان : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

ملحوظة هامة :

يكفى إثبات تساوى زاويتين من مثلث مع زاويتين من المثلث الآخر لإثبات تشابه المثلثين .

مثلث قائم الزاوية قياس إحدى زاويتيه الحادتين ٣٨° ومثلث آخر قائم الزاوية قياس إحدى زاويتيه الحادتين ٥٢° فهل يتشابهان ؟

حالات خاصة :

(١) المثلثان المتساويا الاضلاع يتشابهان دائما ٠

(٢) المثلثان المتساويا الساقين يتشابهان إذا ساوت قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى الاخر ٠

(٣) المثلثان القائما الزاوية يتشابهان إذا ساوت قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى الاخر ٠

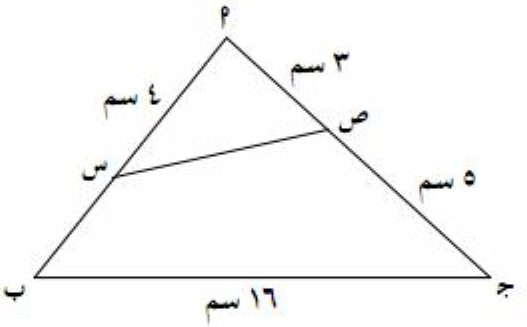
مثال (١) : فى الشكل المقابل :

إذا كان ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ)

أثبت أن : Δ أ جـ ب ~ Δ أ س ص

ثم أوجد طول كل من :

$\overline{\text{س ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$.



الحل

Δ Δ أ س ص ، أ ب جـ فيهما : ∠ أ مشتركة ، ق(∠ أ س ص) = ق(∠ جـ)

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ جـ ب وينتج من التشابه أن :

$\frac{\text{أ س}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{\text{س ص}}{١٦} = \frac{٣}{\text{أ ب}}$

∴ س ص = $\frac{٤ \times ١٦}{٨}$ = ٨ سم ، أ ب = $\frac{٣ \times ٨}{٤}$ = ٦سم ∴ س ب = ٦ − ٤ = ٢ سم .

مثال (٢) : إذا كان قياسى زاويتين فى مثلث ٦٠ ° ، ٨٠ ° وقياسى زاويتين فى مثلث آخر ٦٠ ° ، ٤٠ °
فهل يتشابهان ؟

الحل

نوجد قياس الزاوية الثالثة فى كلاهما

قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الاول = ١٨٠ ° − (٦٠ + ٨٠) = ٤٠ °

قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الثانى = ١٨٠ ° − (٦٠ + ٤٠) = ٨٠ °

زويا المثلث الاول : ٦٠ ° ، ٨٠ ° ، ٤٠ ° وزوايا المثلث الثانى : ٦٠ ° ، ٤٠ ° ، ٨٠ °

∴ المثلثان متشابهان [لتساوى قياسات زواياهما]

تدريب : مثلث قائم الزاوية قياس إحدى الزاويتين الحادتين فيه ٥٥ ° ومثلث آخر قائم الزاوية قياس إحدى الزاويتين الحادتين فيه ٣٥ ° فهل يتشابه المثلثان ؟

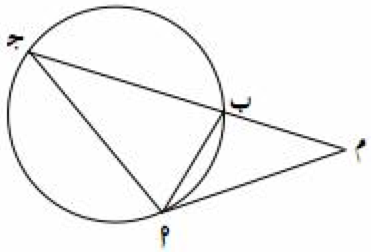
مثال (٣) : فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{م ٢}}$ مماس للدائرة عند ٢ ،

$\overline{\text{م جـ}}$ قاطع لها فى ب ، جـ .

إثبت أن :

(١) Δ ٢ ب م ~ Δ جـ ٢ م (٢) (٢ م)^2 = م ب × م جـ



الحل

∠ م زاوية مشتركة ، ق (∠ ب ٢ م) = ق (∠ جـ) (مماسية ومحيطية)

∴ Δ ٢ ب م ~ Δ جـ ٢ م وينتج من التشابه أن :

∴ $\frac{\text{٢ ب}}{\text{جـ ٢}} = \boxed{\frac{\text{ب م}}{\text{٢ م}} = \frac{\text{٢ م}}{\text{جـ م}}}$ ∴ (٢ م)^2 = م ب × م جـ

مثال (٤) : ٢ ب جـ ى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{ى ٢}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ = { هـ } ، أثبت أن :

Δ هـ ب ٢ ~ Δ هـ ى جـ ، وإذا كان : ى ٢ = ى جـ = ٨ سم ، ٢ هـ =

، هـ جـ = ١٠ سم ، فاوجد كل من : ٢ ب ، ب هـ .

الحل

∵ ق (∠ ٢ ب هـ) = ق (∠ ى) خارجة عن الرباعى الدائرى ، ∠ هـ مشتركة

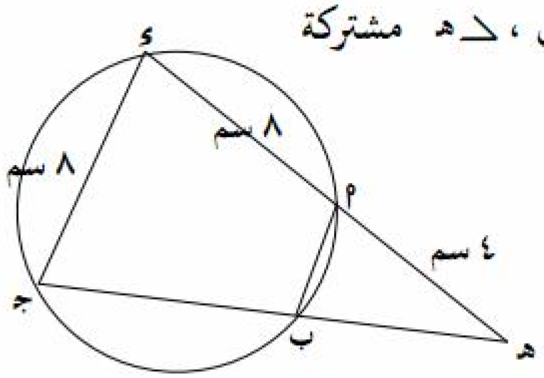
∴ Δ هـ ب ٢ ~ Δ هـ ى جـ

∴ $\frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ ى}} = \frac{\text{ب ٢}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{٢ هـ}}{\text{جـ هـ}}$

∴ $\frac{\text{هـ ب}}{١٢} = \frac{\text{ب ٢}}{٨} = \frac{٤}{١٠}$

∴ ٢ ب = $\frac{٨ \times ٤}{١٠}$ = ٣,٢ سم

، ب هـ = $\frac{١٢ \times ٤}{١٠}$ = ٤,٨ سم



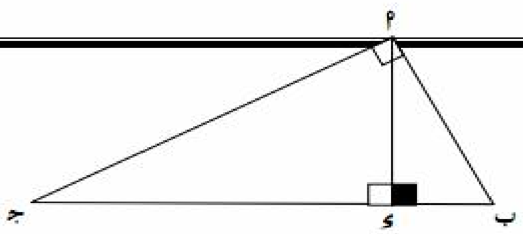
نتيجة هامة :

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر إنقسم المثلث الى مثلثين متشابهين وكلا منهما يشابه المثلث الاصلى .

∵ Δ ٢ ب جـ قائم الزاوية فى ٢ ، $\overline{\text{٢ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ ٢ ب ى ~ Δ جـ ٢ ى ~ Δ جـ ٢ ب ويكون :

(١) (٢ ب)^2 = ب ى × ب جـ

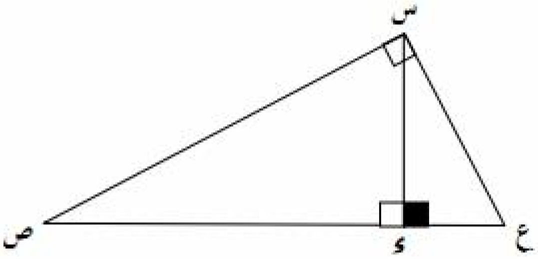


(٢) (أ جـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

(٣) (أ د)^{٢} = د ب × د جـ

(٤) أ د × ب جـ = أ ب × أ جـ

تدريب : من الشكل المقابل أكمل ما يأتى :



(١) (س د)^{٢} = ... × ....

(٢) (س ص)^{٢} = ... × ....

(٣) (س ع)^{٢} = ... × ....

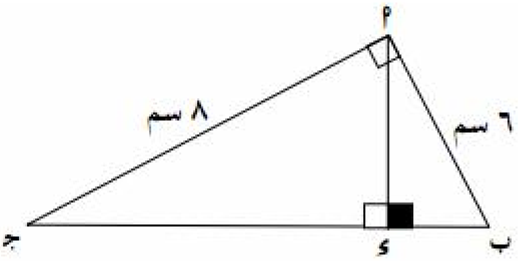
(٤) س د × .... = س ص × ....

(٥) (س ص)^{٢} = (..........)^{٢} + (..........)^{٢} = (..........)^{٢} − (..........)^{٢}

مثال (٤) : فى الشكل المقابل :

أوجد طول كل من :

$\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$



الحل

نوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام نظرية فيثاغورس :

(ب جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠   ∴ ب جـ = ١٠ سم

∵ (أ ب)^{٢} = ب د × ب جـ

∴ ٣٦ = ب د × ١٠   ومنها ب د = ٣,٦ سم

، ∵ (أ جـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

∴ ٦٤ = جـ د × ١٠   ومنها جـ د = ٦,٤ سم

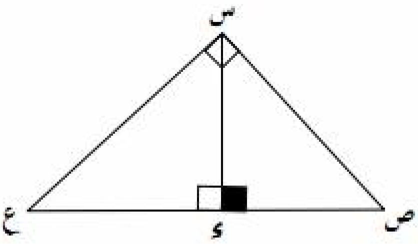
، ∵ أ د × ب جـ = أ ب × أ جـ

∴ أ د × ١٠ = ٦ × ٨   ومنها أ د = ٤,٨ سم

مثال (٥) : فى الشكل المقابل :

إذا كان : س ص = ٦ سم ، ص د = ٤ سم

أوجد طول $\overline{\text{د ع}}$.



الحل

∵ (س ص)^2 = ص ء × ص ع

∴ ٣٦ = ٤ × ص ع ومنها ص ع = ٩ سم ∴ ء ع = ٩ − ٤ = ٥ سم .

تدريب : فى الشكل السابق : إذا كان : ء ص = ٤ سم ، ء ع = ٩ سم ، أوجد طول $\overline{\text{س ء}}$

تدريب : فى الشكل السابق : إذا كان : س ء = ١٠ سم ، ص ء = ٤ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ء ع}}$.

مثال (٦) : فى الشكل السابق : إذا كان : س ص = ٦ سم ، ء ع = ٩ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ص ء}}$.

مثال (٦) : فى الشكل السابق : إذا كان : س ص = ٦ سم ، ء ع = ٩ سم ، أوجد طول $\overline{\text{ص ء}}$.

الحل

∵ (س ص)^2 = ص ء × ص ع

∴ ٣٦ = ص ء (ص ء + ٩)

∴ ٣٦ = (ص ء)^2 + ٩ (ص ء)

∴ (ص ء)^2 + ٩ (ص ء) − ٣٦ = ٠

∴ (ص ء − ٣) (ص ء + ١٢) = ٠

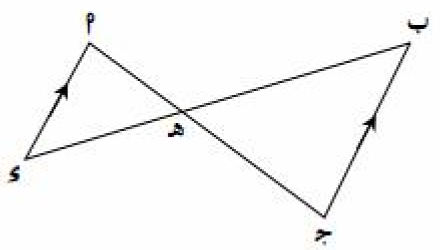
∴ ص ء = ٣ أ، ص ء = − ١٢ (مرفوض) .

تمارين (١٥) على نظرية ٤

(١) قياسا زاويتين فى أحد المثلثات ٧٢° ، ٤٢° ، وقياسا زاويتين فى مثلث آخر ٧٢° ، ٦٦° . فهل يتشابه المثلثان ؟

(٢) مثلث قائم الزاوية فيه قياس إحدى الزاويتين الحادتين ٣٨° ومثلث آخر قائم الزاوية فيه قياس إحدى الزاويتين ٥٢° فهل يتشابه المثلثان ؟

(٣) فى الشكل المقابل :

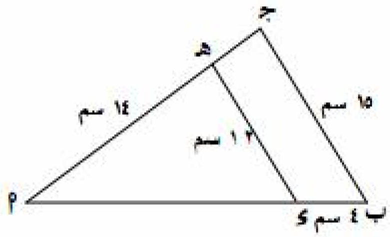


$\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ ، أثبت أن :

① Δ ا هـ ء ~ Δ ب هـ جـ

② ا هـ . هـ جـ = ء هـ . هـ ب

(٤) فى الشكل المقابل :

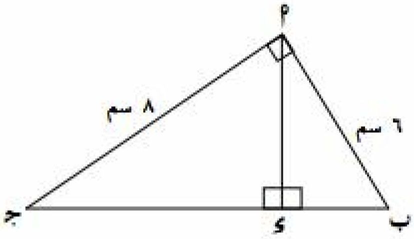


ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ جـ) ، أ هـ = ١٤ سم

، هـ ء = ١٢ سم ، جـ ب = ١٥ سم

، ء ب = ٤ سم ، أوجد : أ جـ ، أ ء ، أ ب .

(٥) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٨ سم . أحسب طول كل من :

$\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$.

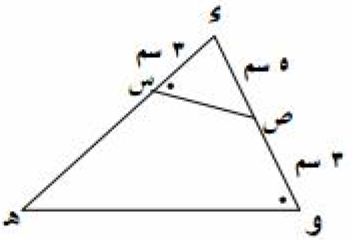
(٦) أ ب جـ مثلث . رسم $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ فى هـ ، ثم رسمت دائرة قطرها $\overline{\text{ب أ}}$ فقطعت $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$

فى س وقطعت $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ص .

① ما نوع الشكل أ س ب ص ؟ ② أثبت أن △ أ ص جـ ~ △ هـ س أ

---

(٧) فى الشكل المقابل :



ءهـو △ فيه : ق (∠ و) = ق (∠ ء س ص)

، ء س = ص و = ٣ سم ، ء ص = ٥ سم

، أوجد طول $\overline{\text{س هـ}}$.

---

(٨) أ ب جـ ء شكل رباعى ، نصفت ∠ ب بمنصف قطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى هـ ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ فقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

فى و ، فإذا كان أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٦ سم ، هـ و = ٢,٤ سم ، أوجد طول $\overline{\text{جـ ء}}$.

---

(٩) أ ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب ء}}$ = { هـ } ، $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = { و } . أثبت أن :

① △ أ ب هـ ~ △ ء جـ هـ

② △ و ء ب ~ △ و أ جـ ، وإستنتج أن : و أ . و ب = و ء . و جـ

---

(١٠) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى ء ،

أثبت أن : △ ء ب أ ~ △ ء جـ ب وأستنتج أن : $(\text{ء ب})^2$ = ء أ . ء جـ

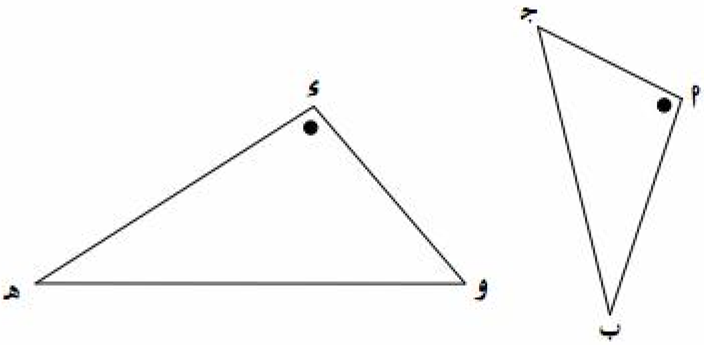
نظرية (٥)

إذا ساوت قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث وتناسبت أطوال الاضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان فانهما يتشابهان .

إذا كان ق(∠ أ) = ق(∠ ء) .... (١)

، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}$ .... (٢)

فإن : Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و

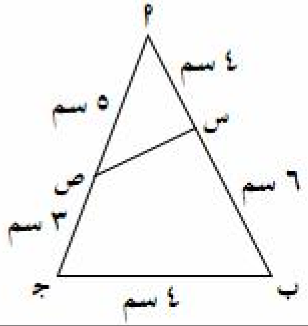


مثال (١) : فى الشكل المقابل :

إثبت أن :

Δ أ س ص ~ Δ أ جـ ب

ثم أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$.



الحل

Δ Δ أ س ص ، أ جـ ب فيهما : ① ∠ أ مشتركة ② $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ص}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٤}{٥}$

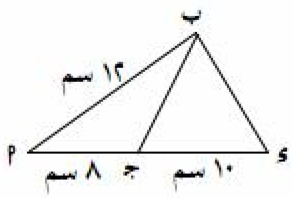
∴ Δ أ س ص ~ Δ أ جـ ب وينتج من التشابه أن :

$\frac{\text{أ س}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{جـ ب}}$ ∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{\text{س ص}}{٤}$ ومنها س ص = ٢ سم .

مثال (٢) : فى الشكل المقابل : إثبت أن:

(١) Δ أ ب جـ ~ Δ أ ء ب

(٢) $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء .



الحل

∠ أ مشتركة ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ ء ب (وهو المطلوب أولاً)

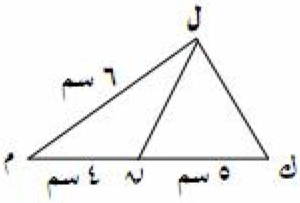
وينتج من التشابه أن : ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ ء) وهما زاوية مماسية وزاوية محيطية

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، ء .

تدريب : فى الشكل المقابل :

إثبت أن :

∆ ل م ن ~ ∆ ك م ل



تمارين (١٦) على نظرية ٥

(١) $\overline{بجـ} \cap \overline{ءهـ}$ = { أ } ، أ ب = ٢,٨ سم ، أ ء = ٢,١ سم ، أ جـ = ٧,٢ سم ، أ هـ = ٩,٦ سم ، ب ء = ٣,٥ سم ،

① أثبت أن : ∆ أ ب ء ~ ∆ أ جـ هـ ② احسب طول $\overline{جـ هـ}$.

③ إذا تقاطع $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ ب}$ فى ك فأثبت أن : ∆ أ ء جـ ~ ∆ أ ب هـ

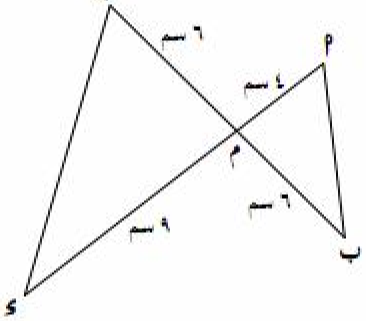
(٢) ∆ س ص ع فيه س ص = ١٦ سم ، ص ع = ٢٤ سم ، ع س = ٢٠ سم ، ء ∈ $\overline{س ع}$ حيث ع ء = ١٥ سم ، هـ ∈ $\overline{ص ع}$ حيث ع هـ = ١٢,٥ سم . أثبت أن : ∆ ء ع هـ ~ ∆ ص ع س وأوجد طول $\overline{ءهـ}$

(٣) فى الشكل المرسوم :

$\overline{أ ء} \cap \overline{ب جـ}$ = { م } أثبت أن :

① ∆ أ م ب ~ ∆ جـ م ء

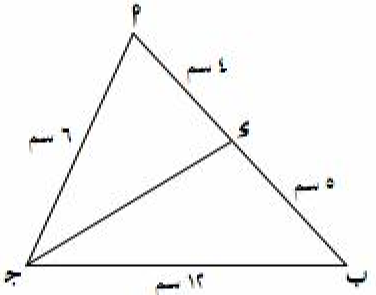
② أ ب ء جـ شكل رباعى دائرى .



(٤) فى الشكل المرسوم :

أثبت أن : ∆ أ ب جـ ~ ∆ أ جـ ء

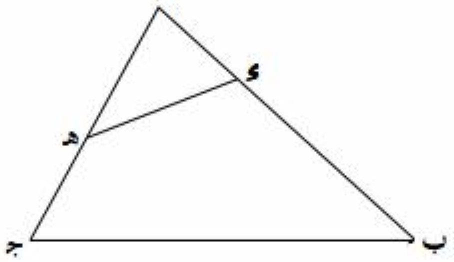
ثم أوجد طول $\overline{ء جـ}$



ثم أوجد طول $\overline{ء جـ}$

(٥) فى الشكل المرسوم : إذا كان : $\frac{أ ء}{أ هـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

أثبت أن : ء ب جـ هـ شكل رباعى دائرى



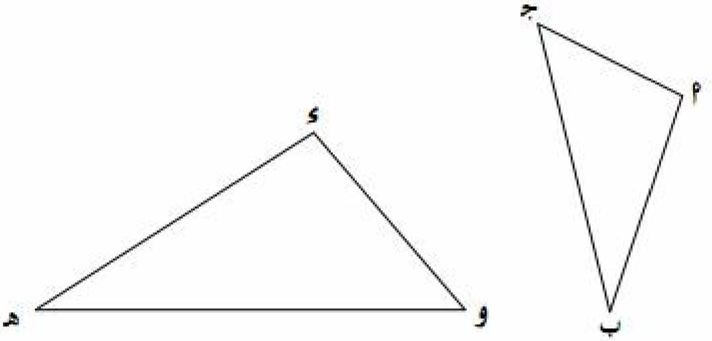
أكمل :- ١- من حالات تشابه مثلثين .... ، ....

٢- يتشابه المثلثان إذا ساوى .... في أحدهما ....

٣- إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر فإنه يقسم المثلث إلى ....

نظرية (٦)

إذا تناسبت أطوال الاضلاع المتناظرة فى مثلثين فانهما يتشابهان



إذا كان :

$\frac{ا ب}{ء هـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{ا جـ}{ء و}$

فإن : △ ا ب جـ ~ △ ء هـ و

مثال (١) : ا ب جـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، وكان : ا ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٢٧ سم ،
جـ ء = ١٢ سم ، ء ا = ٨ سم ، ا جـ = ١٨ سم

(١) إثبت أن : △ ا ب جـ ~ △ ا ء جـ

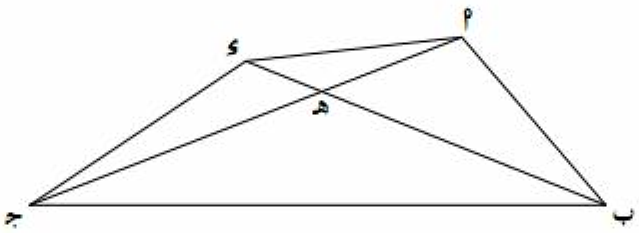
(٢) إثبت أن : $\overline{جـ ا}$ ينصف ∠ ب جـ ء

(٣) أوجد قيمة النسبة : $\frac{ب هـ}{هـ ء}$

الحل

△ ا ب جـ : ا ب = ١٢ سم ، ا جـ = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٧ سم

△ ا ء جـ : ا ء = ٨ سم ، ء جـ = ١٢ سم ، ا جـ = ١٨ سم



$\frac{ا ب}{ا ء} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{ا جـ}{جـ ء} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{ب جـ}{ا جـ} = \frac{٢٧}{١٨} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ا ب}{ا ء} = \frac{ا جـ}{جـ ء} = \frac{ب جـ}{ا جـ}$

∴ △ ا ب جـ ~ △ ا ء جـ

ومن التشابه ينتج أن : ق(∠ ا جـ ب) = ق(∠ ا جـ ء)

∴ $\overline{جـ ا}$ ينصف ∠ ب جـ ء

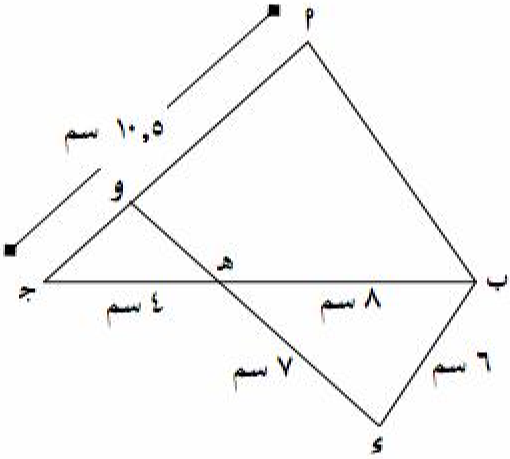
∴ $\frac{ب هـ}{هـ ء} = \frac{ب جـ}{جـ ء} = \frac{٢٧}{١٢} = \frac{٩}{٤}$

مثال (٢) : فى الشكل المقابل :

إثبت أن :

(١) △ ب ء هـ ~ △ ب أ جـ

(٢) △ و هـ جـ متساوى الساقين



الحل

△ ب ء هـ : ب ء = ٦ سم ، ء هـ = ٧ سم ، هـ ب = ٨ سم

△ أ ب جـ : ب أ = ٩ سم ، أ جـ = ١٠,٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم

$\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{هـ ء}}{\text{جـ أ}} = \frac{٧}{١٠,٥} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{جـ أ}}$

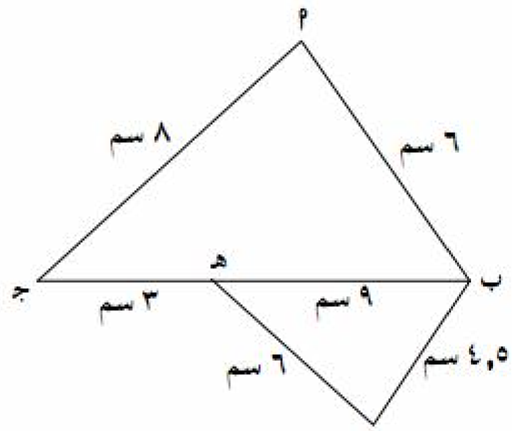
∴ △ ب ء هـ ~ △ ب أ جـ

ومن التشابه ق(∠ ب هـ ء) = ق(جـ) .... (١)

ق(∠ ب هـ ء) = ق(∠ و هـ جـ) .... (٢) بالتقابل بالراس

من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠ و هـ جـ) = ق(∠ جـ)

∴ △ و هـ جـ متساوى الساقين



تدريب : فى الشكل المقابل :

إثبت أن :

(١) △ ب ء هـ ~ △ ب أ جـ .

(٢) $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ء .

أكمل :- (١) أي مضلعين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

(٢) يقال لمضلعين لهما نفس العدد من الأضلاع أنهما متشابهان إذا .... ، ....

(٣) المضلعان المشابهان لثالث ....

(٤) المثلثات المتساوية الأضلاع جميعها ....

تمارين (١٧) على نظرية ٧

(١) فى الشكل المقابل :

أ ب ج Δ : ء ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ج}}$

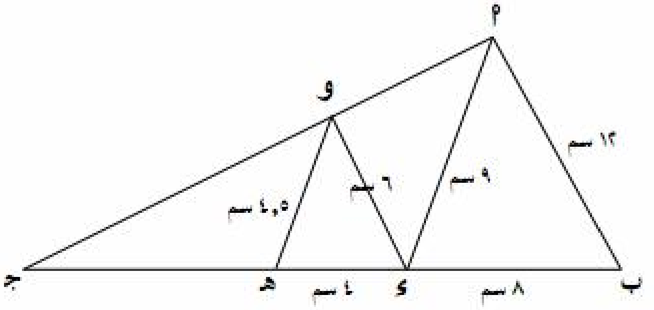
، و ∈ $\overline{\text{أ ج}}$ ، أ ب = ١٢ سم

، ب ء = ٨ سم ، ء و = ٦ سم

، ء هـ = ٤ سم ، هـ و = ٤,٥ سم

أثبت أن : $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$

ثم احسب طول $\overline{\text{ج هـ}}$.



---

(٢) فى الشكل المقابل :

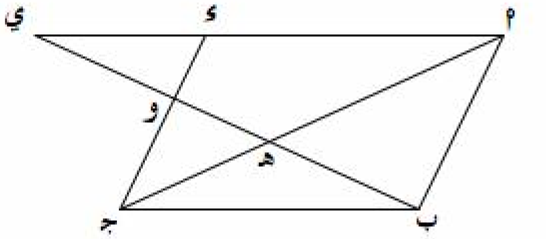
أ ب ج ء متوازى أضلاع ، و ∈ $\overline{\text{ء ج}}$

، رسم $\overleftarrow{\text{ب و}}$ فقطع $\overline{\text{أ ج}}$ فى هـ ،

وقطع $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ فى ي . اثبت أن :

① Δ أ هـ ي ~ Δ ج هـ ب

② (هـ ب)^2 = هـ و . هـ ي



---

(٣) أ ب ج Δ : ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ ، $\overline{\text{ج أ}}$ على الترتيب ،

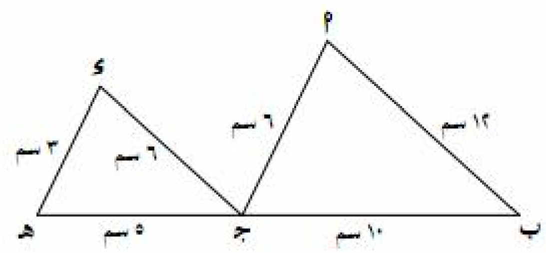
أثبت أن : Δ هـ و ء ~ Δ أ ب ج .

---

(٤) فى الشكل المقابل :

أثبت أن :

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ج ء}}$ ، $\overline{\text{أ ج}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$.



اللهم إني أعوذ بك أن أفتقر في غناك وأضل في هداك وأذل في عزك وأضام في سلطانك أو || [redacted]

اضطهد ، والأمر إليك ، اللهم إنك أن أقول زورا أو أغشى فجورا أو أكون بك مغرورا ||

نظرية

النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما

نتيجة

النسبة بين محيطى مضلعين أو مثلثين متشابهين تساوى النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما

مثال (   ) : مثلثين متشابهين النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ أوجد النسبة بين محيطيهما وكذلك النسبة بين مساحتيهما .

الحل

$\frac{\text{محيط المثلث الأول}}{\text{محيط المثلث الثانى}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{مساحة المثلث الأول}}{\text{مساحة المثلث الثانى}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

مثال (   ) : النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ٩ : ٢٥ أوجد النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين محيطيهما .

الحل

$\because$ $\frac{\text{مساحة المضلع الأصغر}}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = \frac{٩}{٢٥}$ $\therefore$ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين $= \frac{٣}{٥}$

$\therefore$ النسبة بين محيطيهما $= \frac{٣}{٥}$

مثال (   ) : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فاذا كان محيط المضلع الاصغر ٨ سم ، أوجد محيط المضلع الاكبر .

الحل

$\because$ $\frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}} = \frac{٢}{٥}$ $\therefore$ $\frac{٨}{\text{محيط المضلع الأكبر}} = \frac{٢}{٥}$

$\therefore$ محيط المضلع الأكبر = ٤ × ٥ = ٢٠ سم .

تدريب : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين فى مضلعين متشابهين تساوى ٣ : ٥ فاذا كان محيط المضلع الاكبر ٢٠ سم ، أوجد محيط المضلع الأصغر .

مفاتيح الخير : * مفتاح الصلاة : الطهور ، * مفتاح الجنة : التوحيد ، * مفتاح العزة : طاعة الله والرسول

مثال (   ) : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ ومجموع محيطيهما ٢٠ سم ، أوجد محيط كلا منهما .

الحل

$\because$ $\frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}} = \frac{٢}{٣}$

نفرض محيط المضلع الأصغر = ٢ م ، محبط المضلع الأكبر = ٣ م

$\therefore$ ٢ م + ٣ م = ٢٠ $\therefore$ ٥ م = ٢٠ ومنها م = ٤

$\therefore$ محيط المضلع الأصغر = ٢ × ٤ = ٨ سم ، محيط المضلع الأكبر = ٣ × ٤ = ١٢ سم .

مثال (   ) : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ فاذا كان مساحة المضلع الاصغر ٨ سم^{٢} ، أوجد مساحة المضلع الاكبر .

الحل

$\because$ $\frac{\text{مساحة المضلع الأصغر}}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = (\frac{٢}{٥})^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$ $\therefore$ $\frac{٨}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = \frac{٤}{٢٥}$

$\therefore$ مساحة المضلع الأكبر = ٢ × ٢٥ = ٥٠ سم^{٢} .

تدريب : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ٣ : ٥ فاذا كان مساحة المضلع الاكبر ٥٠ سم^{٢} أوجد مساحة المضلع الأصغر.

تدريب : مضلعان متشابهان مساحة أحدهما ١٠٠ سم^{٢} ، وطول ضلعه ٥ سم ، أوجد مساحة مضلع مشابه له حيث طول ضلعه المناظر ٣ سم .

مثال (   ) : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ ومجموع مساحتيهما ٥٢ سم^{٢} ، أوجد مساحة كل منهما .

الحل

$\because$ $\frac{\text{مساحة المضلع الأصغر}}{\text{مساحة المضلع الأكبر}} = (\frac{٢}{٣})^{٢} = \frac{٤}{٩}$

نفرض مساحة المضلع الأصغر = ٤ م ، مساحة المضلع الأكبر = ٩ م

$\therefore$ ٤ م + ٩ م = ٥٢ $\therefore$ ١٣ م = ٥٢ $\therefore$ م = ٤

$\therefore$ مساحة المضلع الأصغر = ٤ × ٤ = ١٦ سم^{٢} ، مساحة المضلع الأكبر = ٩ × ٤ = ٣٦ سم^{٢} .

تدريب : مضلعان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ والفرق بين مساحتيهما ٢٠ سم^{٢} ، أوجد مساحتى كلا منهما .

مثال (٩) : مـ (∆ ٢ ب جـ) = ٩ مـ (∆ ء هـ و) ، فاذا كان ء هـ = ٥ سم أوجد طول $\overline{\text{٢ ب}}$.

الحل

$\because \dfrac{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ب جـ})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{ء هـ و})} = \dfrac{٩}{١} = \dfrac{(\text{٢ ب})^{٢}}{(\text{ء هـ})^{٢}}$ $\quad \therefore \dfrac{(\text{٢ ب})^{٢}}{٢٥} = \dfrac{٩}{١}$

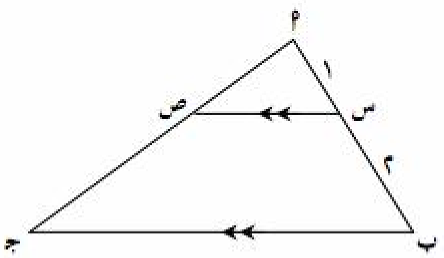
$\therefore (\text{٢ ب})^{٢} = ٩ \times ٢٥ = ٢٢٥$ $\quad \therefore$ ٢ ب = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم .

تدريب : مـ (∆ ٢ ب جـ) = $\frac{١}{٤}$ مـ (∆ ء هـ و) ، فاذا كان ٢ ب = ٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{ء هـ}}$.

مثال ( ) : ٢ ب جـ ∆ أخذت نقطة س ∈ $\overline{\text{٢ ب}}$ بحيث ٢ س : س ب = ١ : ٢ ثم رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

① أوجد : $\dfrac{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ س ص}}{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ ب جـ}}$ ② أوجد : $\dfrac{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ س ص}}{\text{مساحة الشكل س ب جـ ص}}$

الحل



$\because$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ $\quad \therefore$ ∆ ٢ س ص ~ ∆ ٢ ب جـ

$\therefore \dfrac{\text{٢ س}}{\text{٢ ب}} = \dfrac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{٢ ص}}{\text{٢ جـ}} = \dfrac{١}{٣}$

$\dfrac{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ س ص}}{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ ب جـ}} = \left(\dfrac{١}{٣}\right)^{٢} = \dfrac{١}{٩}$

$\therefore \dfrac{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ س ص}}{\text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ ب جـ} - \text{مساحة}\ \Delta\ \text{٢ س ص}} = \dfrac{١}{٩ - ١} = \dfrac{١}{٨}$

(٦) ٢ ب جـ ∆ : ء ∈ $\overline{\text{٢ ب}}$ ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{٢ جـ}}$ فى هـ فإذا كانت نقطة ء منتصف $\overline{\text{٢ ب}}$

فأوجد : $\dfrac{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ء هـ})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ب جـ})}$

(٧) ٢ ب جـ ∆ : ء ∈ $\overline{\text{٢ ب}}$ ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{٢ جـ}}$ فى هـ فإذا كان ء هـ = ٢ سم ، ب جـ = ٥ سم

فأوجد : $\dfrac{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ء هـ})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ب جـ})}$

(٨) ٢ ب جـ ∆ : ء ∈ $\overline{\text{٢ ب}}$ ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{٢ جـ}}$ فى هـ فإذا كان ٢ ء = ٣ ء ب

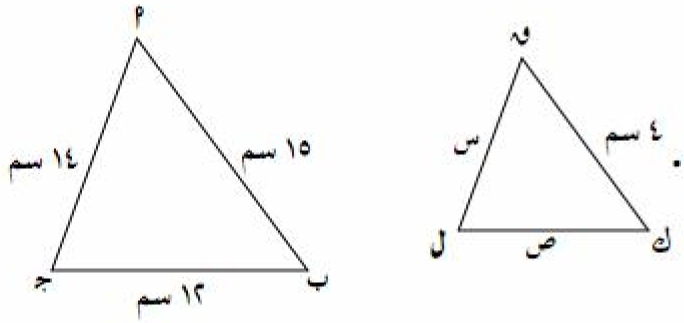
فأوجد : $\dfrac{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ء هـ})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{٢ ب جـ})}$

تمارين (١٤) على تشابه مضلعين

(١) فى الشكل المرسوم :

إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ ن ك ل ، وأطوال

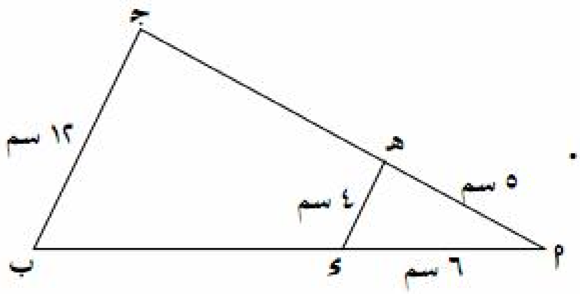
الأضلاع مبينة على الشكل فأوجد : س ، ص .



(٢) فى الشكل المقابل :

Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ . أثبت أن : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ومن الأطوال المبينة على الشكل أوجد : ب ء ، جـ هـ .



(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٢ فما هى النسبة بين مساحتى سطحيهما ؟ وما النسبة بين محيطيهما ؟

(٤) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فما هى النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ؟ وما النسبة بين محيطيهما ؟

(٥) النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٣ : ٤ فإذا كانت مساحة سطح المضلع الأول ٤٥ سم² فأوجد مساحة المضلع الثانى .

(٦) إذا كان طول أحد أضلاع مضلع مساحة سطحه ١٩٦ سم² هو ٤ سم ، فأوجد مساحة سطح مضلع مشابه لهذا المضلع حيث طول الضلع المناظر ٨ سم .

(٧) النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين ٢ : ٣ فإذا كان مجموع مساحتى سطحيهما ١٤٣ سم² ، فأوجد مساحة سطح كل منهما .

أكمل ما يأتي :-

١- مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٩ : ٢٥ فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما..........

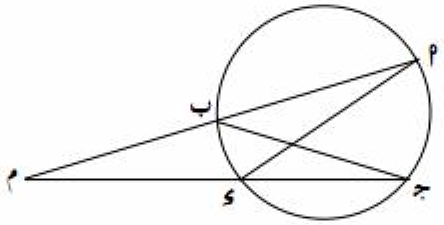
٢- Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، أ ب : س ص = ١ : ٢ ، م Δ أ ب جـ = ٧سم² فإن م Δ س ص ع =...

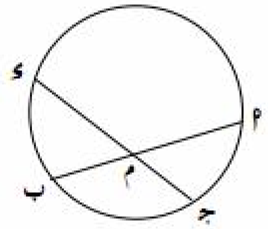
٣- إذا كان أ ب = أ جـ في Δ أ ب جـ فإن المنصف للزاوية ا من الخارج يكون ....

٤- النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي .... بين محيطيهما .

تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين أب ، جد في نقطة م ، فإن : م أ . م ب = م ج . م د





عكس التمرين المشهور

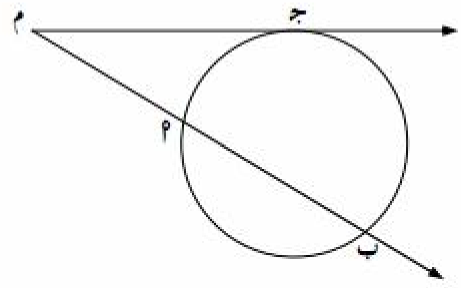
إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين أب ، جد في نقطة م وكان م أ × م ب = م ج × م د

فإن : النقط أ ، ب ، ج ، د تقع على دائرة واحدة .

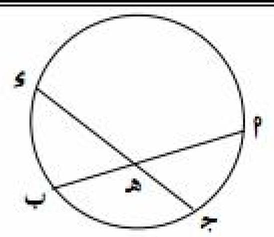
نتيجة

إذا كانت م نقطة خارج دائرة ، م ج مماس للدائرة عند ج ، م أ يقطعها في أ ، ب فإن :

$(\text{م ج})^2$ = م أ × م ب



مثال (١) : في الشكل المقابل :



إذا كان أب ∩ جد = { هـ }

أولاً : أكمل : هـ أ × هـ ب = ... × .....

ثانياً : إذا كان أ هـ = ٤ سم ، هـ ب = ٣ سم ، هـ ج = ٢ سم

احسب طول هـ د .

ثالثاً : إذا كان أ ب = ٣٨ سم ، هـ ب = ٢٠ سم ، هـ ج = ٢٤ سم

احسب طول كل من : هـ أ ، هـ د .

الحل

∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متقاطعان فى هـ

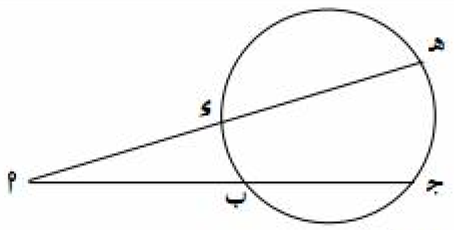
∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء (هـ . ط . أولاً)

∴ ٤ × ٣ = ٢ × هـ ء ∴ هـ ء = ٦ سم (هـ . ط . ثانياً)

، هـ أ = أ ب − هـ ب = ٣٨ − ٢٠ = ١٨ سم

∴ ١٨ × ٢٠ = ٢٤ × هـ ء ∴ هـ ء = ١٥ سم (هـ . ط . ثالثاً)

مثال (٢) : فى الشكل المقابل :



إذا كان $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{هـ ء}$ = { أ }

أولاً : أكمل أ ب × أ جـ = ... × ....

ثانياً : إذا كان أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ ء = ٢ سم فاوجد ء هـ .

ثالثاً : إذا كان أ جـ = ٦ سم ، أ ب = ٢ سم ، أ هـ = ٦ سم فاوجد أ ء .

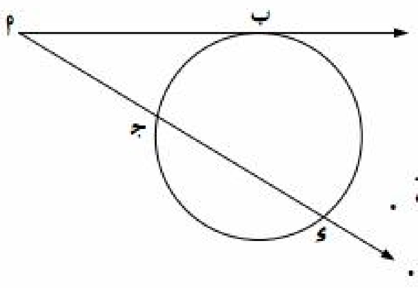
الحل

∵ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ∩ $\overleftrightarrow{هـ ء}$ = { أ } ∴ أ ب × أ جـ = أ ء × أ هـ (هـ . ط . أولاً)

، ∴ ٣ × ٨ = ٢ × أ هـ ومنها أ هـ = ١٢ سم ∴ ء هـ = ١٢ − ٢ = ١٠ سم (هـ . ط . ثانياً)

، ٢ × ٦ = أ ء × ٦ ومنها أ ء = ٢ سم . (هـ . ط . ثالثاً)

مثال (٣) : فى الشكل المقابل :



$\overline{أ ب}$ قطعة مماسة للدائرة ، $\overline{أ ء}$ قطعة قاطعة للدائرة

أولاً : أكمل أ جـ × أ ء = ... × ....

ثانياً : إذا كان أ ء = ٨ سم ، أ جـ = ٢ سم فاحسب طول $\overline{أ ب}$.

ثالثاً : إذا كان أ ب = ٦ سم ، أ ء = ٩ سم فاحسب طول $\overline{أ جـ}$.

رابعاً : إذا كان أ جـ = جـ ء ، أ ب = ٣ $\sqrt{٢}$ فاحسب طول $\overline{أ جـ}$.

الحل

∵ $\overline{أ ب}$ مماسة ، $\overline{أ ء}$ قاطعة ∴ أ جـ × أ ء = (أ ب)^{٢} (هـ . ط . أولاً)

، ∴ ٨ × ٢ = (أ ب)^{٢} ومنها أ ب = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم (هـ . ط . ثانياً)

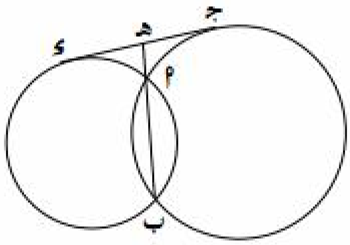
، ∵ أ جـ = جـ ء ∴ أ ء = ٢ أ جـ

∴ أ جـ × ٢ أ جـ = (أ ب)^{٢} ∴ ٢ (أ جـ)^{٢} = (٣ $\sqrt{٢}$)^{٢}

∴ ٢ (أ جـ)^{٢} = ٩ × ٢ ∴ (أ جـ)^{٢} = ٩ ∴ أ جـ = ٣ سم (هـ . ط . ثالثاً)

مثال (٤) : دائرتان متقاطعتان فى ؟ ، ب ، رسم $\overline{جـ ء}$ مماس مشترك لهما ، يمس الأولى فى جـ ، ويمس الثانية فى ء فإذا كان $\overleftrightarrow{؟ ب}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ = { هـ } ، فأثبت أن : هـ منتصف $\overline{جـ ء}$.

الحل



∵ $\overline{جـ هـ}$ مماسة ، $\overline{هـ ب}$ قاطعة للدائرة الأولى

∴ $(هـ جـ)^٢$ = هـ ؟ × هـ ب .... (١)

، ∵ $\overline{هـ ء}$ مماسة ، $\overline{هـ ب}$ قاطعة للدائرة الثانية

∴ $(هـ ء)^٢$ = هـ ؟ × هـ ب .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $(هـ جـ)^٢ = (هـ ء)^٢$

∴ هـ جـ = هـ ء ∴ هـ منتصف $\overline{جـ ء}$.

تمارين (١٨) على التمرين المشهور

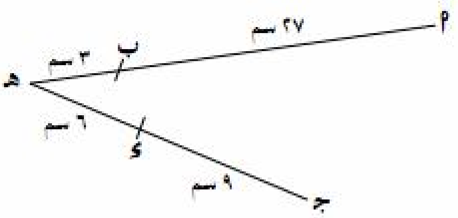
(١) $\overline{؟ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ فإذا كان ؟ هـ = ٥ سم ، ب هـ = ٦ سم ، جـ ء = ١١,٥ سم . فاحسب طول كل من : $\overline{هـ جـ}$ ، $\overline{هـ ء}$.

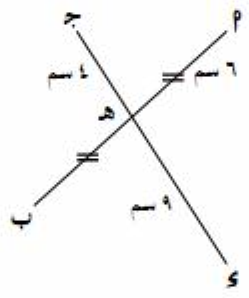
---

(٢) دائرتان متقاطعتان فى ؟ ، ب ، النقطة جـ خارج الدائرتين . رسم $\overline{جـ س}$ يمس الدائرة الأولى فى س ، ورسم $\overline{جـ ص}$ يمس الدائرة الثانية فى ص . أثبت أن جـ س = جـ ص .

---

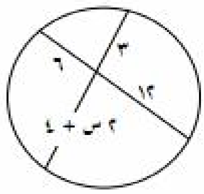
(٣) فى الأشكال الآتية : أثبت أن النقط ؟ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة .

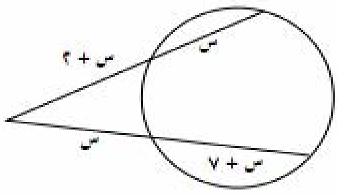




---

(٤) فى الأشكال الآتية أوجد قيمة س :





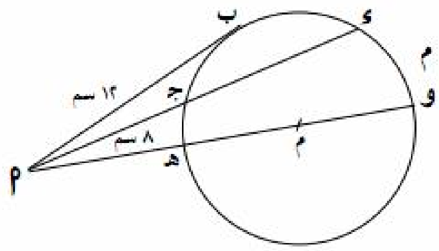
---

(٥) م نقطة خارج دائرة ، رسم منها $\overline{م ٢}$ يمس الدائرة فى ٢ ، ورسم منها القاطع $\overline{م ب ج}$ يقطع الدائرة فى ب ، ج على الترتيب . فإذا كان : م ب = ٤ سم ، ب ج = ٥ سم فاوجد طول $\overline{م ٢}$.

---

(٦) فى الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ٨ سم ، ٢ نقطة خارج الدائرة ، $\overline{٢ ب}$ يمس الدائرة ، $\overleftrightarrow{٢ ج}$ يقطع الدائرة فى ج ، ى ، ه و/ قطر فى الدائرة ، ه ∈ $\overline{٢ و}$. فإذا كان ٢ ج = ٨ سم ، ٢ ب = ١٢ سم ، فأوجد طول كل من $\overline{ج ى}$ ، $\overline{٢ ه}$.



مراجعة الهندسة من الامتحانات العامة

أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان ٢ ب = ٢ ج فى Δ ٢ ب ج فإن المنصف للزاوية ٢ من الخارج يكون = ...

(٢) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٤ ، مجموع مساحتيهما = ٥٠ سم^{٢} فإن مساحتى سطحيهما .... ، ....

(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتيهما ٩ : ١٦ فإن النسبة بين محيطيهما ....

(٤) إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى ....

(٥) مثلثان قائمان زاوية فى أحدهما ١٥/ ٢٠° ، زاوية فى الآخر قياسها ٤٥/ ٦٩° فإن المثلثان ....

(٦) إذا نصفت زاوية رأس المثلث من الداخل أو الخارج قسم هذا المنصف قاعدة المثلث ....

(٧) المضلعان المشابهان لثالث ....

(٨) النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى ....

(٩) المنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث متساوى الساقين ....

(١٠) إذا تناسبت أطوال الأضلاع فى مثلثين كان المثلثان ....

(١١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومساحة سطح المضلع الأصغر ٣٦ سم^{٢} فإن مساحة سطح المضلع الأكبر ....

(١٢) إذا قطع مستقيم ضلعين من مثلث وقسمها إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه ....

(١٣) قياس الزاوية بين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية رأس المثلث ....

(١٤) المنصفان الداخلي والخارجي لأي زاوية في المثلث ....

(١٥) شكلان خماسيان منتظمان طول ضلع الأول ٥ سم ، ومحيط الثاني ٣٠ سم فإن النسبة بين طولي ضلعيهما تساوي ....

(١٦) ٩ نقطة خارج دائرة ، $\overline{٩ب}$ قطعة مماسة للدائرة ، $\overline{٩جـ}$ قاطعة لها في ء ، جـ فإن (٩ ب)^{٢} = ...

(١٧) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون .

(١٨) يتشابه المثلثان إذا كان : ١) .... ٢) ....

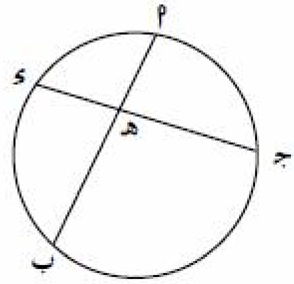
(١٩) في المثلث القائم الزاوية إذا رسم من رأس القائمة عمود على الوتر إنقسم المثلث إلى مثلثين ....

(٢٠) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي .... بين محيطيهما .

(٢١) منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين من الخارج .... القاعدة .

(٢٢) إذا ساوت قياسات زوايا أحد مثلثين .... فإن المثلثين ....

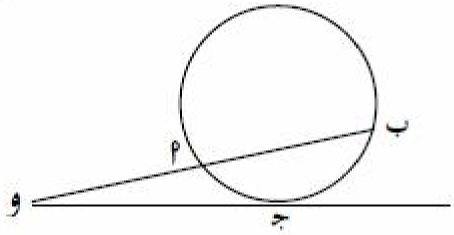
(٢٣) في الشكل المقابل :



٩ هـ = ٢ سم ، جـ هـ = ٣ سم ، هـ ء = ٤ سم

فإن طول $\overline{بهـ}$ = ... سم

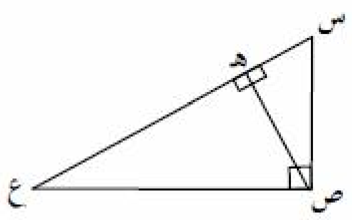
(٢٤) في الشكل المقابل :



و جـ = ٨ سم ، و٩ = ٤ سم

فإن و ب = ... سم

(٢٥) في الشكل المقابل :



ق (∠ س ص ع) = ق (∠ س هـ ص) = ٩٠°

إذا كان س ص × ص ع = ٣ س ع

فإن طول $\overline{صهـ}$ = ... وحدة طول